Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Π.Σ.ΔΑΜΙΑΝΟΣ
Κ.Ι.ΚΟΤΣΩΝΗΣ
Β.Ν.ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Α.Α.ΜΑΝΘΟΓΙΑΝΝΗΣ
Π.Σ.ΜΟΥΡΕΛΑΤΟΣ

2

- θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- λυμένες ασκήσεις
- μισο... λυμένες ασκήσεις

- προτεινόμενες ασκήσεις
- επαναληπτικές ασκήσεις (κατά κεφάλαιο)
- εφαρμογή στην basic (κατά κεφάλαιο)

2100 ασκήσεις αι προβλήματα

εφαρμογή στην Basic

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘΗΝΑ
Μ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗ

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

- Θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- Λυμένες ασκήσεις
- Μισο ... λυμένες ασκήσεις
- Προτεινόμενες ασκήσεις
- Επαναληπτικές ασκήσεις

Εφαρμογή στη Basic

2100 ασκήσεις και προβλήματα

Εκδόσεις " Αθηνά"
Μ. Μαυρογιάννη
Εμμ. Μπενάκη 43 106 81 Αθήνα
Τηλ. 36.07.220 - 36.21.308
fax : 36.38.228

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου -
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου: Μ α θ η μ α τ ι κ ά Β΄ Γυμνασίου
α΄ Εκδοση: Ιανουάριος — Ιούλιος 1993

Μαίρη Μαυρογιάννη
Εμμ. Μπενάκη 43 10681 Αθήνα
τηλ. 3607220 —3621308 Fax: 3638228
Μακέτα εξωφύλλου: Δημήτρης Μουστάκης
Υπεύθυνος Μαθηματικών Εκδόσεων:
Πέτρος Σ. Δαμιανός Λ. Ειρήνης 17 Πεύκη 8069067 - 8065351

ISBN 960-7319-31-1

Η Φωτοστοιχειοθεσία, η σελιδοποίηση και το μοντάζ έγινε στο εργαστήριο γραφικών τεχνών των εκδόσεών μας με το εκδοτικό πρόγραμμα ready, set, go της Apple και με εκτύπωση χαρτοφίλμς σε Laser Master 1000 της Unibrain.

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Β' Γυμνασίου. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας και αποτελεί το δεύτερο της σειράς του Γυμνασίου.

Στόχος του βιβλίου είναι η ενεργοποίηση του μαθητή της τελευταίας δεκαετίας του αιώνα μας, απέναντι στην πρόκληση του 2000.

Σκοπός του να βοηθήσει:

α) το μαθητή στην καλύτερη κατανόηση της ύλης της τάξης του και στη σωστή αντιμετώπιση των θεμάτων στα διαγωνίσματα του Ιανουαρίου και Ιουνίου, καθώς και

β) τους κ.κ. συνάδελφους στην προετοιμασία της διδασκαλίας του μαθήματος.

Η **Δομή** του βιβλίου:

1. Αποτελείται από 9 αυτόνομα κεφάλαια.
2. Κάθε παράγραφος κεφαλαίου αποτελείται από:
   α) Θεωρία (ερωτήσεις - απαντήσεις)
   β) Λυμένες ασκήσεις
   γ) Μισο...λυμένες ασκήσεις
   δ) Προτεινόμενες ασκήσεις
3. Επαναληπτικές ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου.
4. Εφαρμογή στην BASIC.

Αντιμετωπίσαμε με μεγάλο προβληματισμό τη **θεωρία** του παρόντος βιβλίου μέχρι να καταλήξουμε στη συγκεκριμένη μορφή (Ερωτήσεις - Απαντήσεις). Σ' αυτό μας βοήθησε κυρίως μια πανεθνική διαπίστωση: οι νέοι σήμερα έχουν μεγάλη αντιληπτική ικανότητα στην κατανόηση των εννοιών όχι όμως και στη διατύπωσή τους με απλά Ελληνικά. Έχουν δηλαδή δυσκολία στη χρήση της γλώσσας τους. Επομένως δεν μπορούν εύκολα να διατυπώσουν τις έννοιες με σαφήνεια και πληρότητα. Τα αποτελέσματα άλλωστε των γραπτών εξετάσεων που διενεργήθηκαν - σύμφωνα με τις νέες αλλαγές που ίσχυσαν στο πρόγραμμα των γυμνασίων - αποδεικνύουν την παραπάνω διαπίστωση. Φυσικά η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι κυρίως ευθύνη των φιλολόγων, όμως συμβολή στο πρόβλημα μπορεί να προσφέρει - κατά τη γνώμη μας - οποιοσδήποτε χώρος επικοινωνεί με το μαθητή (βιβλία, εφημερίδες, ραδιόφωνο, τηλεόραση κ.ά.).

Οι **λυμένες** ασκήσεις έχουν γραφεί με απλή και κατανοητή γλώσσα, ώστε ο μαθητής να έχει αρκετά παραδείγματα για να αναπτύξει τη δική του κριτική ικανότητα.

Οι **μισο...λυμένες** ασκήσεις έχουν σκοπό να κεντρίσουν το ενδιαφέρον του μαθητή ώστε να συνεχίσει μόνος του τη λύση τους, μαζί δε με τις **προτεινόμενες** άλυτες ασκήσεις ολοκληρώνουν το αντικείμενο κάθε παραγράφου προσφέροντας μια αρκετά μεγάλη ποικιλία και για τους μαθητές που επιμένουν αλλά και για τους κ.κ. συναδέλφους που θέλουν η τάξη τους να ασχοληθεί περισσότερο.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου και μετά από τις **επαναληπτικές** ασκήσεις βρίσκονται οι σελίδες της **πληροφορικής**. Οι εφαρμογές έγιναν στη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC.**

Σκοπός μας **δεν** ήταν η εκμάθηση της γλώσσας μέσα από τις σελίδες αυτού του βιβλίου. Θέλαμε όμως να συνδέσουμε την πληροφορική με το σχολείο και να πείσουμε το μαθητή να δει το μηχάνημα που έχει στο γραφείο του, όχι μόνο ως μέσο διασκέδασης αλλά και ως εργαλείο στη δουλειά του. Για το λόγο αυτό ξεκινήσαμε την περιήγηση στην πληροφορική, θεωρώντας ότι ο μαθητής **δεν** έχει άλλη σχετική γνώση. Έτσι, αν ακολουθήσει σωστά τις οδηγίες μας, θα μπορέσει να αποκτήσει μια κάποια αρχική εμπειρία.

Τα παραδείγματα που αναπτύσσονται φροντίσαμε να τα αντλήσουμε - όσο ήταν δυνατόν - από την ύλη του κάθε κεφαλαίου ώστε να γίνει αντιληπτό ότι η πληροφορική δεν είναι «αλλοιώτικη» αλλά έρχεται να βοηθήσει μεταξύ των άλλων και τα μαθήματα του σύγχρονου νέου.

Αν καταφέραμε να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των αναγνωστών μας, τότε θα πρέπει να καταφύγουν σε κάποιο εξειδικευμένο βιβλίο για την εκμάθηση της γλώσσας BASIC ή οποιασδήποτε άλλης επιθυμούν.

Πιστεύουμε ότι με το βιβλίο αυτό συμβάλλουμε αναλογικά στην ανύψωση της εκπαιδευτικής στάθμης των μαθητών. Θα ήταν τιμή μας αν οι αναγνώστες επικοινωνούσαν μαζί μας για οποιαδήποτε παρατήρηση που τυχόν έχουν, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη παρουσίαση στις επόμενες εκδόσεις.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Οι ρητοί αριθμοί

1.1 Επανάληψη βασικών εννοιών

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Ποιοι είναι οι ρητοί αριθμοί;

1. Οι ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\kappa}{\lambda}$ ή στη μορφή $-\frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, λ φυσικούς αριθμούς και λ διάφορο του μηδενός ($\lambda \neq 0$).

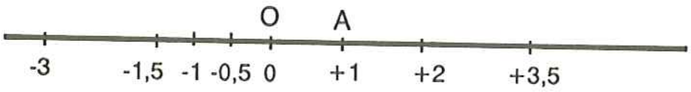
π.χ. ο αριθμός $+5 = \frac{5}{1}$ ή $0{,}35 = \frac{35}{100}$ ή $-56{,}7 = -\frac{567}{10}$ ή $0 = \frac{0}{1}$ κ.λπ.

2. Τι είναι ο άξονας των ρητών αριθμών;

2. Άξονας των ρητών αριθμών είναι μία ευθεία της οποίας τα σημεία παριστάνουν ρητούς αριθμούς. Το σημείο Ο που παριστάνει τον αριθμό (0) ονομάζεται **αρχή του άξονα**.

Οι αριθμοί που βρίσκονται αριστερά του 0 στον άξονα είναι οι **αρνητικοί** ρητοί, ενώ οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιά του 0 στον άξονα είναι οι **θετικοί** ρητοί αριθμοί.

π.χ. οι αριθμοί 0, 1, -1, -3, +3,5, -0,5, +2, -1,5 παριστάνουν τα σημεία:



3. Τι λέγεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού α;

3. Απόλυτη τιμή ενός αριθμού α λέγεται η απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α πάνω στον άξονα, από την αρχή Ο του άξονα. Την απόλυτη τιμή τη συμβολίζουμε με | **α** | και την υπολογίζουμε από τον αριθμό, παραλείποντας το πρόσημό του.

π.χ. $|-3| = 3$, $|+5| = 5$, $|-0{,}3| = 0{,}3$, $\left|+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ κ.λπ.

> **4.** Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

4. Δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι** όταν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Π.χ. οι αριθμοί 4 και - 4, $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$ είναι αντίθετοι.

> **5.** Με ποιο κριτήριο μπορούμε να συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς;

5. Όταν μας ζητείται να συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς, εφαρμόζουμε το παρακάτω κριτήριο:
«Από δύο αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα πάνω στον άξονα».

Έτσι με τη βοήθεια του άξονα διαπιστώνουμε τα εξής:

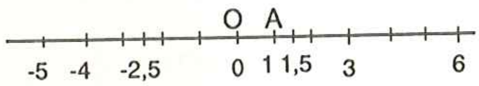
α) Όταν συγκρίνουμε έναν αρνητικό και ένα θετικό αριθμό, μεγαλύτερος είναι πάντα ο θετικός. π.χ. $-3 < +7$, $+2 > -1$.
β) Όταν συγκρίνουμε έναν αρνητικό με το μηδέν, τότε αυτός είναι πάντα μικρότερος από το μηδέν. π.χ. $-13 < 0$.
γ) Όταν συγκρίνουμε ένα θετικό με το μηδέν, τότε αυτός είναι πάντα μεγαλύτερος από το μηδέν. π.χ. $+13 > 0$.
δ) Όταν συγκρίνουμε δύο θετικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. π.χ. $+13 > +12$.
ε) Όταν συγκρίνουμε δύο αρνητικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή. π.χ. $-3 < -2$, $-3{,}2 > -4$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε σ' έναν άξονα τους αριθμούς:
+3, -4, +6, -5, +1,5, -2,5.

Λύση

Πάνω σε μια ευθεία παίρνουμε το σημείο Ο και δεξιά του ένα σημείο Α ώστε το τμήμα ΟΑ να είναι ίσο με τη μονάδα. Στη συνέχεια τοποθετούμε τους υπόλοιπους αριθμούς όπως φαίνεται στο σχήμα.



2. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών:

$-7,\ +5{,}25,\ -18,\ +\frac{3}{4}$

Λύση

Η απόσταση του -7 από το 0 είναι 7 μονάδες. Άρα $|-7| = 7$. Ομοίως:

$|+5{,}25| = 5{,}25,\quad |-18| = 18,\quad \left|+\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

3. Να βρείτε τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών:

$-103,\ +57{,}6,\ -39,\ -\frac{44}{37},\ +1037,\ -6{,}31$

Λύση

Οι αντίθετοι αριθμοί των:

$-103,\ +57{,}6,\ -39,\ -\frac{44}{37},\ +1037,\ -6{,}31$

είναι οι αριθμοί:

$+103,\ -57{,}6,\ +39,\ +\frac{44}{37},\ -1037,\ +6{,}31$

αντίστοιχα. Τους βρίσκουμε αν αλλάξουμε το πρόσημο των δοσμένων αριθμών.

4. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:
+5 και -7 , 0 και -7, +6 και 0, +35 και +101, -1005 και +1, - 8 και - 8,5.

Λύση

Ο αριθμός +5 είναι μεγαλύτερος του -7, γιατί κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.
$0 > -7$, γιατί το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό.
$+6 > 0$, γιατί το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό.
$+35 < +101$, γιατί από δύο θετικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
$-1005 < 1$ και
$-8 > -8{,}5$, γιατί από δύο αρνητικούς μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

5. Να βρείτε ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή 7, 9, $\frac{13}{2}$.

Λύση

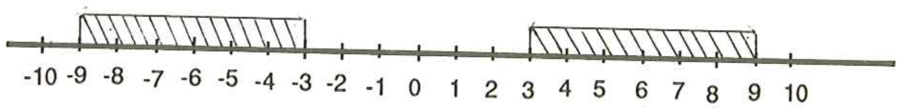
Οι αριθμοί που απέχουν από το 0 7 μονάδες είναι οι αριθμοί +7, -7. Άρα οι αριθμοί που έχουν απόλυτη τιμή 7 είναι οι αριθμοί +7 και -7. Ομοίως οι αριθμοί +9 και -9 έχουν απόλυτη τιμή 9.

Και οι αριθμοί $+\frac{13}{2}$ και $-\frac{13}{2}$ έχουν απόλυτη τιμή $\frac{13}{2}$.

6. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση: $2 < |x| < 10$.

Λύση

Οι ζητούμενοι ακέραιοι αριθμοί είναι αυτοί που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη του 10 και μεγαλύτερη του 2.
Με τη βοήθεια του άξονα διαπιστώνουμε ότι οι ακέραιοι αυτοί είναι οι:
-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς: -1,7, +1, +2,3, -0,4, -2,1, +4, +3,6 πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών.

Λύση

Επιλέγουμε, δεξιά του 0, ένα σημείο Α που θα παριστάνει τον αριθμό 1. Μετά τοποθετούμε τους αριθμούς όπως παρακάτω.

2. Να βρείτε τις απόλυτες τιμές και τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών:

$- 10, - 75, + 37, - \frac{5}{6}, + \frac{3}{7}, + 102$

Λύση

Βρίσκουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού παραλείποντας το πρόσημό του. Άρα: $|-10| = 10$.
Βρίσκουμε τον αντίθετο ενός αριθμού αν αλλάξουμε το πρόσημό του. Έτσι ο αντίθετος του -10 είναι ο +10...

3. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς: α) +7,38 και - 8,1 , β) -7,6 και - 3 , γ) - 6,7 και +3,1 δ) +3 και +2,9, ε) -2 και -1.

Λύση

α) $7,38 > - 8,1$ β) $- 7,6 < - 3$ ...

4. Να βρείτε τους ακέραιους που ικανοποιούν τις παρακάτω ανισώσεις: α) $|x| < -1$, β) $|x| > 3$, γ) $|x| < 2$, δ) $|x| \leq 2$, ε) $|x| \geq 100$

Λύση

α) Η σχέση $|x| < -1$ δηλώνει τους αριθμούς που έχουν από το 0 απόσταση -1. Επειδή όμως αρνητική απόσταση δεν υπάρχει, η σχέση $|x| < -1$ δεν έχει νόημα.
β) Η σχέση $|x| > 3$ δηλώνει τους αριθμούς που έχουν απόσταση από το 0 μεγαλύτερη από το 3. Είναι οι ακέραιοι -4, -5, -6, ... και οι ακέραιοι 4, 5, 6, ...

5. Δίνεται η σχέση: $|x+7| = 13$. Να βρεθεί ο αριθμός x, αν ο x+7 είναι θετικός.

Λύση

Επειδή x +7 θετικός τότε η απόλυτη τιμή του θα είναι ο ίδιος ο αριθμός. Δηλαδή $|x+7| = x+7$ οπότε: ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε σε έναν άξονα τους ρητούς αριθμούς:

$- 2, - 3, - 7,5, + \frac{5}{2}, + \frac{3}{2}, - \frac{1}{2}, + 4$

2. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών: + 100, - 56, + 837, - 10,1,

$+ 19,3, - 66, - \frac{4}{3}$

3. Να βρείτε τους αντίθετους των αριθμών: - 7, - 8, + 35, + 38, - 19,5, $-\frac{10}{3}$, $+\frac{19}{2}$, $-\frac{25}{4}$

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x	|x|	- x	- (- x)
- 1 / 2			
+ 6			
- 3			
- 10,5			
+ 8 / 3			
+ 0,01			

5. Να συγκριθούν οι αριθμοί: - 0,3, - 1,7, + 3,1, - 0,01, - 1,65, - 0,2 και να τοποθετηθούν στη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.

6. Ποιους ρητούς αριθμούς παριστάνουν τα x, y, z, ω εάν:
$|x| = 3$, $|y| = 0,1$, $|z| = 0$,

$|\omega| = \left|-\frac{1}{2}\right|$

7. Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα < , > και =

- 3	<	7	- 2		- 4/2
+ 6		+ 13/2	- 6		- 6,1
+ 15/5		+ 3	+ 16/2		+ 4
- 4,4		- 4,5	- 0,1		+ 1000

1. 2 Πρόσθεση ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς προσθέτουμε ομόσημους ρητούς αριθμούς;

2. Πώς προσθέτουμε ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

Απαντήσεις

1. Για να προσθέσουμε **ομόσημους** (με ίδιο πρόσημο) ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε στο άθροισμα το κοινό τους πρόσημο.

π.χ. $(+3) + (+5) = +(3+5) = +8$

$(-3) + (-5) = -(3+5) = -8$.

2. Για να προσθέσουμε **ετερόσημους** (με διαφορετικό πρόσημο) ρητούς αριθμούς, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α) Βρίσκουμε τις απόλυτες τιμές τους.

β) Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη.

γ) Στη διαφορά βάζουμε ως πρόσημο το πρόσημο που είχε ο αριθμός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

π.χ. $(+3) + (-5) = -(5-3) = -2$, $(-3) + (+5) = +(5-3) = +2$

3. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα αντίθετων αριθμών;

3. Όταν προσθέτουμε **αντίθετους** αριθμούς το άθροισμά τους είναι **μηδέν**. Δηλαδή:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

π.χ. $(+7) + (-7) = 0$.

4. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν;

4. Όταν προσθέτουμε σε ένα ρητό αριθμό το μηδέν το άθροισμά τους είναι ο ίδιος ρητός αριθμός. Δηλαδή:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

5. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης ρητών αριθμών;

5. Στην πρόσθεση ρητών αριθμών ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) Αντιμεταθετική ιδιότητα.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Δηλαδή, όταν προσθέτουμε δύο ρητούς αριθμούς, το άθροισμα είναι το ίδιο με όποια σειρά και αν τους προσθέσουμε.

β) Προσεταιριστική ιδιότητα

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Δηλαδή, το άθροισμα τριών ρητών, είναι ανεξάρτητο από τη σειρά με την οποία παίρνουμε τους προσθετέους.

1. 3 Άθροισμα πολλών προσθετέων

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Με ποιους τρόπους μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερους από δύο αριθμούς;

1. Όταν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερους από δύο ρητούς ακολουθούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους.

1ος τροπος:

Βρίσκουμε το άθροισμα των δύο πρώτων και σ' αυτό προσθέτουμε τον τρίτο. Στη συνέχεια στο νέο άθροισμα προσθέτουμε τον τέταρτο κ.ο.κ.

π.χ.

$(+3)+(+4)+(+7)+(-8)+(-3)=$
$(+7)+(+7)+(-8)+(-3)=$
$(+14)+(-8)+(-3)=$
$(+6)+(-3)=$
$=+3.$

2ος τρόπος:

Όπως μας επιτρέπει η προσεταιριστική ιδιότητα προσθέτουμε χωριστά τους θετικούς και χωριστά τους αρνητικούς αριθμούς. Έτσι καταλήγουμε σε πρόσθεση δύο ετερόσημων αριθμών.

π.χ.

$(+3)+(+4)+(+7)+(-8)+(-3)=[(+3)+(+4)+(+7)]+[(-8)+(-3)]=$
$=(+14)+(-11)=+3.$

2. Είναι απαραίτητο να τοποθετούμε τους προσθετέους μέσα σε παρένθεση στη γραφή ενός αθροίσματος;

2. Κατά τη γραφή ενός αθροίσματος δύο ή περισσοτέρων ρητών δεν είναι απαραίτητο να τους τοποθετούμε μέσα σε παρένθεση. Μπορούμε να παραλείψουμε το σύμβολο της πρόσθεσης και τις παρενθέσεις και να γράψουμε τους προσθετέους τον ένα δίπλα στον άλλο με το πρόσημό τους.

π.χ.

$(+3)+(+4)+(+7)+(-8)+(-3)=$
$=\ 3+4+7-8-3$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $(-3)+(+6)$

β) $(+\frac{2}{3})+(-\frac{6}{5})$

γ) $(+7{,}8)+(-6{,}3)$

δ) $(-13{,}7)+(-19{,}6)$

ε) $(+\frac{1}{2})+(+\frac{4}{3})$

Λύση

α) $(-3)+(+6)=+(6-3)=+3$

β) $(+\frac{2}{3})+(-\frac{6}{5})=(+\frac{2\cdot5}{3\cdot5})+(-\frac{6\cdot3}{5\cdot3})=$
$=(+\frac{10}{15})+(-\frac{18}{15})=-(\frac{18}{15}-\frac{10}{15})=-\frac{8}{15}$

γ) $(+7{,}8)+(-6{,}3)=+(7{,}8-6{,}3)=$
$=+1{,}5$

δ) $(-13{,}7)+(-19{,}6)=-(13{,}7+19{,}6)=$
$=-33{,}3$

ε) $(+\frac{1}{2})+(+\frac{4}{3})=(+\frac{1\cdot3}{2\cdot3})+(+\frac{4\cdot2}{3\cdot2})=$
$=(+\frac{3}{6})+(+\frac{8}{6})=+(\frac{3}{6}+\frac{8}{6})=+\frac{11}{6}$

2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $(+3) + (-4) + (+6)$

β) $(+7{,}8) + (-6{,}3) + (-3{,}9)$

γ) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{4}{3}) + (+\frac{7}{6})$

Λύση

α) $(+3) + (-4) + (+6) =$
$= [(+3) + (+6)] + (-4) =$
$= (+9) + (-4) = +5$

β) $(+7{,}8) + (-6{,}3) + (-3{,}9) =$
$= (+7{,}8) + [(-6{,}3) + (-3{,}9)] =$
$= (+7{,}8) + (-10{,}2) = -2{,}4$

γ) $(-\overset{3}{\frac{1}{2}}) + (-\overset{2}{\frac{4}{3}}) + (+\overset{1}{\frac{7}{6}}) =$

$= (-\frac{3}{6}) + (-\frac{8}{6}) + (+\frac{7}{6}) =$

$= [(-\frac{3}{6}) + (-\frac{8}{6})] + (+\frac{7}{6}) = (-\frac{11}{6}) + (+\frac{7}{6}) =$

$= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

3. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $(+\frac{7}{8}) + (-\frac{6}{5}) + (-\frac{11}{2}) + (+\frac{5}{4})$

β) $(-11) + (-13) + (+17) + (-1) + (+4)$

γ) $(-0{,}78) + (+1{,}44) + (-19{,}78) +$
$+ (+8{,}56)$

δ) $(-13) + (+19) + (-24) + (+7) + (-85)$

ε) $(-6{,}37) + (-3{,}5) + (+7{,}1) +$
$+ (-3{,}84)$

Λύση

α) $(+\overset{5}{\frac{7}{8}}) + (-\overset{8}{\frac{6}{5}}) + (-\overset{20}{\frac{11}{2}}) + (+\overset{10}{\frac{5}{4}}) =$

$= (+\frac{35}{40}) + (-\frac{48}{40}) + (-\frac{220}{40}) + (+\frac{50}{40}) =$

$= [(+\frac{35}{40}) + (+\frac{50}{40})] + [(-\frac{48}{40}) + (-\frac{220}{40})] =$

$= (+\frac{85}{40}) + (-\frac{268}{40}) = -\frac{183}{40}$

β) $(-11) + (-13) + (+17) + (-1) + (+4) =$
$= [(+17) + (+4)] + [(-11) + (-13) +$
$+ (-1)] =$
$= (+21) + (-25) = -4$

γ) $(-0{,}78) + (+1{,}44) + (-19{,}78) +$
$+ (+8{,}56) =$
$= [(+1{,}44) + (+8{,}56)] + [(-0{,}78) +$
$+ (-19{,}78)] =$
$= (+10) + (-20{,}56) = -10{,}56$

δ) $(-13) + (+19) + (-24) + (+7) +$
$+ (-85) =$
$= [(+19) + (+7)] + [(-13) + (-24) +$
$+ (-85)] =$
$= (+26) + (-122) = -96$

ε) $(-6{,}37) + (-3{,}5) + (+7{,}1) + (-3{,}84) =$
$= (+7{,}1) + [(-6{,}37) + (-3{,}5) + (-3{,}84)] =$
$= (+7{,}1) + (-13{,}71) = -6{,}61$

4. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $+7{,}8 - 6{,}3 + 7{,}65 - 6{,}49 - 9{,}38 +$
$+ 4{,}7$

β) $-20 + 21 - 32 - 47 + 105 - 6$

γ) $\frac{8}{3} - \frac{6}{4} + \frac{5}{2} - \frac{14}{3} - \frac{8}{6}$

Λύση

α) $+7{,}8 - 6{,}3 + 7{,}65 - 6{,}49 - 9{,}38 + 4{,}7$
$= (+7{,}8 + 7{,}65 + 4{,}7) + (-6{,}3 - 6{,}49 -$
$- 9{,}38) =$
$= (+20{,}15) + (-22{,}17) = -2{,}02$

β) $-20 + 21 - 32 - 47 + 105 - 6 =$
$= (+21 + 105) + (-20 - 32 - 47 - 6) =$
$= 126 - 105 = 21$

γ) $\overset{4}{\frac{8}{3}} - \overset{3}{\frac{6}{4}} + \overset{6}{\frac{5}{2}} - \overset{4}{\frac{14}{3}} - \overset{2}{\frac{8}{6}} =$

$= \frac{32}{12} - \frac{18}{12} + \frac{30}{12} - \frac{56}{12} - \frac{16}{12} =$

$= (\frac{32}{12} + \frac{30}{12}) + (-\frac{18}{12} - \frac{56}{12} - \frac{16}{12}) =$

$= \frac{62}{12} - \frac{90}{12} = -\frac{28}{12} = -\frac{7}{3}$

5. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τους ρητούς α, β, αν ισχύει:
α) α+ β = 0 , β) α+ β = β

Λύση

α) Δύο ρητοί που έχουν άθροισμα 0 είναι αντίθετοι, δηλαδή α = - β ή είναι ίσοι με μηδέν δηλαδή α = β = 0.
β) Για να ισχύει α + β = β πρέπει: α = 0.

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. Τι παρατηρείτε;

α	β	| α + β |	| α |	| β |	| α |+ |β |
- 7	+ 6				
- 7	- 8				
+ 6	+ 3				
+ 8	- 3				

Λύση

α	β	| α + β |	| α |	| β |	| α |+ | β |
- 7	+ 6	1	7	6	13
- 7	- 8	15	7	8	15
+ 6	+ 3	9	6	3	9
+ 8	- 3	5	8	3	11

Παρατηρούμε ότι όταν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι τότε:
| α + β | = | α | + | β |
ενώ όταν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι τότε:
| α + β | < | α | + | β |

7. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α) Α = α+β+γ+δ β) Β = α+β+γ
γ) Γ = α+β αν α = - 6,35,
β = + 6,25, γ =+ 8,25, δ = - 0,35.

Λύση

α) Α = α + β + γ + δ =
= (- 6,35) + (+ 6,25) + (+8,25)+
+ (- 0,35) =
= (6,25 + 8,25) + (- 6,35 - 0,35)=
= (+ 14,5) + (- 6,7) = 7, 8
β) Β = α + β + γ =
= - 6,35 + 6,25 + 8,25 =
= - 6,35 + 14,5 = + 8,15
γ) Γ = α + β = - 6,35 + 6,25 = - 0,1

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) (+ 14) + (+ 28)
β) (+ 7) + (- 83)
γ) (+ 6) + (- 43)
δ) (- 9,37) + (- 10,1)
ε) $(-\frac{7}{3}) + (+\frac{8}{3})$
στ) $(-5) + (-\frac{2}{3})$

Λύση

α) (+14) + (+ 28) = +(14 + 28)=+42
β) (+ 7) + (- 83) = - (83 - 7) = ...
γ) (+ 6) + (- 43) = - (43- 6) = ...

δ) (- 9,37)+(- 10,1) = - (9,37+10,1)=...

2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) (+ 8,1) + (- 3,7) + (+ 3)

β) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{4}{3}) + (+\frac{7}{6})$

γ) $(+4\frac{3}{4}) + (-2\frac{1}{4}) + (+6\frac{5}{3})$

δ) (- 8,3) + (- 10,27) + (+ 13,2)

Λύση

α) (+ 8,1) + (- 3,7) + (+ 3) =
= (+ 8,1 + 3) + (- 3,7) =
= (11,1 - 3,7) = ...

β) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{4}{3}) + (+\frac{7}{6}) = (-\frac{\overset{3)}{1}}{2} - \frac{\overset{2)}{4}}{3}) + (+\frac{7}{6})$
$= (-\frac{3}{6} - \frac{8}{6}) + (+\frac{7}{6}) = ...$

γ) ...

3. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $(+\frac{7}{8}) + (-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{4}) + (+\frac{6}{12}) + (-\frac{3}{4}) +$
$+ (+\frac{5}{6})$

β) $(+\frac{9}{3}) + (-\frac{10}{4}) + (-\frac{18}{12}) + (+\frac{23}{6}) + (-\frac{17}{4})$

γ) (+ 9) + (- 37) + (- 125) + (+ 94) +
+ (- 36) + (+ 63) + (- 101)

δ) $(-\frac{3}{5}) + (+\frac{4}{3}) + (-\frac{1}{2}) + (+\frac{7}{3}) + (-\frac{9}{10}) +$
$+ (-\frac{22}{15})$

Λύση

α) $(+\frac{7}{8}) + (-\frac{2}{3}) + (-\frac{1}{4}) + (+\frac{6}{12}) + (-\frac{3}{4}) +$
$+ (+\frac{5}{6}) =$
$= (\frac{\overset{3)}{7}}{8} + \frac{\overset{2)}{6}}{12} + \frac{\overset{4)}{5}}{6}) + (-\frac{\overset{8)}{2}}{3} - \frac{\overset{6)}{1}}{4} - \frac{\overset{6)}{3}}{4}) =$
$= (\frac{21}{24} + \frac{12}{24} + \frac{20}{24}) + (-\frac{16}{24} - \frac{6}{24} - \frac{18}{24}) = ...$

β) $(+\frac{9}{3}) + (-\frac{10}{4}) + (-\frac{18}{12}) + (+\frac{23}{6}) + (-\frac{17}{4}) =$
$= (\frac{9}{3} + \frac{23}{4}) + (-\frac{10}{4} - \frac{18}{12} - \frac{17}{4}) = ...$

γ) ...
δ) ...

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	γ	|α + β + γ|	|α| + |β| + |γ|
- 3	- 8	4	7	15
-10	- 7	- 6	23	
4	8	9		
3	19	- 6		
-5	7	- 4		

5. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) - 6,43 - 3,75 + 6,47 + 3,6 - 7,8

β) + 5,37 - 8,65 - 1,35 + 7,83 - 6,4

γ) $-\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} - \frac{4}{3} + \frac{7}{2} - 1$

δ) $\frac{13}{8} - \frac{7}{4} - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} - \frac{7}{2} + 2 + \frac{1}{3}$

Λύση

α) - 6,43 - 3,75 + 6,47 + 3,6 - 7,8 =
=(+ 6,47 + 3,6)+(- 6,43 - 3,75 - 7,8)=
= ...

β) 5,37 - 8,65 - 1,35 + 7,83 - 6,4 =
= (5,35 + 7,83) + (- 8,65 - 1,35 - 6,4)=
= ...

γ) ...
δ) ...

6. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:
Α = α + β,

$B = \alpha + \beta + \gamma$,
$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
αν $\alpha = -3$, $\beta = +12$, $\gamma = -27$,
$\delta = +19$.

Λύση

$A = \alpha + \beta = -3 + 12 = \ldots$
$B = \alpha + \beta + \gamma = -3 + 12 - 27 = \ldots$
$\Gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta =$
$= -3 + 12 - 27 + 19 = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνονται οι θετικοί ρητοί x, y με x < y. Να βρείτε τα αθροίσματα:
α) (+ x) + (+ y) β) (+ x) + (- y)
γ) (- x) + (+ y) δ) (- x) + (- y)

2. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) (+ 8) + (- 7)
β) (+ 5,37) + (- 7,8)
γ) (+ 5,6) + (- 5,6)
δ) (+ 8,43) + (+ 17,6)

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

α	β	α + β	β + α
- 6	+ 6		
- 5	+ 13		
+ 7	- 12		
- 14	- 11		
+ 3	+ 27		

4. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) - 25 + 48
β) - 32 - 45
γ) + 18 - 23
δ) - 11,2 - 32,5

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

α	β	γ	α+(β+γ)	(α+β)+γ
+10	- 11	+12		
- 2	- 3	- 7		
- 14	- 8	+19		
- 6	0	+ 3		
- 1	+2	-15		

6. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) (- 6) + (+ 3,99) + (- 1,4)
β) (- 0,01) + (- 0,1) + (+ 0,11)
γ) (- 9,35) + (+ 14,5) + (+ 8,73)
δ) (- 100) + (- 900) + (+ 1000)
ε) (+ 8,3) + (- 35,7) + (+ 11,6)
στ) (+ 43) + (- 37) + (- 6)

7. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:
α) - 95 + 71 - 8
β) + 35 - 21 + 6
γ) - 7,83 + 1,78 + 4,25

δ) $-\frac{4}{3} + \frac{9}{8} + \frac{1}{4}$

ε) $-\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{11}{15}$

8. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $(-\frac{7}{3}) + (-\frac{14}{4}) + (+\frac{29}{6}) + (-\frac{35}{8}) + (+\frac{7}{3})$

β) $(-105) + (+79) + (+23) + (-45) + (+37)$

γ) $(+61) + (-135) + (-97) + (+203) + (-83)$

δ) $(-7{,}8) + (+9{,}5) + (-12{,}37) + (+8{,}47)$

ε) $(-\frac{2}{5}) + (+\frac{7}{6}) + (-\frac{8}{3}) + (+\frac{7}{5}) + (-\frac{11}{15})$

9. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $-75 + 68 - 37 - 48 + 65 + 16 - 38$

β) $+21 + 42 - 35 - 21 + 84 - 42 - 37$

γ) $-19 + 156 - 95 - 78 + 84 - 37$

δ) $+70{,}8 - 35{,}35 - 40{,}7 - 35{,}35 + 42{,}3$

ε) $8{,}37 - 50{,}1 - 47 + 82{,}1 - 21 + 11{,}9$

στ) $2\frac{3}{8} - 4\frac{7}{8} + 8\frac{4}{3} - 5\frac{2}{6} + \frac{7}{8} - 3$

1. 4 Αφαίρεση ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πώς βρίσκουμε τη διαφορά α - β δύο ρητών αριθμών α και β;	**1.** Για να βρούμε τη **διαφορά** α - β των ρητών αριθμών α και β, αρκεί στον α να προσθέσουμε τον αντίθετο του β. Δηλαδή: **$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$** π.χ. $12 - (-5) = 12 + (+5) = 12 + 5 = 17$ __Παρατήρηση:__ Ο αριθμός α λέγεται **μειωτέος**, ενώ ο αριθμός β λέγεται **αφαιρετέος.**
2. Γιατί η αφαίρεση είναι πάντα δυνατή στους ρητούς αριθμούς ενώ δεν είναι πάντα δυνατή στους φυσικούς αριθμούς;	**2.** Η αφαίρεση είναι πάντα δυνατή στους ρητούς αριθμούς, γιατί για κάθε ρητό αριθμό υπάρχει ο αντίθετός του, ενώ δεν είναι πάντα δυνατή στους φυσικούς αριθμούς, γιατί οι φυσικοί αριθμοί δεν έχουν αντίθετους. Η αφαίρεση δύο φυσικών αριθμών γίνεται μόνο όταν ο μειωτέος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από/με τον αφαιρετέο.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι διαφορές:

α) (- 3) - (+ 4)
β) (+ 4) - (+ 6)
γ) (+ 7) - (- 10)
δ) (- 7,8) - (- 4,3)
ε) (+ 4,1) - (- 3,8)
στ) (- 35) - (- 35)
η) (- 36) - (- 47)

θ) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$

Λύση

α) (- 3) - (+ 4) = (- 3) + (- 4) = - 7
β) (+ 4) - (+ 6) = (+ 4) + (- 6) = - 2
γ) (+ 7) - (- 10) = (+7) + (+10) = +17
δ) (- 7,8) - (- 4,3) = (- 7,8) + (+ 4,3) =
= - 3,5
ε) (+ 4,1) - (- 3,8) = (+ 4,1) + (+3,8)=
= + 7,9
στ) (- 35) - (- 35) = (- 35) + (+ 35) = 0
η) (- 36) - (- 47) = (- 36) + (+ 47) =

θ) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)=\overset{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)}+\overset{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)}=$
$=\left(-\frac{2}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{5}{4}$

2. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

α	β	α - β	β - α
- 6	+ 4		
+ 4	- 14		
- 11	- 12		
+ 29	+ 24		

Τι παρατηρείτε για τους αριθμούς α - β και β - α;

Λύση

α	β	α - β	β - α
- 6	+ 4	- 10	+ 10
+ 4	- 14	+ 18	- 18
- 11	- 12	+ 1	- 1
+ 29	+ 24	+ 5	- 5

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί α - β και β - α είναι αντίθετοι.

3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
(α + β) - γ, (α - γ) + β, α + (β - γ) αν α = - 6, β = - 4, γ = + 7. Τι παρατηρείτε;

Λύση

(α + β) - γ = [(- 6) + (- 4)] - (+ 7) =
=(- 10) - (+ 7) = (- 10) + (- 7) = - 17
(α - γ) + β = [(- 6) - (+ 7)] + (- 4) =
[(- 6) + (- 7)] + (- 4) = (- 13) + (- 4) =
= - 17
α + (β - γ) = (- 6) +[(- 4) - (+ 7)] =
= (- 6) + (- 11) = - 17
Παρατηρούμε ότι:

(α + β) - γ = (α - γ) + β = α + (β - γ)

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α - (β - γ) και (α - β) + γ αν α = - 7, β = + 10, γ = - 9 .
Τι παρατηρείτε;

Λύση

$\alpha - (\beta - \gamma) = (-7) - [(+10) - (-9)] =$
$= (-7) - [(+10) + (+9)] =$
$= (-7) - (+19) = (-7) + (-19) = -26$

$(\alpha - \beta) + \gamma = [(-7) - (+10)] + (-9) =$
$= [(-7) + (-10)] + (-9) =$
$= (-17) + (-9) = -26$

Παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma}$$

5. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
$\alpha - \beta$ και $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ όταν:
$\alpha = +7, \beta = -13, \gamma = -15$.
Τι παρατηρείτε;

Λύση

$\alpha - \beta = (+7) - (-13) = (+7) + (+13) =$
$= +20$

$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) =$
$= [(+7) + (-15)] - [(-13) + (-15)] =$
$= (-8) - (-28) = (-8) + (+28) = +20$

Παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)}$$

6. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
$\alpha - (\beta + \gamma)$ και $(\alpha - \beta) - \gamma$ όταν:
$\alpha = +13, \beta = -19, \gamma = +9$.
Τι παρατηρείτε;

Λύση

$\alpha - (\beta + \gamma) = (+13) - [(-19) + (+9)] =$
$= (+13) - (-10) = (+13) + (+10) =$
$= +23$

$(\alpha - \beta) - \gamma = [(+13) - (-19)] - (+9) =$
$= [(+13) + (+19)] + (-9) =$
$= (+32) + (-9) = +23$

Παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma}$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x + (+7) = -13$
β) $x + (-8) = +14$
γ) $x + (+9) = +15$
δ) $x + (-6) = -27$

Λύση

α) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αντίθετο του $+7$ οπότε έχουμε:
$x + (+7) = -13$ δηλαδή
$x + (+7) + (-7) = -13 + (-7)$
άρα $x = -20$.
β) Ομοίως: $x + (-8) = +14$ ή
$x + (-8) + (+8) = +14 + (+8)$ ή
$x = +22$.
γ) $x + (+9) = +15$ ή
$x + (+9) + (-9) = +15 + (-9)$ ή
$x = +6$.
δ) $x + (-6) = -27$ ή
$x + (-6) + (+6) = -27 + (+6)$ ή
$x = -21$.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(-3) + x + (+10) = -19$
β) $(-7) + (+13{,}5) + x = -10{,}2$
γ) $(-\frac{1}{2}) + x + (-\frac{7}{2}) = +\frac{3}{2}$
δ) $(-13{,}5) + (+4{,}7) + x = -11{,}2$

Λύση

α) $(-3) + x + (+10) = -19$ ή
$x + (-3) + (+10) = -19$ ή
$x + (+7) = -19$ ή
$x + (+7) + (-7) = -19 + (-7)$ ή
$x = -26$.
β) $(-7) + (+13{,}5) + x = -10{,}2$ ή
$(+6{,}5) + x = -10{,}2$ ή
$(+6{,}5) + (-6{,}5) + x = (-10{,}2) + (-6{,}5)$
ή $x = -16{,}7$.

γ) $(-\frac{1}{2}) + x + (-\frac{7}{2}) = +\frac{3}{2}$ ή
$x + (-\frac{8}{2}) = +\frac{3}{2}$ ή

$x + (-\frac{8}{2}) + (+\frac{8}{2}) = +\frac{3}{2} + (+\frac{8}{2})$ ή

$x = +\frac{11}{2}$

δ) $(-13{,}5) + (+14{,}7) + x = -11{,}2$ ή

$(-8{,}8) + x = -11{,}2$ ή

$(-8{,}8) + (+8{,}8) + x = -11{,}2 + (+8{,}8)$

ή $x = -2{,}4$.

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x + 5 = -14$

β) $x + 13{,}2 = 11{,}7$

γ) $x - 15 = 11$

δ) $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

ε) $x + \frac{8}{3} = \frac{5}{2}$

στ) $x - \frac{6}{5} = -\frac{3}{2}$

Λύση

α) $x + 5 = -14$ ή $x = -14 - 5$ ή

$x = -19$

β) $x + 13{,}2 = 11{,}7$ ή $x = 11{,}7 - 13{,}2$

ή $x = -1{,}5$

γ) $x - 15 = 11$ ή $x = 11 + 15$ ή

$x = 26$

δ) $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ή $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ ή

$x = \frac{6}{2}$ ή $x = 3$

ε) $x + \frac{8}{3} = \frac{5}{2}$ ή $x = \overset{3}{\frac{5}{2}} - \overset{2}{\frac{8}{3}}$ ή

$x = \frac{15}{6} - \frac{16}{2}$ ή $x = -\frac{1}{6}$

στ) $x - \frac{6}{5} = -\frac{3}{2}$ ή $x = -\overset{5}{\frac{3}{2}} + \overset{2}{\frac{6}{5}}$ ή

$x = -\frac{15}{10} + \frac{12}{10}$ ή $x = -\frac{3}{10}$

10. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-4) - (-8) + (-41)$

β) $(+75) - (+45) + (-61)$

γ) $(+3{,}7) - (+49) + (-6)$

δ) $(+45) + (-27) - (-33)$

Λύση

α) $(-4) - (-8) + (-41) =$

$= (-4) + (+8) + (-41) =$

$= (-45) + (+8) = -37$

β) $(+75) - (+45) + (-61) =$

$= (+75) + (-45) + (-61) =$

$= (+75) + (-106) = -31$

γ) $(+3{,}7) - (+49) + (-6) =$

$= (+3{,}7) + (-49) + (-6) =$

$= (+3{,}7) + (-55) = -51{,}3$

δ) $(+45) + (-27) - (-33) =$

$= (+45) + (-27) + (+33) =$

$= (+78) + (-27) = 51$

11. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-11) - (-17) - (+81) - (+37) +$
$+ (-45)$

β) $(+20{,}5) - (-4{,}7) + (-3{,}81) -$
$- (-15{,}7)$

γ) $(-3{,}85) - (+33{,}5) - (+56{,}1) -$
$- (+7{,}68)$

Λύση

α) $(-11) - (-17) - (+81) - (+37) +$
$+ (-45) =$

$= (-11) + (+17) + (-81) + (-37) +$
$+ (-45) =$

$= (-11) + (-81) + (-37) + (-45) +$
$+ (+17) =$

$= (-174) + (+17) = -157$

β) $(+20{,}5) - (-4{,}7) + (-3{,}81) - (-15{,}7) =$

$= (+20{,}5) + (+4{,}7) + (-3{,}81) + (+15{,}7)$

$= (+20{,}5) + (+4{,}7) + (+15{,}7) + (-3{,}81)$

$= (+40{,}9) + (-3{,}81) = 37{,}09$

γ) $(-3{,}85) - (+33{,}5) - (+56{,}1) +$
$+ (-31{,}5) - (+7{,}68) =$

$= (-3{,}85) + (-33{,}5) + (-56{,}1) + (-31{,}5)$
$+ (-7{,}68) = -132{,}63$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι διαφορές:

α) $(-10) - (+25)$

β) $(+25) - (-10)$

γ) $(-\frac{4}{5}) - (+\frac{7}{3})$

δ) $(-78) - (+47)$

ε) $(+14{,}5) - (-5{,}7)$

στ) $(+3{,}2) - (+4{,}1)$

Λύση

α) $(-10) - (+25) = (-10) + (-25) =$
$= -35$

β) $(+25) - (-10) = (+25) + (+10) =$
$= \ldots$

γ) $(-\frac{4}{5}) - (+\frac{7}{3}) = \overset{3}{(-\frac{4}{5})} + \overset{5}{(-\frac{7}{3})} =$

$= (-\frac{12}{15}) + (-\frac{35}{15}) = \ldots$

2. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

α	β	γ	(α + β) - γ	(α - γ) + β
- 13	+ 11	-15	+ 13	
-5	0	- 6,2		
+3,5	-1,7	- 0,6		2,4
-1/2	+ 1/3	+ 2/3	- 17/30	
- 4	- 3/2	+ 1/3		

3. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

α	β	γ	α - (β - γ)	(α - β) + γ
- 4	+ 5	-7	- 16	
+10	- 11	- 12		+ 9
+14,2	+15,7	+9,6	- 20,3	
-4/3	- 1/2	+ 5/6		

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(-8) + x = -19$

β) $(-\frac{4}{15}) + x = -1$

γ) $x + (-\frac{3}{20}) = -\frac{1}{5}$

δ) $x + (+13) = +13$

Λύση

α) $(-8) + x = -19$ ή
$(-8) + (+8) + x = -9 + (+8) \ldots$

β) $(-\frac{4}{15}) + x = -1$ ή
$(-\frac{4}{15}) + (+\frac{4}{15}) + x = -1 + (+\frac{4}{15}) \ldots$

γ) ...
δ) ...

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-3 + y - 6 = +5$

β) $14 + x - 11 = -15$

γ) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \omega = \frac{4}{5}$

δ) $-8{,}3 + \varphi + 7{,}6 + 1 = 10{,}5$

Λύση

α) $-3 + y - 6 = 5$ ή $y = 5 + 3 + 6$ ή
$y = \ldots$

β) 14 + x - 11 = - 15 ή
x = - 15 - 14 + 11 ή x = ...
γ) ...
δ) ...

6. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) (- 3) - (- 8) - (+ 17) + (- 21) - (- 47)
β) (- 6) + (- 3,8) - (- 11,8) - (+ 7,45) + + (- 1,35)

γ) $(-\frac{1}{2}) - (+\frac{3}{4}) - (-\frac{7}{3}) + (-\frac{8}{6}) - (-\frac{3}{4})$

Λύση

α) (- 3) - (- 8) - (+ 17) + (- 21) - (- 47)=
= (- 3) + (+ 8) + (- 17) + (- 21) +
+ (+ 47) = ...
β) (- 6) + (- 3,8) - (- 11,8) - (+ 7,45) +
+ (- 1,35) =
= (- 6) + (- 3,8) + (+ 11,8) + (- 7,45)+
+ (- 1,35) = ...
γ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι διαφορές:
α) (- 5) - (- 9)
β) (- 8) - (+ 15)
γ) $(+\frac{13}{12}) - (-\frac{5}{6})$
δ) $(-\frac{7}{3}) - (+\frac{8}{2})$
ε) (- 7,89) - (+ 4,3)
στ) (- 5,25) - (- 3,1)

2. Να υπολογιστούν οι διαφορές:
α) (- 8) - (- 43)
β) $(+\frac{5}{4}) - (-\frac{9}{2})$
γ) (- 5,2) - (+ 2,1)
δ) $(+2\frac{3}{4}) - (-1\frac{5}{6})$
ε) $(-6\frac{2}{5}) - (+2\frac{1}{3})$
στ) (- 2,25) - (+ 1,7)

3. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

α	β	γ	α -β	(α+γ)-(β+γ)
- 1/2	+3/2	-6		
- 7	+4/3	+5/2		
+6	-2/3	+5		
- 4/5	+ 3	- 1/2		
- 1,2	+2,1	- 0,7		

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) (- 9) + x = - 10
β) (+ 6) + x = - 3
γ) x + (- 3) = + 2
δ) $x + (-\frac{4}{3}) = \frac{7}{4}$
ε) $(-\frac{10}{6}) + x = -\frac{5}{2}$
στ) (- 2,1) + x = 4,3

5. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

α	β	γ	α-(β+γ)	(α-β)-γ
- 4/3	3	-1		
- 2	+ 5	- 2,8		
-5/2	- 3/4	2		
- 7/3	5/2	- 2		
8/3	-1/5	+4		

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-3 + x = 6$

β) $y + 7 = -2$

γ) $-\frac{13}{2} + \varphi = -1$

δ) $\omega + 3{,}1 = -6$

ε) $7 + \alpha = -11{,}2$

στ) $\beta + \frac{3}{7} = -5$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x - 11 = 18$

β) $y - \frac{20}{6} = -\frac{11}{3}$

γ) $\omega - 12{,}2 = -1$

δ) $\varphi - 4 = -\frac{1}{3}$

ε) $-3{,}2 + \alpha = +5$

στ) $-\frac{3}{2} + \beta = \frac{7}{3}$

8. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-47) - (-35) - (+67) - (-35) +$
$+ (-47)$

β) $(-66) - (+39) - (-66) + (-36) -$
$- (-19)$

γ) $(-\frac{5}{6}) - (-\frac{3}{7}) + (-\frac{5}{3}) - (-\frac{5}{3}) - (-\frac{7}{6})$

1.5 Απαλοιφή παρενθέσεων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με ποιο τρόπο μπορούμε να απαλείψουμε μια παρένθεση αν έχει μπροστά της το πρόσημο «+» (ή δεν έχει πρόσημο);

2. Με ποιο τρόπο μπορούμε να απαλείψουμε μια παρένθεση που έχει μπροστά της το πρόσημο «−»;

Απαντήσεις

1. Όταν θέλουμε να απαλείψουμε μια παρένθεση που έχει μπροστά της το «+» (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το «+» (αν έχει), γράφοντας τους όρους που περιέχει με το πρόσημό τους.

π.χ. $(-3 + 5 - 1) + (10 - 4 - 2 + 9) =$
$= -3 + 5 - 1 + 10 - 4 - 2 + 9$

2. Όταν θέλουμε να απαλείψουμε μια παρένθεση που έχει μπροστά της το «−» τότε μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το «−», γράφοντας τους όρους που περιέχει με αλλαγμένα τα πρόσημά τους.

π.χ. $-(6 + 3 - 11) = -6 - 3 + 11$

3. Πότε χρησιμοποιούνται οι αγκύλες [ ];

3. Οι αγκύλες [ ] χρησιμοποιούνται στις μαθηματικές παραστάσεις αντί παρενθέσεων με σκοπό να περικλείσουν ήδη υπάρχουσες παρενθέσεις.
π.χ. $-(7+3)-[-2+(-5+8-4)]$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων χωρίς να απαλείψετε τις παρενθέσεις.

$A = (-8-9+15)-18-(22-13-6)$

$B = (-3+5)-11-12-(17-4-19)$

Λύση

$A = (-8-9+15)-18-(22-13-6) =$
$= (-17+15)-18-(22-19) =$
$= (-2)-18-(+3) =$
$= -2-18-3 = -23$

$B = (-3+5)-11-12-(17-4-19) =$
$= (+2)-11-12-(17-23) =$
$= 2-11-12-(-6) =$
$= 2-11-12+(+6) =$
$= 2-11-12+6 = 8-23 = -15$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις.

$A = (-8-9+15)-18-(22-13-6)$

$B = (-3+5)-11-12-(17-4-19)$

Λύση

$A = (-8-9+15)-18-(22-13-6) =$
$= -8-9+15-18-22+13+6 =$
$= -57+34 = -23$

$B = (-3+5)-11-12-(17-4-19) =$
$= -3+5-11-12-17+4+19 =$
$= -43+28 = -15$

3. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων, αφού πρώτα απαλειφθούν οι παρενθέσεις.

$A = -6-(5+7-9)+(-8+9)-(4-13+11)$

$B = (-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6})-(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2})-(-\frac{7}{6}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2})$

$\Gamma = (-18-23+20)+(32-28)-(42-51-19)$

Λύση

$A = -6-(5+7-9)+(-8+9)-(4-13+11) =$
$= -6-5-7+9-8+9-4+13-11$
$= -6-5-7-8-4-11+9+9+13$
$= -41+31 = -10$

$B = (-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6})-(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2})-(-\frac{7}{6}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2})$
$= -\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\frac{7}{6}-\frac{5}{3}+\frac{1}{2} =$
$= +\overset{2}{\frac{4}{3}}-\overset{3}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{6}-\frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

$\Gamma = (-18-23+20)+(32-28)-(42-51-19) =$
$= -18-23+20+32-28-42+51+19 =$
$= -18-23-28-42+20+32+51+19 =$
$= -111+122 = 11$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = (\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha+\beta-\gamma)+(-\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)$

αν $\alpha = -10$, $\beta = +7$, $\gamma = -4$.

Λύση

$A = (\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha+\beta-\gamma)+(-\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma) =$

$= \alpha - \beta + \gamma - \alpha - \beta + \gamma - \alpha - \beta + \gamma - \alpha$
$- \beta - \gamma =$
$= - \beta + \gamma - \beta + \gamma - \alpha - \beta - \alpha - \beta =$
$= - (+7) + (-4) - (+7) + (-4) -$
$- (-10) - (+7) - (-10) - (+7) =$
$= -7 - 4 - 7 - 4 + 10 - 7 + 10 - 7 =$
$= -36 + 20 = -16$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

**$A = -13 - [-4 + (5 - 16) - (4 - 13 +$
$+ 9)] - [-(8 - 20) + (17 - 4)]$**

**$B = (14 - 3 - 17) - [8 - (4 - 3 + 9) - (2 -$
$- 11)] + [-3 + (7 - 12) - (4 - 13)]$**

Λύση

$A = -13 - [-4 + (5 - 16) - (4 - 13 + 9)] -$
$- [-(8 - 20) + (17 - 4)] =$
$= -13 - (-4 + 5 - 16 - 4 + 13 - 9) -$
$- (-8 + 20 + 17 - 4) =$
$= -13 + 4 - 5 + 16 + 4 - 13 + 9 + 8$
$- 20 - 17 + 4 =$
$= 4 + 16 + 4 + 9 + 8 + 4 - 13 - 5 -$
$- 13 - 20 - 17 =$
$= 45 - 68 = -23$

$B = (14 - 3 - 17) - [8 - (4 - 3 + 9) - (2 -$
$- 11)] + [-3 + (7 - 12) - (4 - 13)]$
$= 14 - 3 - 17 - (8 - 4 + 3 - 9 - 2 + 11)$
$+ (-3 + 7 - 12 - 4 + 13) =$
$= 14 - 3 - 17 - 8 + 4 - 3 + 9 + 2 - 11$
$- 3 + 7 - 12 - 4 + 13 =$
$= 14 + 4 + 9 + 2 + 7 + 13 - 3 - 17 -$
$- 8 - 3 - 11 - 3 - 12 - 4 =$
$= 49 - 61 = -12$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -\frac{1}{2} + [-\frac{3}{4} - (\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) - (\frac{7}{2} - \frac{8}{3})] - (1 - \frac{5}{6} + \frac{4}{3})$$

$$B = -\frac{2}{3} - [2 - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4})] - [-4 - (\frac{1}{2} - \frac{7}{4}) + (\frac{5}{6} + \frac{1}{2})]$$

Λύση

$$A = -\frac{1}{2} + [-\frac{3}{4} - (\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) - (\frac{7}{2} - \frac{8}{3})] - (1 - \frac{5}{6} + \frac{4}{3}) =$$
$$= -\frac{1}{2} + (-\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{7}{2} + \frac{8}{3}) - (1 - \frac{5}{6} + \frac{4}{3})$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{7}{2} + \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{6} - \frac{4}{3} =$$
$$= -\overset{6}{\frac{1}{2}} - \overset{3}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{2}{3}} - \overset{6}{\frac{7}{2}} - \overset{12}{\frac{1}{1}} + \overset{4}{\frac{8}{3}} + \overset{2}{\frac{5}{6}} =$$
$$= -\frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{8}{12} - \frac{42}{12} - \frac{12}{12} + \frac{32}{12} + \frac{10}{12} =$$
$$= -\frac{77}{12} + \frac{42}{12} = -\frac{35}{12}$$

$$B = -\frac{2}{3} - [2 - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4})] - [-4 - (\frac{1}{2} - \frac{7}{4}) + (\frac{5}{6} + \frac{1}{2})] =$$
$$= -\frac{2}{3} - (2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) - (-4 - \frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}) =$$
$$= -\frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{2} - \frac{7}{4} - \frac{5}{6} - \frac{1}{2} =$$
$$= -\overset{12}{\frac{2}{1}} - \overset{3}{\frac{1}{4}} - \overset{3}{\frac{7}{4}} - \overset{2}{\frac{5}{6}} + \overset{12}{\frac{4}{1}} =$$
$$= -\frac{24}{12} - \frac{3}{12} - \frac{21}{12} - \frac{10}{12} + \frac{48}{12} =$$
$$= -\frac{58}{12} + \frac{48}{12} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

7. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$A = (-5 - \alpha) - [6 - 5 - (\alpha - 1)]$

**$B = (-\beta - 4) + [-(7 - \beta) - 4] - \alpha - [4 -$
$- (3 + \alpha)$.**

Λύση

$A = (-5 - \alpha) - [6 - 5 - (\alpha - 1)] =$
$= (-5 - \alpha) - (6 - 5 - \alpha + 1) =$
$= -5 - \alpha - 6 + 5 + \alpha - 1 = -7$

$B = (-\beta - 4) + [-(7 - \beta) - 4] - \alpha - [4 -$
$- (3 + \alpha)] =$
$= (-\beta - 4) + (-7 + \beta - 4) - \alpha - (4 - 3 -$
$- \alpha) =$

$= - \beta - 4 - 7 + \beta - 4 - \alpha + 3 + \alpha =$
$= - 4 - 7 - 4 - 4 + 3 = - 19 + 3 = - 16$

8. Να βάλετε τους όρους των παρακάτω παραστάσεων σε παρένθεση που έχει μπροστά της το (–).
$A = - 3 + \alpha - \beta - x$
$B = 17 - y + \alpha - 1$
$\Gamma = - \alpha - \beta + 1 - \gamma$

Λύση

$A = - 3 + \alpha - \beta - x = - (3 - \alpha + \beta + x)$
$B = 17 - y + \alpha - 1 = - (- 17 + y - \alpha + 1)$
$\Gamma = - \alpha - \beta + 1 - \gamma = - (\alpha + \beta - 1 + \gamma)$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων με δύο τρόπους:
$A = - 4 - (8 - 13) + (4 - 17)$
$B = - (8 - 21) + (- 3 + 21 - 4) - (15 - 12)$

Λύση

α) $A = - 4 - (8 - 13) + (4 - 17) =$
$= - 4 - (- 5) + (- 13) = ...$
$B = - (8 - 21) + (- 3 + 21 - 4) - (15 - 12) =$
$= - (- 13) + (- 7 + 21) - (+ 3) =$
$= - (- 13) + (+ 14) - (+ 3) = ...$
β) $A = - 4 - (8 - 13) + (4 - 17) =$
$= - 4 - 8 + 13 + 4 - 17 = ...$
$B = ...$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων κάνοντας απαλοιφή παρενθέσεων:

$A = (- \frac{1}{2} - 4) - (7 - \frac{3}{4}) + (4 + \frac{1}{2} - 1)$

$B = (6 - \frac{3}{4} - \frac{2}{5}) - (1 - \frac{3}{4}) - (\frac{3}{4} + 2)$

$\Gamma = - \frac{5}{2} + (- \frac{6}{5} + \frac{3}{4}) - (\frac{7}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{2})$

Λύση

$A = (- \frac{1}{2} - 4) - (7 - \frac{3}{4}) + (4 + \frac{1}{2} - 1) =$

$= - \frac{1}{2} - 4 - 7 + \frac{3}{4} + 4 + \frac{1}{2} - 1 = ...$

$B = ...$
$\Gamma = ...$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = - 5 - (7 - 8\frac{3}{4}) - 5 + (7 - \frac{3}{4})$

$B = - \frac{1}{2} + (- \frac{4}{5} + \frac{3}{4}) - (\frac{1}{2} - \frac{4}{5})$

$\Gamma = - (4 - \frac{1}{4}) + (- \frac{3}{4} - 1) - (\frac{1}{4} - \frac{3}{4})$

Λύση

$A = - 5 - (7 - 8\frac{3}{4}) - 5 + (7 - \frac{3}{4}) =$

$= - 5 - 7 + 8\frac{3}{4} - 5 + 7 - \frac{3}{4} = ...$

$B = ...$
$\Gamma = ...$

4. Αν $\alpha = - 3$, $\beta = - 4$, $\gamma = 10$ να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεις:
$A = (\alpha - \beta + 3) - (\alpha - \beta - 2) - (\gamma - \alpha - 1)$
$B = (\alpha + \beta - \gamma) - (\gamma + \alpha) - (\beta - \gamma)$
$\Gamma = \alpha - (\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha) - (\alpha - \gamma)$

Λύση

$A = (\alpha - \beta + 3) - (\alpha - \beta - 2) - (\gamma - \alpha - 1) =$
$= \alpha - \beta + 3 - \alpha + \beta + 2 - \gamma + \alpha + 1 =$
$= ...$

Β = ...

Γ = ...

5. Να βάλετε τους όρους των παρακάτω παραστάσεων μέσα σε μια παρένθεση που να έχει μπροστά της το πρόσημο (−).

α) $-3-x+2$ β) $\alpha-\beta+\gamma$

γ) $-4-\varphi+3$ δ) $-x+y-1$

Λύση

α) $-3-x+2=-(3+x-2)$

β) $\alpha-\beta+\gamma=-(-\alpha+\beta-\gamma)$ ...

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$A=-3-[-(4-18)+(3-16)]-(4-16)$

$B=(-7+18)-[(4-3)-(1+4)]-[-3+(7+18)]$

$\Gamma=-[10-(11-9)]+[-3-(5+11)]$

Λύση

$A=-3-[-(4-18)+(3-16)]-(4-16)$
$=-3-(-4+18+3-16)-(4-16)=$
$=\ldots$

Β = ...

Γ = ...

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$A=-\frac{8}{7}-[-\frac{3}{2}-(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})]-[-4-(\frac{8}{7}-1)]$

$B=(-\frac{4}{3}+2)-4-[-\frac{4}{3}-(\frac{1}{2}+\frac{5}{6})]-\frac{1}{2}+(-\frac{5}{6}+2)$

$\Gamma=(-\frac{4}{3}+\frac{5}{2})-[-\frac{3}{4}+(\frac{5}{2}-\frac{1}{3})]+[-(\frac{3}{4}+\frac{1}{3})]$

Λύση

$A=-\frac{8}{7}-[-\frac{3}{2}-(\frac{2}{3}-\frac{3}{2})]-[-4-(\frac{8}{7}-1)]=$
$=-\frac{8}{7}-(-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2})-(-4-\frac{8}{7}+1)=\ldots$

$B=(-\frac{4}{3}+2)-4-[-\frac{4}{3}-(\frac{1}{2}+\frac{5}{6})]-\frac{1}{2}+(-\frac{5}{6}+2)=$
$=(-\frac{4}{3}+2)-4-(-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\frac{5}{6})-\frac{1}{2}+(-\frac{5}{6}+2)=\ldots$

Γ = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις από τις παραστάσεις:

α) $-\alpha-(\beta-\gamma)-(\gamma-\beta)+(\alpha-\beta)$

β) $(x-y)-(y-x)+(y+x)-x$

γ) $-(1-x)-(\alpha-x)+(-x+\alpha)$

2. Αν $\alpha+\beta=-3$ και $\alpha-\beta=2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A=-3-\alpha-\beta$

$B=4-\alpha+\beta$

$\Gamma=7-\alpha-10+\beta$

$\Delta=\alpha+3+\beta+2-\alpha+\beta$

3. Αν $x=-7$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A=[-3-(x-2)]-[4-(x+2)]-x$

4. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να κάνετε τις πράξεις:

α) $-\frac{1}{2}-(4-\frac{1}{2})$

β) $5-(\frac{4}{7}-\frac{3}{2})+(-\frac{3}{2}+1)$

γ) $-7-(4-14)+(-10+11)-(9+1)$

δ) $-(18-29)-(4-3)+(8-19)$

5. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = -3 - [13 - (4 - 19)] + [-(8 - 12) + 5]$

$B = -16 - 3 - (7 - 8) - [-(4 - 11) + (3 - 9)]$

$\Gamma = [-3 + (14 - 21)] - [4 - (7 + 14)]$

$\Delta = [-[4 - (3 - 7)] + 6] - (15 - 17)$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων, αν: $\alpha = +10$, $\beta = -25$.

$A = [\alpha - (3 - \beta)] + [-(4 - \alpha) + 2]$

$B = -(4 - \alpha + \beta) - [3 - (7 - \alpha + \beta)]$

$\Gamma = [-18 - (\alpha + \beta)] - [-(\beta - \alpha) + 7]$

$\Delta = -[\beta - (\alpha - \beta)] + (\alpha - \beta) - (3 - \alpha + \beta)$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = -[-\frac{7}{6} - (\frac{4}{3} + 1)] - [-\frac{4}{3} + (\frac{8}{3} - 2)]$

$B = -\frac{5}{6} - (\frac{2}{5} - 6) - [6 - \frac{2}{5} + (3 - \frac{5}{6})]$

$\Gamma = \frac{2}{3} - [\frac{7}{4} - (1 - \frac{2}{3})] - [1 - (\frac{7}{4} + 4)]$

1.6 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών;

Απαντήσεις

1. Για να βρούμε το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό να βάλουμε το πρόσημο (−).

π.χ. $(+3) \cdot (-2) = -6$

$$(-\frac{7}{4}) \cdot (+\frac{2}{3}) = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

2. Πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο ομόσημων ρητών αριθμών;

2. Για να βρούμε το γινόμενο δύο ομόσημων ρητών αριθμών αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό να βάλουμε το πρόσημο (+).

π.χ. $(-7) \cdot (-2) = +14$

$(-1{,}2) \cdot (-5) = +6$

$(+5) \cdot (+3) = +15$

3. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού;

3. Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού είναι οι εξής:

α) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (αντιμεταθετική)

β) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (προσεταιριστική)

γ) $0 \cdot \alpha = 0$ (0: απορροφητικό στοιχείο) δ) $1 \cdot α = α$ (1: ουδέτερο στοιχείο)

ε) $α \cdot (β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$ (επιμεριστική).

4. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι;

4. Δύο αριθμοί ονομάζονται **αντίστροφοι**, όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα.

π.χ. οι αριθμοί -2 και $-\frac{1}{2}$ είναι αντίστροφοι γιατί $(-2) \cdot (-\frac{1}{2}) = +1$.

<u>Παρατήρηση:</u> Κάθε μη μηδενικός αριθμός έχει μόνο έναν αντίστροφο που έχει το ίδιο πρόσημο με αυτόν.

π.χ. Αντίστροφος του 3 είναι ο $\frac{1}{3}$ γιατί $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, αντίστροφος του $-\frac{2}{5}$ είναι ο $-\frac{5}{2}$ γιατί $(-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{5}{2}) = +1$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $3 \cdot (-6)$

β) $(-7) \cdot (-4)$

γ) $(-\frac{1}{3}) \cdot (+\frac{4}{3})$

δ) $(-1) \cdot 57$

ε) $(-\frac{1}{5}) \cdot (-\frac{5}{4})$

στ) $(-\frac{7}{8}) \cdot 2$

Λύση

α) $3 \cdot (-6) = -18$

β) $(-7) \cdot (-4) = +28$

γ) $(-\frac{1}{3}) \cdot (+\frac{4}{3}) = -\frac{4}{9}$

δ) $(-1) \cdot 57 = -57$

ε) $(-\frac{1}{5}) \cdot (-\frac{5}{4}) = +\frac{5}{20}$

στ) $(-\frac{7}{8}) \cdot 2 = -\frac{14}{8}$

2. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να κάνετε τις πράξεις:

α) $-3 \cdot (7 - 4)$

β) $4 \cdot (-3 + 6)$

γ) $-4 \cdot (8 - 1)$

δ) $-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3} + \frac{5}{4})$

ε) $\frac{5}{4} \cdot (-\frac{3}{4} - \frac{1}{4})$

στ) $-\frac{3}{4} \cdot (-\frac{4}{7} + \frac{1}{3})$

Λύση

α) $-3 \cdot (7 - 4) = -3 \cdot 7 - 3 \cdot (-4) =$
$= -21 + 12 = -9$

β) $4 \cdot (-3 + 6) = -12 + 24 = 12$

γ) $-4 \cdot (8-1) = -32 + 4 = -28$

δ) $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4}\right) = \overset{4}{\frac{1}{6}} - \overset{3}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{24} - \frac{15}{24} =$

$= -\frac{11}{24}$

ε) $\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{16} - \frac{5}{16} = -\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$

στ) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\right) = \overset{3}{\frac{12}{28}} - \overset{7}{\frac{3}{12}} =$

$= \frac{36}{84} - \frac{21}{84} = \frac{15}{84}$

3. Να κάνετε τις πράξεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $-5 \cdot (-7 + 12)$

β) $6 \cdot (-3 + 12)$

γ) $-\frac{1}{2} \cdot (4 - 14)$

δ) $-4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$

ε) $5 \cdot \left(-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)$

στ) $-5 \cdot \left(\frac{5}{2} - 1\right)$

Λύση

α) $-5 \cdot (-7 + 12) = -5 \cdot 5 = -25$

β) $6 \cdot (-3 + 12) = 6 \cdot 9 = 54$

γ) $-\frac{1}{2} \cdot (4 - 14) = -\frac{1}{2} \cdot (-10) = 5$

δ) $-4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -4 \cdot \left(-\frac{2}{2}\right) = 4$

ε) $5 \cdot \left(-\overset{4}{\frac{4}{3}} - \overset{3}{\frac{3}{4}}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{16}{12} - \frac{9}{12}\right) =$

$= 5 \cdot \left(-\frac{25}{12}\right) = -\frac{125}{12}$

στ) $-5 \cdot \left(\overset{1}{\frac{5}{2}} - \overset{2}{\frac{1}{1}}\right) = -5 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{2}\right) = -5 \cdot \frac{3}{2} =$

$= -\frac{15}{2}$

4. Να απλοποιηθεί η μορφή των παραστάσεων χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$A = -3x + 5x - 7x$

$B = -8x + 3x$

$\Gamma = -\frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}y$

Λύση

$A = -3x + 5x - 7x = (-3 + 5 - 7)x =$

$= -5x$

$B = -8x + 3x = (-8 + 3)\,x = -5x$

$\Gamma = -\frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}y = \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)y =$

$= -\frac{3}{2}y$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $A = 2\alpha - 3\beta$, $B = -(\alpha - 2\beta) + \gamma$, $\Gamma = -3(\beta - 4\alpha) - \gamma$ αν $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{5}{2}$, $\gamma = 3$.

Λύση

$A = 2\alpha - 3\beta = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\overset{2}{\frac{4}{1}} + \overset{1}{\frac{15}{2}} =$

$= -\frac{8}{2} + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}$

$B = -(\alpha - 2\beta) + \gamma = -\left[-2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)\right] + 3 =$

$= -(-2 + 5) + 3 = -3 + 3 = 0$

$\Gamma = -3(\beta - 4\alpha) - \gamma = -3\left[-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)\right] - 3 =$

$= -3\left(-\frac{5}{2} + 8\right) - 3 = \frac{15}{2} - 24 - 3 = \overset{1}{\frac{15}{2}} - \overset{2}{\frac{27}{1}} =$

$= \frac{15}{2} - \frac{54}{2} = -\frac{39}{2}$

6. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των αριθμών:

$-2,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ 1,\ +5,\ -\frac{10}{9}$

Λύση

Οι αντίστροφοι των παραπάνω αριθμών είναι οι αριθμοί:

$-\frac{1}{2}, +2, -\frac{3}{4}, 1, +\frac{1}{5}, -\frac{9}{10}$

7. Ποιο συμπέρασμα βγάζετε για τους ρητούς αριθμούς α, β εάν
α) $\alpha \cdot \beta > 0$, β) $\alpha \cdot \beta = 0$
γ) $\alpha \cdot \beta < 0$.

Λύση

α) Είναι $\alpha \cdot \beta > 0$. Εφόσον το γινόμενο των α, β είναι θετικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι, δηλαδή ($\alpha > 0$ και $\beta > 0$) ή ($\alpha < 0$ και $\beta < 0$).
β) Είναι $\alpha \cdot \beta = 0$. Για να είναι το γινόμενο δύο διαφορετικών αριθμών 0, πρέπει ο ένας από τους δύο ή και οι δύο να είναι 0. Άρα $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\alpha = \beta = 0$.
γ) $\alpha \cdot \beta < 0$. Εφόσον το γινόμενο των αριθμών α, β είναι αρνητικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι, δηλαδή ($\alpha > 0$ και $\beta < 0$) ή ($\alpha < 0$ και $\beta > 0$).

8. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) $(-8+3-4)\cdot(-7+8-13)$
β) $(-4-7)\cdot(3-12+9)$
γ) $(-\frac{1}{2}-1)\cdot(-3)+(-4)\cdot(-\frac{3}{8}+2)$

Λύση

α) $(-8+3-4)\cdot(-7+8-13) =$
$= (3-12)\cdot(8-20) = (-9)\cdot(-12) = 108$
β) $(-4-7)\cdot(3-12+9) =$
$= (-11)\cdot(12-12) = -11\cdot 0 = 0$
γ) $(-\frac{1}{2}-1)\cdot(-3)+(-4)\cdot(-\frac{3}{8}+2) =$
$= \frac{3}{2}+3+\frac{12}{8}-8 = \frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}-8 =$
$= \frac{6}{2}-5 = 3-5 = -2$

9. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) $(-3+7)\cdot[-4(5-8)+3(-2-6)]+$
$+4$
β) $-2-3[4(8-13)-3(7-18)]-$
$-4\cdot(13-17)$
γ) $-\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3}-\frac{7}{2})-2[-(4-\frac{1}{2})-3(\frac{5}{3}-\frac{7}{3})]$
δ) $-40(-38+5)-40(-37+7)$

Λύση

α) $(-3+7)\cdot[-4(5-8)+3(-2-6)]+4$
$= 4[-4(-3)+3(-8)]+4 =$
$= 4(12-24)+4 =$
$= 4(-12)+4 = -48+4 = -44$
β) $-2-3[4(8-13)-3(7-18)]-4(13-$
$-17) =$
$= -2-3[4(-5)-3(-11)]-4(-4) =$
$= -2-3(-20+33)+16 =$
$= -2-3\cdot 13+16 = -2-39+16 =$
$= -41+16 = -25$

γ) $-\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3}-\frac{7}{2})-2[-(4-\frac{1}{2})-3(\frac{5}{3}-\frac{7}{3})] =$
$= -\frac{4}{6}+\frac{7}{4}-2(-4+\frac{1}{2}-5+7) =$
$= -\frac{4}{6}+\frac{7}{4}+8-1+10-14 =$
$= -\frac{4}{6}+\frac{7}{4}+18-15 = -\overset{2}{\frac{4}{6}}+\overset{3}{\frac{7}{4}}+\overset{12}{\frac{3}{1}} =$
$= -\frac{8}{12}+\frac{21}{12}+\frac{36}{12} = \frac{49}{12}$

δ) $-40(-38+5)-40(-37+7) =$
$= -40(-33)-40(-30) =$
$= -40\cdot[(-33)-(-30)] =$
$= -40\cdot(-33+30) = -40\cdot(-3) = 120$

10. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $-\frac{4}{3}\cdot(\frac{7}{2}-\frac{6}{5})+\frac{2}{3}\cdot(-\frac{9}{2}+\frac{4}{5})$
β) $\frac{4}{5}\cdot(-1-\frac{3}{2})-\frac{7}{6}\cdot(\frac{5}{2}-2-\frac{3}{4})$
γ) $-2+5[-3(8-\frac{1}{3})+4(\frac{3}{4}-5)-8]$
δ) $\frac{1}{2}-3[\frac{3}{4}-2(\frac{7}{3}-4)-3(\frac{1}{3}+5)]-2(\frac{7}{6}-1)$

Λύση

α) $-\frac{4}{3}\cdot(\frac{7}{2}-\frac{6}{5})+\frac{2}{3}\cdot(-\frac{9}{2}+\frac{4}{5})=$

$=-\frac{28}{6}+\frac{24}{15}-\frac{18}{6}+\frac{8}{15}=-\overset{5}{\frac{46}{6}}+\overset{2}{\frac{32}{15}}=$

$=-\frac{230}{30}+\frac{64}{30}=-\frac{166}{30}$

β) $\frac{4}{5}\cdot(-1-\frac{3}{2})-\frac{7}{6}\cdot(\frac{5}{2}-2-\frac{3}{4})=$

$=-\overset{24}{\frac{4}{5}}-\overset{12}{\frac{12}{10}}-\overset{10}{\frac{35}{12}}+\overset{20}{\frac{14}{6}}+\overset{5}{\frac{35}{24}}=$

$=-\frac{96}{120}-\frac{144}{120}-\frac{350}{120}+\frac{280}{120}+\frac{175}{120}=$

$=-\frac{590}{120}+\frac{455}{120}=-\frac{135}{120}=-\frac{15}{8}$

γ) $-2+5[-3(8-\frac{1}{3})+4(\frac{3}{4}-5)-8]=$

$=-2+5(-24+1+3-20-8)=$

$=-2+5(-52+4)=-2+5(-48)=$

$=-2-240=-242$

δ) $\frac{1}{2}-3[\frac{3}{4}-2(\frac{7}{3}-4)-3(\frac{1}{3}+5)]-2(\frac{7}{6}-1)=$

$=\frac{1}{2}-3(\frac{3}{4}-\frac{14}{3}+8-1-15)-\frac{14}{6}+2=$

$=\frac{1}{2}-\frac{9}{4}+14-24+3+45-\frac{14}{6}+2=$

$=\overset{6}{\frac{1}{2}}-\overset{3}{\frac{9}{4}}+\overset{12}{\frac{38}{1}}-\overset{2}{\frac{14}{6}}=$

$=\frac{6}{12}-\frac{27}{12}+\frac{456}{12}-\frac{28}{12}=\frac{462}{12}-\frac{55}{12}=\frac{407}{12}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

·	-4/3	+7	- 0,5	+3/4	-7/3	- 6,2	-1
+1			-0,5				
-2						+12,4	
-5/3				- 5/4			
0		0					
+8							-8
-1,2							

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

$Α = -3x + 10x$,

$Β = +9x - 8x - 4x$,

$Γ = 4y - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}y$,

$Δ = -4ω + 9ω - 15ω$

Λύση

$Α = -3x + 10x = (-3 + 10)\cdot x = 7x$

$Β = +9x - 8x - 4x = (9 - 8 - 4)\cdot x = ...$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων με δύο τρόπους:

$Α = -7x + 3x$, $Β = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x$

$Γ = 6x - 2x$, $Δ = 4x - 3x - 6x$,

$Ε = \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x$, αν $x = -3$.

Λύση

<u>1ος τρόπος:</u>

$Α = -7x + 3x = (-7 + 3)x =$

$= -4\cdot(-3) = ...$

$Β = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x = (-\overset{3}{\frac{1}{2}} + \overset{2}{\frac{4}{3}})x =$

$= (-\frac{3}{6} + \frac{8}{6})\cdot(-3) = ...$

$Γ = 6x - 2x = (6 - 2)x = ...$

2ος τρόπος:

$A = -7x + 3x = -7 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) =$
$= 21 - 9 = ...$

$B = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{4}{3} \cdot (-3) =$
$= \frac{3}{2} - 4 = ...$

$\Gamma = 6x - 2x = 6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = ...$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων όταν $x=-2$, $y=1$, $\omega=-3$:

$A = -2[x - (y - \omega)] + 2x - 3[-(-x) - y + \omega]$

$B = -2(y - \omega) + 3(2x - 3\omega) - 4(-y + 2x)$

Λύση

$A = -2[x - (y - \omega)] + 2x - 3[-(-x) - y + \omega] =$
$= -2(x - y + \omega) + 2x - 3(x - y + \omega) =$
$= -2x + 2y - 2\omega + 2x - 3x + 3y - 3\omega =$
$= 5y - 5\omega - 3x =$
$= 5 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) - 3 \cdot (-2) = ...$

$B = ...$

5. Αν με $-x$ συμβολίζουμε τον αντίθετο ενός αριθμού x και με $\frac{1}{x}$ τον αντίστροφό του, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	- x	1/x
- 12		
+ 4/9		9/4
- 7/22	+ 7/22	
- 1		
+ 3	- 3	
-5		- 1/5
+ 7/3		

6. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $-3(-13 + 9) - [-2 - (-4)] - (-2)$

β) $-(-4 + 7) - [-(-4)] + [-(-3)]$

γ) $-(4 - 5) - \{-[-(-3)]\} - [-(+8)]$

Λύση

α) $-3(-13 + 9) - [-2 - (-4)] - (-2) =$
$= -3(-4) - (-2 + 4) + 2 = ...$

β) ...

γ) ...

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3 \cdot (-4 + \frac{1}{3}) - 4 \cdot (\frac{3}{4} - 2) - 2 \cdot (\frac{5}{2} - 6)$

β) $-2 \cdot [7 - 8 \cdot (3 - 5) - 4 \cdot (12 - 5)] - 6 \cdot (7 - 13)$

γ) $-4 \cdot \{-3 \cdot (4 - 11) + 2 \cdot [-3 \cdot (7 - 13)]\} - 4$

Λύση

α) $3 \cdot (-4 + \frac{1}{3}) - 4 \cdot (\frac{3}{4} - 2) - 2 \cdot (\frac{5}{2} - 6) =$

$= -12 + 1 - 3 + 8 - 5 + 12 = ...$

β) $-2 \cdot [7 - 8 \cdot (3 - 5) - 4 \cdot (12 - 5)] - 6 \cdot (7 - 13) =$
$= -2 \cdot [7 - 8 \cdot (-2) - 4 \cdot 7] - 6 \cdot (-6) =$
$= ...$

γ) ...

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-\frac{1}{2} - [-(-\frac{4}{3})] + 2[-(-\frac{4}{3})]$

β) $\frac{8}{5} - [-(-2)] - [-(-\frac{8}{5})]$

γ) $-4 + (7 - \frac{15}{2}) - [-(+\frac{1}{2})]$

Λύση

α) $-\frac{1}{2} - [-(-\frac{4}{3})] + 2[-(-\frac{4}{3})] =$
$= -\frac{1}{2} - (+\frac{4}{3}) + 2(+\frac{4}{3}) = ...$

β) ...

γ) ...

9. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-\frac{5}{6}+[-\frac{3}{2}(\frac{2}{5}-\frac{7}{3})-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}-\frac{6}{5})]-\frac{4}{3}(-\frac{1}{8})$

β) $-4-\{-3(\frac{1}{3}-\frac{9}{2})-(-\frac{11}{2})[-2(-\frac{1}{4})]\}$

γ) $5-3(7-\frac{13}{3})-\{-3+2[\frac{5}{2}-\frac{6}{5}(3-\frac{5}{2})]+2\}$

Λύση

α) $-\frac{5}{6}+[-\frac{3}{2}\cdot(\frac{2}{5}-\frac{7}{3})-\frac{1}{3}\cdot(\frac{3}{2}-\frac{6}{5})]-$
$-\frac{4}{3}\cdot(-\frac{1}{8})=$
$=-\frac{5}{6}+(-\frac{3}{5}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5})+\frac{1}{6}=\ldots$

β) $-4-\{-3\cdot(\frac{1}{3}-\frac{9}{2})-(-\frac{11}{2})\cdot[-2\cdot(-\frac{1}{4})]\}=$
$=-4-[-1+\frac{27}{2}+\frac{11}{2}(+\frac{1}{2})]=\ldots$

γ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς που ορίζονται στον πίνακα:

·	- 5	- 3	- 7,2	+ 3	+ 7/3
- 8					
- 3/2					
0					
+ 4					
1					
+ 3/2					
- 6					

2. Να βρείτε τους αντίθετους και τους αντίστροφους των αριθμών:

$-\frac{5}{7}, -\frac{4}{9}, +\frac{8}{3}, -10, -\frac{4}{21}, +5$

3. Απλοποιείστε τη μορφή των παραστάσεων χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$A = -18x - 21x + 35x$

$B = 19x - 6x - 15x$

$\Gamma = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}x + \frac{9}{2}x$

$\Delta = -3x - 4x + 7x$

4. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων αν $x = -5$:

$A = 1 - [-(-x) + 2] - (1 - x)$

$B = -4 + [-3\cdot(x - 1) - x] - 2\cdot(4 - x)$

$\Gamma = -8 - \{-[4 - (x + 1)] - 2x\}$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$-2(\alpha - \beta + \gamma) - 3(\beta - 2\gamma + \alpha) +$
$+ 4(\gamma - \alpha)$

αν $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$.

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$-[-(\alpha - 2\beta) - (\beta - 2\alpha)] + 2\cdot(4\alpha - 3\beta)$

αν $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4}{3}$.

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6})\cdot(-\frac{24}{13})$

β) $(-4+\frac{7}{2}-\frac{3}{5})\cdot(-\frac{10}{11})$

γ) $(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}-\frac{7}{6}+1)\cdot(-\frac{4}{19})$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-3 + 2\cdot[-(-6 + 7) - (-4)] +$
$+ 6\cdot(13 - 9)$

β) $\frac{1}{2} - 3\cdot[-4\cdot(7 - \frac{6}{4}) - (+2)] + 2\cdot(-\frac{1}{4})$

γ) $-\{-[-7\cdot(-1)]+2\}-3\cdot[-4\cdot(7-8)]$

9. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $[-4+(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{4}{5})+\frac{1}{3}]\cdot(-\frac{15}{16})$

β) $[(-\frac{3}{4})+(-\frac{2}{3})]\cdot[-\frac{4}{3}-(-\frac{3}{2})]$

10. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-4+\{-3\cdot[5-4\cdot(8-19)-(-3)]+$
$+4\}-25$

β) $\frac{7}{2}-\{-2\cdot\{-4\cdot[5-(-3)]\}+4\}$

γ) $-6-[-4\cdot(\frac{1}{2}-\frac{4}{3})-2\cdot(\frac{5}{6}-\frac{1}{2})]-$
$-4\cdot(\frac{5}{6}-\frac{7}{2})$

1.7 Γινόμενο πολλών παραγόντων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς υπολογίζουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων διαφόρων του μηδενός;

Απαντήσεις

1. Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων διαφόρων του μηδενός αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις απόλυτες τιμές των παραγόντων και στο γινόμενο αυτό να βάλουμε το πρόσημο (+), αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο (ζυγό) ή το πρόσημο (–), αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό (μονό).

π.χ. $(-3)\cdot(+4)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(-1)=+120$
$(+6)\cdot(-0{,}5)\cdot(-7)\cdot(+3)\cdot(-5)=-315$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι ίσος με μηδέν τότε το γινόμενο των παραγόντων είναι ίσο με μηδέν.

π.χ. $(-\frac{7}{5})\cdot(+6)\cdot(-\frac{9}{4})\cdot(+0{,}23)\cdot0\cdot(-\frac{2}{7})=0$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:

α) $(-5)\cdot(-6)\cdot7\cdot(-15)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot5\cdot(-6)$

β) $(-\frac{3}{4})\cdot(-1)\cdot(-7)\cdot6\cdot(-4)\cdot(-\frac{4}{3})$

Λύση

α) Το πρόσημο είναι (+), γιατί το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 4 (άρτιο).
β) Το πρόσημο είναι (–), γιατί το πλή-

θος των αρνητικών παραγόντων είναι 5 (περιττό).

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-\frac{1}{2})\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}$

β) $(-3)\cdot 5\cdot 12\cdot(-\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot(-\frac{1}{5})$

γ) $(-7)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{14}\cdot(-2)\cdot(-3)$

δ) $(-\frac{1}{24})\cdot(-6)\cdot(-\frac{1}{8})\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot 2$

Λύση

α) Το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 3 (περιττό), άρα το πρόσημο είναι (−) οπότε:

$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}=-(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2})=$
$=-(1\cdot 2)=-2$

β) Το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 4 (άρτιο) άρα το πρόσημο είναι (+):

$(-3)\cdot 5\cdot 12\cdot(-\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot(-\frac{1}{5})=$
$=3\cdot 5\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{5}=$
$=3\cdot\frac{1}{9}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\cdot 12\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 3\cdot 1=$
$=1\cdot 1\cdot 1=1$

Όμοια:

γ) $(-7)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{14}\cdot(-2)\cdot(-3)=$
$=7\cdot 1\cdot\frac{1}{14}\cdot 2\cdot 3=14\cdot\frac{1}{14}\cdot 3=1\cdot 3=3$

δ) $(-\frac{1}{24})\cdot(-6)\cdot(-\frac{1}{8})\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot 2=$
$=-(\frac{1}{24}\cdot 6\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\cdot 3\cdot 2)=$
$=-(\frac{1}{24}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 3)=$
$=-(\frac{1}{24}\cdot 24\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 3)=-(1\cdot\frac{1}{4}\cdot 3)=-\frac{3}{4}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$(-3)\cdot(-\frac{1}{4})\cdot 4\cdot(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})\cdot(-4)\cdot$
$\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 9-(-5)\cdot 10\cdot(-\frac{1}{2})$

Λύση

$(-3)\cdot(-\frac{1}{4})\cdot 4\cdot(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})\cdot(-4)\cdot$
$\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 9-(-5)\cdot 10\cdot(-\frac{1}{2})=$
$=-(3\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 9)-$
$-(+5\cdot 10\cdot\frac{1}{2})=$

$=(-1)+(-3\cdot 2)-(+25)=$
$=(-1)+(-6)+(-25)=-32$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$A=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2\alpha-2)\cdot(3\alpha+3)$

$B=(\beta-1)\cdot(3\beta-2)\cdot(2\beta-3)\cdot(3\beta-4)\cdot$
$\cdot(4\beta-5)\cdot(-\frac{1}{175})$

όταν $\alpha=+1$, $\beta=-1$.

Λύση

$A=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(2\alpha-2)\cdot(3\alpha+3)=$
$=1\cdot(1-1)\cdot(2\cdot 1-2)\cdot(3\cdot 1+3)=$
$=1\cdot 0\cdot(2-2)\cdot(3+3)=$
$=1\cdot 0\cdot 0\cdot 6=0$

$B=(\beta-1)\cdot(3\beta-2)\cdot(2\beta-3)\cdot(3\beta-4)\cdot$
$\cdot(4\beta-5)\cdot(-\frac{1}{175})=$
$=[(-1)-1]\cdot[3(-1)-2]\cdot[2(-1)-3]\cdot$
$\cdot[3(-1)-4]\cdot[4(-1)-5]\cdot(-\frac{1}{175})=$
$=(-1-1)\cdot(-3-2)\cdot(-2-3)\cdot(-3-4)\cdot$
$\cdot(-4-5)\cdot(-\frac{1}{175})=$
$=(-2)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-7)\cdot(-9)\cdot(-\frac{1}{175})=$

$= 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{1}{175} = 2 \cdot 175 \cdot 9 \cdot \frac{1}{175} =$

$= 175 \cdot \frac{1}{175} \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 18 = 18$

5. Να βρείτε τι πρόσημο έχουν οι αριθμοί α, β, γ, αν ισχύουν οι ισότητες:

α) $(-3) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot \alpha \cdot (-2) = -30$

β) $(-\frac{1}{5}) \cdot 25 \cdot \beta \cdot (-4) = 200$

γ) $(-2) \cdot (-\frac{1}{10}) \cdot 0{,}2 \cdot \gamma \cdot 125 \cdot (-1) = -4$

Λύση

α) Είναι:

$(-3) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot \alpha \cdot (-2) = -30$ ή

$3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \alpha = -30$

Άρα ο α έχει πρόσημο (−).

β) Είναι:

$(-\frac{1}{5}) \cdot 25 \cdot \beta \cdot (-4) = 200$ ή

$\frac{1}{5} \cdot 25 \cdot \beta \cdot 4 = 200$

Άρα ο β έχει πρόσημο (+).

γ) Είναι:

$(-2) \cdot (-\frac{1}{10}) \cdot 0{,}2 \cdot \gamma \cdot 125 \cdot (-1) = -4$ ή

ή $-2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 0{,}2 \cdot \gamma \cdot 125 \cdot 1 = -4$

Άρα ο γ έχει πρόσημο (+).

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων με δύο τρόπους:

α) $-[-[-[-4(-2)]]]$

β) $-[-[-[-[-2(-\frac{1}{2})]]]]$

Λύση

α) $-[-[-[-4(-2)]]] = -[-[-(+8)]] =$

$= -[-(-8)] = -(+8) = -8$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράσταση αυτή και με τον εξής τρόπο: Μετρούμε τα (−). Είναι 5. Άρα το πρόσημο είναι (−). Οπότε:

$-[-[-[-4(-2)]]] = -4 \cdot 2 = -8$

β) $-[-[-[-[-2(-\frac{1}{2})]]]] = -[-[-[-(2 \cdot \frac{1}{2})]]] =$

$= -[-[-(-1)]] = -[-(+1)] = -(-1) =$

$= +1$

Αλλιώς μετρούμε τα (−). Αυτά είναι 6. Οπότε:

$-[-[-[-[-2(-\frac{1}{2})]]]] = +2 \cdot \frac{1}{2} = +1$

7. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$A = x \cdot y \cdot \omega$

$B = x \cdot y \cdot \omega - (x-1) \cdot (y-1) \cdot (\omega - 1)$

$\Gamma = (x-2) \cdot (y-2) \cdot (\omega - 2)$

αν $x = -1,\ y = -2,\ \omega = -3$.

Λύση

$A = x \cdot y \cdot \omega = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) =$

$= -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6$

$B = x \cdot y \cdot \omega - (x-1) \cdot (y-1) \cdot (\omega - 1) =$

$= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - (-1-1) \cdot (-2-1) \cdot (-3-1) =$

$= -1 \cdot 2 \cdot 3 - (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) =$

$= -6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = -6 + 24 = 18$

$\Gamma = (x-2) \cdot (y-2) \cdot (\omega - 2) =$

$= (-1-2) \cdot (-2-2) \cdot (-3-2) =$

$= (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = -3 \cdot 4 \cdot 5 =$

$= -60$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα γινόμενα:

α) $(-3)\cdot(-4)\cdot(-8)\cdot(-3)\cdot(-32)$

β) $(-18)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(-\frac{1}{2})$

γ) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-\frac{4}{5})\cdot(-5)\cdot 4\cdot(-\frac{1}{16})$

Λύση

α) $(-3)\cdot(-4)\cdot(-8)\cdot(-3)\cdot(-3) =$
$= -3\cdot 4\cdot 8\cdot 32 = \ldots$

β) $(-18)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(-\frac{1}{2}) =$
$= +18\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \ldots$

γ) ...

2. Να βρείτε τι πρόσημο πρέπει να έχει ο α για να είναι το παρακάτω γινόμενο αρνητικό.

$(-4)\cdot\alpha\cdot(-5)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot 4\cdot 7\cdot(-0{,}25)\cdot 6\cdot$
$\cdot(-\frac{4}{5})$

Λύση

Είναι:

$(-4)\cdot\alpha\cdot(-5)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot 4\cdot 7\cdot(-0{,}25)\cdot 6\cdot(-\frac{4}{5})$

Μετρούμε τα (—). Αυτά είναι 5. Άρα....

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot(-\frac{4}{3}) - (-2)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot(-18)\cdot 2 +$
$+ (-4)\cdot(-\frac{1}{4})\cdot 3$

β) $\frac{4}{3}\cdot(-2)\cdot(-1) + (-4)\cdot(-\frac{1}{8})\cdot 2 -$
$- 4\cdot(-\frac{1}{2})$

Λύση

α) $\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot(-\frac{4}{3}) - (-2)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot(-18)\cdot 2 +$
$+ (-4)\cdot(-\frac{1}{4})\cdot 3 =$
$= (+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}) - (-2\cdot\frac{1}{9}\cdot 18\cdot 2) +$
$+ (+4\cdot\frac{1}{4}\cdot 3) = \ldots$

β) ...

4. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $4x y\omega - 2\cdot(x+1)\cdot y$

β) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) +$
$+ (y+1)\cdot(y+2) + (\omega+1)\cdot y$

αν $x = -1$, $y = 2$, $\omega = -2$.

Λύση

α) $4x\cdot y\cdot\omega - 2\cdot(x+1)\cdot y =$
$= 4\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-2) - 2\cdot(-1+1)\cdot 2 =$
$= \ldots$

β) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) +$
$+ (y+1)\cdot(y+2) + (\omega+1)\cdot y =$
$= (-1+1)\cdot(-1+2)\cdot(-1+3) +$
$+ (2+1)\cdot(2+2) + (-2+1)\cdot 2 =$
$= \ldots$

5. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot(\alpha+3)\cdot$
$\cdot(\alpha+4)$

β) $\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot(\alpha-3)\cdot(\alpha-4)$

αν $\alpha = -5$.

Λύση

α) $\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot(\alpha+3)\cdot$
$\cdot(\alpha+4) =$
$= -5\cdot(-5+1)\cdot(-5+2)\cdot(-5+3)\cdot$
$\cdot(-5+4) = \ldots$

β) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το πρόσημο των γινομένων:

α) $(-3)\cdot(-10)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 4\cdot 5\cdot(-7)\cdot(-1)$

β) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

γ) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$

2. Να βρείτε το πρόσημο των α, β, γ, δ για να ισχύει:

α) $(-3)\cdot \alpha\cdot(-4)\cdot(-\frac{8}{9})\cdot 5\cdot(-\frac{1}{25}) > 0$

β) $(-4)\cdot(-3)\cdot(-0{,}75)\cdot \frac{3}{4}\cdot \beta > 0$

γ) $(-8)\cdot(-0{,}1)\cdot 4{,}5\cdot(-\frac{1}{3})\cdot \gamma < 0$

δ) $4\cdot \delta\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-\frac{1}{4})\cdot(-1) < 0$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-\frac{1}{5})\cdot(-25)\cdot(-\frac{1}{3})\cdot(-9)\cdot(-\frac{1}{3})$

β) $4\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-\frac{1}{6})$

γ) $(-1)\cdot(-\frac{5}{6})\cdot(-2)\cdot\frac{1}{5}\cdot(-9)$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-4)\cdot(-3)\cdot\frac{4}{5}\cdot(-\frac{1}{16})\cdot(-50)$

β) $(-3)\cdot(-7)\cdot(-\frac{1}{14})\cdot(-\frac{2}{3})$

γ) $(-2)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot(-\frac{18}{5})\cdot(-5)\cdot(-\frac{1}{4})$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = (-2)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 4 - 3\cdot(-2)\cdot(-\frac{1}{6}) + $
$+ (-\frac{1}{2})\cdot 4$

$B = (-1)\cdot(-\frac{11}{18})\cdot(-9)\cdot 2 - (-\frac{3}{8})\cdot(-2)\cdot$
$\cdot 2\cdot(-4)$

$\Gamma = \frac{7}{5}\cdot(-10) - (-2)\cdot(-3)\cdot 6\cdot\frac{7}{36} -$
$- (-1)\cdot(-2)$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = (-3)\cdot(-\frac{1}{9})\cdot 18 - (-2)\cdot(-4)\cdot(-\frac{7}{8})$

$B = (-1)\cdot(-\frac{4}{3})\cdot\frac{3}{4} - 4\cdot(-\frac{3}{8})\cdot(-4) +$
$+ (-1)\cdot(-3)$

$\Gamma = (-\frac{7}{8})\cdot(-4)\cdot(-\frac{1}{14})\cdot 4 - 9\cdot(-\frac{5}{3})\cdot(-\frac{4}{3})$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων αν $x = -1$:

$A = (-x)\cdot(-x+2)\cdot(-x+3)$

$B = (x-2)\cdot(x-3)\cdot(-\frac{1}{x})$

$\Gamma = (x+1)\cdot(x-100)\cdot(x+4)\cdot(x-3)$

8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων αν $\alpha = -2$, $\beta = 4$:

$A = (\alpha-2)\cdot(\alpha+3)\cdot(\alpha+1)\cdot(-\beta)$

$B = (\beta-5)\cdot(\beta-6)\cdot(\beta-7)\cdot(\beta-8)\cdot$
$\cdot(-\alpha)$

$\Gamma = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$\Delta = (1-\alpha)\cdot(1+\alpha)\cdot(-1-\alpha)\cdot(-2-\alpha)$

$E = (\beta-3)\cdot(-\beta+4)\cdot(\alpha+\beta-2)$

1.8 Διαίρεση ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς διαιρούμε δύο ρητούς;

Απαντήσεις

1. Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς κάνουμε ένα από τα παρακάτω:

α) Διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο που βρίσκουμε βάζουμε πρόσημο το **(+)** αν είναι ομόσημοι ή το **(–)** αν είναι ετερόσημοι.

π. χ. $(-4) : (-2) = +2$, $(-4) : 2 = -2$

ή

β) Βρίσκουμε τον αντίστροφο του διαιρέτη και τον πολλαπλασιάζουμε με το διαιρετέο.

π.χ. $(-\frac{2}{3}) : (-5) = (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{1}{5}) = +\frac{2}{15}$

$(+\frac{4}{3}) : (-\frac{1}{2}) = (+\frac{4}{3}) \cdot (-2) = -\frac{8}{3}$

2. Μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν;

2. Η διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δε γίνεται.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις.

α) $18 : (-6)$ **β)** $(-24) : (-6)$

γ) $(+81) : (+27)$ **δ)** $(-48) : 4$

Λύση

α) $18 : (-6) = -(18 : 6) = -3$

β) $(-24) : (-6) = +(24 : 6) = 4$

γ) $(+81) : (+27) = +(81 : 27) = +3$

δ) $(-48) : 4 = -(48 : 4) = -12$

2. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

α) $(-\frac{3}{4}) : (-\frac{5}{4})$ **β)** $(-\frac{1}{2}) : \frac{9}{4}$

γ) $\frac{4}{3} : (-\frac{5}{6})$ **δ)** $(+\frac{3}{8}) : (+\frac{5}{12})$

Λύση

α) $(-\frac{3}{4}) : (-\frac{5}{4}) = (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{4}{5}) =$

$= +(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$

β) $(-\frac{1}{2}) : \frac{9}{4} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{4}{9} = -(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}) = -\frac{2}{9}$

γ) $\frac{4}{3} : (-\frac{5}{6}) = \frac{4}{3} \cdot (-\frac{6}{5}) = -(\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}) = -\frac{8}{5}$

δ) $(+\frac{3}{8}) : (+\frac{5}{12}) = (+\frac{3}{8}) \cdot (+\frac{12}{5}) =$

$= +(\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{5}) = \frac{9}{10}$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\frac{-2,5}{0,5}$, β) $\frac{-1,8}{-0,3}$, γ) $\frac{-8,4}{-1,4}$, δ) $\frac{6,3}{-2,1}$

Λύση

α) $\frac{-2,5}{0,5} = -(2,5:0,5) = -5$

β) $\frac{-1,8}{-0,3} = +(1,8:0,3) = +6$

γ) $\frac{-8,4}{-1,4} = +(8,4:1,4) = +6$

δ) $\frac{6,3}{-2,1} = -(6,3:2,1) = -3$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{-4}{5} + \frac{3}{-5} - \frac{-6}{5}$ β) $\frac{-3}{8} + \frac{3}{-2} + \frac{-5}{-2}$

γ) $\frac{-6}{-5} - \frac{4}{-3} + \frac{-11}{15}$

Λύση

α) $\frac{-4}{5} + \frac{3}{-5} - \frac{-6}{5} = -\frac{4}{5} + (-\frac{3}{5}) - (-\frac{6}{5}) =$

$= -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

β) $\frac{-3}{8} + \frac{3}{-2} + \frac{-5}{-2} = -\frac{3}{8} + (-\frac{3}{2}) + \frac{5}{2} =$

$= -\frac{3}{8} - \frac{12}{8} + \frac{20}{8} = \frac{5}{8}$

γ) $\frac{-6}{-5} - \frac{4}{-3} + \frac{-11}{15} = \frac{6}{5} - (-\frac{4}{3}) + (-\frac{11}{15}) =$

$= \frac{18}{15} + \frac{20}{15} - \frac{11}{15} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(-\frac{3}{7} + \frac{5}{7}) : (-\frac{8}{7})$

β) $(-\frac{6}{3} - \frac{5}{4}) : (-4)$

γ) $(-\frac{4}{5} + \frac{7}{2}) : (-\frac{9}{10})$

Λύση

α) $(-\frac{3}{7} + \frac{5}{7}) : (-\frac{8}{7}) = \frac{2}{7} : (-\frac{8}{7}) =$

$= \frac{2}{7} \cdot (-\frac{7}{8}) = -\frac{1}{4}$

β) $(-\frac{6}{3} - \frac{5}{4}) : (-4) = (-\frac{24}{12} - \frac{15}{12}) : (-4) =$

$= (-\frac{39}{12}) \cdot (-\frac{1}{4}) = \frac{39}{48}$

γ) $(-\frac{4}{5} + \frac{7}{2}) : (-\frac{9}{10}) =$

$= (-\frac{8}{10} + \frac{35}{10}) : (-\frac{9}{10}) = \frac{27}{10} : (-\frac{9}{10}) =$

$= \frac{27}{10} \cdot (-\frac{10}{9}) = -3$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $[-\frac{4}{3} - (\frac{2}{4} + \frac{3}{-2})] : (-1)$

β) $[-(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}] : (-\frac{5}{8})$

γ) $[-3 - (-2) + 2 \cdot (-6 + 3)] : (-4)$

Λύση

α) $[-\frac{4}{3} - (\frac{2}{4} + \frac{3}{-2})] : (-1) =$

$= [-\frac{4}{3} - (\frac{2}{4} - \frac{3}{2})] : (-1) =$

$= (-\frac{4}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{2}) : (-1) =$

$= (-\frac{16}{12} - \frac{6}{12} + \frac{18}{12}) : (-1) = (-\frac{4}{12}) : (-1) =$

$= (-\frac{4}{12}) \cdot (-1) = \frac{1}{3}$

β) $[-(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}) + \frac{3}{2}] : (-\frac{5}{8}) =$

$= (-\frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2})] : (-\frac{5}{8}) =$

$= (-\frac{7}{8} + \frac{6}{8} + \frac{12}{8}) : (-\frac{5}{8}) =$

$= (+\frac{11}{8}) : (-\frac{5}{8}) = \frac{11}{8} \cdot (-\frac{8}{5}) = -\frac{11}{5}$

γ) $[-3 - (-2) + 2 \cdot (-6 + 3)] : (-4) =$

$= [-3 + 2 + 2 \cdot (-3)] : (-4) =$

$= (-3 + 2 - 6) : (-4) = (-7) : (-4) =$

$= (-7) \cdot (-\frac{1}{4}) = \frac{7}{4}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-3x = 12$ β) $4x = -16$

γ) $-\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$ δ) $\frac{3}{4}x = -\frac{7}{4}$

Λύση

α) $-3x = 12$ ή $x = 12 : (-3)$ ή $x = -12 : 3$ ή $x = -4$

β) $4x = -16$ ή $x = -16 : 4$ ή $x = -4$

γ) $-\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$ ή $x = \frac{4}{3} : (-\frac{1}{2})$ ή $x = -\frac{4}{3} \cdot 2$ ή $x = -\frac{8}{3}$

δ) $\frac{3}{4}x = -\frac{7}{4}$ ή $x = (-\frac{7}{4}) : \frac{3}{4}$ ή $x = -\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{3}$ ή $x = -\frac{7}{3}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x : (-3) = -15$ β) $x : (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3}$

γ) $\frac{x}{-5} = -3$ δ) $\frac{x}{7} = -\frac{7}{2}$

Λύση

α) $x : (-3) = -15$ ή $x = (-15) \cdot (-3)$ ή $x = 45$

β) $x : (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3}$ ή $x = -\frac{4}{3} \cdot (-\frac{1}{2})$ ή $x = \frac{2}{3}$

γ) $\frac{x}{-5} = -3$ ή $x = (-3) \cdot (-5)$ ή $x = 15$

δ) $\frac{x}{7} = -\frac{7}{2}$ ή $x = (-\frac{7}{2}) \cdot 7$ ή $x = -\frac{49}{2}$

9. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $[(-3) \cdot (-4) \cdot 5] : [(-3) \cdot (-2)]$

β) $[(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)] : [(-4) \cdot (-4)]$

Λύση

α) $[(-3) \cdot (-4) \cdot 5] : [(-3) \cdot (-2)] = 60 : 6 = 10$

β) $[(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)] : [(-4) \cdot (-4)] = 256 : 16 = 16$

10. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = -2\,[(-10) : 2 - 4\,(-3)] : [-6 - (-3)]$

$B = -[-(-4) \cdot (-2) - 2 \cdot (-\frac{1}{2})] : [-3 - 2 : (-\frac{2}{3})]$

$\Gamma = [-4 : (-\frac{4}{3}) - 7 \cdot (-2)] : [-2 \cdot (8 - 5) - 4 \cdot (-2)]$

Λύση

$A = -2\,[(-10) : 2 - 4\,(-3)] : [-6 - (-3)] =$
$= -2\,(-5 + 12) : (-6 + 3) =$
$= -2\,(+7) : (-3) = (-14) : (-3) =$
$= 14 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

$B = -[-(-4) \cdot (-2) - 2 \cdot (-\frac{1}{2})] : [-3 - 2 : (-\frac{2}{3})] =$
$= -(-8 + 1) : [-3 - 2 \cdot (-\frac{3}{2})] =$
$= -(-7) : (-3 + 3) = 7 : 0$

Δεν υπάρχει αποτέλεσμα γιατί δεν ορίζεται η διαίρεση με διαιρέτη το 0.

$\Gamma = [-4 : (-\frac{4}{3}) - 7 \cdot (-2)] : [-2 \cdot (8 - 5) - 4 \cdot (-2)] =$
$= [-4 \cdot (-\frac{3}{4}) + 14] : [-2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2)] =$
$= (3 + 14) : (-6 + 8) = 17 : 2 =$
$= 17 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) (- 18) : (- 3)   β) (- 34) : 2

γ) (- 15) : (- 10)   δ) (- 4) : 2

ε) (- 64) : (- 4)   στ) 108 : (- 12)

Λύση

α) (- 18) : (- 3) = + (18 : 3) = ...

β) (- 34) : 2 = - (34 : 2) = ...

γ) ... , δ) ... , ε) ... , στ) ...

2. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\frac{-4{,}8}{0{,}6}$, β) $\frac{-96}{0{,}16}$, γ) $\frac{-7{,}8}{-3{,}9}$, δ) $\frac{-12{,}432}{-0{,}2}$

Λύση

α) $\frac{-4{,}8}{0{,}6} = -(4{,}8 : 0{,}6) = \ldots$

β) $\frac{-96}{0{,}16} = -(9{,}6 : 0{,}16) = \ldots$

γ) ... , δ) ...

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $(-\frac{48}{18}) : (-\frac{12}{24})$ β) $(-\frac{4}{5}) : (+\frac{3}{10})$

γ) $(-\frac{3}{2}) : (+\frac{5}{8})$ δ) $(-\frac{11}{15}) : (+\frac{3}{5})$

ε) $\frac{9}{8} : (-\frac{6}{2})$ στ) $(-35) : (-\frac{5}{7})$

Λύση

α) $(-\frac{48}{18}) : (-\frac{12}{24}) = (-\frac{48}{18}) \cdot (-\frac{24}{12}) =$

$= +(\frac{48}{18} \cdot \frac{24}{12}) = \ldots$

β) $(-\frac{4}{5}) : (+\frac{3}{10}) = (-\frac{4}{5}) \cdot (+\frac{10}{3}) =$

$= -(\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3}) = \ldots$

γ) ... , δ) ... , ε) ... , στ) ...

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{-3}{2} - \frac{-7}{-5} + \frac{-7}{-2} - \frac{-9}{10}$

β) $\frac{-4}{3} + \frac{-7}{4} - \frac{2}{-3}$

γ) $\frac{4}{-5} - \frac{-3}{7} + \frac{-29}{35}$

δ) $\frac{-4}{5} + \frac{-3}{-4} - \frac{-13}{20}$

Λύση

α) $\frac{-3}{2} - \frac{-7}{-5} + \frac{-7}{-2} - \frac{-9}{10} =$

$= -\frac{3}{2} - (+\frac{7}{5}) + (+\frac{7}{2}) - (-\frac{9}{10}) =$

$= -\frac{3}{2} - \frac{7}{5} + \frac{7}{2} + \frac{9}{10} = \ldots$

β) $\frac{-4}{3} + \frac{-7}{4} - \frac{2}{-3} =$

$= -\frac{4}{3} + (-\frac{7}{4}) - (-\frac{2}{3}) = \ldots$

γ) ... , δ) ...

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}) : (\frac{4}{3} - \frac{1}{2})$

β) $(-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}) : (\frac{3}{4} - \frac{1}{5})$

γ) $(-\frac{7}{2} + \frac{1}{3}) : (-\frac{4}{3} - \frac{5}{6})$

δ) $(-\frac{8}{3}) : (-\frac{4}{5} + \frac{11}{15} - \frac{4}{3})$

Λύση

α) $(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}) : (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) =$

$= (-\frac{9}{12} - \frac{8}{12}) : (\frac{8}{6} - \frac{3}{6}) =$

$= (-\frac{17}{12}) : (+\frac{5}{6}) = (-\frac{17}{12}) \cdot (+\frac{6}{5}) = \ldots$

β) $(-\frac{1}{4} + \frac{2}{5}) : (\frac{3}{4} - \frac{1}{5}) =$

$= (-\frac{5}{20} + \frac{8}{20}) : (\frac{15}{20} - \frac{4}{20}) = \ldots$

γ) ... , δ) ...

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $[-4-(3+7)] : [(8-13)-(4-7)]$

β) $[-\frac{1}{2}+(\frac{13}{2}-\frac{5}{6})-\frac{4}{3}] : (-\frac{7}{6})$

γ) $[-4-(-\frac{7}{6}+\frac{13}{2})] : [-1+(\frac{3}{2}-\frac{1}{6})]$

Λύση

α) $[-4-(3+7)] : [(8-13)-(4-7)] =$
$= (-4-3-7) : (8-13-4+7) = \ldots$

β) $[-\frac{1}{2}+(\frac{13}{2}-\frac{5}{6})-\frac{4}{3}] : (-\frac{7}{6}) =$
$= (-\frac{1}{2}+\frac{13}{2}-\frac{5}{6}-\frac{4}{3}) : (-\frac{7}{6}) = \ldots$

γ) ...

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}$ β) $\dfrac{4-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}-1}$

γ) $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{7}{5}+2}{-3-\frac{6}{5}}$ δ) $\dfrac{\frac{7}{2}-4+\frac{10}{8}}{1-\frac{4}{6}-\frac{2}{3}}$

Λύση

α) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}} =$

$= (\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{5}{6}) : (\frac{3}{4}-\frac{5}{4}) = \ldots$

β) $\dfrac{4-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}-1} =$

$= (4-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}) : (\frac{1}{6}-1) = \ldots$

γ) ... , δ) ...

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(-3)\cdot x = -4$ β) $(-\frac{10}{7})\cdot x = \frac{4}{3}$

γ) $\frac{1}{2}\cdot x = -\frac{4}{3}$ δ) $(-\frac{5}{6})\cdot x = -\frac{7}{3}$

ε) $-\frac{8}{3}\cdot x = 5$ στ) $\frac{7}{8}\cdot x = -3$

Λύση

α) $(-3)\cdot x = -4$ ή $x = (-4) : (-3)$ ή ...

β) $(-\frac{10}{7})\cdot x = \frac{4}{3}$ ή $x = \frac{4}{3} : (-\frac{10}{7})$ ή ...

γ) ...

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x : (-\frac{3}{7}) = 1$ β) $x : (-\frac{4}{7}) = -\frac{2}{3}$

γ) $x : (-2) = \frac{1}{2}$ δ) $x : (-\frac{3}{4}) = -3$

ε) $x : 5 = \frac{5}{2}$ στ) $x : \frac{7}{2} = -\frac{2}{5}$

Λύση

α) $x : (-\frac{3}{7}) = 1$ ή $x = 1\cdot(-\frac{3}{7})$ ή...

β) $x : (-\frac{4}{7}) = -\frac{2}{3}$ ή $x = (-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{4}{7})$ ή...

γ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) (- 7) : (- 3,5)
β) (- 15,3) : (+ 5,1)
γ) (- 21) : (- 3,5)
δ) (- 32,85) : (- 3,65)
ε) (+ 19,6) : (- 9,81)
στ) (- 105) : (+ 7)

2. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $\left(\frac{-1}{2}\right) : (-3)$ β) $\left(\frac{3}{-4}\right) : \left(\frac{-1}{2}\right)$

γ) $\left(\frac{2}{-3}\right) : \left(\frac{-4}{5}\right)$ δ) $\left(\frac{-1}{4}\right) : (-2)$

ε) $\left(\frac{-5}{-7}\right) : (-4)$ στ) $\left(\frac{4}{-3}\right) : \left(\frac{-10}{-9}\right)$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\frac{-5}{3}$, β) $\frac{-18}{-6}$, γ) $\frac{-36}{2}$, δ) $\frac{144}{-12}$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(-\frac{7}{8} + 1\right) : \left(-\frac{4}{7} - \frac{4}{3}\right)$

β) $\left(-8 + 4\frac{1}{2}\right) : \left(3 - 2\frac{1}{4}\right)$

γ) $\left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{8}{5} - \frac{3}{7}\right)$

δ) $\left(1 - \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left[(-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)\right] : \left[(-4) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)\right]$

β) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-5)\right] : \left[\frac{4}{3} \cdot (-1)\right]$

γ) $\left[(-3) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)\right] : \left[\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1)\right]$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2x : y$

β) $(1 - x) : (2 + y)$

γ) $(4 + 3x) : (x + y)$

δ) $\left(\frac{5}{6} : x\right) : (-y)$

όταν $x = -\frac{1}{2}$, $y = 4$.

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $[-14 - (4 - 11)] : [(-2) \cdot 7 - 2(4 + 3)]$

β) $\left[-\frac{5}{3} - 2\left(\frac{6}{5} + \frac{1}{2}\right)\right] : \left[-3\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\right) - 1\right]$

γ) $\left[-\frac{7}{8} - 4\left(-\frac{3}{4} + 1\right)\right] : \left[(-3)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{3}\right]$

δ) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 2\right] : \left[\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right) - 1\right]$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}}{-2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{7}{2}}$ β) $\dfrac{-\frac{3}{4} + \frac{7}{6}}{-1 + \frac{3}{4}}$

γ) $\dfrac{-\frac{4}{5} + (-2) \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$ δ) $\dfrac{\frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{11}{8}\right)}{-4}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(-5)x = -5$ β) $\left(-\frac{1}{2}\right)x = -\frac{4}{3}$

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)x = +3$ δ) $(-7)x = +\frac{1}{2}$

ε) $3x = -\frac{4}{7}$ στ) $\frac{5}{6}x = -\frac{1}{2}$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ β) $x : \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

γ) $x : (-3) = -1$ δ) $x : \left(+\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{6}$

1.9 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό αριθμό

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζεται δύναμη με βάση ρητό αριθμό και με εκθέτη φυσικό και με τι ισούται;

1. Ο αριθμός α^{ν} ονομάζεται **δύναμη** με βάση το ρητό αριθμό **α** και εκθέτη το φυσικό αριθμό **ν**. Ο αριθμός α^{ν} ισούται με το γινόμενο του ρητού α με τον εαυτό του ν φορές, δηλαδή

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots\ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

2. Πώς καθορίζεται το πρόσημο της δύναμης α^{ν};

2. Το πρόσημο της δύναμης α^{ν} καθορίζεται ως εξής:

α) Εάν η βάση α είναι θετικός αριθμός, τότε η δύναμη α^{ν} είναι θετικός αριθμός.

β) Εάν η βάση α είναι αρνητικός αριθμός, τότε, εάν μεν ο εκθέτης είναι άρτιος, η δύναμη είναι θετικός αριθμός, εάν δε ο εκθέτης είναι περιττός, τότε η δύναμη είναι αρνητικός.

<u>**Συμβολικά:**</u>

1) Εάν $\alpha > 0$ τότε $\alpha^{\nu} > 0$

2) Εάν $\alpha < 0$ και ν άρτιος τότε $\alpha^{\nu} > 0$

3) Εαν $\alpha < 0$ και ν περιττός τότε $\alpha^{\nu} < 0$

3. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο δυνάμεις που έχουν ίδια βάση;

3. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, δημιουργούμε μία δύναμη που έχει βάση την κοινή και εκθέτη το άθροισμα των εκθετών τους.

<u>Συμβολικά:</u> $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

4. Πώς διαιρούμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση;

4. Για να διαιρέσουμε δύο δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, δημιουργούμε μία δύναμη που έχει βάση την κοινή και εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

Συμβολικά:

$$\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa - \lambda} \text{ με } \kappa > \lambda$$

5. Πώς υψώνουμε ένα γινόμενο δύο αριθμών σε έναν εκθέτη;

5. Για να υψώσουμε ένα γινόμενο δύο αριθμών σε έναν εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

Συμβολικά: $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$

6. Πώς υψώνουμε ένα πηλίκο δύο αριθμών σε έναν εκθέτη;

6. Για να υψώσουμε ένα πηλίκο δύο αριθμών σε έναν εκθέτη, υψώνουμε και τους δύο όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

Συμβολικά:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$$

7. Πώς υψώνουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη;

7. Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, δημιουργούμε μία δύναμη με βάση τη βάση της δύναμης και εκθέτη βάζουμε το γινόμενο των εκθετών.

Συμβολικά: $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

α) $(-1)^3$, **β)** $(-1)^4$, **γ)** $(-1)^5$,

δ) $(-2)^1$, **ε)** $(-2)^2$, **στ)** $(-2)^3$

Λύση

α) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

β) $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
$= +1$

γ) $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$
$= -1$

δ) $(-2)^1 = -2$

ε) $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

στ) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

2. Να συγκριθούν οι παρακάτω αριθμοί:

α) $(-3)^2$ και -3^2 β) $(-1)^3$ και 1

γ) $(-4)^3$ και 64 δ) $(-5)^5$ και 5^5

ε) $(-4)^4$ και 4^4 στ) $(-7)^2$ και 7^2

Λύση

α) $(-3)^2 > -3^2$ γιατί ο $(-3)^2$ είναι θετικός ενώ ο -3^2 είναι αρνητικός αριθμός.

β) $(-1)^3 < 1$ γιατί ο $(-1)^3$ είναι αρνητικός.

γ) $(-4)^3 < 64$ γιατί ο $(-4)^3$ είναι αρνητικός.

δ) $(-5)^5 < 5^5$ γιατί ο $(-5)^5$ είναι αρνητικός.

ε) $(-4)^4 = 4^4$ γιατί ο $(-4)^4$ είναι θετικός.

στ) $(-7)^2 = 7^2$ γιατί ο $(-7)^2$ είναι θετικός.

3. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$ β) $(-3)^3 \cdot (-3)^5$

γ) $5^7 \cdot 5^2$ δ) $(-\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{1}{2})^4$

Λύση

α) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7 = -2^7$

β) $(-3)^3 \cdot (-3)^5 = (-3)^{3+5} = (-3)^8 = 3^8$

γ) $5^7 \cdot 5^2 = 5^{7+2} = 5^9$

δ) $(-\frac{1}{2})^3 \cdot (-\frac{1}{2})^4 = (-\frac{1}{2})^{3+4} = (-\frac{1}{2})^7 = -(\frac{1}{2})^7$

4. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-3)^4 \cdot (-2)^4$, β) $(-4)^3 \cdot (-2)^3$,

γ) $(-\frac{4}{3})^2 \cdot (-\frac{3}{4})^2$, δ) $(\frac{5}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{10})^3$

Λύση

α) $(-3)^4 \cdot (-2)^4 = [(-3) \cdot (-2)]^4 = 6^4$

β) $(-4)^3 \cdot (-2)^3 = [(-4) \cdot (-2)]^3 = 8^3$

γ) $(-\frac{4}{3})^2 \cdot (-\frac{3}{4})^2 = [(-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{3}{4})]^2 = 1^2 = 1$

δ) $(\frac{5}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{10})^3 = [(\frac{5}{3}) \cdot (-\frac{3}{10})]^3 = (-\frac{1}{2})^3 = -(\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{2^3}$

5. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(\frac{4}{3})^5 : (\frac{4}{3})^3$, β) $(-\frac{2}{3})^7 : (-\frac{2}{3})^3$

γ) $(-\frac{8}{5})^3 : (-\frac{8}{5})$, δ) $(-7)^3 : (-7)^2$

Λύση

α) $(\frac{4}{3})^5 : (\frac{4}{3})^3 = (\frac{4}{3})^{5-3} = (\frac{4}{3})^2$

β) $(-\frac{2}{3})^7 : (-\frac{2}{3})^3 = (-\frac{2}{3})^{7-3} = (-\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^4$

γ) $(-\frac{8}{5})^3 : (-\frac{8}{5}) = (-\frac{8}{5})^{3-1} = (-\frac{8}{5})^2 = (\frac{8}{5})^2$

δ) $(-7)^3 : (-7)^2 = (-7)^{3-2} = (-7) = -7$

6. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $[(-2)^3]^4$, β) $(5^3)^2$
γ) $[(-1)^3]^2$, δ) $[(-1/2)^2]^3$
ε) $(3^2)^7$, στ) $[(-3)^3]^2$

Λύση

α) $[(-2)^3]^4 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12} = 2^{12}$

β) $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$

γ) $[(-1)^3]^2 = (-1)^{3 \cdot 2} = (-1)^6 = 1$

δ) $[(-\frac{1}{2})^2]^3 = (-\frac{1}{2})^6 = (\frac{1}{2})^6$

ε) $(3^2)^7 = 3^{14}$

στ) $[(-3)^3]^2 = (-3)^6 = 3^6$

7. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{4^3}{2^3}$, β) $\frac{(-25)^3}{(-5)^3}$, γ) $\frac{(-2)^4}{(+2)^4}$, δ) $\frac{(-8)^3}{(-2)^3}$

ε) $\frac{15^5}{3^5}$

Λύση

α) $\frac{4^3}{2^3} = (\frac{4}{2})^3 = 2^3$

β) $\frac{(-25)^3}{(-5)^3} = (\frac{-25}{-5})^3 = 5^3$

γ) $\frac{(-2)^4}{(+2)^4} = (\frac{-2}{2})^4 = (-1)^4 = 1^4 = 1$

δ) $\frac{(-8)^3}{(-2)^3} = (\frac{-8}{-2})^3 = 4^3$

ε) $\frac{15^5}{3^5} = (\frac{15}{5})^5 = 5^5$

8. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-4)^{18} : [(-4)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)]$

β) $[(-2)^2 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^5] : (-2)^6$

γ) $[(-3)^4 \cdot (-3)^4] : [(-3)^2 \cdot (-3)^5]$

δ) $[(-5)^7 \cdot (-5)^3] : [(-5)^3 \cdot (-5)^2]$

Λύση

α) $(-4)^{18} : [(-4)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)] =$
$= (-4)^{18} : (-4)^{3+2+1} = (-4)^{18} : (-4)^6 =$
$= (-4)^{18-6} = (-4)^{12} = 4^{12}$

β) $[(-2)^2 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^5] : (-2)^6 =$
$= (-2)^{2+4+5} : (-2)^6 = (-2)^{11} : (-2)^6 =$
$= (-2)^{11-6} = (-2)^5 = -2^5$

γ) $[(-3)^4 \cdot (-3)^4] : [(-3)^2 \cdot (-3)^5] =$
$= (-3)^{4+4} : (-3)^{2+5} = (-3)^8 : (-3)^7 =$
$= (-3)^{8-7} = (-3)^1 = -3$

δ) $[(-5)^7 \cdot (-5)^3] : [(-5)^3 \cdot (-5)^2] =$
$= (-5)^{7+3} : (-5)^{3+2} = (-5)^{10} : (-5)^5 =$
$= (-5)^{10-5} = (-5)^5 = -5^5$

9. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$A = -3 - [-4 + (-3)^2] - 4^2 -$
$- 2 \cdot (-7 + 5)^2$

$B = (-2)^3 - [4 - 3^2 (5^2 - 3^2)] - (-5)^2$

$\Gamma = (-1)^3 [-4 - (5^2 - 2^4)^2 - 7 (-2)^2]$

Λύση

$A = -3 - [-4 + (-3)^2] - 4^2 -$
$- 2 \cdot (-7 + 5)^2 =$
$= -3 - (-4 + 9) - 16 - 2 \cdot (-2)^2 =$
$= -3 - (+5) - 16 - 2 \cdot (+4) =$
$= -3 - 5 - 16 - 8 = -32$

$B = (-2)^3 - [4 - 3^2 (5^2 - 3^2)] - (-5)^2 =$
$= -8 - [4 - 9 (25 - 9)] - 25 =$
$= -8 - (4 - 9 \cdot 16) - 25 =$
$= -8 - (4 - 144) - 25 =$
$= -8 - (-140) - 25 =$
$= -8 + 140 - 25 = 107$

$\Gamma = (-1)^3 [-4 - (5^2 - 2^4)^2 - 7 (-2)^2] =$
$= -1 [-4 - (25 - 16)^2 - 7 \cdot 4] =$

$= -1\,(-4 - 9^2 - 28) =$
$= -1\,(-4 - 81 - 28) = (-1)\cdot(-113) = 113$

10. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
$A = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, $B = (\alpha + \beta)^2$ όταν $\alpha = -2$, $\beta = 4$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

$A = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 =$
$= (-2)^2 + 2\cdot(-2)\cdot 4 + 4^2 =$
$= 4 - 16 + 16 = 4$
$B = (\alpha + \beta)^2 = (-2 + 4)^2 = 2^2 = 4$
Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

11. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
$A = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ και $B = (\alpha - \beta)^3$ όταν $\alpha = -2$, $\beta = -3$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

$A = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 =$
$= (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2\cdot(-3) + 3\cdot(-2)\cdot$
$\cdot(-3)^2 - (-3)^3 =$
$= -8 - 3\cdot 4\cdot(-3) + 3\cdot(-2)\cdot 9 - (-27) =$
$= -8 + 36 - 54 + 27 = 63 - 62 = 1$
$B = (\alpha - \beta)^3 =$
$= [-2 - (-3)]^3 = (-2 + 3)^3 = 1^3 = 1$
Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3^3\cdot x = 3^5$ β) $(-2)^3\cdot x = (-2)^5$

γ) $x\cdot(-5)^3 = (-5)^4$ δ) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot x = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Λύση

α) $3^3\cdot x = 3^5$ ή $x = 3^5 : 3^3$ ή $x = 3^{5-3}$ ή
$x = 3^2$ ή $x = 9$

β) $(-2)^3\cdot x = (-2)^5$ ή $x = (-2)^5 : (-2)^3$ ή
$x = (-2)^{5-3}$ ή $x = (-2)^2$ ή $x = 4$

γ) $x\cdot(-5)^3 = (-5)^4$ ή $x = (-5)^4 : (-5)^3$ ή
$x = (-5)^{4-3}$ ή $x = (-5)^1$ ή $x = -5$

δ) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot x = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ή $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ή
$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}$ ή $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ή $x = \frac{1}{4}$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x}{2^2} = 2^5$ β) $\frac{x}{(-3)^4} = -3$

γ) $x : \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)$ δ) $x : (-6)^2 = (-6)^2$

Λύση

α) $\frac{x}{2^2} = 2^5$ ή $x = 2^5\cdot 2^2$ ή $x = 2^{5+2}$ ή
$x = 2^7$ ή $x = 128$

β) $\frac{x}{(-3)^4} = -3$ ή $x = (-3)\cdot(-3)^4$ ή
$x = (-3)^{1+4}$ ή $x = (-3)^5$ ή $x = -243$

γ) $x : \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)$ ή $x = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ ή
$x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{1+3}$ ή $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^4$ ή $x = \frac{81}{256}$

δ) $x : (-6)^2 = (-6)^2$ ή $x = (-6)^2\cdot(-6)^2$ ή
$x = (-6)^{2+2}$ ή $x = (-6)^4$ ή $x = 1296$

14. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$, β) $\dfrac{(-1)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]}{(-4)^2 + (-2)^3}$

Λύση

α) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4} - 1}{2 - \frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{4}{4}}{\frac{18}{9} - \frac{1}{9}} =$

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{17}{9}} = -\frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 17} = -\frac{27}{68}$$

β) $\dfrac{(-1)\,[(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^3]}{(-4)^2 + (-2)^3} =$

$$= \frac{(-1)\,(\frac{1}{4} - \frac{1}{8})}{16 + (-8)} = \frac{(-1)\,(\frac{2}{8} - \frac{1}{8})}{8} =$$

$$= \frac{(-1) \cdot \frac{1}{8}}{8} = \frac{-\frac{1}{8}}{8} = -\frac{1}{64}$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x	x^2	x^3	x^4	x^5
-2			2^4	
-3	3^2			
-4				-4^5
-5		-5^3		

2. Να βρεθούν τα γινόμενα:

α) $(-\frac{4}{3})^3 \cdot (-\frac{4}{3})^2$ β) $(-10)^2 \cdot (-10)^3$

γ) $6^3 \cdot 6^2$ δ) $(-7)^2 \cdot (-7)^3$

ε) $(-\frac{5}{7})^3 \cdot (-\frac{5}{7})^3$ στ) $(\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^5$

Λύση

α) $(-\frac{4}{3})^3 \cdot (-\frac{4}{3})^2 = (-\frac{4}{3})^{3+2} = \ldots$

β) $(-10)^2 \cdot (-10)^3 = (-10)^{2+3} = \ldots$

γ) ... , δ) ...

ε) ... , στ) ...

3. Να βρεθούν τα πηλίκα:

α) $\frac{4^3}{4^2}$, β) $\frac{(-2)^5}{(-2)^3}$, γ) $(-4)^6 : (-4)^4$

δ) $(-10)^{10} : (-10)^7$ ε) $\frac{8^5}{8^3}$, στ) $(-\frac{7}{5})^4 : (-\frac{7}{5})^3$

ζ) $8^7 : 8^3$, η) $(\frac{8}{9})^4 : (\frac{8}{9})$

Λύση

α) $\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = \ldots$

β) $\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = (-2)^{5-3} = \ldots$

γ) ... , δ) ... , ε) ... ,
στ) ... , ζ) ... , η) ...

4. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(\frac{8}{3})^5 \cdot 3^5$ β) $(-\frac{4}{3})^4 \cdot (-1)^4$

γ) $(-\frac{4}{3})^2 \cdot (-4)^2$ δ) $(-\frac{1}{2})^2 \cdot (-\frac{3}{4})^2$

ε) $(\frac{3}{4})^7 \cdot (-\frac{4}{3})^7$

Λύση

α) $(\frac{8}{3})^5 \cdot 3^5 = (\frac{8}{3} \cdot 3)^5 = \ldots$

β) $(-\frac{4}{3})^4 \cdot (-1)^4 = [(-\frac{4}{3}) \cdot (-1)]^4 = \ldots$

γ) ... , δ) ... , ε) ...

5. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(7^2)^3$, β) $(2^4)^3$, γ) $[(-6)^3]^2$, δ) $[(-2)^5]^7$

Λύση

α) $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = ...$

β) $(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = ...$

γ) ... , δ) ...

6. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^3$, β) $(-4)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^5$

Λύση

α) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{3+2+3} = ...$

β) $(-4)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^5 = (-4)^{3+2+5} = ...$

7. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\dfrac{(-16)^2}{8^2}$, β) $\dfrac{24^3}{8^3}$, γ) $\dfrac{50^4}{5^4}$

δ) $(-27)^3 : (-3)^3$, ε) $(-4)^5 : (-8)^5$,

στ) $(-32)^7 : (+16)^7$

Λύση

α) $\dfrac{(-16)^2}{8^2} = \left(\dfrac{-16}{8}\right)^2 = ...$

β) $\dfrac{24^3}{8^3} = \left(\dfrac{24}{8}\right)^3 = ...$

γ) ... , δ) ...

ε) ... , στ) ...

8. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $[(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4] : [(-3)^2 \cdot (-3)^5]$

β) $[(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^{10}] : [(\frac{1}{2})^9 \cdot (\frac{1}{2})]$

γ) $[(-2)^5 \cdot (-2)^{12} \cdot (-2)^9] : [(-2)^6 \cdot (-2)^{13}]$

Λύση

α) $[(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4] : [(-3)^2 \cdot (-3)^5] =$

$= (-3)^{2+3+4} : (-3)^{2+5} = (-3)^9 : (-3)^7 =$

$= (-3)^{9-7} = ...$

β) ... , γ) ...

9. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
$A = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ και
$B = (\alpha + \beta)^3$ αν $\alpha = -3$, $\beta = 2$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

$A = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 =$

$= (-3)^3 + 2^3 + 3 \cdot (-3)^2 \cdot 2 +$

$+ 3 \cdot (-3)^2 \cdot 2 = ...$

$B = (\alpha + \beta)^3 = (-2 + 3)^3 = ...$

10. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$A = (x^2 - 2x + 1)^2$ και
$B = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2$ αν $x = -1$.

Λύση

$A = (x^2 - 2x + 1)^2 =$

$= [(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1]^2 = ...$

$B = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2 =$

$= [(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1]^2 = ...$

11. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$A = (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1)$ και
$B = 8x^3 - 1$ αν $x = -2$.

Λύση

$A = (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) =$

$= [2 \cdot (-2) - 1] \cdot [4 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) +$

$+ 1] = ...$

$B = 8x^3 - 1 = 8 \cdot (-2)^3 - 1 = ...$

12. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(-1)^3 [-7 - 2^2 \cdot (7^2 - 6^2) - 4 \cdot (-3)^3]$

β) $-1-[-2\cdot(-2^3-3^2)-4]$

γ) $(-2)^2-[-4\cdot(3^2-4^2)-2^2\cdot(-2)^3]$

Λύση

α) $(-1)^3\cdot[-7-2^2\cdot(7^2-6^2)-4\cdot(-3)^3]=$

$=-1\,[-7-4\,(49-36)-4\,(-27)]=\ldots$

β) ...

γ) ...

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(-\frac{4}{3})^2\cdot x=(-\frac{4}{3})^5$ β) $(\frac{5}{3})^2\cdot x=(\frac{5}{3})^4$

γ) $(\frac{1}{3})^3\cdot x=(\frac{1}{3})^7$ δ) $7^7\cdot x=7^9$

Λύση

α) $(-\frac{4}{3})^2\cdot x=(-\frac{4}{3})^5$ ή $x=(-\frac{4}{3})^5:(-\frac{4}{3})^2\ldots$

β) $(\frac{5}{3})^2\cdot x=(\frac{5}{3})^4$ ή $x=(\frac{5}{3})^4:(\frac{5}{3})^2\ldots$

γ) ...

δ) ...

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x:(-\frac{1}{2})^3=(-\frac{1}{2})^2$ β) $\frac{x}{4^3}=4$

γ) $\frac{x}{(-2)^3}=-2$ δ) $x:(-\frac{3}{2})^3=(-\frac{3}{2})$

Λύση

α) $x:(-\frac{1}{2})^3=(-\frac{1}{2})^2$ ή $x=(-\frac{1}{2})^2\cdot(-\frac{1}{2})^3\ldots$

β) $\frac{x}{4^3}=4$ ή $x=4\cdot4^3\ldots$

γ) ...

δ) ...

15. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\dfrac{(-\frac{4}{3})^2-(\frac{2}{3})^2}{(-1)^4+(-2)^2}$, β) $\dfrac{(-2)^3-(1-2^3)}{(\frac{2}{3})^2-(-\frac{1}{3})^3}$

Λύση

α) $\dfrac{(-\frac{4}{3})^2-(\frac{2}{3})^2}{(-1)^4+(-2)^2}=\dfrac{\frac{16}{9}-\frac{4}{9}}{1+4}=\ldots$

β) ...

16. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $[(-3)^2]^3:(-3)^5$

β) $[(-2)^2]^4\cdot[(-2)^3]^2:[(-2)^6]^2$

γ) $[[(-4)^4]^5:[(-4)^2]^3]:[(-4)^3]^2$

Λύση

α) $[(-3)^2]^3:(-3)^5=(-3)^6:(-3)^5=\ldots$

β) $[(-2)^2]^4\cdot[(-2)^3]^2:[(-2)^6]^2=$

$=[(-2)^8\cdot(-2)^6]:(-2)^{12}=\ldots$

γ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$(-2)^4,\ (-2)^5,\ (-2)^6,\ (-3)^1,\ 7^2,\ (-3)^2,\ (-3)^3,$
$5^3,\ (-6)^2,\ 8^2$

2. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$(-\frac{1}{2})^2, (-\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{3})^2, (\frac{1}{3})^3, (\frac{1}{3})^4, (\frac{1}{2})^2,$

$(\frac{1}{2})^3, (-\frac{1}{3})^2, (-\frac{1}{3})^3, (-\frac{1}{3})^4$

3. Να βρεθούν τα γινόμενα:

$3^2 \cdot 3^5,\ 1^5 \cdot 1^7,\ (-1)^7 \cdot (-1)^5,\ (-2)^9 \cdot (-2)^3,$

$(-\frac{3}{2})^5 \cdot (-\frac{3}{2})^2,\ (-\frac{5}{7})^3 \cdot (-\frac{5}{7})^5$

4. Να βρεθούν τα πηλίκα:

$4^3 : 4,\ 9^4 : 9^2,\ (-2)^4 : (-2),\ (-4)^3 : (-4),$

$(-\frac{4}{3})^5 : (-\frac{4}{3})^2,\ (\frac{5}{6})^4 : (\frac{5}{6})^3,$

$(\frac{1}{2})^5 : (\frac{1}{2})^3,\ (\frac{8}{9})^4 : (\frac{8}{9})$

5. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$2^3 \cdot 3^3,\ 4^4 \cdot 5^4,\ 2^3 \cdot 5^3,\ 4^2 \cdot 25^2,\ (-2)^3 \cdot 5^3,$

$50^2 \cdot (-2)^2,\ (-\frac{7}{6})^2 \cdot (-\frac{2}{3})^2,\ (\frac{3}{4})^3 \cdot (-\frac{4}{3})^3,$

$(-\frac{4}{3})^4 \cdot (-1)^4,\ (-\frac{5}{6})^2 \cdot (\frac{4}{3})^2$

6. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$(3^2)^3,\ [(-1)^3]^5,\ [(-2)^3]^4,\ (2^4)^3,\ [(-2)^4]^9,$

$[(-\frac{1}{3})^2]^3,\ [(-\frac{4}{3})^2]^5,\ [(-\frac{3}{2})^3]^2$

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) $(-3)^2$ και -3^2, β) $(-1)^5$ και $(-1)^6$

γ) $(-2)^4$ και 2^4, δ) $(-2)^5$ και 2^5

ε) $(-\frac{1}{2})^3$ και $(\frac{1}{2})^3$, στ) $(-\frac{1}{2})^4$ και $-(\frac{1}{2})^4$

8. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$2^4 : (-1)^4,\ (-10)^3 : (-5)^3,\ (-15)^6 : (-3)^6,$

$\frac{(-8)^4}{(-2)^4},\ \frac{32^3}{(-4)^3},\ \frac{(-28)^4}{4^4},\ \frac{(-50)^2}{(-10)^2}$

9. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(-3)^2 \cdot (-3)^5 \cdot (-3)^7$, β) $2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^3$

γ) $(-4)^7 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$,

δ) $(-\frac{1}{4})^2 \cdot (-\frac{1}{4})^3 \cdot (-\frac{1}{4})^4$

10. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^2) : (5^5 \cdot 5)$

β) $[(-\frac{3}{4})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-\frac{3}{4})] : [(-\frac{3}{4})^5 \cdot (-\frac{3}{4})]$

γ) $[(-\frac{5}{6})^3 \cdot (-\frac{5}{6})^7 \cdot (-\frac{5}{6})] : [(-\frac{5}{6})^8 \cdot (-\frac{5}{6})^2]$

11. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$

12. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$-2^x + (-2)^x + (-2)^{x+1} - 2^{x+1} - 2^{x+2} + (-2)^{x+2}$

για $x = 3$.

13. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$A = x^3 - 3x^2 - 5x + 2$

$B = 7x^4 + 3 \cdot (x - 1)^3 + 2 \cdot (x + 2)^2$

$\Gamma = 4 \cdot (x^2 - 1) - 2 \cdot (x - 1)^2 + 4$

όταν $x = -2$.

14. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$A = (\alpha^3 \cdot \beta^3) : \gamma^3 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

$B = (\alpha^2 \cdot \beta^3) : \gamma - (-1)^3 \cdot (-\alpha^3 + \gamma^4)$

όταν $\alpha = -2$, $\beta = -8$, $\gamma = 4$.

15. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $[(-2)^3]^4 : [(-2)^2]^3$

β) $[[(-4)^2]^2 \cdot [(-4)^3]^4] : [(-4)^2]^7$

16. Να βρεθεί πώς μπορεί να γραφούν υπό μορφή δυνάμεως οι αριθμοί:
8, - 16, - 27, 64, - 32, 125

17. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$\frac{-32}{-4}$, $\frac{(-32)\cdot(-64)}{2^7}$, $\frac{125 \cdot 2^4}{5^2 \cdot 8}$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $4^3 \cdot x = 4^6$ β) $(-2)^7 \cdot x = (-2)^{10}$

γ) $(-\frac{1}{3})^4 \cdot x = (-\frac{1}{3})^7$ δ) $(\frac{2}{3})^6 \cdot x = (\frac{2}{3})^7$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x : (-3)^3 = (-3)^5$ β) $x : 4 = 4^3$

γ) $x : (-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4})^3$ δ) $\frac{x}{(-3)^2} = (-3)^5$

20. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:
$A = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 2\beta\gamma$
$B = (\alpha + \beta + \gamma)^2$
όταν $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$.

1.10 Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πώς ορίζεται η δύναμη με βάση ρητό διάφορο του μηδενός και εκθέτη μηδέν;	1. Η δύναμη με βάση ρητό αριθμό διάφορο του μηδενός και εκθέτη **μηδέν** ορίζεται να είναι ίση με τη μονάδα. Συμβολικά: $\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$
2. Πώς ορίζεται η δύναμη με βάση ρητό διάφορο του μηδενός και με εκθέτη αρνητικό ακέραιο;	2. Η δύναμη με βάση ρητό αριθμό διάφορο του μηδενός και εκθέτη αρνητικό ακέραιο ορίζεται να είναι ίση με το κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή το ρητό με αντίθετο εκθέτη. Συμβολικά: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

π.χ. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$, $(\frac{3}{4})^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{4^2}{3^2} = (\frac{4}{3})^2$

Παρατήρηση: Αν η βάση της δύναμης είναι κλάσμα τότε αντιστρέφουμε τους όρους της και εκθέτη βάζουμε τον αντίθετο του αρχικού εκθέτη.

Δηλαδή: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

3. Δημιουργήστε έναν πίνακα στον οποίο να περιέχονται οι ορισμοί και οι ιδιότητες των δυνάμεων συμβολικά.

3. Παρακάτω δημιουργούμε έναν πίνακα που περιέχει τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων ρητού αριθμού με ακέραιο εκθέτη.

ΟΡΙΣΜΟΙ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
$\alpha^0 = 1$	$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
$\alpha^1 = \alpha$	$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ φορές}}$	$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$
$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$	$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) 2^{-1}, β) 2^{-2}, γ) 2^{-3}, δ) 3^{-1}, ε) 3^{-2}, στ) 3^{-3}

ζ) 5^{-1}, η) 5^{-2}

Λύση

α) $2^{-1} = \frac{1}{2}$, β) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$,

γ) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, δ) $3^{-1} = \frac{1}{3}$,

ε) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, στ) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$,

ζ) $5^{-1} = \frac{1}{5}$, η) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $3^{-2} \cdot 3^3$, β) $5^{-3} \cdot 5^2$, γ) $6^{-3} \cdot 6^4$,

δ) $(-4)^{-3} \cdot (-4)^2$, ε) $(-2)^4 \cdot (-2)^{-2}$

Λύση

α) $3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{-2+3} = 3^1 = 3$

β) $5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{-3+2} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

γ) $6^{-3}\cdot 6^{4} = 6^{-3+4} = 6^{1} = 6$

δ) $(-4)^{-3}\cdot(-4)^{2} = (-4)^{-3+2} = (-4)^{-1} = -\frac{1}{4}$

ε) $(-2)^{4}\cdot(-2)^{-2} = (-2)^{4-2} = (-2)^{2} = 4$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(\frac{1}{2})^{-2}$, β) $(-\frac{3}{4})^{-1}$, γ) $(\frac{5}{6})^{-2}$, δ) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

ε) $(-\frac{1}{3})^{-2}$, στ) $(\frac{1}{3})^{-2}$

Λύση

α) $(\frac{1}{2})^{-2} = 2^{2} = 4$,

β) $(-\frac{3}{4})^{-1} = (-\frac{4}{3})^{1} = -\frac{4}{3}$

γ) $(\frac{5}{6})^{-2} = (\frac{6}{5})^{2} = \frac{36}{25}$,

δ) $(-\frac{1}{2})^{-3} = (-2)^{3} = -8$

ε) $(-\frac{1}{3})^{-2} = (-3)^{2} = 9$

στ) $(\frac{1}{3})^{-2} = 3^{2} = 9$

4. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-\frac{1}{3})^{-2}\cdot(-\frac{1}{3})^{4}$, β) $(-\frac{5}{6})^{-5}\cdot(-\frac{5}{6})^{3}$

γ) $(\frac{1}{4})^{-2}\cdot(\frac{1}{4})^{3}$, δ) $(-\frac{4}{7})^{-7}\cdot(-\frac{4}{7})^{5}$

Λύση

α) $(-\frac{1}{3})^{-2}\cdot(-\frac{1}{3})^{4} = (-\frac{1}{3})^{-2+4} = (-\frac{1}{3})^{2} = \frac{1}{9}$

β) $(-\frac{5}{6})^{-5}\cdot(-\frac{5}{6})^{3} = (-\frac{5}{6})^{-5+3} = (-\frac{5}{6})^{-2} =$

$= (-\frac{6}{5})^{2} = \frac{36}{25}$

γ) $(\frac{1}{4})^{-2}\cdot(\frac{1}{4})^{3} = (\frac{1}{4})^{-2+3} = (\frac{1}{4})^{1} = \frac{1}{4}$

δ) $(-\frac{4}{7})^{-7}\cdot(-\frac{4}{7})^{5} = (-\frac{4}{7})^{-7+5} = (-\frac{4}{7})^{-2} =$

$= (-\frac{7}{4})^{2} = \frac{49}{16}$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(-\frac{1}{3})^{-2} : (-\frac{1}{3})^{5}$, β) $(-4)^{-5} : (-4)^{-4}$,

γ) $3^{-6} : 3^{-3}$, δ) $(-\frac{1}{2})^{4} : (-\frac{1}{2})^{-1}$

Λύση

α) $(-\frac{1}{3})^{-2} : (-\frac{1}{3})^{5} = (-\frac{1}{3})^{-2-5} = (-\frac{1}{3})^{-7} =$

$= (-3)^{7} = -3^{7}$

β) $(-4)^{-5} : (-4)^{-4} = (-4)^{-5-(-4)} = (-4)^{-5+4} =$

$= (-4)^{-1} = (-\frac{1}{4})^{1} = -\frac{1}{4}$

γ) $3^{-6} : 3^{-3} = 3^{-6-(-3)} = 3^{-6+3} = 3^{-3} =$

$= (\frac{1}{3})^{3} = \frac{1}{27}$

δ) $(-\frac{1}{2})^{4} : (-\frac{1}{2})^{-1} = (-\frac{1}{2})^{4-(-1)} = (-\frac{1}{2})^{4+1} =$

$= (-\frac{1}{2})^{5} = -\frac{1}{2^{5}} = -\frac{1}{32}$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2^{3}\cdot 2^{-4}}{2^{-2}}$, β) $\frac{(-3)^{-2}\cdot(-3)^{4}}{(-3)^{5}}$

γ) $\frac{(-\frac{1}{2})^{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{-2}}{(-\frac{1}{2})^{4}}$, δ) $\frac{(\frac{4}{3})^{2}\cdot(\frac{4}{3})^{5}}{(\frac{4}{3})^{6}}$

Λύση

α) $\frac{2^{3}\cdot 2^{-4}}{2^{-2}} = 2^{3-4-(-2)} = 2^{3-4+2} = 2^{1} = 2$

β) $\frac{(-3)^{-2}\cdot(-3)^{4}}{(-3)^{5}} = (-3)^{-2+4-5} = (-3)^{-3} =$

$= (-\frac{1}{3})^{3} = -\frac{1}{27}$

γ) $\frac{(-\frac{1}{2})^{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{-2}}{(-\frac{1}{2})^{4}} = (-\frac{1}{2})^{3-2-4} = (-\frac{1}{2})^{-3} =$

$= (-2)^{3} = -8$

δ) $\dfrac{(\frac{4}{3})^2\cdot(\frac{4}{3})^5}{(\frac{4}{3})^6} = (\frac{4}{3})^{2+5-6} = (\frac{4}{3})^1 = \frac{4}{3}$

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2^5\cdot5^2\cdot2^7}{5^3\cdot2^{10}}$, β) $\dfrac{(-3)^2\cdot(-2)^5\cdot(-2)^3\cdot(-3)^{-1}}{(-3)^4\cdot(-2)^6}$

γ) $\dfrac{(\frac{1}{2})^{-4}\cdot2^3\cdot2^{-5}\cdot(\frac{1}{2})^6}{2^{-4}\cdot(\frac{1}{2})^{-2}}$

Λύση

α) $\dfrac{2^5\cdot5^2\cdot2^7}{5^3\cdot2^{10}} = 2^{5+7-10}\cdot5^{2-3} = 2^2\cdot5^{-1} =$

$= 4\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

β) $\dfrac{(-3)^2\cdot(-2)^5\cdot(-2)^3\cdot(-3)^{-1}}{(-3)^4\cdot(-2)^6} =$

$= (-3)^{2-1-4}\cdot(-2)^{5+3-6} = (-3)^{-3}\cdot(-2)^2 =$

$= (-\frac{1}{3})^3\cdot4 = (-\frac{1}{27})\cdot4 = -\frac{4}{27}$

γ) $\dfrac{(\frac{1}{2})^{-4}\cdot2^3\cdot2^{-5}\cdot(\frac{1}{2})^6}{2^{-4}\cdot(\frac{1}{2})^{-2}} =$

$= (\frac{1}{2})^{-4+6-(-2)}\cdot2^{3-5-(-4)} =$

$= (\frac{1}{2})^{-4+6+2}\cdot2^{3-5+4} = (\frac{1}{2})^4\cdot2^2 =$

$= 2^{-4}\cdot2^2 = 2^{-4+2} = 2^{-2} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $[(-2)^3]^{-2}$, β) $[(-\frac{1}{2})^{-1}]^2$,

γ) $(4^{-2})^{-1}$, δ) $[(-\frac{5}{2})^{-1}]^{-2}$

Λύση

α) $[(-2)^3]^{-2} = (-2)^{-6} = (-\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$

β) $[(-\frac{1}{2})^{-1}]^2 = (-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$

γ) $(4^{-2})^{-1} = 4^2 = 16$

δ) $[(-\frac{5}{2})^{-1}]^{-2} = (-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$

9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{[(-2)^2]^3\cdot(3^2)^{-2}}{(3^{-2})^4\cdot[(-2)^{-2}]^{-2}}$

β) $\dfrac{[(-\frac{2}{3})^2]^3\cdot[(-\frac{3}{2})^{-2}]^2}{[(-\frac{2}{3})^{-1}]^{-4}\cdot[(-\frac{3}{2})^{-3}]^2}$

Λύση

α) $\dfrac{[(-2)^2]^3\cdot(3^2)^{-2}}{(3^{-2})^4\cdot[(-2)^{-2}]^{-2}} = \dfrac{(-2)^6\cdot3^{-4}}{3^{-8}\cdot(-2)^4} =$

$= (-2)^{6-4}\cdot3^{-4-(-8)} = (-2)^2\cdot3^{-4+8} =$

$= (-2)^2\cdot3^4 = 4\cdot81 = 324$

β) $\dfrac{[(-\frac{2}{3})^2]^3\cdot[(-\frac{3}{2})^{-2}]^2}{[(-\frac{2}{3})^{-1}]^{-4}\cdot[(-\frac{3}{2})^{-3}]^2} = \dfrac{(-\frac{2}{3})^6\cdot(-\frac{3}{2})^{-4}}{(-\frac{2}{3})^4\cdot(-\frac{3}{2})^{-6}} =$

$= (-\frac{2}{3})^{6-4}\cdot(-\frac{3}{2})^{-4-(-6)} = (-\frac{2}{3})^2\cdot(-\frac{3}{2})^{-4+6} =$

$= (-\frac{2}{3})^2\cdot(-\frac{3}{2})^2 = [(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{3}{2})]^2 = 1^2 = 1$

10. Να γραφούν οι δυνάμεις με εκθέτη το 2 και το - 2 των αριθμών:
α) 100. 000 β) 0,000001

Λύση

α) $(100.000)^2 = (10^5)^2 = 10^{10}$

$(100.000)^{-2} = (10^5)^{-2} = 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}}$

β) $(0,000001)^2 = (10^{-6})^2 = 10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$

$(0{,}000001)^{-2} = (10^{-6})^{-2} = 10^{12}$

11. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων.

α) $\dfrac{256^2 \cdot 625^{-3}}{32^4 \cdot 25^{-6}}$, β) $\dfrac{729^{-3} \cdot 125^4}{243^{-5} \cdot 625^3}$

Λύση

α) Αναλύουμε το 256, το 625, το 32 και το 25 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων ως εξής:

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

25	5
5	5
1	

$256 = 2^8$, $625 = 5^4$, $32 = 2^5$, $25 = 5^2$

$$\frac{256^2 \cdot 625^{-3}}{32^4 \cdot 25^{-6}} = \frac{(2^8)^2 \cdot (5^4)^{-3}}{(2^5)^4 \cdot (5^2)^{-6}} = \frac{2^{16} \cdot 5^{-12}}{2^{20} \cdot 5^{-12}} =$$

$$= 2^{16-20} \cdot 5^{-12-(-12)} = 2^{-4} \cdot 5^{-12+12} = 2^{-4} \cdot 5^0 =$$

$$= 2^{-4} \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

β) Με τον ίδιο τρόπο:

$729 = 3^6$, $125 = 5^3$, $243 = 3^5$, $625 = 5^4$

$$\frac{729^{-3} \cdot 125^4}{243^{-5} \cdot 625^3} = \frac{(3^6)^{-3} \cdot (5^3)^4}{(3^5)^{-5} \cdot (5^4)^3} = \frac{3^{-18} \cdot 5^{12}}{3^{-25} \cdot 5^{12}} =$$

$$= 3^{-18-(-25)} \cdot 5^{12-12} = 3^{-18+25} \cdot 5^0 = 3^7 \cdot 1 = 3^7$$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(-1)^{x-1} + (-1)^{x-3} + (-1)^{x-5} + (-1)^{x+2} + (-1)^{x+4}$, για $x = 4$

β) $4 \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 3^x - 12 \cdot 3^{x-1} + (x-2) \cdot 2^{x-2}$ για $x = 0$

Λύση

α) $(-1)^{x-1} + (-1)^{x-3} + (-1)^{x-5} + (-1)^{x+2} +$ $+ (-1)^{x+4}$:

$= (-1)^{4-1} + (-1)^{4-3} + (-1)^{4-5} + (-1)^{4+2} +$
$+ (-1)^{4+4} =$

$= (-1)^3 + (-1)^1 + (-1)^{-1} + (-1)^6 + (-1)^8 =$

$= (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 = -1$

β) $4 \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 3^x - 12 \cdot 3^{x-1} + (x-2) \cdot 2^{x-2} =$

$= 4 \cdot 2^{0+1} + 3 \cdot 3^0 - 12 \cdot 3^{0-1} + (0-2) \cdot 2^{0-2} =$

$= 4 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^0 - 12 \cdot 3^{-1} + (-2) \cdot 2^{-2} =$

$= 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{1}{4} =$

$= 8 + 3 - 4 - \frac{1}{2} = 7 - \frac{1}{2} = \frac{14}{2} - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x : (-2)^{-3} = -2$, β) $(-3)^{-2} \cdot x = (-3)^{-3}$

γ) $x : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$, δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Λύση

α) $x : (-2)^{-3} = -2$ ή $x = (-2) \cdot (-2)^{-3}$ ή
$x = (-2)^{1-3}$ ή $x = (-2)^{-2}$ άρα $x = \frac{1}{4}$

β) $(-3)^{-2} \cdot x = (-3)^{-3}$ ή $x = (-3)^{-3} : (-3)^{-2}$ ή
$x = (-3)^{-3-(-2)}$ ή $x = (-3)^{-3+2}$ ή $x = (-3)^{-1}$
άρα $x = -\frac{1}{3}$

γ) $x : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ή $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$
ή $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-4}$ ή $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ή $x = (-2)^2$
άρα $x = 4$

δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ή $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ ή
$x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2-(-4)}$ ή $x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2+4}$ ή $x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

άρα $x = \frac{4}{9}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν:

α) $(\frac{1}{2})^{-1}$, β) $(\frac{1}{2})^{-2}$, γ) $(\frac{1}{2})^{-3}$,

δ) $(-2)^{-1}$, ε) $(-2)^{-2}$

Λύση

α) $(\frac{1}{2})^{-1} = 2^1 = ...$

β) $(\frac{1}{2})^{-2} = 2^2 = ...$

γ) ...

δ) ...

ε) ...

2. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{2}	10^{-3}	10^{3}
x^{-1}	10				
x^{-2}			10^{-4}		
x^2				10^{-6}	
x^3					10^9

3. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $5^4 \cdot 5^{-6}$, β) $4^{-3} \cdot 4$, γ) $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}$

δ) $(-\frac{2}{5})^4 \cdot (-\frac{2}{5})^{-3}$, ε) $(-\frac{4}{3})^6 \cdot (-\frac{4}{3})^{-4}$

Λύση

α) $5^4 \cdot 5^{-6} = 5^{4-6} = ...$

β) $4^{-3} \cdot 4 = 4^{-3+1} = ...$

γ) ....

4. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

α) $(-\frac{1}{3})^{-1} : (-\frac{1}{3})^{-3}$, β) $(-\frac{3}{2})^2 : (-\frac{3}{2})^3$,

γ) $(-4)^{-1} : (-4)^{-3}$, δ) $(-\frac{5}{6})^5 : (-\frac{5}{6})^7$,

ε) $(\frac{2}{3})^{-2} : (\frac{2}{3})^{-4}$

Λύση

α) $(-\frac{1}{3})^{-1} : (-\frac{1}{3})^{-3} = (-\frac{1}{3})^{-1-(-3)} = ...$

β) $(-\frac{3}{2})^2 : (-\frac{3}{2})^3 = (-\frac{3}{2})^{2-3} = ...$

γ) ... , δ) ... , ε) ...

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\frac{2^4 \cdot 2^{-6}}{2^5}$, β) $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^7}{(-2)^9}$,

γ) $\frac{(-3)^{-4} \cdot (-3)^{-7}}{(-3)^{-10}}$

Λύση

α) $\frac{2^4 \cdot 2^{-6}}{2^5} = 2^{4-6-5} = ...$

β) $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^7}{(-2)^9} = (-2)^{3+7-9} = ...$

γ) ...

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\frac{4^3 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 4^2}{5^4 \cdot 4^4}$, β) $\frac{(-2)^{-3} \cdot (-5)^4 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^2}{(-5)^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^7}$

Λύση

α) $\frac{4^3\cdot 5^2\cdot 5^3\cdot 4^2}{5^4\cdot 4^4} = 4^{3+2-4}\cdot 5^{2+3-4} = ...$

β) ...

7. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $[(-1)^3]^2$, β) $[(-1)^3]^5$,

γ) $[(-4)^2]^{-1}$, δ) $[(-\frac{4}{5})^{-1}]^2$

Λύση

α) $[(-1)^3]^2 = (-1)^6 = ...$

β) $[(-1)^3]^5 = (-1)^{15} = ...$

γ) ... , δ) ...

8. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\frac{[(-\frac{1}{2})^2]^{-3}\cdot[(-\frac{4}{3})^{-1}]^2}{[(-\frac{1}{2})^3]^{-3}\cdot[(-\frac{4}{3})^{-2}]^2}$$

Λύση

$$\frac{[(-\frac{1}{2})^2]^{-3}\cdot[(-\frac{4}{3})^{-1}]^2}{[(-\frac{1}{2})^3]^{-3}\cdot[(-\frac{4}{3})^{-2}]^2} = \frac{(-\frac{1}{2})^{-6}\cdot(-\frac{4}{3})^{-2}}{(-\frac{1}{2})^{-9}\cdot(-\frac{4}{3})^{-4}} = ...$$

9. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$(\frac{256}{729})^{-3}\cdot(\frac{729}{256})^{-2}\cdot(\frac{729}{256})^{-1}$$

Λύση

$$(\frac{256}{729})^{-3}\cdot(\frac{729}{256})^{-2}\cdot(\frac{729}{256})^{-1} =$$

$$= (\frac{729}{256})^{3}\cdot(\frac{729}{256})^{-2}\cdot(\frac{729}{256})^{-1} = ...$$

10. Να βρεθεί το εξαγόμενο:

$$(-3^{-2}:3^{-3})\cdot 3^{-4} + (-\frac{2}{3})^3 + 4:3^3$$

Λύση

$$(-3^{-2}:3^{-3})\cdot 3^{-4} + (-\frac{2}{3})^3 + 4:3^3 =$$

$$= [-3^{-2-(-3)}]\cdot 3^{-4} + (-\frac{2^3}{3^3}) + \frac{4}{3^3} =$$

$$= -3^{-2+3}\cdot 3^{-4} - \frac{2^3}{3^3} + \frac{4}{3^3} = ...$$

11. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $3x^x + 4x^y - 3x^{-y}$, για $x = -2$ και $y = -1$

β) $(-2)^x + (-2)^{x-1} + (x-2)^{-x-2}$, για $x = -2$

Λύση

α) $3x^x + 4x^y - 3x^{-y} =$

$= 3\cdot(-2)^{-2} + 4\cdot(-2)^{-1} - 3\cdot(-2)^{-(-1)} =$

$= 3\cdot(-\frac{1}{2})^2 + 4\cdot(-\frac{1}{2})^1 - 3\cdot(-2)^1 = ...$

β) ...

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(-\frac{3}{2})^3\cdot x = (-\frac{3}{2})^5$, β) $x:(-\frac{5}{2})^2 = (-\frac{5}{2})^{-4}$

γ) $(-4)^3\cdot x = (-4)^6$, δ) $x:(-\frac{6}{5})^{-1} = (-\frac{6}{5})$

Λύση

α) $(-\frac{3}{2})^3\cdot x = (-\frac{3}{2})^5$ ή $x = (-\frac{3}{2})^5 : (-\frac{3}{2})^3$

ή $x = (-\frac{3}{2})^{5-3}$ ...

β) $x:(-\frac{5}{2})^2 = (-\frac{5}{2})^{-4}$ ή $x = (-\frac{5}{2})^{-4}\cdot(-\frac{5}{2})^2$ ...

γ) ... , δ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x	x^{-2}	x^{-1}	x^2	x^3
-1				
-2				
3				
$-1/3$				
$-3/4$				
$1/2$				

2. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^{2}$, β) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$,

γ) $\left(\frac{8}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$, δ) $(-2)^{-4}\cdot(-2)^{-2}$,

ε) $5^4\cdot 5^{-2}$, στ) $(-3)^{-1}\cdot(-3)^4$

3. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

α) $5^6 : 5^3$, β) $5^{-4} : 5^{-3}$, γ) $2^{-3} : 2^{-5}$,

δ) $\dfrac{(-8)^2}{(-8)^3}$, ε) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}}$, στ) $\dfrac{(-3)^{-6}}{(-3)^{-9}}$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$, β) $\dfrac{(-4)^3\cdot(-4)^4}{(-4)^{-9}}$,

γ) $[(-2)^{-4}\cdot(-2)^{-3}] : (-2)^{-10}$

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{7}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{10}}$,

β) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-5)^{-2}\cdot 4^3\cdot 4^{-2}}{(-5)^{-3}\cdot(-5)^5\cdot 4^{-3}\cdot 4^5}$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{6}{3}\right)^{3}$,

β) $\left(-\frac{21}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{4}{21}\right)^{-2}$,

γ) $\left(-\frac{48}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{80}\right)^{-3}$

7. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $[(-3)^2]^{-2}$, β) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{2}$, γ) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\right]^{-1}$

8. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{[(-3)^3]^{-1}\cdot 5^2\cdot(-3)^2\cdot(5^2)^{-1}}{(-3)^{-4}\cdot(5^{-2})^2\cdot(5^{-1})^3}$

β) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot[(-2)^3]^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}}{[(-2)^{-1}]^{-5}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{2}}$

9. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $(x-3)^{-1} + x^{-2} - (-2)^x + (-x)^{x+1}$, για $x = -2$

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1}$, για $x = 1$

γ) $4x^{-1} + 3\,(x-2)^{-2} - 2\,(x-1)^{-x}$, για $x = 3$

δ) $2\cdot 5^x + 3\cdot 2^{x-3} - 4\cdot 3^{1-x}$, για $x = 2$

ε) $(x-y)^{x-y} - [(y-x)^x]^y$, για $x = 1$ και $y = -1$

1.11 Τυποποιημένη μορφή αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πώς μπορεί να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή ένας αριθμός που έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδος;

1. Ένας αριθμός που έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδος μπορεί να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή ως γινόμενο ενός δεκαδικού με απόλυτη τιμή μεταξύ του 1 και του 10, που περιέχει τα μη μηδενικά ψηφία του επί μια δύναμη με βάση το 10 και εκθέτη το φυσικό αριθμό, που είναι ίσος με τον αριθμό των ψηφίων τα οποία ακολουθούν το πρώτο ψηφίο του.

π.χ. $168.000 = 1{,}68 \cdot 10^5$, $-3.570.000 = -3{,}57 \cdot 10^6$

2. Πώς μπορεί να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή ένας αριθμός που έχει απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδος;

2. Ένας αριθμός που έχει απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδος μπορεί να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή ως γινόμενο ενός δεκαδικού με απόλυτη τιμή μεταξύ του 1 και του 10, που περιέχει τα μη μηδενικά ψηφία του επί μια δύναμη με βάση το 10 και εκθέτη τον αντίθετο του φυσικού που εκφράζει τον αριθμό των ψηφίων τα οποία μεσολαβούν από την υποδιαστολή του αριθμού μέχρι και το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο.

π. χ. $0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$, $-0{,}0000044 = -4{,}4 \cdot 10^{-6}$

3. Πώς συγκρίνουμε δύο αριθμούς που είναι γραμμένοι σε τυποποιημένη μορφή;

3. Για να συγκρίνουμε δύο θετικούς αριθμούς που είναι γραμμένοι σε τυποποιημένη μορφή λαμβάνουμε υπόψη ότι μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο εκθέτη στο 10.

Για να συγκρίνουμε δύο αρνητικούς αριθμούς που είναι γραμμένοι σε τυποποιημένη μορφή λαμβάνουμε υπόψη ότι μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο εκθέτη στο 10.

π.χ. $1{,}5 \cdot 10^{15} > 2{,}7 \cdot 10^{10}$, $2{,}3 \cdot 10^{-13} > 2{,}9 \cdot 10^{-17}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:
α) 1.530.000.000 β) - 4.370.000
γ) - 783.000.000 δ) 120.000.000

Λύση

α) $1.530.000.000 = 1,53 \cdot 10^9$

β) $-4.370.000 = -4,37 \cdot 10^6$

γ) $-783.000.000 = -7,83 \cdot 10^8$

δ) $120.000.000 = 1,2 \cdot 10^8$

2. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:
α) 0,00000037 β) 0,0000043
γ) - 0,00000004 δ) - 0,00000374

Λύση

α) $0,00000037 = 3,7 \cdot 10^{-7}$

β) $0,0000043 = 4,3 \cdot 10^{-6}$

γ) $-0,00000004 = 4 \cdot 10^{-8}$

δ) $-0,00000374 = -3,74 \cdot 10^{-7}$

3. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:
α) 17.500.000 · 434.000
β) 43.400 · 10.000
γ) 7.500.000 · 3.600.000
δ) 15.600 · 78.200.000

Λύση

α) $17.500.000 \cdot 434.000 =$
$= 1,75 \cdot 10^7 \cdot 4,34 \cdot 10^5 =$
$=.7,595 \cdot 10^{12}$

β) $43.400 \cdot 10.000 =$
$= 4,34 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 4,34 \cdot 10^8$

γ) $7.500.000 \cdot 3.600.000 =$
$= 7,5 \cdot 10^6 \cdot 3,6 \cdot 10^6 = 27 \cdot 10^{12} =$
$= 2,7 \cdot 10 \cdot 10^{12} = 2,7 \cdot 10^{13}$

δ) $15.600 \cdot 78.200.000 =$
$= 1,56 \cdot 10^4 \cdot 7,82 \cdot 10^7 =$
$= 12,1992 \cdot 10^{11} = 1,21992 \cdot 10^{12}$

4. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
α) 8.400.000 : 42.000
β) 5.750.000 : 2.500.000
γ) 1.960.000.000 : 1.400.000
δ) 0,0000049 : 0,0000007

Λύση

α) $8.400.000 : 42.000 =$

$$= \frac{8,4 \cdot 10^6}{4,2 \cdot 10^4} = \frac{8,4}{4,2} \cdot 10^2 = 2 \cdot 10^2$$

β) $5.750.000 : 2.500.000 = \dfrac{5,75 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^6} =$

$$= \frac{5,75}{2,5} = 2,3$$

γ) $1.960.000.000 : 1.400.000 = \dfrac{1,96 \cdot 10^9}{1,4 \cdot 10^6} =$

$$= \frac{1,94}{1,4} \cdot 10^3 = 1,4 \cdot 10^3$$

δ) $0,0000049 : 0,0000007 = \dfrac{4,9 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-7}} =$

$$= 0,7 \cdot 10^{-6+7} = 7 \cdot 10^{-1} \cdot 10 = 7 \cdot 10^0 =$$
$$= 7 \cdot 1 = 7$$

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
α) $6,3 \cdot 10^3$ και $7,5 \cdot 10^4$
β) $8,47 \cdot 10^{10}$ και $9,2 \cdot 10^9$
γ) $1,35 \cdot 10^{-7}$ και $1,38 \cdot 10^{-6}$
δ) $7,2 \cdot 10^{-5}$ και $9,5 \cdot 10^{-7}$

Λύση

α) Είναι $6,3 \cdot 10^3 < 7,5 \cdot 10^4$, γιατί $3 < 4$.

β) Είναι $8,47 \cdot 10^{10} > 9,2 \cdot 10^9$, γιατί $10 > 9$.

γ) Είναι $1,35 \cdot 10^{-7} < 1,38 \cdot 10^{-6}$, γιατί $-7 < -6$.

δ) Είναι $7,2 \cdot 10^{-5} > 9,5 \cdot 10^{-7}$, γιατί $-5 > -7$.

6. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $-4,3 \cdot 10^{8}$ και $-1,3 \cdot 10^{7}$

β) $-5,2 \cdot 10^{7}$ και $-8,2 \cdot 10^{9}$

γ) $-1,5 \cdot 10^{-4}$ και $-4,2 \cdot 10^{-3}$

δ) $-2 \cdot 10^{-5}$ και $-1,9 \cdot 10^{-7}$

Λύση

α) Είναι $-4,3 \cdot 10^{8} < -1,3 \cdot 10^{7}$, γιατί $8 > 7$.

β) Είναι $-5,2 \cdot 10^{7} > -8,2 \cdot 10^{9}$, γιατί $7 < 9$.

γ) Είναι $-1,5 \cdot 10^{-4} > -4,2 \cdot 10^{-3}$, γιατί $-4 < -3$.

δ) Είναι $-2 \cdot 10^{-5} < -1,9 \cdot 10^{-7}$, γιατί $-5 > -7$.

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $5,2 \cdot 10^{3} - 4,7 \cdot 10^{3} + 1,4 \cdot 10^{3}$

β) $-5,47 \cdot 10^{5} + 6,33 \cdot 10^{5} + 1,7 \cdot 10^{5}$

γ) $7,38 \cdot 10^{-2} - 4,35 \cdot 10^{-2} + 8,2 \cdot 10^{-2}$

δ) $3,47 \cdot 10^{-3} - 4,8 \cdot 10^{-3} - 2,1 \cdot 10^{-3}$

Λύση

α) $5,2 \cdot 10^{3} - 4,7 \cdot 10^{3} + 1,4 \cdot 10^{3} =$
$= (5,2 - 4,7 + 1,4) \cdot 10^{3} = 1,9 \cdot 10^{3}$

β) $-5,47 \cdot 10^{5} + 6,33 \cdot 10^{5} + 1,7 \cdot 10^{5}$
$= (-5,47 + 6,33 + 1,7) \cdot 10^{5} =$
$= 2,56 \cdot 10^{5}$

γ) $7,38 \cdot 10^{-2} - 4,35 \cdot 10^{-2} + 8,2 \cdot 10^{-2}$
$= (7,38 - 4,35 + 8,2) \cdot 10^{-2} =$
$= 11,23 \cdot 10^{-2} = 1,123 \cdot 10 \cdot 10^{-2} =$
$= 1,123 \cdot 10^{-1}$

δ) $3,47 \cdot 10^{-3} - 4,8 \cdot 10^{-3} - 2,1 \cdot 10^{-3}$
$= (3,47 - 4,8 - 2,1) \cdot 10^{-3} =$
$= -3,43 \cdot 10^{-3}$

8. Να βρείτε ποιους ρητούς παριστάνουν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $8,2 \cdot 10^{3} + 9,4 \cdot 10^{-5}$

β) $4,35 \cdot 10^{7} + 5,9 \cdot 10^{-6}$

Λύση

α) Ο αριθμός $8,2 \cdot 10^{3}$ γράφεται και 8.200, ο δε αριθμός $9,4 \cdot 10^{-5}$ γράφεται και 0,000094.

Άρα: $8,2 \cdot 10^{3} + 9,4 \cdot 10^{-5} =$
$= 8.200 + 0,000094 = 8200,000094$.

β) Ο αριθμός $4,35 \cdot 10^{7}$ γράφεται και 43.500.000, ο δε αριθμός $5,9 \cdot 10^{-6}$ γράφεται και 0,0000059.

Άρα: $4,35 \cdot 10^{7} + 5,9 \cdot 10^{-6} =$
$43.500.000 + 0,0000059 =$
$= 43.500.000,0000059$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) 17.500.000 · 6.300

β) 178.000 · 440.000

γ) 437.000.000 · 72.000

δ) 783.000 · 140.000

Λύση

α) $17.500.000 \cdot 6.300 =$
$= 1,75 \cdot 10^{7} \cdot 6,3 \cdot 10^{3} = \ldots$

β) 178.000 · 440.000 =

$= 1,78 \cdot 10^5 \cdot 4,4 \cdot 10^5 = ...$

γ) ...

δ) ...

2. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) 0,000033 · 0,0004

β) 0,000005 · 0,004

γ) 0,00077 · 0,000011

δ) 0,000012 · 0,47

Λύση

α) 0,000033 · 0,0004 =

$= 3,3 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = ...$

β) 0,000005 · 0,004 =

$= 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = ...$

γ) ...

δ) ...

3. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) 445.000.000 : 2.000.000

β) 536.000 : 4.000.000

γ) 0,0000038 : 0,00000019

δ) 0,0045 : 0,000015

Λύση

α) 445.000.000 : 2.000.000 =

$$= \frac{4,45 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^6} = ...$$

β) 536.000 : 4.000.000 = $\dfrac{5,36 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^6} = ...$

γ) ...

δ) ...

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α		β
$5,3 \cdot 10^{-3}$	<	$6,7 \cdot 10^{-2}$
$4,3 \cdot 10^7$	...	$7,2 \cdot 10^6$
$7,8 \cdot 10^6$	...	$9,4 \cdot 10^6$
$5,25 \cdot 10^{-4}$	...	$7,6 \cdot 10^{-3}$
$2,31 \cdot 10^3$	...	$4,7 \cdot 10^2$
$5,1 \cdot 10^{-6}$	>	$5,37 \cdot 10^{-7}$
$6,3 \cdot 10^8$	...	$9,4 \cdot 10^7$
$4,3 \cdot 10^{-2}$	...	$5,1 \cdot 10^{-3}$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3,1 \cdot 10^7 - 4,7 \cdot 10^7$

β) $4,9 \cdot 10^{-3} - 5,1 \cdot 10^{-3}$

γ) $5,8 \cdot 10^4 + 5,2 \cdot 10^4 - 6,3 \cdot 10^4$

δ) $9,35 \cdot 10^{-5} - 7 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5}$

Λύση

α) $3,1 \cdot 10^7 - 4,7 \cdot 10^7 =$

$= (3,1 - 4,7) \cdot 10^7 = ...$

β) $4,9 \cdot 10^{-3} - 5,1 \cdot 10^{-3} =$

$= (4,9 - 5,1) \cdot 10^{-3} = ...$

γ) ...

δ) ...

6. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:

α) 35.000.000,0000043

β) 18.000.000,0000035

Λύση

α) Ο αριθμός 35.000.000,0000043 γράφεται σαν άθροισμα των αριθμών 35.000.000 και 0,0000043. δηλ. 35000000,0000043 =

= 35.000.000 + 0,0000043 = ...

β) 18.000.000,0000035 =

= 18.000.000 + 0,0000035 = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι παρακάτω αριθμοί:
α) 0,0000075 β) 75.000.000
γ) 0,00000427 δ) 8.100.000

2. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:
α) - 47.000.000 β) - 380.000
γ) - 0,000000031 δ) - 0,000047

3. Να γραφούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:
α) 17.500.000,00037
β) 8.500.000,0000000375
γ) 2.390.000,0000043

4. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:
α) 78.000.000 · 125.000.000
β) 135.000.000 · 7.380.000.000
γ) 793.000.000 · 2.780.000.000
δ) 123.000 · 700.000.000
ε) 5.300.000 · 43.000

5. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
α) 158.000.000 : 200.000
β) 1.250.000.000 : 2.500.000
γ) 1.690.000.000 : 130.000
δ) 0,0000081 : 0,000003
ε) 0,0000256 : 0,0000032

6. Να βρείτε ποιους ρητούς παριστάνουν οι παρακάτω παραστάσεις:
α) $5 \cdot 10^{7} + 3,2 \cdot 10^{-5}$
β) $5,3 \cdot 10^{6} + 7,8 \cdot 10^{-4}$
γ) $4,31 \cdot 10^{7} + 8,2 \cdot 10^{-3}$

7. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $4,89 \cdot 10^{-5} + 3,71 \cdot 10^{-5} - 6,4 \cdot 10^{-5}$
β) $7,8 \cdot 10^{-7} + 3,4 \cdot 10^{-7} - 9,5 \cdot 10^{-7}$
γ) $5,37 \cdot 10^{6} - 4,76 \cdot 10^{6} - 1,3 \cdot 10^{6}$
δ) $6,75 \cdot 10^{8} + 2,45 \cdot 10^{8} - 7,75 \cdot 10^{8}$

1. 12 Δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να μετατρέψουμε έναν κλασματικό αριθμό σε δεκαδικό;

2. Ποιοι είναι οι περιοδικοί αριθμοί και πώς συμβολίζονται;

Απαντήσεις

1. Ένα κλάσμα όπως γνωρίζουμε παριστάνει τη διαίρεση του αριθμητή διά του παρονομαστή του. Έτσι λοιπόν κάνοντας τη διαίρεση του αριθμητή διά του παρονομαστή, ένας κλασματικός αριθμός μετατρέπεται σε δεκαδικό.

2. **Περιοδικοί αριθμοί** είναι οι δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, οι οποίοι είτε μετά την υποδιαστολή είτε μετά από ένα δεκαδικό ψηφίο και

πέρα εμφανίζουν ένα τμήμα από ένα ή περισσότερα ψηφία το οποίο επαναλαμβάνεται συνεχώς χωρίς να εμφανίζονται άλλα ψηφία. Το τμήμα που επαναλαμβάνεται λέγεται **περίοδος**.

Για να γράψουμε συμβολικά ένα περιοδικό αριθμό γράφουμε το δεκαδικό αριθμό που προκύπτει από αυτόν, αν παραλείψουμε τα ψηφία του (από το πρώτο που επαναλαμβάνεται και μετά) και βάλουμε μία παύλα πάνω από την περίοδο.

Οι περιοδικοί αριθμοί προκύπτουν από διαίρεση που δεν είναι τέλεια.

π.χ. Αν κάνουμε τη διαίρεση 58 : 22 το πηλίκο που βρίσκουμε είναι 2,63636363... Παρατηρούμε ότι συνέχεια επαναλαμβάνεται το τμήμα «63» χωρίς η διαίρεση να τελειώνει ποτέ. Ο αριθμός 2,636363... είναι περιοδικός αριθμός με περίοδο το 63 και συμβολίζεται με $2,\overline{63}$.

3. Ποιοι ρητοί της μορφής $\frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, λ ακέραιους μπορεί να γραφούν σα δεκαδικοί μη περιοδικοί;

3. Οι ρητοί της μορφής $\frac{\kappa}{\lambda}$ με κ, λ ακέραιους μπορεί να γραφούν ως δεκαδικοί μη περιοδικοί αν μπορεί να γραφούν ως ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή δυνάμεις του 2 και του 5 μόνο.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε με δεκαδική μορφή τους αριθμούς:

α) $\frac{15}{10}$, β) $\frac{242}{11}$, γ) $\frac{3}{20}$, δ) $-\frac{14}{16}$

Λύση

α) Κάνοντας τη διαίρεση 15 : 10 βρίσκουμε 1,5 άρα: $\frac{15}{10} = 1,5$.

β) Με τον ίδιο τρόπο $\frac{242}{11} = 22$.

γ) Ομοίως: $\frac{3}{20} = 0,15$.

δ) $-\frac{14}{16} = -0,875$.

2. Να βρείτε με ποιο κλασματικό αριθμό ισούται ο αριθμός $0,\overline{15}$.

Λύση

Ο αριθμός $0,\overline{15}$ είναι περιοδικός με περίοδο το 15. Άρα γράφεται 0,151515..

Έστω λοιπόν x = 0,151515 ... (1)

τότε 100x = 15,151515 ... (2)

Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (1) και έχουμε:

100x - x = 15,151515... - 0,151515...

δηλαδή 99x = 15 οπότε

$x = \frac{15}{99}$ και $0,\overline{15} = \frac{15}{99}$.

<u>Μέθοδος:</u> Ένας περιοδικός αριθμός μικρότερος της μονάδος του οποίου η περίοδος αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή μπορεί να γραφεί ως κλασματικός με αριθμητή την περίοδο και παρονομαστή τόσα «9» όσα τα ψηφία της περιόδου.

3. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους περιοδικούς:

α) $0,\overline{47}$ β) $0,\overline{375}$ γ) $0,\overline{451}$

Λύση

α) Ο αριθμός $0,\overline{47}$ έχει περίοδο το 47 η οποία αποτελείται από δύο ψηφία.

Άρα: $0,\overline{47} = \frac{47}{99}$.

β) Ο αριθμός $0,\overline{375}$ έχει περίοδο το 375 η οποία αποτελείται από τρία ψηφία.

Άρα: $0,\overline{375} = \frac{375}{999}$.

γ) Ο αριθμός $0,\overline{451}$ έχει περίοδο το 451 η οποία αποτελείται από τρία ψηφία.

Άρα: $0,\overline{451} = \frac{451}{999}$.

4. Να γραφεί με κλασματική μορφή ο περιοδικός αριθμός $2,\overline{35}$.

Λύση

Ο αριθμός $2,\overline{35}$ γράφεται 2,353535...
Συμβολίζω με x τον αριθμό 2,35....
Είναι x = 2,353535 ...(1) και
100x = 235,353535 ... (2).
(Πολλαπλασιάζουμε με το 100 γιατί δύο ψηφία έχει η περίοδος. Αν για παράδειγμα η περίοδος είχε τρία ψηφία θα πολλαπλασιάζαμε με το 1.000). Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (1) και έχουμε:
100x - x = 235,353535 ... - 2,353535 ...
οπότε 99x = 233.

Άρα: $x = \frac{233}{99}$ ή $2,\overline{35}$

<u>**Μέθοδος:**</u> Ένας περιοδικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδος του οποίου η περίοδος αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή μπορεί να γραφεί ως κλασματικός αριθμός με αριθμητή τη διαφορά του αριθμού που σχηματίζουν τα ψηφία του μέχρι και την περίοδο, από το ακέραιο μέρος του περιοδικού και παρονομαστή τόσα «9» όσα τα ψηφία της περιόδου.

5. Να γραφούν με κλασματική μορφή οι περιοδικοί:
α) $5,\overline{3}$ β) $71,\overline{43}$ γ) $9,\overline{537}$

Λύση

α) Ο αριθμός $5,\overline{3}$ έχει περίοδο 3 που αποτελείται από ένα ψηφίο.

Άρα: $5,\overline{3} = \frac{53 - 5}{9}$ ή $5,\overline{3} = \frac{48}{9}$.

β) Ο αριθμός $71,\overline{43}$ έχει περίοδο 43 που αποτελείται από δύο ψηφία.

Άρα: $71,\overline{43} = \frac{7143 - 71}{99}$ ή $71,\overline{43} = \frac{7072}{99}$

γ) Ο αριθμός $9,\overline{537}$ έχει περίοδο 537 που αποτελείται από τρία ψηφία.

Άρα: $9,\overline{537} = \frac{9537 - 9}{999}$ ή $9,\overline{537} = \frac{9528}{999}$

6. Να γραφεί με κλασματική μορφή ο περιοδικός $4,7\overline{58}$.

Λύση

Συμβολίζω με x τον αριθμό $4,7\overline{58}$ και έχουμε: x = 4,75858 ... (1). Πολλαπλασιάζουμε με το 1.000 ώστε τα ψηφία 5 και 8 που αποτελούν την περίοδο να έρθουν πριν την υποδιαστολή. Έχουμε: 1.000x = 4758,58 ... (2)
Πολλαπλασιάζουμε την (1) με το 10 ώστε το ψηφίο που είναι πριν την περίοδο να έρθει πριν την υποδιαστολή.
10x = 47,5858 ... (3)
Αφαιρούμε από τη σχέση (2) τη σχέση (3) και έχουμε:
1000x - 10x = 4758,5858...- 47,5858 ..
οπότε 990x = 4711 ή

ή $x = \frac{4711}{990}$ άρα $4,7\overline{58} = \frac{4711}{990}$.

Μέθοδος: Ένας περιοδικός αριθμός που η περίοδός του δεν αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή μπορεί να γραφεί ως κλασματικός με αριθμητή τη διαφορά του αριθμού που σχηματίζουν τα ψηφία του μέχρι και την πρώτη περίοδο, από τον αριθμό που σχηματίζουν τα ψηφία πριν την πρώτη περίοδο, και παρονομαστή τόσα «9» όσα τα ψηφία της περιόδου ακολουθούμενα από τόσα «0» όσα τα δεκαδικά ψηφία πριν την περίοδο.

7. Να γραφούν με κλασματική μορφή οι περιοδικοί:

α) $1,33\overline{45}$ β) $5,3\overline{4}$ γ) $10,3\overline{57}$

Λύση

α) Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο:

$$1,33\overline{45} = \frac{13345 - 133}{9900} = \frac{13212}{9900}.$$

β) Ομοίως:

$$5,3\overline{4} = \frac{534 - 53}{90} = \frac{481}{90}.$$

γ) Ομοίως:

$$10,3\overline{57} = \frac{10357 - 103}{990} = \frac{10254}{990}.$$

8. Έστω οι περιοδικοί $x = 3,4\overline{5}$ και $y = 2,7\overline{4}$ να υπολογίσετε:

α) $x + y$ β) $x - y$ γ) $x \cdot y$ δ) $x : y$

Λύση

Ο $x = 3,4\overline{5}$ γράφεται

$$x = \frac{345 - 34}{90} = \frac{311}{90}$$

και ο $y = 2,7\overline{4}$ γράφεται

$$y = \frac{274 - 27}{90} = \frac{247}{90}.$$

α) $x + y = \frac{311}{90} + \frac{247}{90} = \frac{558}{90} = \frac{276}{45}$

β) $x - y = \frac{311}{90} - \frac{247}{90} = \frac{64}{90} = \frac{32}{45}$

γ) $x \cdot y = \frac{311}{90} \cdot \frac{247}{90} = \frac{76817}{8100}$

δ) $x : y = \frac{311}{90} : \frac{247}{90} = \frac{311}{90} \cdot \frac{90}{247} = \frac{311}{247}$

9. Χωρίς να κάνετε τις διαιρέσεις να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα παριστάνουν δεκαδικούς και ποια περιοδικούς δεκαδικούς.

α) $\frac{15}{100}$, β) $\frac{21}{16}$, γ) $\frac{47}{125}$, δ) $\frac{17}{30}$, ε) $\frac{7}{33}$

Λύση

Αναλύουμε τους παρονομαστές των κλασμάτων σε γινόμενα. Δηλαδή:

$100 = 2^2 \cdot 5^2$, $16 = 2^4$, $125 = 5^3$, $30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$, $33 = 3 \cdot 11$.

Τα κλάσματα $\frac{15}{100}, \frac{21}{16}, \frac{47}{125}$ έχουν παρονομαστές που μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των δυνάμεων του 2 και του 5.

α) $\frac{15}{100} = 0,15$

β) $\frac{21}{16} = \frac{21}{2^4} = \frac{21 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{21 \cdot 625}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{13125}{10000} = 1,3125$

γ) $\frac{47}{125} = \frac{471}{5^3} = \frac{47 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{47 \cdot 8}{(5 \cdot 2)^3} = \frac{376}{1000} = 0,376$

Τα κλάσματα $\frac{17}{30}$ και $\frac{7}{33}$ έχουν παρονομαστές που δεν μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των δυνάμεων του 2 και 5 και γι' αυτό παριστάνουν περιοδικούς δεκαδικούς.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους αριθμούς:

α) $0,\overline{5}$ β) $0,\overline{43}$ γ) $0,\overline{587}$ δ) $0,\overline{31}$

Λύση

α) $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$

β) $0,\overline{43} = \frac{43}{99}$

γ) ... , δ) ...

2. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους αριθμούς:

α) $1,\overline{7}$ β) $8,\overline{45}$ γ) $15,\overline{76}$ δ) $4,\overline{531}$

Λύση

α) $1,\overline{7} = \frac{17-1}{9} = ...$

β) $8,\overline{45} = \frac{845-8}{99} = ...$

γ) ... , δ) ...

3. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους αριθμούς:

α) $17,3\overline{41}$ β) $20,3\overline{4}$

γ) $1,35\overline{46}$ δ) $7,345\overline{7}$

Λύση

α) $17,3\overline{41} = \frac{17341-173}{990} = ...$

β) $20,3\overline{4} = \frac{2034-203}{90} = ...$

γ) $1,35\overline{46} = \frac{13546-135}{9900} = ...$

δ) ...

4. Αν $x = 7,89\overline{53}$ και $y = 4,51\overline{76}$, να βρείτε τα: α) $x + y$, β) $x - y$, γ) $x : y$.

Λύση

Είναι $x = 7,89\overline{53}$ ή $x = \frac{78953-789}{9900}$ και

$y = 4,51\overline{76}$ ή $y = \frac{45176-451}{9900}$ οπότε ...

5. Να γραφούν, όσοι μπορούν, από τους παρακάτω κλασματικούς, με δεκαδική μορφή, μη περιοδική.

α) $\frac{8}{75}$, β) $\frac{19}{40}$, γ) $\frac{75}{19}$, δ) $\frac{27}{32}$

Λύση

α) Το 75 μπορεί να γραφεί ως $3 \cdot 5^2$.

Άρα το κλάσμα $\frac{8}{75}$ είναι περιοδικός.

β) Το 40 μπορεί να γραφεί ως $5 \cdot 2^3$

οπότε $\frac{19}{40} = \frac{19}{5 \cdot 2^3} = \frac{19 \cdot 5^2}{5 \cdot 2^3 \cdot 5^2} = ...$

γ) Το 19 γράφεται μόνο ως $1 \cdot 19$. Άρα

το κλάσμα $\frac{75}{19}$ είναι περιοδικός.

δ) Το 32 γράφεται ως 2^5 οπότε

$\frac{27}{32} = \frac{27}{2^5} = \frac{27 \cdot 5^5}{2^5 \cdot 5^5} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γράψετε με δεκαδική μορφή τους ρητούς:

α) $\frac{7}{21}$, β) $\frac{35}{27}$, γ) $\frac{31}{50}$, δ) $\frac{124}{200}$,

ε) $\frac{53}{80}$, στ) $\frac{76}{16}$

2. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους περιοδικούς:

α) $7,\overline{35}$ β) $8,\overline{4}$ γ) $7,\overline{536}$

δ) $19,\overline{43}$ ε) $5,\overline{375}$ στ) $21,\overline{5}$

3. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους περιοδικούς:

α) $0,\overline{43}$ β) $0,\overline{78}$ γ) $0,\overline{596}$

4. Να γράψετε με κλασματική μορφή τους περιοδικούς:

α) $4,5\overline{36}$ β) $17,8\overline{593}$ γ) $5,81\overline{74}$

5. Αν $\alpha = 19,\overline{35}$ και $\beta = 20,\overline{38}$ να υπολογιστούν τα:

α) $\alpha + \beta$, β) $\alpha - \beta$, γ) $\alpha : \beta$

6. Να υπολογίσετε τα: $3x + 2y$ και $4x - 3y$ αν $x = 10,5\overline{3}$ και $y = 9,3\overline{7}$.

7. Να εξακριβώσετε ποια από τα παρακάτω κλάσματα μπορούν να γραφούν ως δεκαδικοί και να τα μετατρέψετε σε δεκαδικούς.

α) $\frac{5}{2}$, β) $\frac{35 \cdot 4}{7 \cdot 5^2}$, γ) $\frac{43 \cdot 2}{2^3 \cdot 5^2}$, δ) $\frac{49}{18}$,

ε) $\frac{125}{45}$, στ) $\frac{71}{38}$

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 4 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\right)$

β) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)$

γ) $\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{6} + \frac{5}{2}\right)$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{12}{15} + \frac{7}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) - 15 \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{11}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

β) $20 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{7}{2}\right) - 3 \cdot \left[4 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\right]$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $-[-[-[-[-(-2)]]]]$, β) $-[2-[2-[2-[2-(-2)]]]]$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\left(-\frac{2}{5} + 1\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - 1\right) - \left(1 + \frac{5}{2}\right) : \left(-2 - \frac{1}{3}\right)$

β) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{7}{12}\right) - \left(-4 - \frac{2}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{7}{12}\right)$

5. Εάν $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$ να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $4\alpha^2 + 16\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 - 16\alpha\beta + 4\alpha^2\gamma - 8\alpha\beta\gamma$

β) $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + 4\beta^2\gamma^4 - 2\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta\gamma^2 + 4\alpha^2\beta\gamma^2$

6. Εάν $\alpha = 2$, $\beta = -5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$27\alpha^3 + 54\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 + 8\beta^3$.

7. Να δείξετε ότι για $x = 6$ ισχύει η σχέση:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + x^3 = \frac{x^2 \cdot (x+1)^2}{4}$$

8. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $x^3 + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \cdot x + \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

β) $x^4 + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x^3 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) \cdot x^2 + (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta +$
$+ \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) \cdot x + \alpha\beta\gamma\delta$

αν $x = 3$, $\alpha = -2$, $\beta = -4$, $\gamma = -1$, $\delta = -5$.

9. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \cdot [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

β) $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$

για $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$. Τι παρατηρείτε;

10. Να δείξετε ότι αν $\alpha = \frac{3}{5}$ και $\beta = \frac{4}{5}$ ισχύει:

$(3\alpha - 4\alpha^3)^2 + (3\beta - 4\beta^3)^2 = 1$

11. Αν $x = 1$, $y = -1$, $\omega = 4$ να δείξετε ότι:

$|x + y + 2\omega - 8| + |2x - y + 3\omega - 15| + |3x + 2y - \omega + 3| = 0$

12. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $-3^{x+1} + 5^{y+2}$, β) $3^x + 2 \cdot 5^y$ αν $x = 3, y = 2$.

13. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $3^{x+1} - 2^x - 3^{x-1} - 2^{x+3}$, β) $2^{x-4} + 2 \cdot (-2)^{x-5} + 4 \cdot (-2)^{x-6} + 8 \cdot (-2)^{x-7}$ για $x = 3$.

14. Να βρεθεί πώς μπορεί να γραφούν ως κλασματικοί οι περιοδικοί:

α) $0{,}4\overline{3}$, β) $-0{,}\overline{64}$, γ) $4{,}5\overline{37}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

BASIC 1

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα βρίσκονται αυτές οι ειδικές σελίδες **προγραμματισμού BASIC**.

Τα κείμενα αυτά θα ήταν σωστό να χρησιμοποιηθούν μαζί με έναν οποιοδήποτε ηλεκτρονικό υπολογιστή που να δέχεται τη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC.**

Η γλώσσα BASIC χρησιμοποιεί τα σύμβολα που ήδη γνωρίζουμε για να δηλώσουμε τις 4 γνωστές πράξεις.

+ , - για πρόσθεση και αφαίρεση

* , / για πολ/σμό και διαίρεση.

Επίσης χρησιμοποιεί τις παρενθέσεις με τον ίδιο τρόπο που τις χρησιμοποιούμε και στα Μαθηματικά.

Για τις δυνάμεις όμως χρησιμοποιεί το σύμβολο ↑, δηλαδή η έκφραση 3^2 γράφεται στη BASIC 3↑2. Σύμφωνα με τα παραπάνω η παράσταση:

$\frac{3 \cdot 5}{7}$ γράφεται στη BASIC 3 * 5 / 7

ενώ η $\frac{3+5}{7}$ γράφεται στη BASIC:

(3 + 5) / 7.

Ας προσέξουμε ότι στη BASIC δεν υπάρχει αριθμητής και παρονομαστής κλάσματος όπως τουλάχιστον τους ξέραμε. Όλα γράφονται σε μια γραμμή. Πρέπει όμως να ξεχωρίζουμε με παρενθέσεις ποιος είναι ο αριθμητής και ποιος ο παρονομαστής. Π.χ.

η $\frac{3 \cdot 2 + 7}{2 + 4 - 3 \cdot 5}$ γράφεται ως

(3 * 2 + 7) / (2 + 4 - 3 * 5)

η $\frac{2^3 - 4}{5 + 7^2}$ ως (2 ↑ 3 - 4) / (5 + 7 ↑ 2)

και η $\frac{3^4 - 1}{2 \cdot 3} - \frac{4 - 5^2}{1 + 5} + \frac{3 - 4 \cdot 2 - 7^2}{5 \cdot 3 + 1}$

ως

(3 ↑ 4 - 1) / (2 * 3) - (4 - 5 ↑ 2) / (1 + 5)
+ (3 - 4 * 2 - 7 ↑ 2) / (5 * 3 + 1)

Παρατήρηση:

Η σειρά των πράξεων που καταλαβαίνει ο υπολογιστής είναι ίδια με αυτή που μάθαμε και χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά.

Υπάρχουν πολλές μορφές της γλώσσας BASIC και συνεχώς δημιουργούνται άλλες. Στο βιβλίο αυτό φροντίσαμε να έχουμε προγράμματα συμβατά με τις περισσότερες απ' αυτές. Αν όμως κάτι δεν πάει καλά τη λύση θα την ανακαλύψετε εύκολα στο βιβλίο οδηγιών της έκδοσης που χρησιμοποιείτε στον υπολογιστή σας.

Ασκήσεις

Να μετατρέψετε σε γλώσσα BASIC τις παραστάσεις:

α) $2 - 4 \cdot 3^3 + (12 - 7) \cdot 3^2$

β) $3 + (2 - 1) : (4 - 3) - 3^5 - 1$

γ) $\dfrac{3^4 - 2^6 \cdot (3^2 - 4^3) - 5}{3 \cdot 4 \cdot (5^2 - 1)}$

δ) $1 + 3 \cdot 4^3 + \dfrac{5 \cdot 4^3 - 5 \cdot 7^6}{12 - 4^3 + 1}$

BASIC 2

Ας επιχειρήσουμε τώρα να γράψουμε στον υπολογιστή τα εξής:

```
10  PRINT (2 + 10)/3     (↵)
20  PRINT 3 ↑ 2 - 6      (↵)
30  END                  (↵)
```

[Κάθε φορά που τελειώνει μια γραμμή πατάμε RETURN (ή ENTER) (↵)]. Να προσέξουμε ότι:

- Κάθε γραμμή αποτελείται από μια εντολή και όλες μαζί φτιάχνουν ένα πρόγραμμα.

- Οι αριθμοί στην αρχή κάθε γραμμής είναι απαραίτητοι για να βάζει ο υπολογιστής σε μια σειρά τις δουλειές που έχει να κάνει.

- Η εντολή PRINT στο παραπάνω πρόγραμμα σημαίνει «υπολόγισε και τύπωσε το αποτέλεσμα».

- Η τελευταία εντολή END (τέλος προγράμματος) δεν είναι απαραίτητη σε πολλούς υπολογιστές.

Στη συνέχεια πληκτρολογούμε:

RUN (↵)

Η εντολή RUN (τρέξε το πρόγραμμα) δεν έχει μπροστά αριθμό γραμμής γι' αυτό τη λέμε «Διαταγή».
Τώρα η οθόνη δείχνει 4 (το αποτέλεσμα της γραμμής 10) και από κάτω 3 (το αποτέλεσμα της γραμμής 20).

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις που ετοιμάσατε στο κομμάτι BASIC 1.

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις:

α) $23 \cdot 19 - 4 \cdot 5$

β) $(13 - 4) \cdot 5 - 15$

γ) $(12 \cdot 3 - 4 \cdot 5)^2 - 2 \cdot 5$

δ) $\dfrac{(17 - 4) \cdot 12}{15 + 3 \cdot 7^3}$

ε) $12^7 - 3^5 + 5 \cdot 7^3 - 2 \cdot 8^{12}$

BASIC 3

Έστω η παράσταση $2x^2 - 1$. Στη μεταβλητή x μπορούμε να δώσουμε όποια τιμή θέλουμε.

Έτσι για παράδειγμα, αν $x = 3$ τότε η παράσταση γίνεται:

$2 \cdot 3^2 - 1$ που είναι ίση με 17.

Θα μπορούσαμε δηλαδή να γράψουμε στον υπολογιστή:

```
10 PRINT 2*3↑2-1     (↵)
   RUN               (↵)
```

Και ο υπολογιστής θα δείξει στην οθόνη 17.

Αν όμως θέλαμε να υπολογίσουμε τη τιμή για $x = 5$ έπρεπε να φτιάξουμε άλλο πρόγραμμα. Από το κόπο αυτό μας απαλάσσει η εντολή INPUT. Όποτε χρησιμοποιούμε αυτή την εντολή ο υπολογιστής -αφού τρέξουμε το πρόγραμμα- περιμένει να του ορίσουμε την τιμή του x και μετά κάνει τον υπολογισμό.

Δηλαδή:

```
10 INPUT x           (↵)
20 PRINT 2*x ↑2-1    (↵)
   RUN               (↵)
```

Μετά το RUN που δώσαμε ο υπολογιστής εκτελεί την πρώτη εντολή, δηλαδή τη γραμμή 10. Σύμφωνα με την εντολή αυτή ο υπολογιστής περιμένει να του δώσουμε μια τιμή για τη μεταβλητή x . Έτσι μέχρι να δώσουμε την τιμή του x δεν θα γίνει τίποτε. Αν δώσουμε $x = 3$ τότε θα εμφανιστεί το αποτέλεσμα (17). Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μια ακόμα γραμμή

```
30 GO TO 10          (↵)
```

και μετά **RUN** (↵)

Τώρα -όσοι γνωρίζουν αγγλικά, το κατάλαβαν- το πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Προσέξτε γιατί:

Ο υπολογιστής περιμένει μια τιμή στο x (λόγω της γραμμής 10), τη δίνουμε και αμέσως την υπολογίζει και την εμφανίζει στην οθόνη (λόγω της γραμμής 20). Μετά προχωράει στη γραμμή 30 η οποία του λέει να πάει ξανά στη 10 (GO TO σημαίνει πήγαινε στη), όποτε περιμένει πάλι μια άλλη τιμή στο x που θα δώσουμε.

Ασκήσεις

1. Μπορούμε τώρα για μεγαλύτερη εξάσκηση να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να δίνει τη τιμή των παραστάσεων:

α) $2x^3 + 5$

β) $x^3 - 2x + 1$

γ) $15x^2 - 12x + 7$

όταν το x παίρνει όποια τιμή θέλουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Εξισώσεις - Ανισώσεις

2.1 Εισαγωγή

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε εξίσωση;

1. Εξίσωση ονομάζουμε μία ισότητα που περιέχει έναν ή περισσότερους άγνωστους. Συνηθίζεται τους άγνωστους της εξίσωσης να τους συμβολίζουμε με τα γράμματα x, y, φ κ.λπ.

<u>Παρατήρηση:</u> Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με εξισώσεις που περιέχουν **μόνο έναν** άγνωστο.

2. Ποιο ονομάζουμε πρώτο και ποιο δεύτερο μέλος σε μια εξίσωση; Δώστε ένα παράδειγμα.

2. Η παράσταση που βρίσκεται αριστερά από το «=» σε μια εξίσωση ονομάζεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση που βρίσκεται δεξιά από το «=», λέγεται **δεύτερο μέλος.**

Π.χ. στην εξίσωση $2x + 3 = 5 - x + 3x$ το πρώτο μέλος είναι: $2x + 3$ ενώ το δεύτερο μέλος είναι: $5 - x + 3x$.

3. Ποιοι λέγονται άγνωστοι και ποιοι γνωστοί όροι της εξίσωσης; Δώστε ένα παράδειγμα.

3. Άγνωστοι όροι λέγονται οι όροι της εξίσωσης που είναι γινόμενο ενός αριθμού (συντελεστής) με έναν άγνωστο.
Γνωστοί όροι λέγονται οι όροι της εξίσωσης που δεν περιέχουν άγνωστο.

Π.χ. Στην παραπάνω εξίσωση οι $2x$, $-x$, $3x$ είναι οι άγνωστοι όροι, ενώ οι 3, 5 είναι οι γνωστοί όροι.

3. Τι ονομάζουμε λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης;

1. Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης ονομάζουμε έναν αριθμό που, όταν τοποθετηθεί στην εξίσωση, στη θέση του αγνώστου της, μετατρέπει την εξίσωση σε αληθή ισότητα.

Για παράδειγμα στην εξίσωση: $2x + 5 = x + 8$, ο αριθμός 3 είναι η ρίζα της, γιατί $2 \cdot 3 + 5 = 3 + 8$ ή $6 + 5 = 3 + 8$ ή $11 = 11$ (αληθής ισότητα).
Ενώ ο αριθμός 4 δεν είναι ρίζα, γιατί:
$2 \cdot 4 + 5 = 4 + 8$ ή $8 + 5 = 4 + 8$ ή $13 = 12$ (ψευδής ισότητα).
Λέμε τότε ότι ο αριθμός $x = 3$ **επαληθεύει** την εξίσωση.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά x cm. Μπορείτε να εκφράσετε συμβολικά την περίμετρό του;

Λύση

Το ισόπλευρο τρίγωνο, γνωρίζουμε ότι έχει τις τρεις πλευρές του ίσες. Αφού λοιπόν κάθε μία είναι x cm, η περίμετρος του είναι: $(x + x + x)$ cm ή απλούστερα $3x$ cm.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τη μια του διάσταση μεγαλύτερη από την άλλη κατά 8 cm. Αν η μικρότερη διάστασή του είναι α cm πώς μπορούμε να συμβολίσουμε τη μεγαλύτερη;

Λύση

Η μεγαλύτερη διάστασή του θα είναι το άθροισμα της μικρότερης που είναι α cm και των 8 cm.
Δηλαδή θα είναι: $(\alpha + 8)$ cm.

3. Τρεις αριθμοί διαφέρουν κατά δύο μονάδες, ο μικρότερος από το μεσαίο και ο μεσαίος από το μεγαλύτερο. Πώς μπορούμε να συμβολίσουμε τον καθένα και πώς το άθροισμά τους;

Λύση

Ονομάζουμε x το μικρότερο. Τότε ο μεσαίος θα είναι $x + 2$ και ο μεγαλύτερος $(x + 2) + 2$ δηλαδή $x + 4$.
Το άθροισμά τους τότε θα είναι:
$x + (x + 2) + (x + 4) =$
$= x + x + 2 + x + 4 = 3x + 6$

4. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 9. Να τους συμβολίσετε και μετά να τους βρείτε.

Λύση

Αφού οι αριθμοί είναι διαδοχικοί, καθένας θα διαφέρει από τον επόμενό του κατά μία μονάδα. Αν συμβολίσουμε λοιπόν το μεσαίο με το ν, τότε ο μικρότερος θα είναι $\nu - 1$ και ο μεγαλύτερος $\nu + 1$.
Τότε το άθροισμά τους θα είναι:
$(\nu - 1) + \nu + (\nu + 1) = \nu - 1 + \nu + \nu + 1 =$
$= 3\nu$
Το άθροισμα όμως μας δίνεται από το πρόβλημα ίσο με το 9. Άρα $3\nu = 9$. Οπότε η ρίζα της εξίσωσης είναι το $\nu = 3$ γιατί την επαληθεύει, αφού $3 \cdot 3 = 9$.

Δηλαδή βρήκαμε ότι ο μεσαίος είναι το 3. Τότε ο μικρότερος είναι το 2 και ο μεγαλύτερος το 4.

5. Μία γωνία είναι μεγαλύτερη κατά $12°$ από το $\frac{1}{6}$ μιας άλλης γωνίας. Να εκφράσετε συμβολικά την παραπάνω πρόταση.

Λύση

Ονομάζουμε φ τη δεύτερη γωνία. Τότε η πρώτη, σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $\frac{1}{6}\varphi + 12$ μοίρες.

6. Να εξακριβώσετε αν κάποιος από τους αριθμούς -3, 2, 1 είναι λύση της εξίσωσης: $3x^2 - 5x + 2 = x - 1$.

Λύση

Τοποθετούμε διαδοχικά τους δοσμένους αριθμούς στη θέση του αγνώστου στην εξίσωση και έχουμε:

Για $x = -3$:

$3 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 2 = -3 - 1$ ή

$3 \cdot (-27) - 5 \cdot (-3) + 2 = -4$ ή

$-81 + 15 + 2 = -4$ ή

$-64 = -4$ <u>ψευδής ισότητα</u>

Για $x = 2$:

$3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 2 - 1$ ή

$3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 = 1$ ή

$12 - 10 + 2 = 1$ ή

$4 = 1$ <u>ψευδής ισότητα</u>

Για $x = 1$:

$3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 1 - 1$ ή

$3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$ ή

$3 - 5 + 2 = 0$ ή $0 = 0$ <u>αληθής ισότητα</u>

Επομένως ο αριθμός $x = 1$ είναι λύση της εξίσωσης.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να εκφράσετε συμβολικά την περίμετρο ενός ρόμβου.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι τέσσερις πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Ονομάζουμε, επομένως x μία απ' αυτές οπότε ....

2. Ένα διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη γη με μέση ταχύτητα 1.250 km/h. Πόσο θα απέχει από τη γη σε t ώρες;

Λύση

Αφού σε 1 h το διαστημόπλοιο διανύει διάστημα 1.250 km, σε t ώρες θα έχει διανύσει ....

3. Να εκφράσετε με εξίσωση την πρόταση:

«Η αξία μιας τηλεόρασης που είναι 280.000 δρχ., εξοφλήθηκε σε 7 ισόποσες μηνιαίες δόσεις».

Λύση

Ονομάζουμε x το ποσό της κάθε δόσης. Αφού έχουμε εξόφληση σε 7 δόσεις η εξίσωση θα είναι ....

4. Να εκφράσετε συμβολικά την πρόταση:

«Το πενταπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 4».

Λύση

Ονομάζουμε x τον αριθμό. Τότε το πενταπλάσιό του συμβολίζεται 5x. Άρα το πενταπλάσιό του ελαττωμένο κατά 4 είναι ....

5. Να εκφράσετε συμβολικά την παρακάτω πρόταση:

«Τα $\frac{3}{5}$ του $\frac{1}{2}$ ενός αριθμού».

Λύση

Ονομάζουμε x τον αριθμό. Τότε το $\frac{1}{2}$ · του αριθμού συμβολίζεται $\frac{1}{2}x$. Έτσι τα $\frac{3}{5}$ του $\frac{1}{2}x$ συμβολίζονται ....

6. Να εξακριβώσετε αν κάποιος από τους αριθμούς - 5, - 3, 0, 2 είναι ρίζα της εξίσωσης: $3x - 5 = 2x - 3$.

Λύση

Τοποθετούμε διαδοχικά τους αριθμούς - 5, - 3, 0, 2 στην εξίσωση στη θέση του αγνώστου και έχουμε:

Για $x = -5$:

$3 \cdot (-5) - 5 = 2 \cdot (-5) - 3$ ή

$-15 - 5 = -10 - 3$ ή

$-20 = -13$ ψευδής ισότητα

Για $x = -3$: ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να συμβολίσετε πέντε ακέραιους που απέχει ο ένας από τον άλλο δυο μονάδες. Μετά να βρείτε τους αριθμούς αν γνωρίζετε ότι το άθροισμά τους είναι 10.

2. «Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, ισούται με 12». Να εκφράσετε συμβολικά την πρόταση αυτή, και μετά να υπολογίσετε τον αριθμό.

3. Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου διαφέρουν κατά 7 cm. Να συμβολίσετε τις παραπάνω διαστάσεις.

4. Να συμβολίσετε τα $\frac{4}{5}$ των $\frac{5}{4}$ ενός αριθμού.

5. Να συμβολίσετε έναν άρτιο και έναν περιττό αριθμό.

6. Να συμβολίσετε τα πολλαπλάσια του 5 και τα πολλαπλάσια του 20.

7. Να γράψετε τις παρακάτω εξισώσεις με απλούστερη μορφή:

α) $2x + 5x = 7$

β) $2\varphi - \varphi = 0$

γ) $y + y = 4$

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Εξίσωση	Άγνωστοι όροι	Γνωστοί όροι
$x - 2 = 5x$		
$3x - 1 = 4$		
$\varphi+2-3\varphi=5$		

2.2 Επίλυση εξισώσεων

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι είναι η επίλυση μιας εξίσωσης;	**1. Επίλυση** μιας εξίσωσης είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε τη λύση της. Λέμε απλά, τότε, ότι λύνουμε την εξίσωση.
2. Ποιους κανόνες ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση;	**2.** Οι κανόνες (βήματα) που ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση είναι:

Ως παράδειγμα να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{3} - 2x = \frac{3x}{2} - 1$$

Έχουμε: Ε.Κ.Π. = 6

$$6 \cdot \frac{x-2}{3} - 6 \cdot 2x = 6 \cdot \frac{3x}{2} - 6 \cdot 1 \text{ ή}$$

⟵ <u>1ο βήμα:</u> Αν υπάρχουν παρονομαστες: βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους (Ε.Κ.Π.) και πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με αυτό. Μετά απλοποιούμε τους παρονομαστές με το Ε.Κ.Π. Η εργασία αυτή λέγεται **απαλοιφή παρονομαστών**.

$$2 \cdot (x-2) - 6 \cdot 2x = 3 \cdot 3x - 6 \cdot 1 \text{ ή}$$
$$2x - 4 - 12x = 9x - 6 \text{ ή}$$

⟵ <u>2ο βήμα:</u> Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς, που έχουν δημιουργηθεί, με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας, όπου χρειάζεται. Η εργασία αυτή λέγεται **απαλοιφή παρενθέσεων.**

$$2x - 12x - 9x = -6 + 4 \text{ ή}$$

⟵ <u>3ο βήμα:</u> Μεταφέρουμε όλους τους άγνωστους όρους στο πρώτο μέλος και όλους τους γνωστούς στο δεύτερο. Εδώ πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι **κάθε όρος (γνωστός ή άγνωστος) που αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο.** Η εργασία αυτή λέγεται **χωρισμός γνωστών από αγνώστους.**

$(2 - 12 - 9)x = -2$ ή ⟵ <u>4ο βήμα:</u> Στο πρώτο μέλος συμπτύσσουμε τους αγνώστους εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα, ενώ στο δεύτερο μέλος εκτελούμε τις πράξεις. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων.**

$19x = -2$ ή

$\frac{-19x}{-19} = \frac{-2}{-19}$ ή $x = \frac{2}{19}$ ⟵ <u>5ο βήμα:</u> Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στην παρένθεση του πρώτου μέλους και ο αριθμός που προκύπτει λέγεται **συντελεστής του αγνώστου.** Μετά διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου και βρίσκουμε έτσι τη λύση της εξίσωσης.

3. Τι είναι επαλήθευση μιας εξίσωσης;

3. Επαλήθευση μιας εξίσωσης είναι η διαδικασία με την οποία διαπιστώνουμε αν έχουμε λύσει σωστά την εξίσωση.

Η επαλήθευση μιας εξίσωσης γίνεται ως εξής:

Τοποθετούμε στη θέση του αγνώστου τον αριθμό που βρήκαμε από τη λύση της και κάνουμε τις πράξεις. Αν προκύψει αληθής ισότητα σημαίνει ότι η λύση που βρήκαμε είναι σωστή. Αν προκύψει ψευδής ισότητα σημαίνει ότι η λύση που βρήκαμε είναι λάθος και πρέπει τότε να λύσουμε την εξίσωση από την αρχή.

<u>Παράδειγμα:</u> Η λύση της εξίσωσης $3x - 2 = -5x + 6$ είναι η $x = 1$. Κάνουμε τώρα την επαλήθευση. Βάζουμε στην εξίσωση, όπου x το 1 και έχουμε διαδοχικά:

$3 \cdot 1 - 2 = -5 \cdot 1 + 6$

$3 - 2 = -5 + 6$

$1 = 1$

4. Ποια εξίσωση λέμε αδύνατη και ποια αόριστη;

4. Αδύνατη λέγεται μια εξίσωση που έχει τη μορφή: $0x = α$, όπου το α δεν είναι το 0. Όποιος αριθμός κι αν τοποθετηθεί στη θέση του x, δεν την επαληθεύει. Η αδύνατη εξίσωση λέμε ότι **δεν έχει λύση.**

Αόριστη ή ταυτότητα λέγεται μια εξίσωση που έχει τη μορφή $0x = 0$. Όποιος αριθμός κι αν τοποθετηθεί στη θέση του x, την επαληθεύει. Η αόριστη εξίσωση λέμε ότι έχει **άπειρες λύσεις.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και μετά να κάνετε τις επαληθεύσεις τους:

α) $3x + 2x = 5$

β) $2x - 3x = 6 - 3$

γ) $5x - 1 = 4x - 2$

δ) $4 \cdot (x - 6) = 7x - 3$

ε) $1,5y - 4 \cdot (y - 5,5) = 3y$

στ) $16\varphi = -3 \cdot (-2 + \varphi) + 1$

ζ) $3,6\theta + 2,1 \cdot (3\theta - 1) = 0$

η) $-19 \cdot (3\rho - 2) = 8\rho - 6$

θ) $720 \cdot (0,1t - 0,1) = 8$

Λύση

α) $3x + 2x = 5$ ή

$(3 + 2) \cdot x = 5$ ή

$5x = 5$ ή

$\frac{5x}{5} = \frac{5}{5}$ ή

$x = 1$

Επαλήθευση

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ ή

$3 + 2 = 5$ ή

$5 = 5$ (Αληθής)

β) $2x - 3x = 6 - 3$ ή

$(2 - 3) \cdot x = 3$ ή

$-1x = 3$ ή

$\frac{-1x}{-1} = \frac{3}{-1}$ ή

$x = -3$

Επαλήθευση

$2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) = 6 - 3$ ή

$-6 + 9 = 3$ ή

$3 = 3$

γ) $5x - 1 = 4x - 2$ ή

$5x - 4x = -2 + 1$ ή

$(5 - 4) \cdot x = -1$ ή

$1x = -1$ ή

$x = -1$

Επαλήθευση

$5 \cdot (-1) - 1 = 4 \cdot (-1) - 2$ ή

$-5 - 1 = -4 - 2$ ή

$-6 = -6$

δ) $4 \cdot (x - 6) = 7x - 3$ ή

$4x - 24 = 7x - 3$ ή

$4x - 7x = -3 + 24$ ή

$(4 - 7) \cdot x = 21$ ή

$-3x = 21$ ή

$\frac{-3x}{-3} = \frac{21}{-3}$ ή

$x = -\frac{21}{3}$ ή

$x = -7$

Επαλήθευση

$4 \cdot [(-7) - 6] = 7 \cdot (-7) - 3$ ή

$4 \cdot (-7 - 6) = -49 - 3$ ή

$4 \cdot (-13) = -52$ ή

$-52 = -52$

ε) $1,5y - 4 \cdot (y - 5,5) = 3y$ ή

$1,5y - 4y + 22 = 3y$ ή

$1,5y - 4y - 3y = -22$ ή

$(1,5 - 4 - 3) \cdot y = -22$ ή

$-5,5y = -22$ ή

$\frac{-5,5y}{-5,5} = \frac{-22}{-5,5}$ ή

$y = 4$

Επαλήθευση

$1,5 \cdot 4 - 4 \cdot (4 - 5,5) = 3 \cdot 4$ ή

$6 - 4 \cdot (-1,5) = 12$ ή

$6 + 6 = 12$ ή
$12 = 12$

στ) $16\varphi = -3 \cdot (-2 + \varphi) + 1$ ή
$16\varphi = 6 - 3\varphi + 1$ ή
$16\varphi + 3\varphi = 6 + 1$ ή
$(16 + 3) \cdot \varphi = 7$ ή
$19\varphi = 7$ ή
$\frac{19\varphi}{19} = \frac{7}{19}$ ή
$\varphi = \frac{7}{19}$

Επαλήθευση

$16 \cdot \frac{7}{19} = -3 \cdot (-2 + \frac{7}{19}) + 1$ ή
$\frac{112}{19} = -3 \cdot (-\frac{2}{1} + \frac{7}{19}) + 1$ ή
$\frac{112}{19} = -3 \cdot (-\frac{38}{19} + \frac{7}{19}) + 1$ ή
$\frac{112}{19} = -3 \cdot (-\frac{31}{19}) + 1$ ή
$\frac{112}{19} = \frac{93}{19} + \frac{1}{1}$ ή
$\frac{112}{19} = \frac{93}{19} + \frac{19}{19}$ ή
$\frac{112}{19} = \frac{112}{19}$

ζ) $3{,}6\theta + 2{,}1 \cdot (3\theta - 1) = 0$ ή
$3{,}6\theta + 6{,}3\theta - 2{,}1 = 0$ ή
$3{,}6\theta + 6{,}3\theta = 2{,}1$ ή
$(3{,}6 + 6{,}3) \cdot \theta = 2{,}1$ ή
$9{,}9\theta = 2{,}1$ ή
$\frac{9{,}9\theta}{9{,}9} = \frac{2{,}1}{9{,}9}$ ή
$\theta = \frac{21}{99}$ ή $\theta = \frac{7}{33}$

Επαλήθευση

$3{,}6 \cdot \frac{7}{33} + 2{,}1 \cdot (3 \cdot \frac{7}{33} - 1) = 0$ ή
$\frac{25{,}2}{33} + 2{,}1 \cdot (\frac{21}{33} - \frac{1}{1}) = 0$ ή
$\frac{252}{330} + 2{,}1 \cdot (\frac{21}{33} - \frac{33}{33}) = 0$ ή
$\frac{42}{55} + 2{,}1 \cdot (-\frac{12}{33}) = 0$ ή
$\frac{42}{55} - \frac{25{,}2}{33} = 0$ ή
$\frac{42}{55} - \frac{252}{330} = 0$ ή
$\frac{42}{55} - \frac{42}{55} = 0$ ή
$0 = 0$

η) $-19 \cdot (3\rho - 2) = 8\rho - 6$ ή
$-57\rho + 38 = 8\rho - 6$ ή
$-57\rho - 8\rho = -38 - 6$ ή
$(-57 - 8) \cdot \rho = -44$ ή
$-65\rho = -44$ ή
$\frac{-65\rho}{-65} = \frac{-44}{-65}$ ή
$\rho = \frac{44}{65}$

Επαλήθευση

$-19 \cdot (3 \cdot \frac{44}{65} - 2) = 8 \cdot \frac{44}{65} - 6$ ή
$-19 \cdot (\frac{132}{65} - \frac{2}{1}) = \frac{352}{65} - \frac{6}{1}$ ή
$-19 \cdot (\frac{132}{65} - \frac{130}{65}) = \frac{352}{65} - \frac{390}{65}$ ή
$-19 \cdot \frac{2}{65} = -\frac{38}{65}$ ή
$\frac{38}{65} = -\frac{38}{65}$

θ) $720 \cdot (0{,}1t - 0{,}1) = 8$ ή
$72t - 72 = 8$ ή
$72t = 8 + 72$ ή
$72t = 80$ ή
$\frac{72t}{72} = \frac{80}{72}$ ή
$t = \frac{10}{9}$

Επαλήθευση

$720 \cdot (0{,}1 \cdot \frac{10}{9} - 0{,}1) = 8$ ή
$720 \cdot (\frac{1}{9} - \frac{0{,}1}{1}) = 8$ ή
$720 \cdot (\frac{1}{9} - \frac{0{,}9}{9}) = 8$ ή $720 \cdot \frac{0{,}1}{9} = 8$ ή
$\frac{72}{9} = 8$ ή $8 = 8$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x - 8) \cdot 3 - 2 \cdot (x + 4) = 0$

β) $- 2\,(x - 3) \cdot 4 - 3 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (- 3x - 1)$

γ) $3 \cdot (2x - 5) = - 8 \cdot (5 - 3x) + 25$

δ) $0 = 8 \cdot (7x - 11) + 3x - 1$

ε) $- 7\varphi + 4 \cdot (3\varphi + 1) - 2 = 8 \cdot (\varphi - 3) + 5$

στ) $\omega - 2 = 5 \cdot (3{,}2\omega - 7{,}1)$

ζ) $- 12{,}4 \cdot (y - 2{,}8) - 1 = 4 \cdot (y - 2) \cdot 6 - 3$

η) $\frac{4}{5} \cdot (t - 1) - 2t = - 5 \cdot (t - 6)$

θ) $7 \cdot (x - \frac{1}{2}) = 4{,}2 \cdot (3x - 1) + 5$

ι) $\frac{3}{5} \cdot (\theta - 0{,}6) = \frac{1}{2} \cdot (- \frac{3}{2}\theta + 6)$

ια) $3 \cdot (x - 4) + 1 = x + 2 \cdot (x + 6) - 23$

ιβ) $- 5 + 7 \cdot (2x - 3) = 7x + 7 \cdot (x - 3)$

Λύση

α) $(x - 8) \cdot 3 - 2 \cdot (x + 4) = 0$ ή
$3x - 24 - 2x - 8 = 0$ ή
$3x - 2x = 24 + 8$ ή
$(3 - 2) \cdot x = 32$ ή
$1x = 32$ ή
$x = 32$

β) $- 2 \cdot (x - 3) \cdot 4 - 3 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (- 3x - 1)$ ή
$- 2 \cdot 4 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (- 3x - 1)$ ή
$- 8 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x+2) = 4 \cdot (- 3x - 1)$ ή
$- 8x + 24 - 3x - 6 = - 12x - 4$ ή
$- 8x - 3x + 12x = - 4 - 24 + 6$ ή
$(- 8 - 3 + 12) \cdot x = - 22$ ή
$1x = - 22$ ή
$x = - 22$

γ) $3 \cdot (2x - 5) = - 8 \cdot (5 - 3x) + 25$ ή
$6x - 15 = - 40 + 24x + 25$ ή
$6x - 24x = - 40 + 15 + 25$ ή
$(6 - 24) \cdot x = 0$ ή
$- 18x = 0$ ή
$\frac{- 18x}{- 18} = \frac{0}{- 18}$ ή
$x = 0$

δ) $0 = 8 \cdot (7x - 11) + 3x - 1$ ή
$0 = 56x - 88 + 3x - 1$ ή
$- 56x - 3x = - 88 - 1$ ή
$(- 56 - 3) \cdot x = - 89$ ή
$- 59x = - 89$ ή
$\frac{- 59x}{- 59} = \frac{- 89}{- 59}$ ή
$x = \frac{89}{59}$

ε) $-7\varphi+4 \cdot (3\varphi+1) - 2 = 8 \cdot (\varphi - 3)+5$ ή
$- 7\varphi + 12\varphi + 4 - 2 = 8\varphi - 24 + 5$ ή
$- 7\varphi + 12\varphi - 8\varphi = - 24 + 5 - 4 + 2$ ή
$(- 7 + 12 - 8) \cdot \varphi = - 21$ ή
$- 3\varphi = - 21$ ή
$\frac{- 3\varphi}{- 3} = \frac{- 21}{- 3}$ ή
$\varphi = 7$

στ) $\omega - 2 = 5 \cdot (3{,}2\omega - 7{,}1)$ ή
$\omega - 2 = 16\omega - 35{,}5$ ή
$\omega - 16\omega = - 35{,}5 + 2$ ή
$(1 - 16) \cdot \omega = - 33{,}5$ ή
$- 15\omega = - 33{,}5$ ή
$\frac{- 15\omega}{- 15} = \frac{- 33{,}5}{- 15}$ ή
$\omega = \frac{67}{30} = 2\frac{7}{30}$

ζ) $-12{,}4 \cdot (y -2{,}8) -1 = 4 \cdot (y - 2) \cdot 6 - 3$ ή
$- 12{,}4y +34{,}72 - 1 = 4 \cdot 6 \cdot (y - 2) - 3$ ή
$- 12{,}4y + 34{,}72 - 1 = 24 \cdot (y - 2) - 3$ ή
$- 12{,}4y + 34{,}72 - 1 = 24y - 48 - 3$ ή
$- 12{,}4y - 24y = - 48 - 3 - 34{,}72 + 1$ ή
$(- 12{,}4 - 24) \cdot y = - 84{,}72$ ή
$- 36{,}4y = - 84{,}72$ ή
$\frac{- 36{,}4y}{- 36{,}4} = \frac{- 84{,}72}{- 36{,}4}$ ή
$y = \frac{8472}{3640}$ ή
$y = \frac{1059}{455} = 2\frac{149}{455}$

η) $\frac{4}{5} \cdot (t-1) - 2t = -5 \cdot (t-6)$ ή

$\frac{4t}{5} - \frac{4}{5} - 2t = -5t + 30$ ή

$\frac{4t}{5} - 2t + 5t = 30 + \frac{4}{5}$ ή

$\frac{4t}{5} - \frac{2t}{1} + \frac{5t}{1} = \frac{30}{1} + \frac{4}{5}$ ή

$\frac{4t}{5} - \frac{10t}{5} + \frac{25t}{5} = \frac{150}{5} + \frac{4}{5}$ ή

$(\frac{4}{5} - \frac{10}{5} + \frac{25}{5}) \cdot t = \frac{154}{5}$ ή

$\frac{19}{5} t = \frac{154}{5}$ ή

$\frac{\frac{19}{5}}{\frac{19}{5}} t = \frac{\frac{154}{5}}{\frac{19}{5}}$ ή

$t = \frac{154}{19} = 8\frac{2}{19}$

θ) $7 \cdot (x - \frac{1}{2}) = 4{,}2 \cdot (3x - 1) + 5$ ή

$7x - \frac{7}{2} = 12{,}6x - 4{,}2 + 5$ ή

$7x - 12{,}6x = -4{,}2 + 5 + \frac{7}{2}$ ή

$(7 - 12{,}6) \cdot x = -\frac{4{,}2}{1} + \frac{5}{1} + \frac{7}{2}$ ή

$-5{,}6x = -\frac{8{,}4}{2} + \frac{10}{2} + \frac{7}{2}$ ή

$-5{,}6x = \frac{8{,}6}{2}$ ή

$-5{,}6x = 4{,}3$ ή

$\frac{-5{,}6x}{-5{,}6} = \frac{4{,}3}{-5{,}6}$ ή

$x = -\frac{43}{56}$

ι) $\frac{3}{5} \cdot (\theta - 0{,}6) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2}\theta + 6)$ ή

$\frac{3\theta}{5} - \frac{1{,}8}{5} = -\frac{3\theta}{4} + 3$ ή

$\frac{3\theta}{5} + \frac{3\theta}{4} = \frac{1{,}8}{5} + 3$ ή

$20 \cdot \frac{3\theta}{5} + 20 \cdot \frac{3\theta}{4} = 20 \cdot \frac{1{,}8}{5} + 20 \cdot 3$ ή

$4 \cdot 3\theta + 5 \cdot 3\theta = 4 \cdot 1{,}8 + 20 \cdot 3$ ή

$12\theta + 15\theta = 7{,}2 + 60$ ή

$(12 + 15) \cdot \theta = 67{,}2$ ή

$27\theta = 67{,}2$ ή

$\frac{27\theta}{27} = \frac{67{,}2}{27}$ ή

$\theta = \frac{672}{270}$ ή $\theta = \frac{112}{45} = 2\frac{22}{45}$

ια) $3 \cdot (x - 4) + 1 = x + 2 \cdot (x + 6) - 23$ ή

$3x - 12 + 1 = x + 2x + 12 - 23$ ή

$3x - 2x - x = 12 - 1 + 12 - 23$ ή

$(3 - 2 - 1) \cdot x = 0$ ή

$0x = 0$ αόριστη

ιβ) $-5 + 7 \cdot (2x - 3) = 7x + 7 \cdot (x - 3)$ ή

$-5 + 14x - 21 = 7x + 7x - 21$ ή

$14x - 7x - 7x = 5 + 21 - 21$ ή

$(14 - 7 - 7) \cdot x = 5$ ή

$0x = 5$ αδύνατη

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και να κάνετε τις επαληθεύσεις στις δύο πρωτες.

α) $\frac{x-1}{3} + x = 5$

β) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = 2x - 2$

γ) $6 + \frac{3(x-1)}{4} = \frac{2(x+3)}{5}$

δ) $\frac{0{,}3x+2}{4} + \frac{5x}{6} = \frac{3(x+2)}{8} + 1$

ε) $\frac{7x+1}{7} - \frac{3(2x+5)}{2} = 1 + \frac{3x}{5}$

στ) $\frac{5t-2}{9} = \frac{3(t-6)}{5}$

ζ) $\frac{y}{12} + \frac{y-2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{y+6}{3} + 1$

η) $\frac{-6(x-2)}{4} + 1 = \frac{5x+12}{3} - \frac{19x}{6}$

Λύση

α) $\frac{x-1}{3} + x = 5$ ή

$3 \cdot \frac{x-1}{3} + 3 \cdot x = 3 \cdot 5$ ή

$1 \cdot (x - 1) + 3x = 15$ ή
$x - 1 + 3x = 15$ ή
$x + 3x = 15 + 1$ ή
$(1 + 3)x = 16$ ή
$4x = 16$ ή
$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$ ή

$x = 4$

Επαλήθευση

$\frac{4 - 1}{3} + 4 = 5$ ή
$\frac{3}{3} + 4 = 5$ ή

$1 + 4 = 5$ ή
$5 = 5$

β) $\frac{2x + 1}{5} + \frac{3x - 2}{4} = 2x - 2$ ή
$20 \cdot \frac{2x + 1}{5} + 20 \cdot \frac{3x - 2}{4} = 20 \cdot 2x - 20 \cdot 2$

$4 \cdot (2x + 1) + 5 \cdot (3x - 2) = 40x - 40$ ή
$8x + 4 + 15x - 10 = 40x - 40$ ή
$8x + 15x - 40x = - 40 - 4 + 10$ ή
$(8 + 15 - 40)x = - 34$ ή
$- 17x = - 34$ ή
$\frac{- 17x}{- 17} = \frac{- 34}{- 17}$ ή

$x = 2$

Επαλήθευση

$\frac{2 \cdot 2 + 1}{5} + \frac{3 \cdot 2 - 2}{4} = 2 \cdot 2 - 2$ ή
$\frac{4 + 1}{5} + \frac{6 - 2}{4} = 4 - 2$ ή
$\frac{5}{5} + \frac{4}{4} = 2$ ή

$1 + 1 = 2$ ή
$2 = 2$

γ) $6 + \frac{3 (x - 1)}{4} = \frac{2 (x + 3)}{5}$ ή
$20 \cdot 6 + 20 \cdot \frac{3 (x - 1)}{4} = 20 \cdot \frac{2 (x + 3)}{5}$ ή

$120 + 5 \cdot 3 \cdot (x - 1) = 4 \cdot 2 \cdot (x + 3)$ ή
$120 + 15 \cdot (x - 1) = 8 \cdot (x + 3)$ ή
$120 + 15x - 15 = 8x + 24$ ή
$15x - 8x = 24 - 120 + 15$ ή
$(15 - 8)x = - 81$ ή
$7x = - 81$ ή
$\frac{7x}{7} = \frac{- 81}{7}$ ή
$x = - \frac{81}{7} = - 11 \frac{4}{7}$

δ) $\frac{0,3x + 2}{4} + \frac{5x}{6} = \frac{3 (x + 2)}{8} + 1$ ή
$24 \cdot \frac{0,3x + 2}{4} + 24 \cdot \frac{5x}{6} = 24 \cdot \frac{3 (x + 2)}{8} +$
$+ 24 \cdot 1$ ή

$6 \cdot (0,3x+2)+4 \cdot 5x = 3 \cdot 3(x+2)+24$ ή
$1,8x + 12 + 20x = 9 (x+ 2) + 24$ ή
$1,8x + 12 + 20x = 9x + 18 + 24$ ή
$1,8x + 20x - 9x = 18 + 24 - 12$ ή
$(1,8 + 20 - 9)x = 30$ ή
$12,8x = 30$ ή
$\frac{12,8x}{12,8} = \frac{30}{12,8}$ ή
$x = \frac{128}{7} = \frac{75}{32} = 2 \frac{11}{32}$

ε) $\frac{7x + 1}{7} - \frac{3 (2x + 5)}{2} = 1 + \frac{3x}{5}$ ή
$70 \cdot \frac{7x + 1}{7} - 70 \cdot \frac{3 (2x + 5)}{2} = 70 \cdot 1 +$
$+ 70 \cdot \frac{3x}{5}$ ή

$10 \cdot (7x + 1) - 35 \cdot 3 \cdot (2x + 5) = 70 +$
$+ 14 \cdot 3x$ ή
$70x + 10 - 105 \cdot (2x + 5) = 70+42x$ ή
$70x + 10 - 210x - 525 = 70 + 42x$ ή
$70x - 210x - 42x = 70 - 10 + 525$ ή
$(70 - 210 - 42)x = 585$ ή
$- 182x = 585$ ή
$\frac{- 182x}{- 182} = \frac{585}{- 182}$ ή
$x = \frac{585}{- 182} = - \frac{45}{14} = - 3 \frac{3}{14}$

στ) $\frac{5t - 2}{9} = \frac{3(t - 6)}{5}$ ή

$45 \cdot \frac{5t - 2}{9} = 45 \cdot \frac{3(t - 6)}{5}$ ή

$5 \cdot (5t - 2) = 9 \cdot 3 \cdot (t - 6)$ ή
$25t - 10 = 27 \cdot (t - 6)$ ή
$25t - 10 = 27t - 162$ ή
$25t - 27t = -162 + 10$ ή
$(25 - 27)t = -152$ ή
$-2t = -152$ ή

$\frac{-2t}{-2} = \frac{-152}{-2}$

$t = 76$

Στην εξίσωση αυτή μπορούσαμε να απαλείψουμε τους παρονομαστές κάνοντας πολλαπλασιασμό «χιαστί» ως εξής:

$\frac{5t - 2}{9} = \frac{3(t - 6)}{5}$ ή

$9 \cdot 3 \cdot (t - 6) = 5 \cdot (5t - 2)$ ή
$27 \cdot (t - 6) = 25t - 10$ ή
$27t - 162 = 25t - 10$ ή
$27t - 25t = -10 + 162$ ή
$(27 - 25)t = 152$ ή
$2t = 152$ ή

$\frac{2t}{2} = \frac{152}{2}$ ή

$t = 76$

ζ) $\frac{y}{12} + \frac{y - 2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{y + 6}{3} + 1$ ή

$12 \cdot \frac{y}{12} + 12 \cdot \frac{y - 2}{4} + 12 \cdot \frac{3}{2} =$

$= 12 \cdot \frac{y + 6}{3} + 12 \cdot 1$ ή

$1y + 3 \cdot (y - 2) + 6 \cdot 3 = 4 \cdot (y + 6) + 12$ ή
$1y + 3y - 6 + 18 = 4y + 24 + 12$ ή
$1y + 3y - 4y = 24 + 12 + 6 - 18$ ή
$(1 + 3 - 4)y = 24$ ή
$0y = 24$ αδύνατη

η) $\frac{-6(x - 2)}{4} + 1 = \frac{5x + 12}{3} - \frac{19x}{6}$ ή

$12 \cdot \frac{-6(x - 2)}{4} + 12 \cdot 1 = 12 \cdot \frac{5x + 12}{3} -$

$- 12 \cdot \frac{19x}{6}$ ή

$3 \cdot [-6(x - 2)] + 12 = 4 \cdot (5x + 12) -$
$- 2 \cdot 19x$ ή
$-18 \cdot (x - 2) + 12 = 20x + 48 - 38x$ ή
$-18x + 36 + 12 = 20x + 48 - 38x$ ή
$-18x - 20x + 38x = 48 - 36 - 12$ ή
$(-18 - 20 + 38)x = 0$ ή
$0x = 0$ αόριστη

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $8x = 3x$
β) $x = x$
γ) $0{,}001x - 0{,}003 = 0{,}007$
δ) $1.000 \cdot (x - 2) = 3.000x - 8.000$

ε) $\frac{\frac{3}{2} + x}{5} = \frac{\frac{1}{8} + x}{7} + 2$

στ) $\frac{\frac{3(x - 1)}{4}}{2} - \frac{\frac{7x}{3} - 5}{3} = 4$

ζ) $0x = 5 - 3$

Λύση

α) $8x = 3x$ ή
$8x - 3x = 0$ ή
$(8 - 3)x = 0$ ή
$5x = 0$ ή

$\frac{5x}{5} = \frac{0}{5}$ ή

$x = 0$

β) $x = x$ ή
$x - x = 0$ ή
$(1 - 1)x = 0$ ή
$0x = 0$ αόριστη

γ) $0{,}001x - 0{,}003 = 0{,}007$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της επί 1.000 για να γίνουν ακέραιοι οι αριθμοί.

Έχουμε διαδοχικά:

$1.000 \cdot 0{,}001x - 1.000 \cdot 0{,}003 =$
$= 1.000 \cdot 0{,}007$ ή
$1x - 3 = 7$ ή
$x = 7 + 3$ ή
$x = 10$

δ) $1.000 \cdot (x - 2) = 3.000x - 8.000$

Διαιρούμε τα δύο μέλη της διά 1.000 για να γίνουν μικρότεροι οι αριθμοί.

Έχουμε διαδοχικά:

$\frac{1.000 \cdot (x-2)}{1.000} = \frac{3.000x}{1.000} - \frac{8.000}{1.000}$ ή

$1 \cdot (x - 2) = 3x - 8$ ή
$x - 2 = 3x - 8$ ή
$x - 3x = -8 + 2$ ή
$(1 - 3)x = -6$ ή
$-2x = -6$ ή

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-6}{-2}$ ή

$x = 3$

ε) $\frac{\frac{3}{2} + x}{5} = \frac{\frac{1}{8} + x}{7} + 2$ ή

$35 \cdot \frac{\frac{3}{2} + x}{5} = 35 \cdot \frac{\frac{1}{8} + x}{7} + 35 \cdot 2$ ή

$7 \cdot (\frac{3}{2} + x) = 5 \cdot (\frac{1}{8} + x) + 70$ ή

$\frac{21}{2} + 7x = \frac{5}{8} + 5x + 70$ ή

Πολλαπλασιάζουμε τώρα με το Ε.Κ.Π. του 2 και του 8 δηλαδή το 16, και τα δύο μέλη της τελευταίας.

$16 \cdot \frac{21}{2} + 16 \cdot 7x = 16 \cdot \frac{5}{8} + 16 \cdot 5x +$
$+ 16 \cdot 70$ ή

$8 \cdot 21 + 16 \cdot 7x = 2 \cdot 5 + 16 \cdot 5x +$
$+ 16 \cdot 70$ ή
$168 + 112x = 10 + 80x + 1120$ ή
$112x - 80x = 10 + 1120 - 168$ ή
$(112 - 80) \cdot x = 962$ ή
$32x = 962$ ή

$\frac{32x}{32} = \frac{962}{32}$ ή

$x = \frac{962}{32} = \frac{481}{16} = 3\frac{1}{16}$

στ) $\frac{\frac{3(x-1)}{4}}{2} - \frac{\frac{7x}{3} - 5}{3} = 4$ ή

$6 \cdot \frac{\frac{3(x-1)}{4}}{2} - 6 \cdot \frac{\frac{7x}{3} - 5}{3} = 6 \cdot 4$ ή

$3 \cdot \frac{3(x-1)}{4} - 2 \cdot (\frac{7x}{3} - 5) = 24$ ή

$\frac{9(x-1)}{4} - \frac{14x}{3} + 10 = 24$ ή

$12 \cdot \frac{9(x-1)}{4} - 12 \cdot \frac{14x}{3} + 12 \cdot 10 = 12 \cdot 24$ ή

$3 \cdot 9 \cdot (x - 1) - 4 \cdot 14x + 120 = 288$ ή
$27 \cdot (x - 1) - 56x + 120 = 288$ ή
$27x - 27 - 56x + 120 = 288$ ή
$27x - 56x = 288 + 27 - 120$ ή
$(27 - 56)x = 195$ ή
$-29x = 195$ ή

$\frac{-29x}{-29} = \frac{195}{-29}$ ή

$x = -\frac{195}{29} = -6\frac{21}{29}$

ζ) $0x = 5 - 3$ ή
$0x = 2$ αδύνατη

5. Να βρείτε τα κ και λ ώστε η παρακάτω εξίσωση να είναι αόριστη:
$5κx - 6λ = 15x + 6$

Λύση

$5κx - 6λ = 15x + 6$ ή
$5κx - 15x = 6λ + 6$ ή

$(5κ - 15) \cdot x = 6λ + 6$

Για να είναι αυτή η εξίσωση αόριστη πρέπει να έχει τη μορφή $0x = 0$.

Άρα $5κ - 15 = 0$ και $6λ + 6 = 0$ απ' όπου έχουμε διαδοχικά:

$5κ = 15$ και $6λ = -6$

$\frac{5κ}{5} = \frac{15}{5}$ και $\frac{6λ}{6} = \frac{-6}{6}$ ή

$κ = 3$ και $λ = -1$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε και να επαληθεύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + 2x + 3x = 10 + 2$

β) $8x - 5x - x = 18 - 2 + 4$

γ) $3y - 5 = y + 6$

Λύση

α) $x + 2x + 3x = 10 + 2$ ή

$(1 + 2 + 3) \cdot x = 12$ ή

$6x = 12$ ή

$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ ή

$x = 2$

Επαλήθευση

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση όπου x, το 2 που βρήκαμε και έχουμε διαδοχικά:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 + 2$

$2 + 4 + 6 = 12$

$12 = 12$

β) $8x - 5x - 1x = 18 - 2 + 4$ ή

$(8 - 5 - 1) \cdot x = 20$ ή

$2x = 20$ ή

$\frac{2x}{2} = \frac{20}{2}$ ή

$x = 10$

Επαλήθευση

....

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $0,6 \cdot (x - 6) = 3,1 \cdot (2x - 5) + 1$

β) $1,5 \cdot (2x - 3,2) = 7,4 \cdot (x - 5 + 2x)$

γ) $\frac{1}{2} \cdot (x - 3) + 2x = \frac{5}{7} \cdot (3x + 4) - 1$

δ) $-φ + 2 = -8 \cdot (-1 + 4φ) + 8$

ε) $5ω - 4 = 2 \cdot (ω - \frac{3}{5}) + 4$

Λύση

α) $0,6 \cdot (x - 6) = 3,1 \cdot (2x - 5) + 1$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί 10 για να μετατρέψουμε τους δεκαδικούς σε ακέραιους. Έχουμε διαδοχικά:

$10 \cdot 0,6 \cdot (x - 6) = 10 \cdot 3,1 \cdot (2x - 5) +$
$+ 10 \cdot 1$ ή

$6 \cdot (x - 6) = 31 \cdot (2x - 5) + 10$ ή

$6x - 36 = 62x - 155 + 10$ ή

$6x - 62x = -155 + 10 + 36$ ή

$(6 - 62) \cdot x = -109$ ή

$-60x = -109$ ή

$\frac{-60x}{-60} = \frac{-109}{-60}$ ή

$x = \frac{109}{60} = 1\frac{49}{60}$

β) $1,5 \cdot (2x - 3,2) = 7,4 \cdot (x - 5 + 2x)$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της επί 10. Έχουμε διαδοχικά:

$10 \cdot 1,5 \cdot (2x - 3,2) = 10 \cdot 7,4 \cdot (x - 5 +$
$+ 2x)$ ή

$15 \cdot (2x - 3{,}2) = 74 \cdot (x - 5 + 2x)$ ή
$30x - 48 = 74x - 370 + 148x$ ή
......

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{2x}{6} + 1$

β) $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+2}{4}$

γ) $\frac{7x-2}{4} = \frac{3x-1{,}6}{2}$

δ) $\frac{3\,(2t-1)}{5} - 2\,(t-3) = \frac{6t-5}{2} - 4t$

Λύση

α) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{2x}{6} + 1$

Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. και έχουμε διαδοχικά:

$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x+1}{3} = 6 \cdot \frac{2x}{6} + 6 \cdot 1$ ή

$3x + 2 \cdot (x + 1) = 2x + 6$ ή
$3x + 2x + 2 = 2x + 6$ ή
$3x + 2x - 2x = 6 - 2$ ή
$(3 + 2 - 2) \cdot x = 4$ ή
$3x = 4$ ή

$\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$ ή
$x = \frac{4}{3}$

β) $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+2}{4}$

Εδώ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε «χιαστί».
$4 \cdot (2x - 1) = 3 \cdot (x + 2)$ ή
$8x - 4 = 3x + 6$ ή
....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε και να επαληθεύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $14 - 4x + 3 = 2x - 7$
β) $3x + 5 = x - 1$
γ) $0 = 16 - 2x + 2$
δ) $3 \cdot (x - 2) = 3x + 5 - 11$
ε) $3 \cdot (9x + 1) = 9 \cdot (3x - 2)$
στ) $3x - 2 \cdot (x - 1) = 0$

2. Να λύσετε και να επαληθεύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $0{,}4x + 0{,}5 = 0{,}2x - 0{,}7$
β) $0{,}007 \cdot (y - 0{,}1) = -0{,}014y - 0{,}1057$
γ) $\frac{4}{3}x + \frac{5}{2}x = \frac{23}{6}$
δ) $3x - 0{,}11 \cdot (x - 2) = 6$
ε) $\frac{1}{8}x - 3 = \frac{1}{5} \cdot (x - \frac{3}{4}) + 2$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{x+13}{6}$

β) $\frac{4y+2}{7} - 1 - y = 4$

γ) $\frac{0{,}7-2t}{5} + 0{,}2t = 3 - 2\,(t-1)$

δ) $\frac{8\omega-5}{2} = \frac{3\,(\omega-2)}{4} - 2\,(1-6)\omega$

ε) $20.000\,(\varphi - 5) = 80.000\varphi - 10.000$
(διαιρούμε και τα δύο μέλη διά 10000)

στ) $\frac{3\,(2x-1)}{5} - \frac{2\,(3x-4)}{3} = 3x - \frac{254}{15}$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{5} = \frac{8(2x-1)}{3}$

β) $\frac{15x}{8} = 0$

γ) $9x - 4 = \frac{3x}{5} - 2x + 3(x+1)$

δ) $\frac{x+2}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{x-1}{12}$

ε) $\frac{0,2x - 0,3}{3} = \frac{5,8 - 4,3x}{4} + 8$

στ) $\frac{\frac{3+x}{2}}{5} - \frac{\frac{1+2x}{3}}{4} = \frac{\frac{15}{3}}{2} - 1$

ζ) $\frac{x + \frac{1}{2}}{3} - \frac{3 - \frac{1}{5}x}{3} = 8$

η) $\frac{\frac{x + 0,6}{2}}{3} = \frac{2x - \frac{1}{2}}{5}$

θ) $7[3(x+1) - 2] = 3x - 5[2(x+3) - 2]$

ι) $2 - 3[1 - 2(x+3)] - 6 = 12$

5. Να υπολογίσετε τα α και β ώστε η εξίσωση: $-2\beta - 6x = -3\alpha x + 4$ να είναι αόριστη.

2. 3 Επίλυση τύπων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι σημαίνει η έκφραση «λύνουμε έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή του»;

Απαντήσεις

1. Η έκφραση «λύνουμε έναν τύπο ως προς μια μεταβλητή του» σημαίνει ότι, εκτελώντας μια σειρά πράξεων, εμφανίζουμε τη συγκεκριμένη μεταβλητή του μόνη της στο πρώτο μέλος του τύπου αυτού.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε τον τύπο $u = \frac{s}{t}$ ως προς s και μετά ως προς t.

Λύση

Έχουμε: $u = \frac{s}{t}$ πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη επί t.

$u \cdot t = \frac{s}{t} \cdot t$ ή

$u \cdot t = s$ ή $s = u \cdot t$

Λύνουμε τώρα τον τύπο $u = \frac{s}{t}$ ως προς t.

Πολλαπλασιάζουμε επί t.

$u \cdot t = \frac{s}{t} \cdot t$ ή

$u \cdot t = s$

Διαιρούμε τώρα τα δύο μέλη της τελευταίας διά u.

$\frac{u \cdot t}{u} = \frac{s}{u}$ ή $t = \frac{s}{u}$

2. Να λύσετε τον τύπο $Q = m \cdot c \cdot \Theta$:
α) ως προς m, β) ως προς c,
γ) ως προς Θ.

Λύση

α) $Q = m \cdot c \cdot \Theta$ ή
$m \cdot c \cdot \Theta = Q$ ή
$\frac{m \cdot c \cdot \Theta}{c \cdot \Theta} = \frac{Q}{c \cdot \Theta}$ ή
$m = \frac{Q}{c \cdot \Theta}$

β) $Q = m \cdot c \cdot \Theta$ ή
$m \cdot c \cdot \Theta = Q$ ή
$\frac{m \cdot c \cdot \Theta}{m \cdot \Theta} = \frac{Q}{m \cdot \Theta}$ ή
$c = \frac{Q}{m \cdot \Theta}$

γ) $Q = m \cdot c \cdot \Theta$ ή
$m \cdot c \cdot \Theta = Q$ ή
$\frac{m \cdot c \cdot \Theta}{m \cdot c} = \frac{Q}{m \cdot c}$ ή
$\Theta = \frac{Q}{m \cdot c}$

2. Να λύσετε τον τύπο PV = nRT ως προς R και ως προς V.

Λύση

$PV = nRT$ ή
$nRT = PV$ ή
$\frac{nRT}{nT} = \frac{PV}{nT}$ ή
$R = \frac{PV}{nT}$

$PV = nRT$ ή
$\frac{PV}{P} = \frac{nRT}{P}$ ή
$V = \frac{nRT}{P}$

3. Να λύσετε τον τύπο $R = p\frac{l}{S}$

α) ως προς p, β) ως προς S.

Λύση

α) $R = p\frac{l}{S}$ ή $SR = Sp\frac{l}{S}$ ή $SR = pl$ ή

$pl = SR$ ή $\frac{pl}{l} = \frac{SR}{l}$ ή $p = \frac{SR}{l}$

β) $R = p\frac{l}{S}$ ή $SR = Sp\frac{l}{S}$ ή

$SR = pl$ ή $\frac{SR}{R} = \frac{pl}{R}$ ή $S = \frac{pl}{R}$

4. Να λύσετε τον τύπο $s = u_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$

α) ως προς γ, β) ως προς u_0.

Λύση

α) $s = u_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ ή

$2s = 2u_0 t + 2\frac{1}{2}\gamma t^2$ ή

$2s = 2u_0 t + \gamma t^2$ ή

$-\gamma t^2 = 2u_0 t - 2s$ ή

$\frac{-\gamma t^2}{-t^2} = \frac{2u_0 t - 2s}{-t^2}$ ή

$\gamma = -\frac{2u_0 t - 2s}{t^2}$ ή

$\gamma = \frac{-2u_0 t + 2s}{t^2}$ ή

$\gamma = \frac{2s - 2u_0 t}{t^2}$

β) $s = u_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$ ή

$2s = 2u_0 t + 2\frac{1}{2}\gamma t^2$ ή

$2s = 2u_0 t + \gamma t^2$ ή

$-2u_0 t = \gamma t^2 - 2s$ ή

$\frac{-2u_0 t}{-2t} = \frac{\gamma t^2 - 2s}{-2t}$ ή

$u_0 = -\frac{\gamma t^2 - 2s}{2t}$ ή

$u_0 = \frac{-\gamma t^2 + 2s}{2t}$ ή

$u_0 = \frac{2s - \gamma t^2}{2t}$

5. Να λύσετε τον τύπο $P = P_o(1+\alpha\theta)$ ως προς α.

Λύση

$P = P_o(1+\alpha\theta)$ ή
$P = P_o + P_o\alpha\theta$ ή
$-P_o\alpha\theta = P_o - P$ ή

$$\frac{-P_o\alpha\theta}{-P_o\theta} = \frac{P_o - P}{-P_o\theta} \quad ή$$

$$\alpha = -\frac{P_o - P}{P_o\theta} \quad ή$$

$$\alpha = \frac{-P_o + P}{P_o\theta} \quad ή$$

$$\alpha = \frac{P - P_o}{P_o\theta}$$

6. Να λύσετε τον τύπο $E_{ολ} = mgh + \frac{1}{2}mu^2$ ως προς m και ως προς h.

Λύση

Ως προς m

$$E_{ολ} = mgh + \frac{1}{2}mu^2 \quad ή$$

$$2E_{ολ} = 2mgh + 2\frac{1}{2}mu^2 \quad ή$$

$$2E_{ολ} = 2mgh + mu^2 \quad ή$$

$$2mgh + mu^2 = 2E_{ολ} \quad ή$$

$$(2gh + u^2)m = 2E_{ολ} \quad ή$$

$$\frac{(2gh + u^2)m}{2gh + u^2} = \frac{2E_{ολ}}{2gh + u^2} \quad ή$$

$$m = \frac{2E_{ολ}}{2gh + u^2}$$

Ως προς h

$$E_{ολ} = mgh + \frac{1}{2}mu^2 \quad ή$$

$$2E_{ολ} = 2mgh + 2\frac{1}{2}mu^2 \quad ή$$

$$2E_{ολ} = 2mgh + mu^2 \quad ή$$

$$-2mgh = mu^2 - 2E_{ολ} \quad ή$$

$$\frac{-2mgh}{-2mg} = \frac{mu^2 - 2E_{ολ}}{-2mg} \quad ή$$

$$h = -\frac{mu^2 - 2E_{ολ}}{2mg} \quad ή$$

$$h = \frac{-mu^2 + 2E_{ολ}}{2mg} \quad ή$$

$$h = \frac{2E_{ολ} - mu^2}{2mg}$$

7. Ένα τραπέζιο έχει εμβαδόν 24 cm² και οι βάσεις του είναι 10 cm και 6 cm. Να βρείτε το ύψος του.

Λύση

Ο τύπος που μας δίνει το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E = \frac{(B + \beta)\cdot u}{2}$$

Ονομάζουμε $E = 24$ cm², $B = 10$ cm και $\beta = 6$ cm. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο άγνωστος του τύπου είναι το ύψος υ. Λύνουμε λοιπόν τον παραπάνω τύπο ως προς υ. Έχουμε διαδοχικά:

$$E = \frac{(B + \beta)\cdot u}{2} \quad ή$$

$$2E = 2\cdot\frac{(B + \beta)\cdot u}{2} \quad ή$$

$$2E = (B + \beta)\cdot u \quad ή$$

$$(B + \beta)\cdot u = 2E \quad ή$$

$$\frac{(B + \beta)\cdot u}{(B + \beta)} = \frac{2E}{(B + \beta)} \quad ή$$

$$u = \frac{2E}{(B + \beta)}$$

Θέτουμε τώρα όπου Ε, Β και β τις τιμές τους και έχουμε:

$$u = \frac{2\cdot 24}{10 + 6} \quad ή \quad u = \frac{48}{16} \quad ή \quad u = 3$$

Άρα το ύψος του τραπεζίου είναι 3cm.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε τον τύπο U = I · R ως προς I και ως προς R.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$U = I \cdot R$ ή

$I \cdot R = U$ ή

$\frac{I \cdot R}{R} = \frac{U}{R}$ ή

$I = \frac{U}{R}$ ή ...

2. Ο τύπος που υπολογίζει την ταχύτητα υ ενός κινητού το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι:

$υ = \frac{s}{t}$, όπου s το διάστημα που διανύει και t ο χρόνος της κίνησης. Πόσο χρόνο κινήθηκε ένα κινητό που εκτελεί την παραπάνω κίνηση με ταχύτητα 10 m/sec και διήνυσε s = 500 m στο χρόνο αυτό;

Λύση

Παρατηρούμε ότι στον τύπο $υ = \frac{s}{t}$, το άγνωστο μέγεθος είναι ο χρόνος t. Πρέπει επομένως να λύσουμε τον παραπάνω τύπο ως προς t. Έχουμε:

$υ = \frac{s}{t}$ ή $υ \cdot t = \frac{s}{t} \cdot t$ ή

$υ \cdot t = s$ ή $\frac{υ \cdot t}{υ} = \frac{s}{υ}$ ή....

3. Να λύσετε τον τύπο $n = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ως προς T_1.

Λύση

$n = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ή

$n \cdot T_1 = 1 \cdot T_1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot T_1$ ή

$n \cdot T_1 = T_1 - T_2$ ή

$n \cdot T_1 - T_1 = - T_2$ ή ....

4. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου, που οι διαστάσεις του είναι η μία διπλάσια της άλλης, είναι 30 cm. Να βρείτε τις διαστάσεις αυτές.

Λύση

Ονομάζουμε x τη μικρότερη διάσταση του ορθογωνίου. Τότε η μεγαλύτερη θα είναι 2x. Ο τύπος που δίνει την περίμετρο Π του ορθογωνίου είναι:

Π = 2α + 2β όπου α και β οι διαστάσεις του ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε τους τύπους:

$P = \frac{f}{s}$ ως προς s

$T = n \cdot N$ ως προς n

$F = ε \frac{H}{2} S$ ως προς H

2. Να λύσετε τους τύπους:

$F = - m ω^2 x$ ως προς x

$D = m \frac{4 π^2}{T^2}$ ως προς m

$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ ως προς k

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_2} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} \text{ ως προς } V_2$$

3. Ο τύπος που υπολογίζει τον όγκο V ενός κώνου είναι $V = \frac{1}{3} \pi \rho^2 \upsilon$, όπου $\pi = 3,14$, ρ η ακτίνα του κύκλου της βάσης του και υ το ύψος του κώνου. Αν ενός κώνου ο όγκος του είναι $25,12$ cm^3 και η ακτίνα της βάσης του είναι 2 cm, να βρείτε το ύψος του.

2.4 Λύση προβλημάτων με εξισώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποια σειρά ακολουθούμε για να λύσουμε ένα πρόβλημα με εξίσωση;

Απαντήσεις

1. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης ακολουθούμε γενικά την εξής σειρά (βήματα):

1ο βήμα: Διαλέγουμε ένα από τα ζητούμενα (συνήθως αυτό που συνδέεται με τα υπόλοιπα, σύμφωνα με το πρόβλημα) και το συμβολίζουμε με μία μεταβλητή.

2ο βήμα: Εκφράζουμε τα υπόλοιπα ζητούμενα του προβλήματος με τη βοήθεια της μεταβλητής αυτής.

3ο βήμα: Συνδέουμε τα διάφορα μεγέθη σύμφωνα με το πρόβλημα έτσι ώστε να σχηματιστεί μια ισότητα (εξίσωση).

4ο βήμα: Λύνουμε την εξίσωση και ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε συμφωνεί με το πρόβλημα.

Σημείωση: Το πρώτο πρόβλημα που ακολουθεί λύνεται με αναφορά στα παραπάνω βήματα για πληρέστερη κατανόηση.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Οι ηλικίες τριών αδελφών συνδέονται ως εξής: Ο πρώτος είναι κατά 3 χρόνια μεγαλύτερος από το μεσαίο και ο μικρότερος κατά 2 χρόνια μικρότερος από το μεσαίο. Αν οι ηλικίες τους έχουν άθροισμα 52 χρόνια, να βρείτε πόσων χρόνων είναι ο καθένας.

Λύση

1ο βήμα: Παρατηρούμε ότι μόνο η ηλικία του μεσαίου συνδέεται άμεσα με τις ηλικίες των άλλων δύο. Συμβολίζουμε λοιπόν την ηλικία του μεσαίου με x.

2ο βήμα: Αφού ο πρώτος είναι κατά 3 χρόνια μεγαλύτερος του μεσαίου, η ηλικία του θα είναι x + 3. Επίσης, κατά το πρόβλημα, ο μικρός είναι κατά 2 χρόνια μικρότερος από το μεσαίο, δηλαδή η ηλικία του θα είναι x - 2.

3ο βήμα: Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 52. Έχουμε επομένως την εξίσωση:

$x + 3 + x + x - 2 = 52$
$x + x + x = 52 - 3 + 2$
$(1 + 1 + 1) \cdot x = 51$
$3x = 51$

$$\frac{3x}{3} = \frac{51}{3}$$

$x = 17$

Δηλαδή ο μεσαίος είναι 17 χρονών. Άρα ο πρώτος είναι: $x + 3$ ή $17 + 3 =$ $= 20$ χρονών και ο μικρότερος είναι: $x - 2$ ή $17 - 2 = 15$ χρονών. Παρατηρούμε ότι η λύση που βρήκαμε ανταποκρίνεται στο πρόβλημα γιατί: $20 + 17 + 15 = 52$.

2. 18 άτομα άνδρες και γυναίκες πλήρωσαν σε μια εκδήλωση 40.800 δρχ. Αν κάθε άνδρας πλήρωσε 2.500 δρχ. και κάθε γυναίκα 1.800 δρχ., πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες πήραν μέρος στην εκδήλωση;

Λύση

Ονομάζουμε x τον αριθμό των ανδρών. Τότε οι γυναίκες ήταν 18 - x. Αφού κάθε άνδρας πληρώνει 2.500 δρχ., οι x άνδρες πληρώνουν $2.500 \cdot x$ δρχ. Αφού κάθε γυναίκα πληρώνει 1.800 δρχ. οι 18 γυναίκες πληρώνουν $1.800 \cdot (18 - x)$ δρχ. Συνολικά πλήρωσαν όλοι 40.800 δρχ. Άρα έχουμε την εξίσωση:

$2.500 \cdot x + 1.800 \cdot (18 - x) = 40.800$

Λύνουμε την εξίσωση αυτή κατά τα γνωστά, αφού πρώτα διαιρέσουμε όλους τους όρους διά 100 ώστε να γίνουν μικρότεροι οι αριθμοί.
Έχουμε διαδοχικά:

$25x + 18 \cdot (18 - x) = 408$
$25x + 324 - 18x = 408$
$25x - 18x = 408 - 324$
$(25 - 18) \cdot x = 84$
$7x = 84$

$$\frac{7x}{7} = \frac{84}{7}$$

$x = 12$

Άρα οι άνδρες ήταν 12 οπότε οι γυναίκες ήταν: $18 - 12 = 6$. Πράγματι:
$12 \cdot 2.500 + 6 \cdot 1.800 =$
$= 30.000 + 10.800 = 40.800$ δρχ.

3. Από μία πόλη αναχωρεί ένας πεζός ο οποίος βαδίζει 5 χιλιόμετρα την ώρα. Μετά από 2 ώρες αναχωρεί από την ίδια πόλη και προς την ίδια κατεύθυνση με τον πεζό, ένας ποδηλάτης με ταχύτητα 15 χιλιόμετρα την ώρα. Σε πόση ώρα θα συναντηθούν και πόσο θα απέχουν τότε από την πόλη που ξεκίνησαν;

Λύση

Έστω ότι θα συναντηθούν x ώρες μετά την αναχώρηση του πεζού. Τότε ο πεζός, αφού διανύει 5 Km σε μια ώρα, στις x ώρες θα έχει διανύσει 5x Km. Ο ποδηλάτης όμως ξεκίνησε 2 ώρες αργότερα. Άρα έχει κινηθεί x - 2 ώρες, όταν συναντήσει τον πεζό. Αφού σε κάθε ώρα διανύει 15 Km, στις x - 2 ώρες θα έχει διανύσει $15 \cdot (x - 2)$ Km. Επίσης τα χιλιόμετρα που έχει διανύσει ο πεζός είναι ίσα με τα χιλιόμετρα που έχει διανύσει ο ποδηλάτης, γιατί

συναντιούνται. Άρα: $5x = 15 \cdot (x - 2)$
Διαιρούμε διά 5 τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και έχουμε διαδοχικά:
$x = 3 \cdot (x - 2)$
$x = 3x - 6$
$x - 3x = - 6$
$(1 - 3) \cdot x = - 6$
$- 2x = - 6$
$x = 3$

Δηλαδή θα συναντηθούν 3 ώρες μετά την αναχώρηση του πεζού, οπότε ο πεζός έχει διανύσει $5 \cdot 3 = 15$ Km και ο ποδηλάτης, (που κινήθηκε $3 - 2 = 1$ ώρα), $15 \cdot 1 = 15$ Km όπως περιμέναμε. Θα απέχουν, επομένως, από την πόλη 15 km.

4. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 835 και η διαφορά τους 171. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Λύση

Έστω x ο ένας από τους δύο αριθμούς. Τότε ο άλλος είναι 835 - x. Η διαφορά τους είναι 171. Δηλαδή:
$(835 - x) - x = 171$
Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε διαδοχικά:
$835 - x - x = 171$
$- x - x = 171 - 835$
$(- 1 - 1) \cdot x = - 664$
$- 2x = - 664$
$x = 332$ είναι ο ένας αριθμός.

Ο άλλος επομένως είναι ο $835 - 332 = 503$.
Οι αριθμοί αυτοί ανταποκρίνονται στο πρόβλημα γιατί:
$332 + 503 = 835$ και $503 - 332 = 171$.

5. Μια δεξαμενή περιέχει 1.600 l νερό. Ανοίγουμε ταυτόχρονα δύο βρύσες από τις οποίες η μία προσθέτει στη δεξαμενή 70,4 l νερό την ώρα, ενώ η άλλη αφαιρεί απ' αυτήν 390,4 l την ώρα. Σε πόσες ώρες θα αδειάσει η δεξαμενή;

Λύση

Έστω ότι η δεξαμενή θα αδειάσει σε x ώρες. Τότε, στο χρόνο αυτό η πρώτη βρύση έχει προσθέσει $70{,}4 \cdot x$ l νερό στη δεξαμενή το οποίο μαζί με το νερό που βρισκόταν ήδη σ' αυτήν θα ήταν συνολικά $(1.600 + 70{,}4 \cdot x)$ l αν δε λειτουργούσε η δεύτερη βρύση. Στον χρόνο αυτό η δεύτερη βρύση θα έχει αφαιρέσει $390{,}4 \cdot x$ l νερό.
Το νερό αυτό είναι ολόκληρη η ποσότητα που υπήρχε στη δεξαμενή μετά απο x ώρες, αφού στο χρόνο αυτό η δεξαμενή αδειάζει τελείως. Έτσι έχουμε την εξίσωση:
$1.600 + 70{,}4x = 390{,}4x$ ή
$70{,}4x - 390{,}4x = - 1.600$ ή
$(70{,}4 - 390{,}4) \cdot x = - 1.600$ ή
$- 320x = - 1.600$ ή

$$\frac{-320x}{-320} = \frac{-1.600}{-320} \quad \text{ή}$$

$x = 5$ ώρες

Δηλαδή σε 5 ώρες θα αδειάσει η δεξαμενή. Εύκολα επαληθεύουμε ότι η λύση αυτή ανταποκρίνεται στο πρόβλημα.

6. Σε μια πόλη τον περασμένο χρόνο οι γεννήσεις ήσαν 4,5 % και οι θάνατοι το 1/3 των γεννήσεων. Αν το χρόνο αυτό οι κάτοικοι της πόλεως αυξήθηκαν κατά 924, πόσους κατοίκους είχε αυτή η πόλη στο τέλος του περασμένου χρόνου;

Λύση

Σε κάθε 100 κατοίκους έχουμε 4,5

γεννήσεις και

$\frac{1}{3} \cdot 4{,}5 = 1{,}5$ θανάτους.

Δηλαδή έχουμε αύξηση 4,5 - 1,5 = 3 κατοίκους σε κάθε 100 κατοίκους, οπότε στο τέλος του χρόνου οι 100 είχαν γίνει 103.

Συμβολίζουμε x τους κατοίκους στο τέλος του χρόνου. Η αύξηση τότε είναι:

$$\frac{3}{103} \cdot x$$

και σύμφωνα με το πρόβλημα είναι 924. Έχουμε λοιπόν την εξίσωση:

$\frac{3}{103} \cdot x = 924$ ή

$103 \cdot \frac{3}{103} \cdot x = 103 \cdot 924$ ή

$3 \cdot x = 95.172$ ή

$\frac{3x}{3} = \frac{95.172}{3}$ ή

$x = 31.724$ κάτοικοι

7. Η γωνία της κορυφής Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι κατά 42° μικρότερη από κάθε μία από τις ίσες γωνίες του Β και Γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου αυτού.

Λύση

Ονομάζουμε x κάθε μία από τις ίσες γωνίες Β και Γ. Τότε η Α = x - 42. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°. Έχουμε επομένως την εξίσωση:

$(x - 42) + x + x = 180$ ή

$x - 42 + x + x = 180$ ή

$x + x + x = 180 + 42$ ή

$(1 + 1 + 1) \cdot x = 222$ ή

$3x = 222$ ή

$\frac{3x}{3} = \frac{222}{3}$ ή

$x = 74$

Άρα $\hat{B} = 74°$, $\hat{\Gamma} = 74°$ και $\hat{A} = 74° - 42° = 32°$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Ένα ελαστικό τόπι αναπηδά στο 1/3 του ύψους από το οποίο πέφτει. Αφού έπεσε από ένα ύψος και αναπήδησε τρεις φορές, υψώθηκε κατά την τρίτη αναπήδηση κατά 0,5 m. Από τι ύψος είχε πέσει αρχικά;

Λύση

Έστω x το ύψος απο το οποίο έπεσε αρχικά. Κατά την πρώτη αναπήδηση υψώθηκε κατά $\frac{1}{3} \cdot x$ m. Κατά τη δεύτερη αναπήδηση υψώθηκε κατά

$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} x)\,m = \frac{1}{9} x\,m$

και κατά την τρίτη αναπήδηση ...

2. Μία δεξαμενή άγνωστης χωρητικότητας γεμίζεται με νερό από μία βρύση σε 4 ώρες. Αν η βρύση λειτουργήσει 1,5 ώρες η δεξαμενή χρειάζεται ακόμα 3.125 l νερού για να γεμίσει. Ποια είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής;

Λύση

Έστω x l είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής. Τότε σε 1 ώρα η βρύση ρίχνει σ' αυτήν $\frac{x}{4}$ l νερό. Έτσι σε 1,5 ώρα η βρύση έχει ρίξει $1{,}5\,\frac{x}{4}$ l νερό.

Αφού χρειάζονται 3.125 l νερό ακόμα για να γεμίσει η δεξαμενή, έχουμε την εξίσωση ...

3. Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 8 ώρες και ένας άλλος τελειώνει το ίδιο έργο σε 12 ώρες. Αν εργαστούν μαζί, σε πόσες ώρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο;

Λύση

Έστω ότι θα τελειώσουν το έργο σε x ώρες όταν εργαστούν μαζί. Τότε ο πρώτος θα έχει εκτελέσει τα $\frac{x}{8}$ του έργου και ο δεύτερος τα $\frac{x}{12}$ του έργου.

Έτσι έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{12} = 1$$

(με μονάδα συμβολίζουμε ολόκληρο το έργο)...

4. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 37. Αν ο ένας ελαττωθεί κατά 2 και ο άλλος αυξηθεί κατά 5, το άθροισμα γίνεται 40. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί.

Λύση

Συμβολίζουμε με x τον έναν αριθμό, οπότε ο άλλος θα είναι 37 - x. Αν ελαττώσουμε τον πρώτο κατά 2 αυτός γίνεται x - 2, ενώ αν αυξήσουμε τον άλλο κατά 5, γίνεται (37 - x) + 5. Αν προσθέσουμε τους νέους αριθμούς έχουμε άθροισμα 40. Δηλαδή έχουμε την εξίσωση ....

<u>Παρατήρηση:</u> Προσέξτε ότι η εξίσωση που προκύπτει είναι αόριστη. Δηλαδή το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

5. Κάθε μία από τις 4 διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OA}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται 20° μικρότερη από την επόμενή της. Να τις υπολογίσετε.

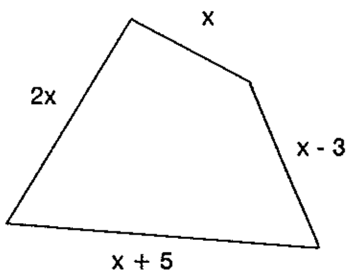
Λύση

Συμβολίζουμε με x την $\widehat{AOB}$. Τότε η $\widehat{BO\Gamma}$ = = x + 20°, η $\widehat{\Gamma O\Delta}$ = (x + 20°) + 20° = x + 40° και η $\widehat{\Delta OA}$ = (x + 40°) + 20° = x + 60°.

Έχουμε επομένως την εξίσωση .....

6. Υπολογίστε τις πλευρές του παρακάτω τετραπλεύρου αν η περίμετρος του είναι 32 cm.

Λύση



Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε:
x + 2x + x + 5 + x - 3 = 32 ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ποσό 100.000 δραχμών μοιράστηκε ως βραβείο σε τρεις μαθητές ανάλογα με τη βαθμολογία τους ως εξής: Ο α' πήρε 26.000 περισσότερες του β' και ο γ' 10.000 λιγότερες του β'. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

2. Σε ένα λεωφορείο ανέβηκαν 50 επιβάτες από τους οποίους οι 20 ήταν μαθητές και πληρώνουν εισιτήριο κατά 400 δρχ. φθηνότερο από το εισιτήριο των υπολοίπων. Αν όλοι οι επιβάτες πλήρωσαν 88.000 δρχ., πόσο ήταν το εισιτήριο κάθε μαθητή;

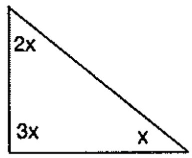
3. Ένας τεχνίτης μαζί με το βοηθό του ανέλαβαν να εκτελέσουν ένα έργο σε 35 ημέρες. Αφού εργάστηκαν μαζί επί 15 ημέρες αρρώστησε ο τεχνίτης και την υπόλοιπη εργασία εκτέλεσε μόνος του ο βοηθός. Να βρείτε πόσες ημέρες καθυστέρησε η εργασία, αν η απόδοση του βοηθού είναι τα 0,7 του τεχνίτη.

4. Τρεις εργάτες έσκαψαν ένα περιβόλι. Ο πρώτος έσκαψε τα $\frac{3}{7}$ του περιβολιού, ο δεύτερος τα $\frac{4}{5}$ της εργασίας του πρώτου και ο τρίτος το υπόλοιπο. Ο τρίτος πήρε 58.900 δρχ. λιγότερα από τους δύο πρώτους μαζί. Πόσα χρήματα πήραν και οι τρεις συνολικά;

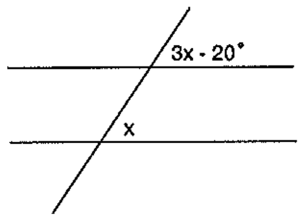
5. Πόσα πρόβατα και πόσα κοτόπουλα έχει ένας κτηνοτρόφος αν όλα τα ζώα έχουν 37 κεφάλια και 118 πόδια;

6. Να υπολογίσετε το x αν:

α)



β)



7. Ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή κατά 5. Αν στους όρους του προσθέσουμε το 16 προκύπτει κλάσμα ίσο με $\frac{19}{24}$. Ποιο είναι το αρχικό κλάσμα;

2.5 Ανισώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις — **Απαντήσεις**

1. Ποια ανισότητα λέγεται ανίσωση; Αναφέρατε ένα παράδειγμα.

1. Ανίσωση λέγεται η ανισότητα που περιέχει μεταβλητή και που είναι αληθής μόνο για κάποιες ειδικές τιμές της μεταβλητής αυτής.

Π.χ. αν η μέγιστη θερμοκρασία μιας ημέρας είναι 24° C, τότε, αν x είναι η θερμοκρασία οποιασδήποτε στιγμής την ημέρα εκείνη, θα ισχύει: $x \leq 24$.
Η παραπάνω ανισότητα είναι μία ανίσωση.

2. Τι εννοούμε χρησιμοποιώντας την έκφραση «λύνουμε την ανίσωση»;

2. Όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση «λύνουμε την ανίσωση» εννοούμε όλες τις ενέργειες που κάνουμε για να βρούμε το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή της ώστε η ανίσωση να είναι αληθής.

3. Να αναφέρετε τις ιδιότητες των ανισοτήτων που μεταχειριζόμαστε για να λύσουμε μια ανίσωση.

3. Οι ιδιότητες των ανισοτήτων που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε μια ανίσωση είναι οι παρακάτω:

α) Αν στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά με την αρχική.
π.χ. $2 < 5$. Προσθέτουμε το 3 στα δύο μέλη. Τότε $2 + 3 < 5 + 3$ ή $5 < 8$.

β) Αν τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο <u>θετικό</u> αριθμό, η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά με την αρχική.
π.χ. $2 < 5$. Πολλαπλασιάζουμε επί 4 τα δύο μέλη της. Τότε $2 \cdot 4 < 5 \cdot 4$ ή $8 < 20$.

γ) Αν τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε με τον ίδιο <u>αρνητικό</u> αριθμό, η ανισότητα που προκύπτει έχει αντίστροφη φορά με την αρχική.
π.χ. $2 < 5$. Πολλαπλασιάζουμε επί -4 τα δύο μέλη της. Τότε $2 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$ ή $-8 > -20$.

4. Ποια σειρά (βήματα) ακολουθούμε για να λύσουμε μια ανίσωση;

4. Η σειρά (βήματα) που ακολουθούμε για να λύσουμε μία ανίσωση είναι παρόμοια με αυτήν που ακολουθούμε για τη λύση εξισώσεων, έχοντας υπόψη μας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Προσέχουμε στο σημείο εκείνο που διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου, να αντιστρέφουμε τη φορά της ανίσωσης, αν ο συντελεστής αυτός είναι αρνητικός.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθεί η ανίσωση:

$$15x - 3 \cdot (x - 2) < 7x + 21$$

και να παραστήσετε σε άξονα το σύνολο των λύσεών της.

Λύση

$15x - 3 \cdot (x - 2) < 7x + 21$

Έχουμε διαδοχικά:

$15x - 3x + 6 < 7x + 21$ (απαλειφή παρενθέσεων)

$15x - 3x - 7x < 21 - 6$ (χωρισμός γνωστών από αγνώστους)

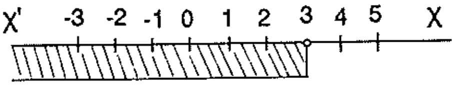
$(15 - 3 - 7) \cdot x < 15$ (αναγωγή ομοίων όρων)

$5x < 15$

$\frac{5x}{5} < \frac{15}{5}$ (διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου)

$x < 3$

Δηλαδή κάθε τιμή της μεταβλητής x που είναι μικρότερη από 3 είναι λύση της ανίσωσης. Το σύνολο λύσεων της παραπάνω ανίσωσης παριστάνεται πάνω στον άξονα ως εξής:



Ο κύκλος στο σημείο 3 φανερώνει ότι ο αριθμός αυτός, δεν είναι λύση της ανίσωσης αυτής.

2. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{x}{2} - \frac{2 \cdot (x + 3)}{3} \leq 2x + \frac{7}{3}$$

και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω σε άξονα.

Λύση

$$\frac{x}{2} - \frac{2 \cdot (x + 3)}{3} \leq 2x + \frac{7}{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 6 (Ε.Κ.Π (2, 3) = 6) και τα δύο μέλη της και έχουμε διαδοχικά:

$$6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{2 \cdot (x + 3)}{3} \leq 6 \cdot 2x + 6 \cdot \frac{7}{3}$$

$3x - 2 \cdot 2 \cdot (x + 3) \leq 12x + 2 \cdot 7$

$3x - 4 \cdot (x + 3) \leq 12x + 14$

$3x - 4x - 12 \leq 12x + 14$

$3x - 4x - 12x \leq 12 + 14$

$(3 - 4 - 12) \cdot x \leq 26$

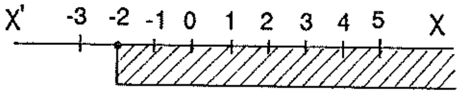
$-13x \leq 26$

$\frac{-13x}{-13} \geq \frac{26}{-13}$

Η φορά της ανισότητας αντιστρέφεται γιατί διαιρέσαμε με τον αρνητικό αριθμό - 13 και τα δύο μέλη.

Άρα: $x \geq -2$

Δηλαδή κάθε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του - 2 αποτελεί λύση της ανίσωσης αυτής. Το σύνολο των λύσεών της παριστάνεται πάνω σε άξονα όπως παρακάτω:



Ο κύκλος με το μαύρο χρώμα στο σημείο - 2 φανερώνει ότι ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
$5 \cdot (x - 2) + 6 > 8 - x$ και
$- 2x + 3 \cdot (2x + 1) < 2x + 17$.

Λύση

Λύνουμε ξεχωριστά τις δύο ανισώσεις.

$5 \cdot (x - 2) + 6 > 8 - x$
$5x - 10 + 6 > 8 - x$
$5x + x > 8 + 10 - 6$
$6x > 12$

$\frac{6x}{6} > \frac{12}{6}$

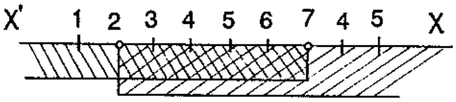
$x > 2$

$- 2x + 3 \cdot (2x + 1) < 2x + 17$
$- 2x + 6x + 3 < 2x + 17$
$- 2x + 6x - 2x < 17 - 3$
$(- 2 + 6 - 2) \cdot x < 14$
$2x < 14$

$\frac{2x}{2} < \frac{14}{2}$

$x < 7$

Σημειώνουμε στον ίδιο άξονα τις λύσεις αυτές.



Βλέπουμε ότι οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί από 2 έως 7. Δηλαδή: $2 < x < 7$.

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $2x + 3 \geq - 6 + 2 \cdot (x + 3)$
β) $4x + 5 \geq 9 - 4 \cdot (1 - x)$
γ) $5 \cdot (x - 1) + 2x > - 1 + 7x$

Λύση

α) $2x + 3 \geq - 6 + 2 \cdot (x + 3)$ ή
$2x + 3 \geq - 6 + 2x + 6$ ή
$2x - 2x \geq - 3$ ή
$0x \geq - 3$
Αληθεύει για κάθε τιμή του x.

β) $4x + 5 \geq 9 - 4 \cdot (1 - x)$ ή
$4x + 5 \geq 9 - 4 + 4x$ ή
$4x - 4x \geq 9 - 4 - 5$ ή
$0x \geq 0$
Είναι αληθής μόνο ως ισότητα γιατί για κάθε τιμή του x είναι $0 = 0$. Δηλαδή είναι αόριστη, οπότε λύσεις της είναι όλοι οι αριθμοί.

γ) $5 \cdot (x - 1) + 2x > - 1 + 7x$ ή
$5x - 5 + 2x > - 1 + 7x$ ή
$5x + 2x - 7x > - 1 + 5$ ή
$0x > 4$
Είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει αριθμός ώστε να την επαληθεύει, αφού 0x ισούται με 0, οπότε είναι μικρότερο του 4.

4. Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από 25 και μικρότερος από 37, όταν διαιρείται με το 12 δίνει υπόλοιπο 5. Ποιος είναι ο αριθμός;

Λύση

Ονομάζουμε x τον αριθμό που ζητάμε. Σύμφωνα με το πρόβλημα:
$25 < x < 37$ (1)

Όταν διαιρέσουμε τον x διά 12 παίρνουμε ένα πηλίκο π και υπόλοιπο 5.
Σύμφωνα με την ιδιότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$x = 12\pi + 5 \quad (2)$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) το x με το ίσο του 12π + 5 και έχουμε:

$25 < 12\pi + 5 < 37 \quad (3)$

Λύνουμε ξεχωριστά κάθε μία από τις ανισότητες που προκύπτουν από την (3) και βρίσκουμε τις κοινές λύσεις τους. Έχουμε:

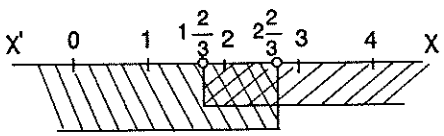
$25 < 12\pi + 5$ ή
$-12\pi < -25 + 5$ ή
$-12\pi < -20$ ή

$$\pi > \frac{20}{12} = 1\frac{2}{3}$$

$12\pi + 5 < 37$ ή
$12\pi < 37 - 5$ ή
$12\pi < 32$ ή

$$\pi < \frac{32}{12} = 2\frac{2}{3}$$

Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:



$$1\frac{2}{3} < \pi < 2\frac{2}{3}$$

Όμως ο αριθμός π είναι φυσικός άρα π = 2 γιατί το 2 είναι ο μοναδικός φυσικός μεταξύ του 1 2/3, 2 2/3.
Τότε η (2) γράφεται αν βάλουμε στη θέση του π το 2.

$x = 12 \cdot 2 + 5$ ή $x = 24 + 5$ ή
$x = 29$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 29.

5. Η απόσταση Αθήνας - Πάτρας είναι 220 Km. Το εισιτήριο του υπεραστικού λεωφορίου για τη διαδρομή αυτή είναι 2.185 δρχ. Ένα ιδιωτικό αυτοκίνητο που εκτελεί τη διαδρομή αυτή καταναλώνει καύσιμα αξίας 14 δρχ. ανά χιλιόμετρο. Πόσους επιβάτες, μαζί με τον οδηγό, τουλάχιστον πρέπει να έχει για να είναι οικονομικότερη η διαδρομή από ότι με το λεωφορείο;

Λύση

Έστω x ο ελάχιστος αριθμός των επιβατών, μαζί με τον οδηγό, που πρέπει να επιβαίνουν στο ιδιωτικό αυτοκίνητο. Το κόστος της διαδρομής αυτής είναι 14 · 220 = 3.080 δρχ. Τα χρήματα αυτά θα τα πληρώσουν οι x επιβάτες, άρα καθένας πληρώνει 3.080/x δρχ.
Για να είναι οικονομικότερη η διαδρομή με το ιδιωτικό αυτοκίνητο πρέπει:

$$\frac{3.080}{x} < 2.185$$

Λύνουμε την ανίσωση αυτή πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της επί x (ο x εδώ είναι θετικός).

$x \cdot \frac{3.080}{x} < 2.185x$ ή

$2.185 \cdot x > 3.080$ ή
$x > 1{,}4$ περίπου.

Άρα πρέπει το ιδιωτικό αυτοκίνητο να έχει 2 τουλάχιστον επιβάτες συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού του.

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3x}{5} - \frac{x-1}{4} \leq 4x - \frac{x}{2}$

β) $\frac{x-2}{2} + 1 > \frac{2x+1}{3}$

γ) $\frac{5x+2}{3} < 1 - \frac{4(x-2)}{3}$

δ) $\frac{2x-1}{3} + 2 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}$

Λύση

α) Έχουμε:

$\frac{3x}{5} - \frac{x-1}{4} \leq 4x - \frac{x}{2}$ ή

$20 \cdot \frac{3x}{5} - 20 \cdot \frac{x-1}{4} \leq 20 \cdot 4x - 20 \cdot \frac{x}{2}$ ή

$4 \cdot 3x - 5 \cdot (x-1) \leq 20 \cdot 4x - 10 \cdot x$ ή
$12x - 5x + 5 \leq 80x - 10x$ ή
$12x - 5x - 80x + 10x \leq -5$ ή
$-63x \leq -5$ ή

$\frac{-63x}{-63} \geq \frac{-5}{-63}$ ή $x \geq \frac{5}{63}$

β) Έχουμε:

$\frac{x-2}{2} + 1 > \frac{2x+1}{3}$ ή

$6 \cdot \frac{x-2}{2} + 6 \cdot 1 > 6 \cdot \frac{2x+1}{3}$ ή

$3 \cdot (x-2) + 6 > 2 \cdot (2x+1)$ ή
$3x - 6 + 6 > 4x + 2$ ή
$3x - 4x > 2 + 6 - 6$ ή
$-x > 2$ ή

$\frac{-x}{-1} < \frac{2}{-1}$ ή $x < -2$

γ) Έχουμε:

$\frac{5x+2}{3} < 1 - \frac{4(x-2)}{3}$ ή

$3 \cdot \frac{5x+2}{3} < 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{4(x-2)}{3}$ ή

$5x + 2 < 3 - 4 \cdot (x-2)$ ή
$5x + 2 < 3 - 4x + 8$ ή
$5x + 4x < 3 + 8 - 2$ ή
$9x < 9$ ή

$\frac{9x}{9} < \frac{9}{9}$ ή $x < 1$

δ) Έχουμε:

$\frac{2x-1}{3} + 2 \geq \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}$ ή

$12 \cdot \frac{2x-1}{3} + 12 \cdot 2 \geq 12 \cdot \frac{x}{2} - 12 \cdot \frac{x-3}{4}$ ή

$4 \cdot (2x-1) + 24 \geq 6x - 3 \cdot (x-3)$ ή
$8x - 4 + 24 \geq 6x - 3x + 9$ ή
$8x - 6x + 3x \geq 9 + 4 - 24$ ή
$5x \geq -11$ ή

$\frac{5x}{5} \geq \frac{-11}{5}$ ή $x \geq \frac{-11}{5}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθεί η ανίσωση:
$3 \cdot (x-4) + 2 < 2x - 14$
και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της πάνω σε άξονα.

Λύση

$3 \cdot (x-4) + 2 < 2x - 14$ ή
$3x - 12 + 2 < 2x - 14$ .....

2. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$2x - 4 < 5 + \frac{x-2}{3}$
$8x - 2 > 7 \cdot (x-1)$
$3x \leq 0$

Λύση

Λύνουμε ξεχωριστά κάθε μία από τις ανισώσεις αυτές και παριστάνουμε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα ....

3. Να λυθεί η ανίσωση:
$2 < 3x + 5 \leq 7$

Λύση

Λύνουμε κάθε μία από τις ανισώσεις

που προκύπτουν, ξεχωριστά και βρίσκουμε το κοινό σύνολο λύσεών τους.
$2 < 3x + 5$ ... και $3x + 5 \leq 7$ ...

4. Ένα χωριό υδρεύεται από μία δεξαμενή, χωρητικότητας 290 m^3, της οποίας το νερό ανανεώνεται καθημερινά. Αν η ημερήσια κατανάλωση νερού είναι 0,8 m^3 το πολύ κατ' άτομο και η απώλεια νερού στο δίκτυο φτάνει τα 32 m^3 την ημέρα, πόσοι κάτοικοι το πολύ μπορούν να υδρευτούν από τη δεξαμενή αυτή καθημερινά;

Λύση

Έστω ότι x κάτοικοι υδρεύονται από τη δεξαμενή. Τότε η κατανάλωση νερού απ' αυτούς είναι τουλάχιστον 0,8x m^3 νερού την ημέρα. Αν υπολογίσουμε και την απώλεια στο δίκτυο, η συνολική ημερήσια κατανάλωση είναι:
$0{,}8 \cdot x + 32$ m^3 συνολικά.
Τότε $0{,}8 \cdot x + 32 \leq 290$ ....

5. Αν θέλουμε από την προηγούμενη δεξαμενή να υδρεύονται 350 άτομα, πόσο νερό πρέπει να καταναλώνει το πολύ κάθε κάτοικος την ημέρα;

Λύση

Έστω y m^3 η ημερήσια κατανάλωση κατ' άτομο, το πολύ. Τότε, αν υπολογίσουμε και την απώλεια στο δίκτυο θα έχουμε συνολική ημερήσια κατανάλωση $350 \cdot y + 32$ m^3.
Πρέπει $350y + 32 \leq 290$ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $3x - 7 \leq 2x + 4$
β) $0{,}6y + 2/3 \geq 2{,}1y - 5$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $8x \geq 0$
β) $3x < 3 \cdot (x - 2)$
γ) $2x > x$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $3(x - 1) - 2(x + 3) \leq 3$
β) $7x - 3(5x + 2) - 1 \leq 4x - 19$
γ) $4x - 1 \geq 3(x + 1) - 2(x - 3)$
δ) $7(x - 1) + 3(x - 2) > 4x - 7$

4. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{4(x-1)}{3} + \frac{2(x+2)}{5} < 7$$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $8x - 4 \leq 3(x - 4) + 5x - 1$
β) $3(x - 1) - 5 > 8x - 6 - 5(x - 1)$
γ) $3 - 2(x + 1) \leq x - 2x + (1 - x)$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{x-1}{2} < 1 - \frac{x+3}{3}$

β) $\frac{2(x+2)}{3} < \frac{x}{4} - \frac{x}{2}$

γ) $\frac{x-2}{4} - 3 \geq \frac{2(x-1)}{2} - \frac{1}{2}$

δ) $\frac{3x+2}{5} - \frac{1}{2} \leq \frac{4x-1}{10} - \frac{3-2x}{2}$

7. Σε ένα χωράφι δύο στρεμμάτων θέλουμε να φυτέψουμε λεμονιές ώστε να βρίσκεται ένα δένδρο κάθε 4 m^2. Θέλουμε ακόμα να μείνει ένας χώρος εμβαδού 120 m^2 για να χτιστεί ένα σπίτι. Πόσα το πολύ δένδρα μπορούμε να φυτέψουμε στο χωράφι

αυτό;

8. Σε ένα εργοστάσιο απασχολούνται 200 άτομα τα οποία εκτός της κανονικής εργασίας τους μπορούν να εργαστούν υπερωριακά με αμοιβή 1.200 δρχ. κατ' άτομο για κάθε ώρα υπερωριακής απασχόλησης. Το εργοστάσιο διαθέτει το πολύ 720.000 δρχ. για αμοιβές υπερωριών ημερησίως. Πόσες ώρες το πολύ μπορεί να εργαστεί υπερωριακά κάθε εργάτης;

9. Ένα τρένο κάνει τη διαδρομή Αθήνα - Θεσσαλονίκη που είναι 600 Km από 7,5 ώρες έως 8 ώρες. Μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η μέση ταχύτητά του;

10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $x - 1 < 2x + 2$ και $2x + 3 < 7$

β) $3x + 2 < x - 6$ και $x - 1 \geq 2x + 5$

γ) $3(x - 1) + 2 < x - 1$ και $\frac{x - 2}{2} \leq 1 - \frac{x}{3}$

δ) $4x - \frac{1 - x}{2} < 1$ και $\frac{x + 3}{2} \geq 2 - \frac{x}{3}$

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2(x - 1)}{5} - \frac{3(x + 2)}{4} + \frac{6 \cdot \frac{x}{5} + 1}{3} = -\frac{5}{12} + 1 - \frac{2x}{3}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$1 + \frac{1 + \frac{x}{2}}{3} = \frac{1 - \frac{x}{2}}{3} + \frac{7}{3}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση:
$(2x - 4)^2 + (3x - 6)^2 = 0$

4. Να λυθεί η εξίσωση:
$(3x - 8)^2 + (2x - 5)^2 = 0$

5. Να βρεθούν τα x, y, ω, στην παρακάτω εξίσωση:
$(8x - 40)^2 + (2y - 2)^2 + (3\omega - 1)^2 = 0$

6. Να λυθεί η εξίσωση:
$0,0008x + 0,0007(x - 2) = 0,0027$

7. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου τα 2/3 αυξημένα κατά 1/3 ισούνται με τον αριθμό αυτό ελαττωμένο κατά 2 μονάδες.

8. Μια δεξαμενή ενός οινοποιητικού συνεταιρισμού περιέχει 236 lit κρασί, που πρόκειται να εμφιαλωθεί σε φιάλες των 0,8 l. Αν οι φιάλες των 0,8 l είναι λιγότερες από εκείνες των 0,7 l, πόσες φιάλες της κάθε χωρητικότητας θα χρειαστούν;

9. Από δύο πόλεις Α και Β που απέχουν μεταξύ τους 240 Km, αναχωρούν ταυτόχρονα ένας μοτοσυκλετιστής από την πόλη Α και ένας ποδηλάτης από την πόλη Β. Η συνάντησή τους γίνεται μετά από 4 ώρες. Ποια είναι η ταχύτητα του καθενός, αν η ταχύτητα του μοτοσυκλετιστή είναι τετραπλάσια από την ταχύτητα του ποδηλάτη;

10. Αν οι μαθητές ενός σχολείου τοποθετηθούν ανά 36 σε κάθε λεωφορείο για μια εκδρομή, μένουν 22 μαθητές χωρίς θέση. Αν τοποθετηθούν ανά 40, το τελευταίο αυτοκίνητο έχει 30 μαθητές. Πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσοι οι μαθητές του σχολείου;

11. Μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με τα $\frac{3}{5}$ της άλλης οξείας γωνίας ελαττωμένης κατά 30°. Να βρεθούν οι γωνίες αυτές.

12. Το εμβαδό ενός τραπεζίου είναι 60 cm^2 και η μία βάση του το μισό της άλλης. Αν το ύψος του είναι 8 cm να βρείτε τις βάσεις αυτές.

13. Να λυθεί η ανίσωση:

$$x - \frac{x+2}{5} - \frac{\frac{x}{2}+3}{4} \leq 6 + \frac{19}{20}$$

14. Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης:

$$\frac{9x-11}{4} < x < \frac{7x-1}{4}$$

15. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(7x-4)^2 + \left(x+\frac{8}{3}\right)^2 > 0$$

16. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$(x + 156)^2 \geq 0$ και $(2x + 312)^2 \leq 0$

17. Να λυθεί η ανίσωση:

$(3x - 6)^2 + (4x - 8)^2 > 0$

18. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της Α' Εθνικής Κατηγορίας 1990-91 η ομάδα της Λάρισας είχε συγκεντρώσει μόλις 1 βαθμό μέχρι και την 9η αγωνιστική. Υπολογίστηκε ότι αν στο τέλος του πρωταθλήματος (34 αγώνες) συγκέντρωνε 30 βαθμούς τουλάχιστον, γλύτωνε τον υποβιβασμό και ακόμα ότι η ομάδα μέχρι το τέλος θα πετύχαινε 8 ισοπαλίες τουλάχιστον. Πόσες τουλάχιστον νίκες έπρεπε να πάρει για να αποφύγει τον υποβιβασμό; (Κάθε νίκη δίνει 2 βαθμούς και κάθε ισοπαλία 1 βαθμό).

19. Να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στο 50 και στο 72 ώστε όταν διαιρείται με το 14 να δίνει υπόλοιπο 3.

20. Το ανώτατο επιτρεπόμενο βάρος που μπορεί να μεταφέρει ένας ανελκυστήρας είναι 300 Kg. Μετά από κάποια βλάβη όμως μειώθηκε η μεταφορική αντοχή του κατά 20 %. Πόσα άτομα μπορούν να μεταφερθούν με ασφάλεια, αν το βάρος του κάθε ατόμου υπολογίζεται σε 70 Kg;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

BASIC 4

Στα προηγούμενα κομμάτια της «BASIC» είχαμε δει ότι μια μεταβλητή γινόταν πιο εύχρηστη αν την εισάγουμε με την εντολή INPUT.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 2 μεταβλητές χρησιμοποιώντας συγχρόνως 2 INPUTS π.χ.

```
10 INPUT A      (↵)
20 INPUT B      (↵)
30 PRINT A*B    (↵)
40 GO TO 10     (↵)
```

Όπως καταλαβαίνουμε, εμείς θα δίνουμε ό,τι τιμές θέλουμε για A και B και ο υπολογιστής θα τις πολλαπλασιάζει.

Φυσικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σειρά 30 με την

30 PRINT A + B ή με την

30 PRINT A - B ή με την

30 PRINT A : B

για να εκτελέσει πρόσθεση, αφαίρεση ή διαίρεση αντίστοιχα.

Αν γνωρίζουμε από πριν όλες τις τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούμε τότε μπορούμε να φτιάξουμε πρόγραμμα με τις εντολές READ και DATA.

Έστω ότι η μεταβλητή A έχει τις τιμές 10, 20, 30, 40, 50 και η B τις τιμές 15, 25, 35, 45, 55.

Τότε το πρόγραμμα θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

```
10 READ A, B                 (↵)
20 DATA 10,15,20,25,
   30,35,40,45,50,55         (↵)
30 PRINT A*B                 (↵)
40 GO TO 10                  (↵)
50 END                       (↵)
```

Ο υπολογιστής με το πρόγραμμα αυτό διαβάζει (γραμμή 10) το πρώτο ζευγάρι τιμών (10, 15) (γραμμή 20), κάνει τον πολλαπλασιασμό, τον τυπώνει (γραμμή 30) και στη συνέχεια αναγκάζεται (γραμμή 40) να επιστρέψει για να διαβάσει το επόμενο ζευγάρι τιμών (γραμμή 10) κ.ο.κ.

Προσοχή: οι μεταβλητές A και B έχουν τοποθετηθεί στη γραμμή 20 εναλλάξ, δηλαδή

```
10  15  20  25
↓   ↓   ↓   ↓
A   B   A   B
```

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα παρόμοιο με το προηγούμενο δίνοντας δικές σας τιμές για τα Α και Β. Μελετήστε τη λειτουργία του προγράμματος.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα χρησιμοποιώντας 3 INPUTS για τα Α, Β, Γ και υπολογίστε τις παραστάσεις:
α) (Α + Β) · Γ και β) Α · Γ + Β · Γ

BASIC 5

Γνωρίζουμε ότι ο γενικός τύπος μιας εξίσωσης 1ου βαθμού είναι $\alpha \cdot x = \beta$, $\alpha \neq 0$. Άρα $x = \beta/\alpha$. Αν λοιπόν εμείς με χρήση 2 INPUTS δώσουμε τις τιμές στα α και β τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη λύση της εξίσωσης 1ου βαθμού. Π.χ.

```
10 INPUT α          (↵)
20 INPUT β          (↵)
30 LET x = β/α      (↵)
40 PRINT x          (↵)
50 GO TO 10         (↵)
```

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις εντολές READ και DATA αν είναι γνωστές οι εξισώσεις εκ των προτέρων.

Άσκηση

Να φτιάξετε ένα πρόγραμμα για να υπολογίσετε τις εξισώσεις:
2x = 4, 5x = 7, 12x = 19, -3x = 12.

α) Με χρήση της εντολής INPUT.
β) Με χρήση των εντολών READ και DATA.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

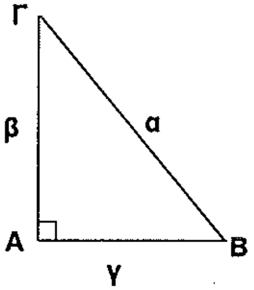
Οι πραγματικοί αριθμοί

3.1 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα.



2. Πώς, με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ένα τρίγωνο είναι α) ορθογώνιο, β) οξυγώνιο, γ) αμβλυγώνιο;

Απαντήσεις

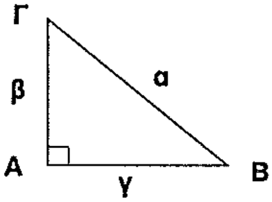
1. Το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:
Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών.

Συμβολικά το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται:

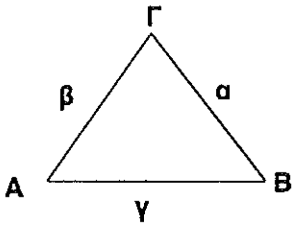
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

όπου α η υποτείνουσα και β, γ οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

2. **α)** Όταν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου είναι **ίσο** με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του είναι ορθή, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

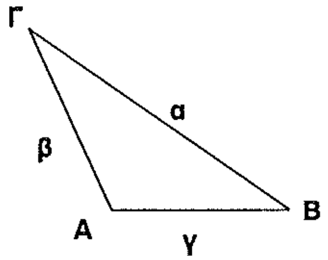


Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A}$ ορθή.



Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A}$ οξεία.

β) Αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι **μικρότερο** από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του είναι οξεία και το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.



Αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A}$ αμβλεία.

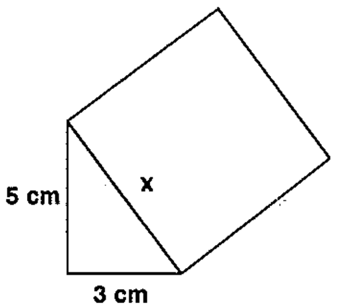
γ) Αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι **μεγαλύτερο** από το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ όπου $\alpha > \beta$, $\alpha > \gamma$ ισχύουν τα εξής:
Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο ορθογώνιο στο Α.
Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο στο Α.
Αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο στο Α.

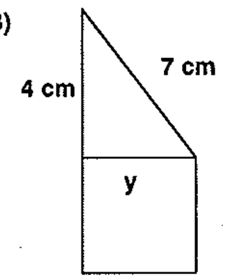
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα εμβαδά των παρακάτω τετραγώνων:

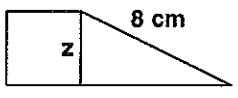
α)



β)



γ)



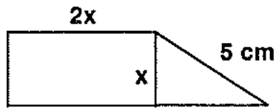
Λύση

α) Ονομάζουμε x την πλευρά του τετραγώνου. Τότε το εμβαδόν του είναι x^2. Το x όμως είναι ταυτόχρονα, υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου.
Άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$x^2 = 5^2 + 3^2$ ή
$x^2 = 25 + 9$ ή
$x^2 = 34$
Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 34 cm^2.

β) Ονομάζουμε y την πλευρά του τετραγώνου. Τότε το εμβαδόν του είναι y^2. Το y όμως είναι ταυτόχρονα κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.
Άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$y^2 + 4^2 = 7^2$ ή
$y^2 = 7^2 - 4^2$ ή
$y^2 = 49 - 16$ ή
$y^2 = 33$
Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 33 cm^2.

γ) Ονομάζουμε z την πλευρά του τετραγώνου. Τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$z^2 + 6^2 = 8^2$ ή
$z^2 = 8^2 - 6^2$ ή
$z^2 = 64 - 36$ ή
$z^2 = 28$
Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 28 cm^2.

2. Να υπολογιστεί η περίμετρος του ορθογωνίου στο σχήμα που ακολουθεί:

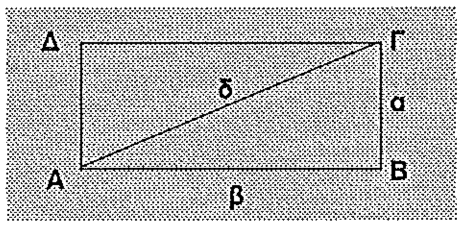


Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τη μία διάσταση x του ορθογωνίου, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διάσταση αυτή είναι κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$x^2 + 4^2 = 5^2$ ή
$x^2 = 5^2 - 4^2$ ή
$x^2 = 25 - 16$ ή
$x^2 = 9$ ή
$x^2 = 3^2$ ή
$x = 3$
Δηλαδή 3 cm είναι η μία διάσταση του ορθογωνίου. Σύμφωνα με την άσκηση, η άλλη διάσταση είναι 2x ή $2 \cdot 3 = 6$ cm. Τότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $3 + 6 + 3 + 6 = 18$ cm.

3. Να βρείτε έναν τύπο που να υπολογίζει το τετράγωνο της διαγωνίου δ ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β.
Εφαρμογή: α = 5, β = 12.

Λύση

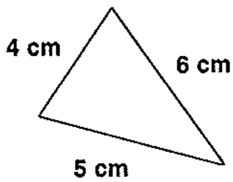


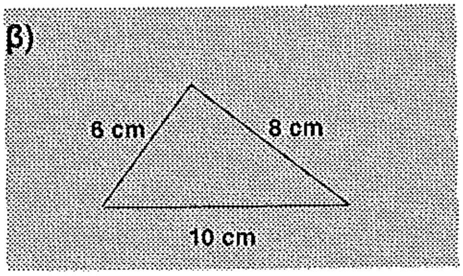
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:
$δ^2 = α^2 + β^2$
Αντικαθιστούμε τώρα όπου α το 5 και β το 12 και έχουμε:
$δ^2 = 5^2 + 12^2$ ή

$\delta^2 = 25 + 144$ ή
$\delta^2 = 169$ ή
$\delta^2 = 13^2$ ή
$\delta = 13$

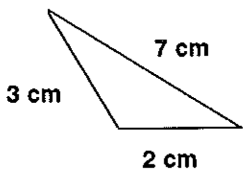
4. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι το α) οξυγώνιο, το β) ορθογώνιο και το γ) αμβλυγώνιο.

α)





γ)



Λύση

α) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι 6 cm.
Είναι: $6^2 = 36$ και
$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$.
Οπότε $6^2 < 4^2 + 5^2$ άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

β) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι 10 cm.
Είναι: $10^2 = 100$ και
$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.
Οπότε $10^2 = 6^2 + 8^2$ άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι 7 cm.
Είναι: $7^2 = 49$ και
$3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$.
Οπότε $7^2 > 3^2 + 2^2$ άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

5. Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω τρίγωνα με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο, ποιο οξυγώνιο και ποιο αμβλυγώνιο:
α) $\alpha = 3$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$
β) $\alpha = 12$, $\beta = 16$, $\gamma = 20$
γ) $\alpha = 2{,}8$, $\beta = 3$, $\gamma = 1{,}5$

Λύση

α) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\gamma = 7$ οπότε:
$\gamma^2 = 7^2 = 49$ και
$\alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$.
Παρατηρούμε ότι: $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$. Άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι $\gamma = 20$ οπότε:
$\gamma^2 = 20^2 = 400$ και
$\alpha^2 + \beta^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 =$
$= 400$.
Παρατηρούμε ότι: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\beta = 3$ οπότε:
$\beta^2 = 3^2 = 9$ και
$\alpha^2 + \gamma^2 = 2{,}8^2 + 1{,}5^2 = 7{,}84 + 2{,}25 =$
$= 10{,}09$.
Παρατηρούμε ότι: $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$. Άρα το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

6. Η μία κάθετη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 7 cm, ενώ η υποτείνουσά του ισούται με το άθροισμα των δύο κάθετων πλευρών του ελαττωμένο κατά 6. Να βρείτε τις

τρεις πλευρές του τριγώνου αυτού.

Λύση

Ονομάζουμε x την άλλη κάθετη πλευρά του τριγώνου. Σύμφωνα με το πρόβλημα η υποτείνουσά του είναι:

$(x + 7) - 6 = x + 7 - 6 = x + 1$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$(x + 1)^2 = x^2 + 7^2$ ή

$(x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + 7^2$ ή

$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 7^2$ ή

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 49$ ή

$x^2 + 2x - x^2 = 49 - 1$ ή

$2x = 48$ ή

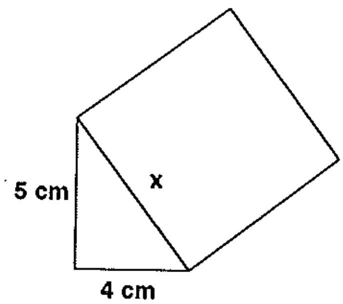
$x = 24$

Άρα η άλλη κάθετη πλευρά του είναι 24 cm, οπότε η υποτείνουσά του είναι 24 + 1 = 25 cm.

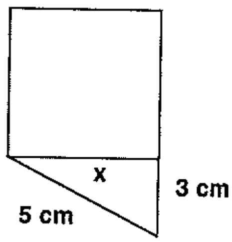
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:

α)



β)



Λύση

α) Το σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ένα τετράγωνο.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

(βάση · ύψος)/2

Ως βάση θα πάρουμε την πλευρά που είναι 4 cm και ως ύψος αυτήν που είναι 5 cm.

Έχουμε:

Εμβαδόν τριγώνου = $(4 \cdot 5)/2 = 20/2 =$
$= 10$ cm²

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι x^2.

Το x^2 υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Είναι: $x^2 = ...$

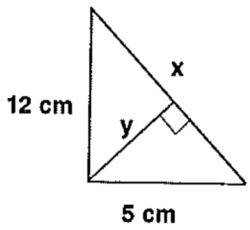
β) ....

2. Οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 5 cm και 12 cm. Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του,

β) την υποτείνουσά του και

γ) το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του με προσέγγιση εκατοστού.



Λύση

α) Το εμβαδόν Ε του τριγώνου είναι:

$$E = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2}$$

Η βάση του είναι 5 cm και το ύψος του 12 cm. Άρα το εμβαδόν του θα είναι:

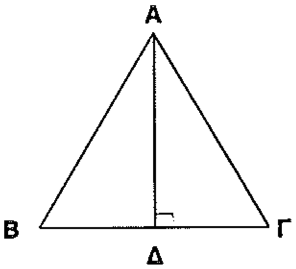
$$E = \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

β) Ονομάζουμε x την υποτείνουσά του. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$x^2 = 12^2 + 5^2$ ή ....

γ) Φέρνουμε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και το ονομάζουμε y. Θεωρούμε τώρα ως βάση του τριγώνου την υποτείνουσα. Οπότε το εμβαδόν του που είναι ίσο με 30 cm² ....

3. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο του ύψους υ ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με τα 3/4 του τετραγώνου της πλευράς του.

Λύση

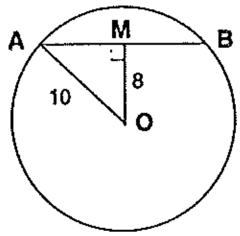


Το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου γνωρίζουμε ότι είναι και διάμεσος, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Τότε $ΒΔ = \frac{α}{2}$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, όπου η ΑΒ = α, η ΒΔ = α/2 και ΑΔ = υ.

$$υ^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2 = α^2 \text{ ή } υ^2 = α^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 \text{ ή} ....$$

4. Δίνεται ένας κύκλος (Ο, 10 cm) και μία χορδή του ΑΒ. Να υπολογιστεί το μήκος της χορδής αυτής, αν γνωρίζουμε ότι η απόστασή της από το κέντρο του κύκλου (απόστημα) είναι 8 cm.



Λύση

Η απόσταση ΟΜ από το κέντρο του κύκλου περνά από το μέσο Μ της χορδής ΑΒ. Τότε $ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Φέρνουμε την ακτίνα ΟΑ που είναι 10 cm και εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΜΑ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνονται οι σχέσεις: $α = μ^2 + ν^2$, $β = 2μν$, $γ = μ^2 - ν^2$ όπου μ, ν είναι ρητοί αριθμοί διαφορετικοί από το 0 και μ > ν. Να δώσετε στα μ και ν κατάλληλες τιμές και να επαληθεύσετε ότι για τα α, β, γ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

2. Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνια, οξυγώνια ή αμβλυγώνια;
α) α = 17,5, β = 18,5, γ = 6
β) α = 4, β = 4, γ = 5
γ) α = 3,5, β = 5,5, γ = 6

3. Ενός ορθογωνίου τριγώνου η υποτείνουσα είναι 4 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά του, ενώ η άλλη κάθετη πλευρά του είναι 20 cm.
α) Να υπολογίσετε τις πλευρές του.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

4. Ενός ορθογωνίου τριγώνου η μια κάθετη πλευρά του είναι 6 cm και η υποτείνουσά του 10 cm. Να υπολογίσετε την άλλη κάθετη πλευρά του, το εμβαδόν του καθώς και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του.

5. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που να επαληθεύουν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

3.2 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού;

1. Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, ονομάζεται ένας θετικός αριθμός x, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο θα μας δώσει τον αριθμό α. Δηλαδή: $x^2 = α$.

Αν $\sqrt{α} = x$ τότε $x^2 = α$, $α > 0$.

Η τετραγωνική ρίζα του θετικού αριθμού α συμβολίζεται $\sqrt{α}$ οπότε $x = \sqrt{α}$.

Ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$ γιατί $0^2 = 0$.

Ισχύει ακόμα: $(\sqrt{α})^2 = α$, $α \geq 0$

2. Ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε μας δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

3. Να αναφέρετε τις κυριότερες ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών.

3. Οι κυριότερες ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών είναι:

$$\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{α \cdot β}, \quad α \geq 0, β \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}} = \sqrt{\frac{α}{β}}, \quad α \geq 0, β > 0$$

Προσοχή: Δεν ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$

Παράδειγμα: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$ γιατί $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ και $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{25}$, $\sqrt{2.500}$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{0,0025}$

β) $\sqrt{\frac{4}{16}}$, $\sqrt{\frac{0,04}{0,16}}$, $\sqrt{\frac{400}{1.600}}$

Λύση

α) $\sqrt{25} = 5$, γιατί $5^2 = 25$

$\sqrt{2.500} = 50$, γιατί $50^2 = 2.500$

$\sqrt{0,25} = 0,5$ γιατί $0,5^2 = 0,25$

$\sqrt{0,0025} = 0,05$, γιατί $0,05^2 = 0,0025$

β) $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, γιατί $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{4}{16}$

$\sqrt{\frac{0,04}{0,16}} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, γιατί

$\left(\frac{0,2}{0,4}\right)^2 = \frac{0,04}{0,16}$

$\sqrt{\frac{400}{1.600}} = \frac{20}{40} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, γιατί

$\left(\frac{20}{40}\right)^2 = \frac{400}{1.600}$

2. Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $\sqrt{(25)^2} + \sqrt{144} - \sqrt{64}$

β) $\sqrt{(-9)^2} + \sqrt{16} - \sqrt{(-81)^2}$

Λύση

α) $\sqrt{(25)^2} + \sqrt{144} - \sqrt{64} =$

$= \sqrt{(25)^2} + \sqrt{(12)^2} - \sqrt{8^2} =$

$= 25 + 12 - 8 = 29$

β) $\sqrt{(-9)^2} + \sqrt{16} - \sqrt{(-81)^2} =$

$= \sqrt{9^2} + \sqrt{4^2} - \sqrt{81^2} =$

$= 9 + 4 - 81 = 13 - 81 = -68$

Παρατήρηση

Η $\sqrt{(-9)^2} = 9$ και όχι -9 γιατί έχουμε πει ότι το αποτέλεσμα μιας τετραγωνικής ρίζας είναι πάντοτε μη αρνητικός.

Δηλαδή $\sqrt{(-9)^2}$ και $\sqrt{9^2}$ είναι ίσες και μας δίνουν αποτέλεσμα 9.

Το ίδιο ισχύει και για την $\sqrt{(-81)^2}$.

3. Να υπολογιστούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε να ορίζεται η παρακάτω παράσταση.

$\sqrt{3x - (2x + 6) - 4}$

Λύση

Για να έχει νόημα η παράσταση πρέπει η υπόριζος ποσότητα $3x - (2x + 6) - 4$ να είναι μη αρνητική (δηλαδή θετική ή μηδέν). Έχουμε λοιπόν:

$3x - (2x + 6) - 4 \geq 0$ ή

$3x - 2x - 6 - 4 \geq 0$ ή

$3x - 2x \geq 6 + 4$ ή

$x \geq 10$

4. Να υπολογίσετε την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν 100

m^2 και ενός άλλου με εμβαδόν 169 m^2.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου υπολογίζεται από τον τύπο $E = \alpha^2$, όπου α η πλευρά του τετραγώνου. Έχουμε λοιπόν:

$100 = \alpha^2$ ή $\alpha = \sqrt{100}$ ή $\alpha = 10$ m

Για το άλλο τετράγωνο έχουμε όμοια:

$169 = \alpha^2$ ή $\alpha = \sqrt{169}$ ή $\alpha = 13$ m

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις στην παρακάτω παράσταση:

$$\sqrt{25} + 3\sqrt{\frac{4}{9}} - 13\sqrt{\frac{49}{169}} - 2(\sqrt{16} - \sqrt{64})$$

Λύση

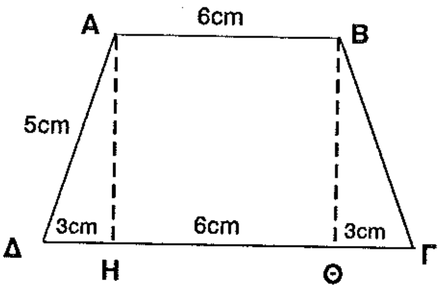
$$\sqrt{25} + 3\sqrt{\frac{4}{9}} - 13\sqrt{\frac{49}{169}} - 2(\sqrt{16} - \sqrt{64}) =$$

$$= 5 + 3 \cdot \frac{2}{3} - 13 \cdot \frac{7}{13} - 2(4 - 8) =$$

$= 5 + 2 - 7 - 2(-4) =$
$= 5 + 2 - 7 + 8 =$
$= 7 - 7 + 8 =$
$= 8$

6. Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ έχει ΑΒ = 6 cm, ΓΔ = 12 cm και ΑΔ = 5 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Λύση



Φέρνουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΘ του τραπεζίου. Τότε το ΑΗΘΒ είναι ορθογώνιο, άρα οι απέναντι πλευρές του ΑΒ, ΗΘ είναι ίσες, με ΑΒ = ΗΘ = 6 cm. Επίσης είναι ΔΗ = ΘΓ, οπότε αφού η ΔΓ = 12 cm θα είναι ΔΗ = ΘΓ = 3 cm. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΗΔ ορθογώνιο τρίγωνο και έχουμε:

$AH^2 = 5^2 - 3^2$ ή
$AH^2 = 25 - 9$ ή
$AH^2 = 16$ ή
$AH = \sqrt{16}$ ή
$AH = 4$ cm

Δηλαδή το ύψος του τραπεζίου είναι 4 cm.

Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}$.

Αντικαθιστούμε όπου $B = 12$, $\beta = 6$, $\upsilon = 4$ και έχουμε:

$$E = \frac{(12 + 6) \cdot 4}{2} = \frac{18 \cdot 4}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{196}$, $\sqrt{\frac{144}{169}}$, $\sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2}$, $\sqrt{\frac{121}{25}}$, $\sqrt{0{,}36}$

Λύση

Είναι $\sqrt{196} = 14$, γιατί $14^2 = 196$

$\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$, γιατί $\left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

....

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$\sqrt{7^2} - (\sqrt{36} - \sqrt{4} + 2\sqrt{169}) - 7\sqrt{\frac{9}{16}}$

Λύση

$\sqrt{7^2} - (\sqrt{36} - \sqrt{4} + 2\sqrt{169}) - 7\sqrt{\frac{9}{16}} =$

$= 7 - (6 - 2 + 2 \cdot 13) - 7 \cdot \frac{3}{4} = ...$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y ώστε να ορίζεται η παρακάτω παράσταση:

$3 \cdot \sqrt{5(x-6)+3} - \sqrt{4y - 3(y-1) + 5(y+3)}$

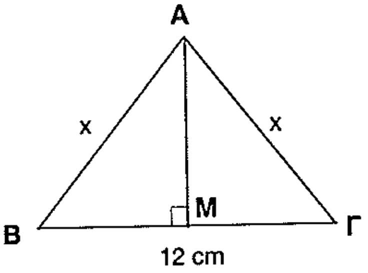
Λύση

Πρέπει οι δύο υπόριζες ποσότητες να είναι μη αρνητικές δηλ.

$5(x-6) + 3 \geq 0$ και

$4y - 3(y-1) + 5(y+3) \geq 0$ .....

4. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 32 cm και η βάση του είναι 12 cm. Να βρείτε το ύψος του και το εμβαδόν του.



Λύση

Ονομάζουμε x κάθε μία από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Τότε η περίμετρός του είναι:

$x + x + 12 = 32$ ή

$2x + 12 = 32$ ή

$2x = 32 - 12$ ή

$2x = 20$ ή

$x = 10$ cm

Το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου είναι ταυτόχρονα και διάμεσος. Άρα η ΒΜ = 6 cm.

Εφαρμόζουμε τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΜ ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{49}$, $\sqrt{(-7)^2}$, $\sqrt{(-0,06)^2}$, $\sqrt{81^2}$, $\sqrt{16}$

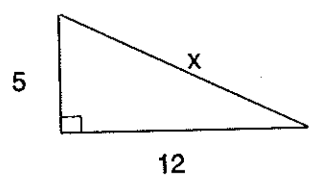
$\sqrt{\frac{25}{4}}$, $\sqrt{(-26)^2}$, $\sqrt{256}$

2. Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε να ορίζεται η παράσταση:

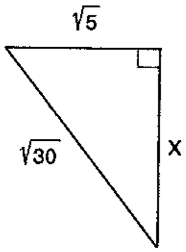
$\sqrt{3(x-2) - 4(2x-6) + 2}$

3. Να υπολογίσετε την πλευρά x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

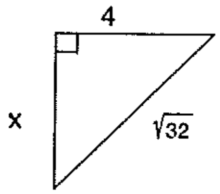
α)



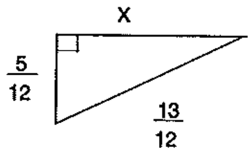
β)



γ)



δ)



4. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 16 cm και βάση 6 cm. Να βρείτε το ύψος του, το εμβαδόν του, καθώς και τα άλλα δύο ύψη του.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ), όταν οι γωνίες Α και Δ είναι 90°, ΑΒ = 4 cm, ΒΓ = 5 cm και ΓΔ = 7 cm.

6. Να εξετάσετε αν ορίζεται το παρακάτω άθροισμα:

$\sqrt{x-5} + \sqrt{3-6x}$

7. Αν α, β, γ, είναι θετικοί ρητοί αριθμοί και α > β > γ, να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2} + \sqrt{(\beta-\gamma)^2} + \sqrt{(\gamma-\alpha)^2}$

Εφαρμογή: α = 3, β = 4, γ = 5.

3. 3 Άρρητοι αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Ποιο είναι το σύνολο των ρητών αριθμών;

1. Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι ένα σύνολο που ως στοιχεία του περιέχει κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους.

__Παρατήρηση:__ Ρητοί είναι επίσης:

α) οι δεκαδικοί με πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων,

β) οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί (βλέπε Κεφ. 1 παράγραφο 12) και

γ) οι ακέραιοι, επειδή μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο.

2. Ποιο είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών;

2. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι ένα σύνολο που ως στοιχεία του περιέχει αριθμούς που δεν είναι ρητοί.

Δηλαδή: Στο σύνολο των άρρητων αριθμών περιέχονται:

α) δεκαδικοί αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικοί ή

β) αριθμοί της μορφής $\sqrt{\alpha}$ όπου α δεν είναι τετράγωνο ρητού.

3. Ποια είναι η διαφορά των ρητών από τους άρρητους;

3. Η διαφορά των ρητών από τους άρρητους είναι ότι όλοι οι ρητοί μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με όρους ακέραιους ενώ οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφούν μ' αυτό τον τρόπο.

Παρατήρηση: Οι άρρητοι αριθμοί όπως είπαμε παραπάνω μπορούν να γραφούν ως δεκαδικοί με άπειρο αριθμό δεκαδικών ψηφίων μη περιοδικών. Επειδή όμως ένας τέτοιος αριθμός δεν είναι εύχρηστος, παίρνουμε μια προσέγγισή του με περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, ώστε να μπορούμε να κάνουμε πιο εύκολα υπολογισμούς.

4. Τι είναι η ρητή προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού $\sqrt{\alpha}$;

4. Ρητή προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού $\sqrt{\alpha}$ είναι ένας δεκαδικός αριθμός με περιορισμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει έναν άλλο δεκαδικό αριθμό, ο οποίος είναι πολύ κοντά στον αριθμό α.

Είναι ευνόητο ότι, όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία έχει η ρητή προσέγγιση του άρρητου αριθμού, τόσο πιο κοντά στον αριθμό αυτό είναι το τετράγωνό της.

5. Δείξτε με ένα παράδειγμα έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να πάρουμε μια ρητή προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού.

5. Έστω ότι δίνεται ο άρρητος αριθμός $\sqrt{3}$ και θέλουμε να πάρουμε μια ρητή προσέγγισή του.

Παρατηρούμε ότι $1^2 = 1 < 3$ και $2^2 = 4 > 3$, άρα το $\sqrt{3}$ βρίσκεται ανάμεσα στον 1 και τον 2, δηλ. $1 < \sqrt{3} < 2$.

Επίσης $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3$ και $1{,}8^2 = 3{,}24 > 3$ άρα ο $\sqrt{3}$ βρίσκεται ανάμεσα στο 1,7 και το 1,8 δηλ. $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Ακόμα $1{,}73^2 = 2{,}992 < 3$ και $1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3$ άρα ο $\sqrt{3}$ βρίσκεται ανάμεσα στον 1,73 και 1,74 δηλ. $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

Ο 1,73 είναι ρητή προσέγγιση εκατοστού του $\sqrt{3}$ με **έλλειψη** ενώ το 1,74 ρητή προσέγγιση εκατοστού του $\sqrt{3}$ με **υπεροχή**.

6. Γράψτε μερικούς άρρητους αριθμούς.

6. Οι τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών που δεν είναι τετράγωνα φυσικών, είναι άρρητοι αριθμοί.

π.χ. οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... είναι άρρητοι αριθμοί.

Ο $\sqrt{4}$ όμως δεν είναι άρρητος, γιατί το 4 είναι τετράγωνο του 2. Έτσι $\sqrt{4} = 2$ είναι ρητός.

Υπάρχουν επίσης και άρρητοι που δεν είναι τετραγωνικές ρίζες φυσικών αριθμών. Ένας τέτοιος είναι ο $\pi = 3,14159 \ldots$ Περισσότερους άρρητους που δεν είναι τετραγωνικές ρίζες φυσικών αριθμών θα μάθουμε σε μεγαλύτερες τάξεις.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού τις παρακάτω ρίζες:

α) $\sqrt{2}$, **β)** $\sqrt{15}$, **γ)** $\sqrt{7}$, **δ)** $\sqrt{0,13}$,
ε) $\sqrt{19,6}$, **στ)** $\sqrt{28,5}$, **ζ)** $\sqrt{137}$, **η)** $\sqrt{19}$
θ) $\sqrt{55}$

(χρησιμοποιήστε τον πίνακα των τετραγωνικών ριζών στο τέλος του βιβλίου ή υπολογιστή τσέπης).

Λύση

α) Στον πίνακα βρίσκουμε τη γραμμή 0 και τη στήλη 2, οπότε στον αριθμό 02 αντιστοιχεί ο 1,414.

Δηλ. $\sqrt{2} = 1,414 \simeq 1,41$.

β) Στον πίνακα βρίσκουμε τη γραμμή 1 και τη στήλη 5 οπότε στον αριθμό 15 αντιστοιχεί ο 3,873.

Δηλ. $\sqrt{15} = 3,873 \simeq 3,87$.

γ) Στον πίνακα βρίσκουμε τη γραμμή 0 και τη στήλη 7, οπότε στον αριθμό 07 αντιστοιχεί ο 2,646.

Δηλ. $\sqrt{7} = 2,646 \simeq 2,65$.

δ) Ο άρρητος $\sqrt{0,13}$ μετασχηματίζεται ως ως εξής:

$$\sqrt{0,13} = \sqrt{\frac{13}{100}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{13}}{10}$$

Υπολογίζουμε την $\sqrt{13}$ από τον πίνακα διασταυρώνοντας τη γραμμή 1 με τη στήλη 3 και βρίσκουμε 3,606.

Δηλ. $\sqrt{13} = 3,606$.

Άρα $\frac{\sqrt{13}}{10} = \frac{3,606}{10} \simeq 0,36$

ε) Όμοια βρίσκουμε:

$$\sqrt{19,6} = \sqrt{\frac{196}{10}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10}}$$

Διασταυρώνουμε τη γραμμή 19 με τη στήλη 6 και βρίσκουμε 14.

Δηλ. $\sqrt{196} = 14$.

Διασταυρώνουμε τη γραμμή 1 με τη στήλη 0 και βρίσκουμε 3,162.

Δηλ. $\sqrt{10} = 3,162$.

Άρα $\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10}} \simeq \frac{14}{3,162} \simeq 4,43$.

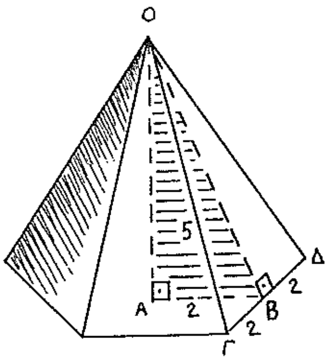
στ) $\sqrt{28,5} = \sqrt{\frac{285}{10}} = \frac{\sqrt{285}}{\sqrt{10}} \simeq \frac{16,882}{3,162} \simeq$
$\simeq 5,34$

ζ) $\sqrt{137} = 11,705 \simeq 11,71$

η) $\sqrt{19} = 4,36$

θ) $\sqrt{55} = 7,416 \simeq 7,41$

2. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας.



Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ για να υπολογίσουμε την OB^2.

$OB^2 = O\Gamma^2 - \Gamma B^2$ ή

$OB^2 = 5^2 - 2^2$ ή

$OB^2 = 25 - 4$ ή

$OB^2 = 21$

Εφαρμόζουμε τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ.

$OA^2 = OB^2 - AB^2$ ή

$OA^2 = 21 - 2^2$ ή

$OA^2 = 21 - 4$ ή

$OA^2 = 17$ ή

$OA = \sqrt{17}$

Υπολογίζουμε την $\sqrt{17}$ από τον πίνακα ή με κομπιουτεράκι και βρίσκουμε $\sqrt{17} \approx 4,12$

Άρα το ύψος της πυραμίδας είναι 4,12.

3. Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 5 cm και ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 6 cm και 8 cm. Να κατασκευάσετε ένα άλλο τετράγωνο που να έχει εμβαδό το άθροισμα των εμβαδών των δύο πρώτων σχημάτων.

Λύση

Το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου είναι: $5^2 = 25$ cm².

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$6 \cdot 8 = 48$ cm².

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου θα είναι: $25 + 48 = 73$ cm².

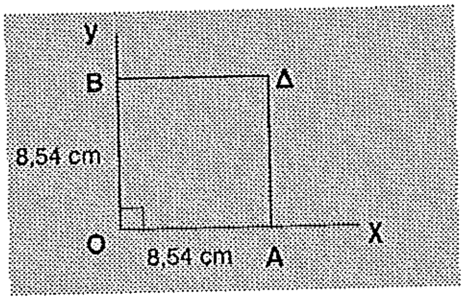
Ονομάζουμε α την πλευρά αυτού του τετραγώνου. Τότε:

$\alpha^2 = 73$ ή

$\alpha = \sqrt{73}$ ή

$\alpha = 8,54$ cm.

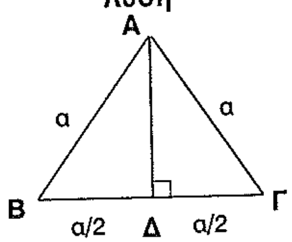
Η κατασκευή του τετραγώνου γίνεται ως εξής:



Κατασκευάζουμε ορθή γωνία χOy και πάνω στις πλευρές της παίρνουμε μήκη ΟΑ πάνω στην Οχ και ΟΒ πάνω στην Οy ώστε ΟΑ = ΟΒ = 8,54 cm. Από το Α φέρνουμε παράλληλη προς την Οy και από το Β φέρνουμε παράλληλη προς την Οχ. Αυτές τέμνονται στο Δ. Το τετράγωνο ΟΑΔΒ είναι το ζητούμενο.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρά α.
<u>Εφαρμογή:</u> α = 6 cm.

Λύση



Υπολογίζουμε πρώτα το ύψος ΑΔ του τριγώνου, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ.

$$ΑΔ^2 = α^2 - (\frac{α}{2})^2 \quad ή \quad ΑΔ^2 = α^2 - \frac{α^2}{4} \quad ή$$

$$ΑΔ^2 = \frac{4α^2}{4} - \frac{α^2}{4} \quad ή \quad ΑΔ^2 = \frac{3α^2}{4} \quad ή$$

$$ΑΔ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

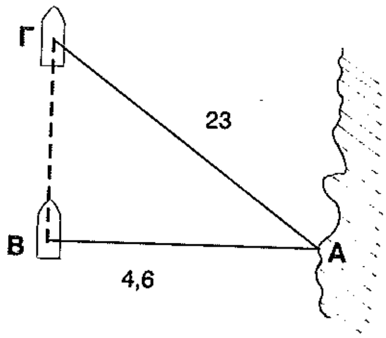
$$Ε = \frac{α \cdot α\sqrt{3}}{4} = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$$

<u>Εφαρμογή:</u> α = 6 cm. Τότε:

$$Ε = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} = 9 \cdot 1{,}73 =$$
$$= 15{,}57 \text{ cm}^2$$

5. Ένα πλοίο στις 10.00 π.μ. απέχει από ένα σημείο Α της ακτής που βρίσκεται ανατολικά από αυτό 4,6 μίλια, ενώ κινείται βόρεια. Στις 11.30 π.μ. της ίδιας μέρας απέχει από το ίδιο σημείο 23 μίλια. Να βρείτε την ταχύτητά του σε μίλια ανά ώρα.

Λύση



Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

$ΒΓ^2 = 23^2 - 4{,}6^2$ ή

$ΒΓ^2 = 529 - 21{,}16$ ή

$ΒΓ^2 = 507{,}84$ ή

$ΒΓ = \sqrt{507{,}84}$ ή

ΒΓ = 22,5 μίλια.

Δηλαδή το πλοίο σε 1,5 ώρες διήνυσε 22,5 μίλια.

Άρα η ταχύτητά του είναι:

$\frac{22{,}5}{1{,}5}$ = 15 μίλια /ώρα.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την $\sqrt{5}$ με προσέγγιση εκατοστού με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Λύση

Είναι $2^2 = 4 < 5$ και $3^2 = 9 > 5$.

Άρα η $\sqrt{5}$ βρίσκεται ανάμεσα στο 2 και στο 3. Δηλ. $2 < \sqrt{5} < 3$ (προσέγγιση ακέραιου)

Επίσης $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$ και $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$.

Άρα η $\sqrt{5}$ βρίσκεται ανάμεσα στο 2,2 και 2,3. Δηλ. $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ (προσέγγιση δέκατου)....

2. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του πίνακα ή με κομπιουτεράκι τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{421}$, β) $\sqrt{125}$, γ) $\sqrt{30,7}$, δ) $\sqrt{109}$

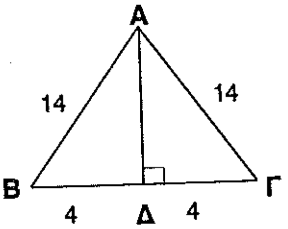
Λύση

α) Διασταυρώνουμε τη γραμμή 42 με τη στήλη 1, στον πίνακα, και βρίσκουμε:

. $\sqrt{421} = 20,519$

β) ....

3. Να βρεθεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 14 cm και ΒΓ = 8 cm.



Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ για να υπολογίσουμε το ύψος του ΑΔ ....

4. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου που έχει πλευρές 5 cm και 7 dm.

Λύση

Μετατρέπουμε τα dm σε cm. Είναι:
$7 \text{ dm} = 7 \cdot 10 \text{ cm} = 70 \text{ cm}$.
Εφαρμόζουμε τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε με διαδοχικές προσεγγίσεις και με προσέγγιση εκατοστού τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$

2. Να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο που να έχει εμβαδό ίσο με τη διαφορά των εμβαδών δύο άλλων τετραγώνων με πλευρές 5 cm το ένα και 4 cm το άλλο.

3. Ένας τόπος Α βρίσκεται βόρεια από έναν τόπο Τ και απέχει από αυτόν 4,2 Km. Ένας άλλος τόπος Β βρίσκεται δυτικά του τόπου Τ και απέχει απ' αυτόν 6 Km. Πόσα Km απέχει ο Α από τον Β;

4. Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει ΑΒ = 10 dm, ΓΔ = 18 dm και ΑΔ = 9 dm. Να βρεθεί το ύψος του και το εμβαδόν του.

5. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ έχει γωνίες Α = Δ = 90°, ΑΔ = 2 cm, ΑΒ = 3 cm και ΔΓ = 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του και την περίμετρό του.

3.4 Οι πραγματικοί αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιο είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών; Πώς συμβολίζεται;

Απαντήσεις

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το σύνολο που περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και συμβολίζεται με το γράμμα R.

Παρατήρηση 1: Οι ιδιότητες των πράξεων με ρητούς αριθμούς ισχύουν και για τις πράξεις με πραγματικούς αριθμούς. Όπου συναντάμε άρρητους σε πράξεις, μπορούμε να τους αντικαθιστούμε με τις ρητές προσεγγίσεις τους και να εκτελούμε μετά τις πράξεις.

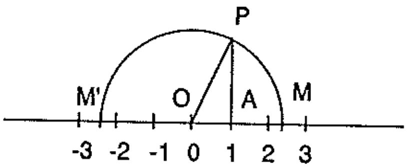
Παρατήρηση 2: Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν με συγκεκριμένο τρόπο πάνω σε μία ευθεία που λέγεται **άξονας των πραγματικών αριθμών.**

Έχουμε μάθει πως τοποθετούμε τους ρητούς πάνω σε άξονα. Η μέθοδος τοποθέτησης μερικών άρρητων αναλύεται παρακάτω στις λυμένες ασκήσεις.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα σημεία του άξονα που παριστάνουν τους άρρητους $\sqrt{5}$ και $-\sqrt{5}$.

Λύση



Κατασκευάζουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Κατασκευάζουμε μετά το ορθογώνιο τρίγωνο OAP στο οποίο οι κάθετες πλευρές του OA, AP είναι 1 και 2 αντίστοιχα. Γράφουμε τον κύκλο (O, OP) που συναντά τον άξονα στα σημεία M και M'. Τα σημεία αυτά παριστάνουν τους άρρητους που θέλουμε. Αυτό συμβαίνει γιατί από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP είναι:

$OP^2 = 1^2 + 2^2$ ή

$OP^2 = 1 + 4$ ή

$OP^2 = 5$ ή

$OP = \sqrt{5}$

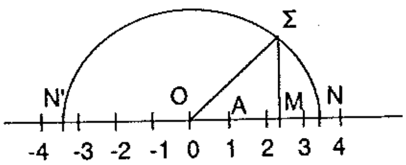
ενώ οι OP, OM, OM' είναι ίσες ως ακτίνες του κύκλου (O, OP). Άρα:

$OM = \sqrt{5}$ και $OM' = -\sqrt{5}$ οπότε το M που βρίσκεται δεξιά από το Ο παριστάνει τον $\sqrt{5}$ ενώ το Μ' που βρίσκεται αριστερά από το Ο παριστάνει τον $-\sqrt{5}$.

2. Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης να βρείτε τα σημεία του άξονα που παριστάνουν τους άρρητους:

$\sqrt{14}$ και $-\sqrt{14}$.

Λύση



Κατασκευάζουμε έναν άξονα ίδιο με τον άξονα της προηγούμενης άσκησης. Μετά κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΣ με κάθετες πλευρές $ΟΜ = \sqrt{5}$ και $ΜΣ = 3$ (το $\sqrt{5}$ το παίρνουμε από την προηγούμενη άσκηση). Γράφουμε τον κύκλο (Ο, ΟΣ) που συναντά τον άξονα στα σημεία Ν και Ν'. Αυτά παριστάνουν τους άρρητους $\sqrt{14}$ και $-\sqrt{14}$. Αυτό συμβαίνει γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΣ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος παίρνουμε:

$ΟΣ^2 = 3^2 + (\sqrt{5})^2$ ή

$ΟΣ^2 = 9 + 5$ ή

$ΟΣ^2 = 14$ ή

$ΟΣ = \sqrt{14}$

Επίσης $ΟΝ = ΟΣ = ΟΝ' = \sqrt{14}$ ως ακτίνες του κύκλου (Ο, ΟΣ).

3. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των τετραγωνικών ριζών να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, β) $\sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{8}$,
γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$, δ) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2} + 1)$

Λύση

α) Βρίσκουμε ότι:

$\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{3} = 1{,}732$, $\sqrt{5} = 2{,}236$.

Άρα: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} =$

$= 1{,}414 + 1{,}732 + 2{,}236 = 5{,}382$

β) Εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο και παίρνουμε:

$\sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{8} = 2{,}646 - 2{,}449 + 2{,}828 =$

$= 3{,}025$

γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 1{,}732 \cdot 2{,}236 = 3{,}873$

Εδώ μπορούσαμε να εργαστούμε και με την ιδιότητα $\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{αβ}$ δηλ.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} = 3{,}873$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο τρόπος αυτός είναι ακριβέστερος από τον πρώτο, γιατί η προσέγγιση του άρρητου γίνεται εδώ μία φορά μόνο, ενώ με τον προηγούμενο τρόπο έγινε δύο φορές. Έτσι το αποτέλεσμα τη δεύτερη φορά είναι πλησιέστερο στο πραγματικό.

δ) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2} + 1) =$

= (εκτελούμε επιμεριστική ιδιότητα) =

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 1 =$

$= \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{3} =$

$= 3{,}873 - 2{,}449 + 1{,}732 = 3{,}156$

4. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})$,

β) $7 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{13}) + 3 \cdot (\sqrt{13} - 2\sqrt{6})$

Λύση

α) $\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})=$
$=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=$
$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=$
$=2\sqrt{9}-\sqrt{6}-2\sqrt{6}+\sqrt{4}=$
$=2\cdot 3-\sqrt{6}-2\sqrt{6}+2=$
$=6-\sqrt{6}-2\sqrt{6}+2=$
$=8+(-1-2)\sqrt{6}=$
$=8-3\sqrt{6}$

β) $7\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{13})+3\cdot(\sqrt{13}-2\sqrt{6})=$
$=7\sqrt{6}-7\sqrt{13}+3\sqrt{13}-6\sqrt{6}=$
$=7\sqrt{6}-6\sqrt{6}-7\sqrt{13}+3\sqrt{13}=$
$=(7-6)\sqrt{6}+(-7+3)\sqrt{13}=$
$=1\sqrt{6}-4\sqrt{13}=\sqrt{6}-4\sqrt{13}$

5. Δίνεται ο πραγματικός θετικός αριθμός λ < 5. Να δώσετε 3 τιμές δικές σας στον λ και να επαληθεύσετε ότι:

$\sqrt{\lambda}<\sqrt{5}$.

Λύση

Αφού ο λ παίρνει τιμές μικρότερες του 5, μπορούμε να δώσουμε σ' αυτόν τις τιμές 2, 3, 4 διαδοχικά. Έχουμε λοιπόν:

Αν $\lambda=2$ τότε $\sqrt{2}<\sqrt{5}$ γιατί $\sqrt{2}=1{,}414$ και $\sqrt{5}=2{,}236$.
Αν $\lambda=3$ τότε $\sqrt{3}<\sqrt{5}$ γιατί $\sqrt{3}=1{,}732$ και $\sqrt{5}=2{,}236$.
Αν $\lambda=4$ τότε $\sqrt{4}<\sqrt{5}$ γιατί $\sqrt{4}=2$ και $\sqrt{5}=2{,}236$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να παραστήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους άρρητους:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $-\sqrt{8}$

Λύση

Εργαζόμαστε όπως στις λυμένες ασκήσεις 1 και 2 ...

2. Να γίνουν οι πράξεις:

$\sqrt{2+5}$, $\sqrt{7-3}$, $\sqrt{8-6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2+3}$

Λύση

$\sqrt{2+5}=\sqrt{7}=2{,}646$
$\sqrt{7-3}=\sqrt{4}=2$
$\sqrt{8-6}=$ ......

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

Λύση

$-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}=$
$=-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=$
$=(-2+3+6)\sqrt{2}+(-5+4)\sqrt{3}=$ .....

4. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο >, <, = στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{7}$, $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{3}$, 3, γ) 1, $\sqrt{0{,}6}$,

δ) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, ε) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, στ) $\sqrt{8}$, $2\sqrt{2}$

Λύση

α) $\sqrt{7} > \sqrt{2}$ γιατί: $\sqrt{7} = 2{,}646$ και $\sqrt{2} = 1{,}414$

β) $\sqrt{3} < 3$ γιατί: $\sqrt{3} = 1{,}732$ οπότε $1{,}732 < 3$

γ) ....

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{3} \cdot (x - 2) = 5\sqrt{3}$

β) $2(x + \sqrt{5}) = 6 + \sqrt{2}$

Λύση

α) $\sqrt{3} \cdot (x - 2) = 5\sqrt{3}$ ή

$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ή

$\sqrt{3}x = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ ή

$\sqrt{3}x = 7\sqrt{3}$ ή

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ή

$x = 7$

β) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ποια σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών παριστάνουν τους αριθμούς:

α) $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 6, -6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

β) $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

2. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα και το διαβήτη, βρείτε τη θέση του $\sqrt{7}$.

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{2+2}$, $\sqrt{2 \cdot 2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

β) $\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^3}$, $\sqrt{3^2 + 2^2}$, $(\sqrt{6})^2 : (\sqrt{2})^2$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $10\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + \sqrt{7} + 5\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$

β) $3(\sqrt{2} + 11) + 2(5\sqrt{11} - \sqrt{2}) +$
$+ 3(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$

5. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο <, >, = στις παραστάσεις:

α) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{2}$, 2, γ) 1, $\sqrt{3}$, δ) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$

ε) $\sqrt{2+5}$, $\sqrt{7}$, στ) 3, $\sqrt{3}$, ζ) $\sqrt{6+5}$, $\sqrt{9+2}$

6. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $3 < \kappa < 5$. Να δώσετε 3 τιμές δικές σας στον κ και να επαληθεύσετε ότι:

$\sqrt{3} < \sqrt{\kappa} < \sqrt{5}$

3.5 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Θεωρία

Ερωτήσεις

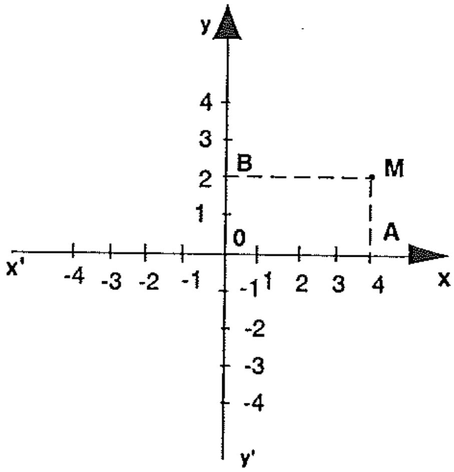
1. Τι ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα αξόνων;

Απαντήσεις

1. Ορθογώνιο σύστημα αξόνων ονομάζεται ένα σύστημα δύο αξόνων x'x, y'y πραγματικών αριθμών που τέμνονται κάθετα και έχουν κοινή αρχή.

2. Τι ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;

2. Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων λέγεται το ορθογώνιο σύστημα του οποίου και οι δύο άξονες έχουν την ίδια μονάδα.
Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



3. Δείξτε με ένα παράδειγμα, πώς μπορούμε, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων, να προσδιορίσουμε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου;

3. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Από το Μ φέρνουμε μία κάθετη πάνω στον άξονα x'x που συναντά αυτόν στο Α, και μία κάθετη πάνω στον y'y που τον συναντά στο Β. Βλέπουμε ότι το Α αντιστοιχεί στον αριθμό 4 και το Β στον αριθμό 2. Δηλαδή στο σημείο Μ αντιστοιχεί το ζεύγος (4, 2).

4. Τι λέγεται άξονας τετμημένων και τι τεταγμένων σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων;

4. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων ο οριζόντιος άξονας x'x λέγεται **άξονας των τετμημένων** ενώ ο κατακόρυφος άξονας y'y λέγεται **άξονας των τεταγμένων.**

5. Τι λέγονται συντεταγμένες ενός σημείου Μ(α, β) και τι τετμημένη και τεταγμένη του σημείου αυτού;

5. Συντεταγμένες σημείου λέγονται τα στοιχεία α, β του ζεύγους (α, β) που είναι πραγματικοί αριθμοί και προσδιορίζουν τη θέση του σημείου Μ(α, β) στο επίπεδο.

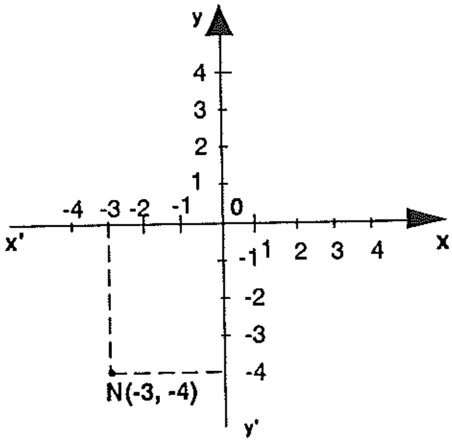
Ο α αντιστοιχεί στον άξονα x'x και λέγεται **τετμημένη του σημείου** και ο β αντιστοιχεί στον άξονα y'y και λέγεται **τεταγμένη του σημείου.**
Για το σημείο Μ(4, 2) που αναφέραμε παραπάνω οι αριθμοί 4, 2 είναι οι συντεταγμένες του. Ειδικότερα ο αριθμός 4 είναι η τετμημένη του και ο αριθμός 2 η τεταγμένη του.

6. Με ποιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα σημείο Μ όταν δίνονται οι συντεταγμένες του (α, β);

6. Όταν δίνεται ένα σημείο Μ με συντεταγμένες (α, β) μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του ως εξής:
α) Προσδιορίζουμε τη θέση των αριθμών α, β στους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα.

β) Φέρνουμε κάθετη από το σημείο που βρίσκεται το α προς τον άξονα x'x και από το σημείο που βρίσκεται το β προς τον άξονα y'y. Στο σημείο στο οποίο τέμνονται οι δύο κάθετες βρίσκεται το σημείο Μ.

Π.χ. Αν έχουμε το ζεύγος (- 3, - 4) μπορούμε να βρούμε το σημείο του επιπέδου που έχει συντεταγμένες τους αριθμούς αυτούς ως εξής:
Φέρνουμε κάθετη στον άξονα x'x στο σημείο που βρίσκεται το - 3 και κάθετη στον άξονα y'y στο σημείο που βρίσκεται το - 4. Οι δύο αυτές κάθετες τέμνονται στο σημείο Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τότε το Ν έχει συντεταγμένες (- 3, - 4).

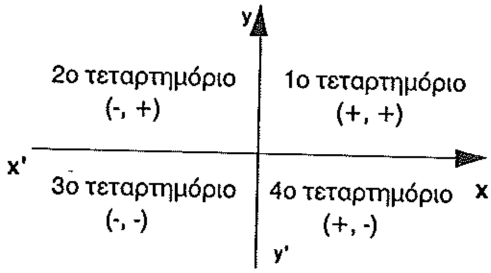


<u>**Παρατήρηση:**</u> Όπως γίνεται φανερό κάθε σημείο του άξονα x'x έχει τεταγμένη 0 ενώ κάθε σημείο του άξονα y'y έχει τετμημένη 0. Επίσης η αρχή των αξόνων δηλαδή το σημείο Ο έχει συντεταγμένες (0, 0).

7. Τι λέγονται τεταρτημόρια και τι γνωρίζεται για τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε καθένα από αυτά;

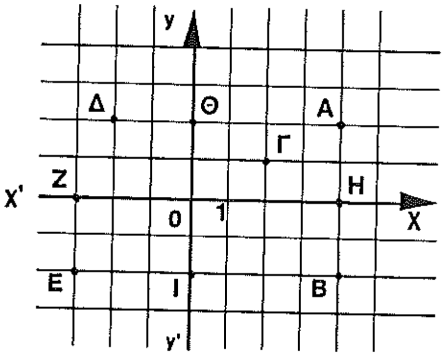
7. Οι τέσσερεις γωνίες που δημιουργούνται από τους άξονες λέγονται **τεταρτημόρια.**

Στο παρακάτω σχήμα σημειώνουμε τα τεταρτημόρια καθώς και τα πρόσημα της τετμημένης και τεταγμένης που έχουν τα σημεία που βρίσκονται σε καθένα από αυτά.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στο παρακάτω σχήμα.



Λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες (4, 2), το Β (4, - 2), το Γ (2, 1), το Δ (- 2, 2), το Ε (- 3, - 2), το Ζ (- 3, 0), το Η (4, 0), το Θ (0, 2), το Ι (0, - 2).

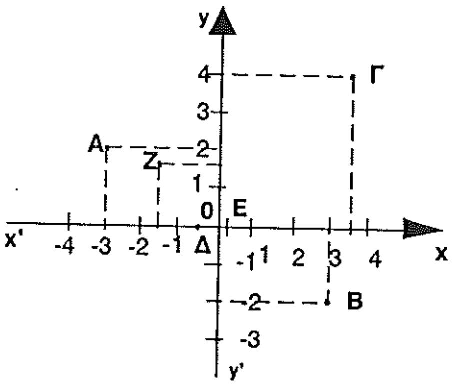
2. Σε ένα σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία:

Α(- 3, 2), Β(3, - 2), Γ(3,5, 4),

$Δ\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $Ε\left(\frac{3}{10}, 0\right)$, $Ζ\left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

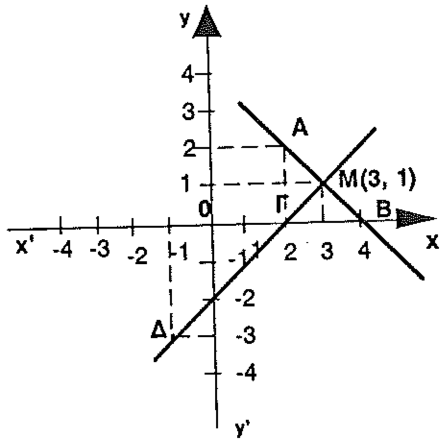
Λύση

Τα σημεία που ζητούνται φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



3. Να βρείτε τις ευθείες που ορίζονται από τα σημεία Α (2, 2), Β (4, 0), και Γ (2, 0), Δ (- 1, - 3). Μετά να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

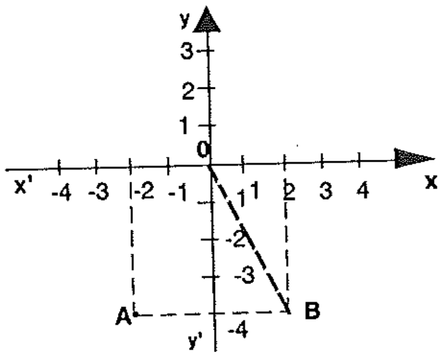
Λύση



Κατασκευάζουμε πρώτα τα σημεία Α (2, 2), Β (4, 0) και φέρνουμε την ευθεία που περνά από αυτά. Κατασκευάζουμε μετά τα σημεία Γ(2, 0), Δ(- 1,-3) και την ευθεία που περνά από αυτά. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο Μ που έχει συντεταγμένες (3, 1).

4. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α (- 2, - 4) από τους άξονες και του σημείου Β (2, - 4) από την αρχή των αξόνων.

Λύση



Απο το σχήμα παρατηρούμε ότι το Α απέχει 4 μονάδες από τον άξονα x'x και 2 μονάδες από τον άξονα y'y.
Κατασκευάζουμε το σημείο Β. Η ΟΒ μας δίνει την απόσταση του Β από την αρχή των αξόνων. Η ΟΒ όμως είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΔΒ. Εφαρμόζουμε λοιπόν σ' αυτό, το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$OB^2 = O\Delta^2 + \Delta B^2$ ή

$OB^2 = 2^2 + 4^2$ ή

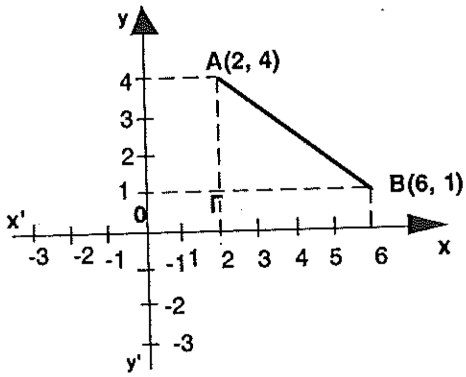
$OB^2 = 4 + 16$ ή

$OB^2 = 20$ ή

$OB = \sqrt{20} \cong 4{,}472$

5. Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α (2, 4) από το σημείο Β (6, 1).

Λύση



Κατασκευάζουμε τα σημεία Α και Β σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η απόσταση ΑΒ μπορεί να υπολογιστεί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος.
Είναι: $A\Gamma = 3$, $\Gamma B = 4$, οπότε:

$AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ή

$AB^2 = 3^2 + 4^2$ ή

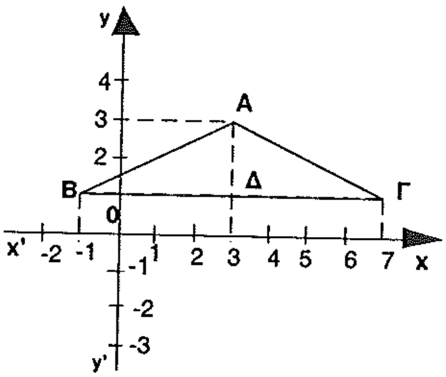
$AB^2 = 9 + 16$ ή

$AB^2 = 25$ ή

$AB = \sqrt{25} = 5$

6. **Να σχεδιάσετε το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία Α (3, 3), Β (- 1, 1), Γ (7, 1). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.**

Λύση



Θα υπολογίσουμε τις αποστάσεις ΑΒ και ΑΓ.

Την ΑΒ την υπολογίζουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Είναι: ΑΔ = 2 και ΒΔ = 4, άρα

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή

$AB^2 = 2^2 + 4^2$ ή

$AB^2 = 4 + 16$ ή

$AB^2 = 20$ ή

$AB = \sqrt{20}$

Την ΑΓ την υπολογίζουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Είναι: ΑΔ = 2 και ΔΓ = 4 οπότε εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και βρίσκουμε $A\Gamma = \sqrt{20}$

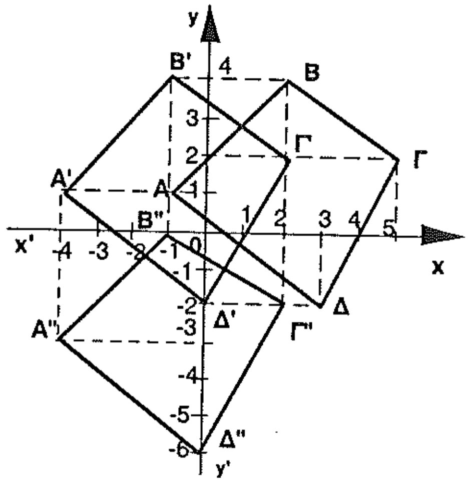
Άρα ΑΒ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

7. **Δίνεται το τετράπλευρο Α (- 1, 1), Β (2, 4), Γ (5, 2), Δ (3, - 2).**

α) Αν το τετράπλευρο αυτό μετακινηθεί παράλληλα προς τον άξονα x'x κατά 3 μονάδες «αριστερά», να βρείτε τις νέες συντεταγμένες των κορυφών του.

β) Αν το νέο τετράπλευρο μετακινηθεί παράλληλα προς τον άξονα y'y κατά 4 μονάδες «κάτω», να βρείτε τις νέες συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση



α) Αφού το αρχικό τετράπλευρο μετακινείται παράλληλα προς τον άξονα x'x οι τεταγμένες των κορυφών του δε θα μεταβληθούν. Μετακινείται όμως αριστερά κατά 3 μονάδες. Άρα οι τετμημένες των κορυφών του ελαττώνονται κατά 3 μονάδες, οπότε για να βρούμε τις νέες τετμημένες αφαιρούμε 3 μονάδες από τις αρχικές.

Έστω Α'Β'Γ'Δ' το νέο τετράπλευρο.

Οι συντεταγμένες, επομένως των κορυφών του είναι:

Α'(- 1 - 3, 1) = Α'(- 4, 1)

Β'(2 - 3, 4) = Β'(- 1, 4)

Γ'(5 - 3, 2) = Γ'(2, 2)

Δ'(3 - 3, - 2) = Δ'(0, - 2)

β) Το τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' μετακινείται παράλληλα προς τον άξονα y'y και προς τα κάτω 4 μονάδες. Άρα οι τετμημένες των κορυφών του δε μεταβάλλονται, ενώ οι τεταγμένες του ελαττώνονται κατά 4.

Έστω Α"Β"Γ"Δ" το νέο τετράπλευρο τότε: Α"(- 4, 1- 4) = Α"(- 4, - 3)

Β"(- 1, 4- 4) = Β"(- 1, 0)

Γ"(2, 2- 4) = Γ"(2, - 2)

Δ"(0, - 2- 4) = Δ"(0, - 6)

8. Δίνονται τα σημεία Α (3, 5) και Β (6λ - 9, - 4). Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία ΑΒ να είναι παράλληλη προς τον άξονα y'y.

Λύση

Τα σημεία Α και Β θέλουμε να βρίσκονται πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y'y.

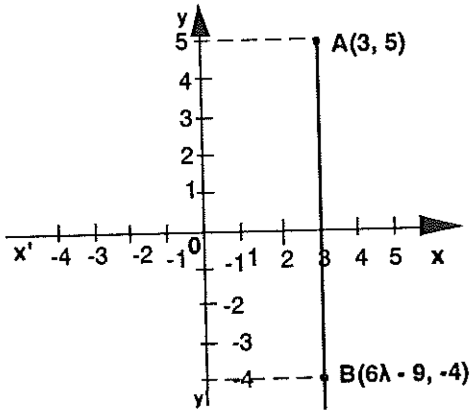
Άρα όλα τα σημεία της ευθείας αυτής θα έχουν ίδια τετμημένη, οπότε και το Β θα έχει ίδια τετμημένη με το Α.

Δηλαδή 6λ - 9 = 3 ή

6λ = 3 + 9 ή

6λ = 12 ή

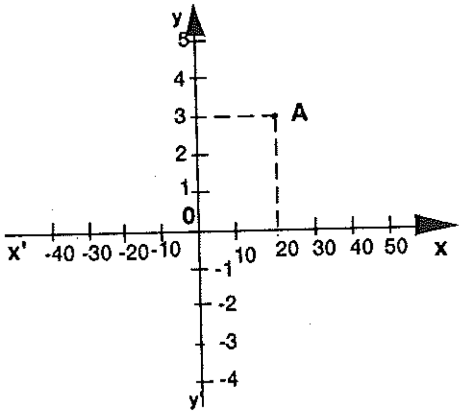
λ = 2.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Σε ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία: Α (20, 3), Β (45, - 2), Γ (- 30, 4).

Λύση



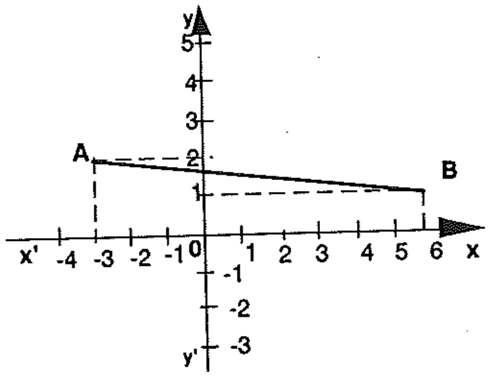
Επειδή οι τετμημένες των σημείων Α, Β, Γ είναι πολύ μεγαλύτερες από τις τεταγμένες τους, είναι πρακτικά αδύνατο να τα απεικονίσουμε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων με άλλη μονάδα στον άξονα x'x και άλλη μονάδα στον άξονα y'y. Ως μονάδα στον x'x επιλέγουμε το .... Στο διπλανό σχήμα τοποθετούμε το σημείο Α ....

2. Να βρείτε τις ευθείες που ορίζονται από τα σημεία:

α) Α (- 3, 2), Β (6, 1),

β) Γ (- 2, 5), Δ (1, 7)

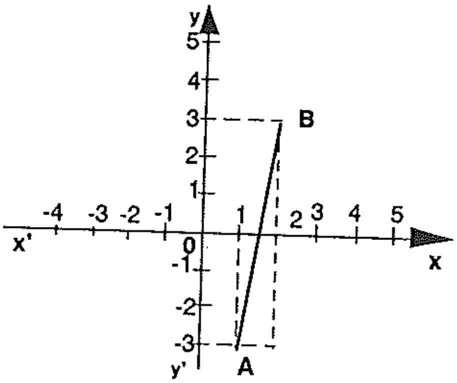
Λύση



α) Κατασκευάζουμε πρώτα τα σημεία Α (- 3, 2), Β (6, 1) και μετά φέρουμε την ευθεία που περνά απ' αυτά.
β) ....

3. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου Α (1, - 3) από τους άξονες και του σημείου Β (2, 3) από την αρχή των αξόνων. Ποια είναι η απόσταση του Α από το Β;

Λύση



Από το σχήμα φαίνεται ότι η απόσταση του Α από τον άξονα x'x είναι 3 μονάδες ενώ από τον άξονα y'y 1 μονάδα. Η απόσταση του Β από τον άξονα ....

4. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α(0, 5), Β (6, 5), Γ (9, 1), Δ (- 5, 1). Να το κατασκευάσετε και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Λύση

Κατασκευάζουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ όπως γνωρίζουμε και παρατηρούμε ότι: ΑΒ = 6, ΔΓ = 14 .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων να τοποθετήσετε τα σημεία:
Α (200, 10), Β (- 250, - 20)
Γ (175, - 25), Δ (900, 30).

2. Δίνονται τα σημεία:
Α (1, 2), Β (5, 6), Γ (- 3, 8).
Να υπολογίσετε τα μήκη ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

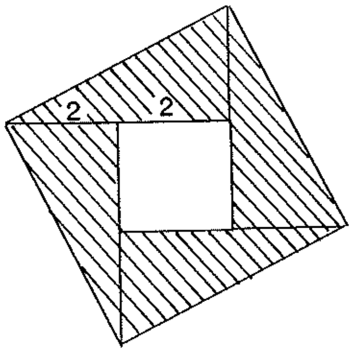
3. Ένα σημείο Α έχει συντεταγμένες (2x - 1, 3y + 5). Το σημείο αυτό απέχει 2 μονάδες από τον άξονα x'x και 3 μονάδες από τον άξονα y'y. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y.

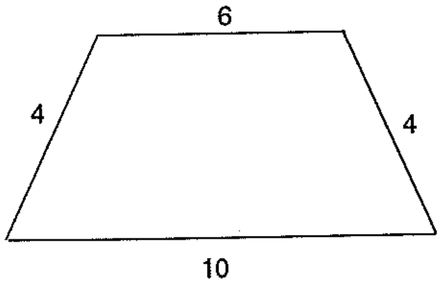
4. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με κορυφές Α (- 4, 0), Β (5, 0), Γ (2, - 4), Δ (- 1, - 4). Να το κατασκευάσετε και μετά να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

5. Δίνονται τα σημεία Α (- 2, 2) και Β (5, y - 3). Να βρεθεί η τιμή του y ώστε η ευθεία ΑΒ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος που είναι γραμμοσκιασμένο, καθώς και το εμβαδόν του τραπεζίου.





2. Δίνεται η παράσταση:

$$\sqrt{2(x-1)+x}+\sqrt{2+3(1-x)}$$

όπου x είναι ακέραιος. Να υπολογιστεί η τιμή του x, για να ορίζεται η παράσταση.

3. Δίνεται η παράσταση:

$$\sqrt{\frac{7x-3}{5}}-2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3x}{4}}$$

όπου ο x είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι η παράσταση αυτή δεν ορίζεται για όλες τις τιμες του x.

4. Να εκτελέσετε τις πράξεις στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $(\sqrt{2}+2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+4\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$

β) $(8\sqrt{14}-6\sqrt{63}+4\sqrt{28}-10\sqrt{7}):2\sqrt{7}$

5. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 18 cm και βάση 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τα ύψη του.

6. Δύο σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες (0, α), (2α, 0) αντίστοιχα. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι 20.

7. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(-1, 4), Β(- 2, 3), Γ(70, 32).
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραπλεύρου που προκύπτει, αν οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ μετατοπιστούν παράλληλα προς τον άξονα x'x κατά 5 μονάδες «δεξιά».
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραπλεύρου που προκύπτει, αν οι κορυφές του τετραπλεύρου του πρώτου ερωτήματος μετατοπιστούν παράλληλα προς τον άξονα y'y κατά 6 μονάδες προς τα «επάνω».

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις κάθετες πλευρές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

BASIC 6

Άραγε ο υπολογιστής σκέφτεται; Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις ναι. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο άνισους αριθμούς και ζητάμε από τον υπολογιστή να αποφασίσει ποιος είναι μεγαλύτερος. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **IF THEN**, δηλαδή μια εντολή που αναγκάζει τον υπολογιστή να σκεφτεί κάπως έτσι:

ΕΑΝ συμβαίνει αυτό **ΤΟΤΕ** κάνε εκείνο, δηλ. ΕΑΝ το x είναι μεγαλύτερος από το y ΤΟΤΕ τύπωσε το x.

Να και ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε δυο οποιουσδήποτε αριθμούς x και y και ο υπολογιστής θα βρίσκει και θα τυπώνει το μεγαλύτερο.

```
10 INPUT x                    (↵)
20 INPUT y                    (↵)
30 IF x > y THEN GO TO 60     (↵)
40 PRINT y                    (↵)
50 GO TO 70                   (↵)
60 PRINT x                    (↵)
70 END                        (↵)
```

Προσοχή:

Η γραμμή 30 λέει:

Αν οι τιμές των x και y που δώσαμε στις γραμμές 10 και 20 επαληθεύουν τη σχέση x > y τότε ο υπολογιστής θα συνεχίσει και θα εκτελέσει την εντολή που υπάρχει μετά το THEN- δηλαδή θα πάει στη γραμμή 60 και θα τυπώσει το x.

Αν οι τιμές των x και y όμως δεν επαληθεύουν τη σχέση x > y τότε ο υπολογιστής θα αγνοήσει το THEN και θα προχωρήσει στην αμέσως επόμενη γραμμή δηλαδή θα τυπώσει το y.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που όταν θα δίνουμε αριθμό μικρότερο του 10 θα τυπώνει τη λέξη «κόκκινο» αλλιώς θα τυπώνει τη λέξη «μαύρο».

2. Αν οι πρώτες 100 μονάδες χρεώνονται από τον ΟΤΕ 10 δρχ. και οι υπόλοιπες 15 δρχ., φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε τις μονάδες που καταναλώσαμε και ο υπολογιστής θα υπολογίζει πόσο πρέπει να πληρώσουμε.

BASIC 7

Έστω Α, Β, Γ οι πλευρές ενός τριγώνου και μάλιστα Α μεγαλύτερη από τις άλλες δύο.
Αν $Α^2 = Β^2 + Γ^2$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.
Αν $Α^2 > Β^2 + Γ^2$ τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο στο Α.
Αν $Α^2 < Β^2 + Γ^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο στο Α.
Με χρήση των παραπάνω έχουμε το ακόλουθο πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε τις πλευρές του τριγώνου (προσοχή στο Α η μεγαλύτερη) και ο υπολογιστής θα βρίσκει και θα τυπώνει τι είδους τρίγωνο είναι.

10 REM ΕΙΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (↵)
20 REM Α>Β ΚΑΙ Α>Γ (↵)
30 INPUT Α (↵)
40 INPUT Β (↵)
50 INPUT Γ (↵)
60 LET $K=B^2+Γ^2$ (↵)
70 IF $K=A^2$ THEN GO TO 100 (↵)
80 IF $K>A^2$ THEN GO TO 120 (↵)
90 IF $K<A^2$ THEN GO TO 140 (↵)
100 PRINT «ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ» (↵)
110 GO TO 150 (↵)
120 PRINT «ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΙΝΑΙ ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ» (↵)
130 GO TO 150 (↵)
140 PRINT «ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΙΝΑΙ ΟΞΥΓΩΝΙΟ» (↵)
150 END (↵)

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε το πρόγραμμα στον υπολογιστή σας και ανακαλύψτε τι είδους τρίγωνα είναι τα παρακάτω:
α) 3 cm, 4 cm, 5 cm, β) 5 cm, 6 cm, 7 cm, γ) 7 cm, 12 cm, 13 cm

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Τριγωνομετρία

4.1 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι λέγεται λόγος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ; Πώς συμβολίζεται και τι εκφράζει;

1. Λόγος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται ο λόγος (πηλίκο) των μηκών τους και συμβολίζεται με $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$.

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων εκφράζει πόσες φορές το ένα από αυτά είναι μεγαλύτερο από το άλλο.

<u>Παρατήρηση:</u> Ο λόγος $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ είναι καθαρός αριθμός και δεν εξαρτάται από τη μονάδα με την οποία θα μετρηθούν τα ευθύγραμμα τμήματα, αρκεί αυτά να έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Π. χ. Αν ΑΒ = 5 cm και ΓΔ = 3 cm, τότε:

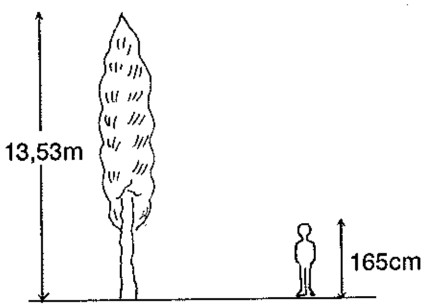
$$\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{5\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \frac{5}{3}$$

2. Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα;

2. Δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης, μπορούμε να τα συγκρίνουμε είτε υπολογίζοντας τη διαφορά των μηκών τους, οπότε βρίσκουμε πόσες μονάδες μήκους το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο, είτε υπολογίζοντας το λόγο τους. Αν ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, τότε μεγαλύτερο είναι το τμήμα που βρίσκεται στον αριθμητή.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί πόσες φορές το ύψος του δένδρου είναι μεγαλύτερο από το ύψος του ανθρώπου.



Λύση

Παρατηρούμε ότι το ύψος του δένδρου έχει μετρηθεί με μονάδα μέτρησης το μέτρο (m), ενώ του ανθρώπου με εκατοστά (cm).
Για να κάνουμε τη σύγκριση μετατρέπουμε τα (cm) σε (m) ή αντίστροφα.
Έτσι έχουμε:
165 cm = 165/100 m = 1,65 m. Οπότε:

$$\frac{\text{ύψος δένδρου}}{\text{ύψος ανθρώπου}} = \frac{13{,}53}{1{,}65} = 8{,}2$$

Άρα το ύψος του δένδρου είναι 8,2 φορές μεγαλύτερο από το ύψος του ανθρώπου.

2. Η απόσταση ΑΚ (Αθήνα - Κομοτηνή) είναι τριπλάσια από την απόσταση ΑΣ (Αθήνα - Σπάρτη). Να βρείτε το λόγο ΑΚ/ΑΣ.

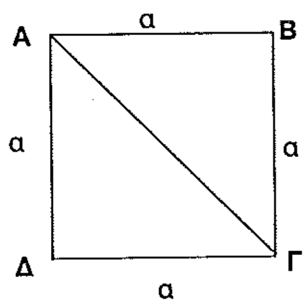
Λύση

Αν x είναι η απόσταση ΑΣ, τότε η απόσταση ΑΚ είναι 3x. Οπότε:

$$\frac{ΑΚ}{ΑΣ} = \frac{3x}{x} = 3$$

3. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α = 5 cm. Να βρείτε το λόγο της διαγωνίου του προς την πλευρά του.

Λύση



Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε (Πυθαγόρειο θεώρημα):

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ ή

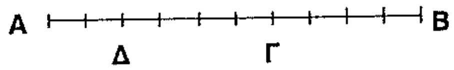
$ΑΓ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2$ άρα

$$ΑΓ = \sqrt{2α^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{50} \approx 7 \text{ cm}.$$

Οπότε: $\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

4. Στο σχήμα, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί σε δέκα ίσα τμήματα. Να υπολογίσετε τους λόγους:

$$\frac{ΑΒ}{ΓΒ}, \frac{ΑΔ}{ΑΒ}, \frac{ΓΔ}{ΓΒ}, \frac{ΑΔ}{ΑΓ}, \frac{ΓΒ}{ΒΓ} \text{ και } \frac{ΑΔ}{ΒΔ}.$$



Λύση

$\frac{AB}{ΓB} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, $\frac{AΔ}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$,

$\frac{ΓΔ}{ΓB} = \frac{4}{4} = 1$, $\frac{AΔ}{AΓ} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$\frac{ΓB}{BΓ} = \frac{4}{4} = 1$, $\frac{AΔ}{BΔ} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

5. Ένα ευθύγραμμο τμήμα α είναι τριπλάσιο από ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα β. Να βρείτε τους λόγους:

$\frac{α}{β}, \frac{β}{α}, \frac{α+β}{α}, \frac{α}{α-β}$

Λύση

Έστω x το μήκος του β τότε β = x και α = 3x. Οι ζητούμενοι λόγοι θα είναι:

$\frac{α}{β} = \frac{3x}{x} = 3$,

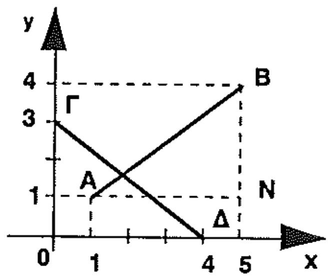
$\frac{β}{α} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$,

$\frac{α+β}{α} = \frac{3x+x}{3x} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$ και

$\frac{α}{α-β} = \frac{3x}{3x-x} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$

6. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία Α (1, 1), Β(5, 4), Γ (0, 3) και Δ (4, 0). Να βρείτε το λόγο ΑΒ/ΓΔ.

Λύση



Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα σημειώνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις αποστάσεις ΑΒ και ΓΔ. Από το σχήμα βλέπουμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΝΒ, είναι: ΑΝ = 4 και ΒΝ = 3. Επομένως:

$AB^2 = AN^2 + NB^2$ ή

$AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ άρα:

$AB = \sqrt{25} = 5$

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΟΔ, είναι: ΟΔ = 4 και ΟΓ = 3. Επομένως: $ΓΔ^2 = OΔ^2 + OΓ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Άρα

$ΓΔ = \sqrt{25} = 5$

Οπότε ο ζητούμενος λόγος είναι:

$\frac{AB}{ΓΔ} = \frac{5}{5} = 1$

7. Έστω δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ώστε ΑΒ/ΓΔ = κ/λ όπου τα κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και λ ≠ 0. Να αποδείξετε ότι αν ΑΒ = ΓΔ, θα είναι και κ=λ, ενώ αν ΑΒ>ΓΔ, θα είναι κ > λ.

Λύση

Έστω $\frac{AB}{ΓΔ} = \frac{κ}{λ}$ όπου τα κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί, και λ ≠ 0. Τότε $AB = \frac{κ}{λ}ΓΔ$.

Αν ΑΒ = ΓΔ τότε ο αριθμός $\frac{κ}{λ} = 1$ ή κ = λ.

Αν ΑΒ > ΓΔ τότε ο λόγος τους $\frac{AB}{ΓΔ}$ είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, δηλαδή

$\frac{AB}{ΓΔ} > 1$ ή $\frac{κ}{λ} > 1$ άρα και κ > λ.

8. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα α και β με α = 5 cm και β = 10 cm. Αν τα μήκη τους τριπλασιαστούν, πώς μεταβάλλεται ο λόγος α/β;

Λύση

Έστω α = 5 cm και β = 10 cm, τότε:

$\frac{α}{β} = \frac{5\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Αν τριπλασιαστούν τα μήκη τους τότε α = 3 · 5 cm = 15 cm

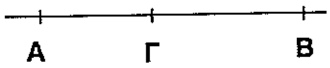
$\beta = 3 \cdot 10$ cm $= 30$ cm. Οπότε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{15 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος των τμημάτων παραμένει σταθερός.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Γ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{3}{4}$. Αν ΒΓ = 8 cm, να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ.



Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{3}{4}$ άρα $ΑΓ = \frac{3}{4}ΓΒ$.

Επειδή το μήκος του ΓΒ = 8 cm, τότε ....

2. Αν α, β δύο ευθύγραμμα τμήματα ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{5\alpha + 2\beta}{5\alpha - 4\beta}$

Λύση

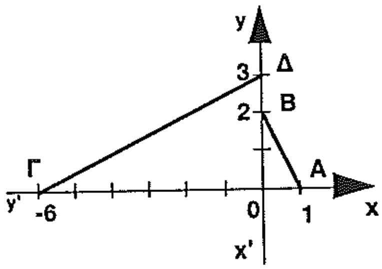
Εφόσον $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$, θα είναι: $\alpha = \frac{7}{5}\beta$. Αν x είναι το μήκος του β τότε το μήκος του β τότε το μήκος του α θα είναι: $\frac{7}{5}x$.

Έτσι έχουμε: $\frac{5\alpha + 2\beta}{5\alpha - 4\beta} = \frac{5 \cdot \frac{7}{5}x + 2x}{5 \cdot \frac{7}{5}x - 4x} =$

$= \dots$

3. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή Ο να σημειώσετε τα σημεία Α (1, 0), Β (0, 2), Γ (- 6, 0) και Δ (0, 3). Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$.

Λύση

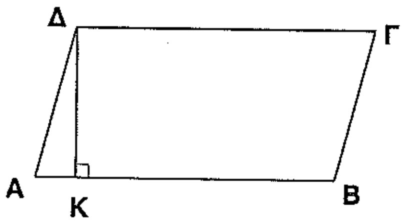


Η απόσταση του σημείου Γ από την αρχή Ο είναι ΟΓ = |- 6| = 6. Όμοια ΟΑ = 1, ΟΒ = 2 και ΟΔ = 3.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΔ είναι:
$ΓΔ^2 = ΟΓ^2 + ΟΔ^2$ ή
$ΓΔ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$ άρα

$ΓΔ = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι ....

4. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το ύψος ΔΚ είναι το μισό της πλευράς ΑΒ. Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι Ε = 18 cm² και η περίμετρός του είναι Π = 2 dm, να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$ και $\frac{ΔΚ}{ΑΔ}$.



Λύση

Επειδή το ύψος ΔΚ είναι το μισό της πλευράς ΑΒ, θα ισχύει:

$$\frac{ΔΚ}{ΑΒ} = \frac{1}{2} \text{ ή } ΑΒ = 2\,ΔΚ$$

Δηλαδή η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια από το ύψος ΔΚ. Αν x είναι το μήκος του ΔΚ τότε ΑΒ = 2x. Το εμβαδόν Ε δίνεται από την σχέση:

$Ε = ΑΒ \cdot ΔΚ$ ή $18 = 2x \cdot x$ οπότε:

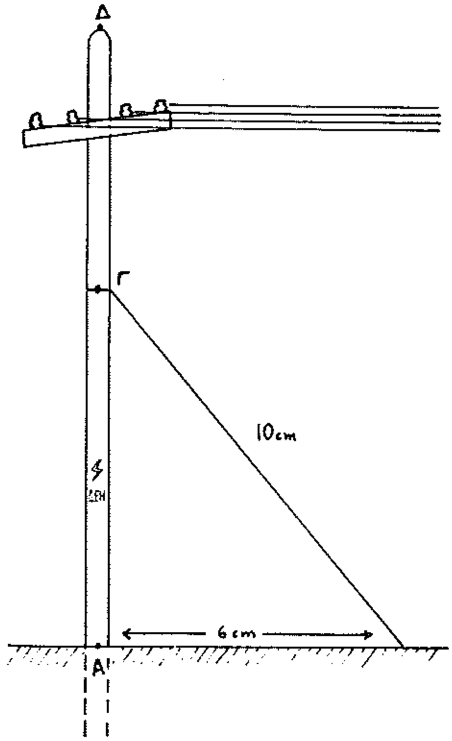
$2x^2 = 18$ ή $x^2 = 18/2$ ή $x^2 = 9$ ή

$x = \sqrt{9}$ ή $x = 3$ cm

Άρα ΔΚ = 3 cm και ΑΒ = 6 cm. Η περίμετρος Π δίνεται ....

5. Οι τεχνικοί της ΔΕΗ για να στηρίξουν μία κολώνα τη βύθισαν στη γη 1,8 m και στη συνέχεια την έδεσαν με ένα συρματόσχοινο μήκους ΒΓ = 10 m. Αν η απόσταση ΑΒ = 6 m και ΓΔ/ΑΓ = 1/4 να υπολογίσετε το μήκος της κολώνας.

Λύση



Με τη βοήθεια του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε το μήκος του τμήματος ΑΓ. Δηλαδή:

$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2$ ή $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$ ή

$ΑΓ^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

Άρα ΑΓ = 8 m.

Όμως:

$$\frac{ΓΔ}{ΑΓ} = \frac{1}{4} \text{ άρα } ΓΔ = \frac{1}{4}\,ΑΓ.$$

Οπότε ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ο πύργος του Eiffel έχει ύψος 316,4 m. Να μετρήσετε το ύψος σας και να υπολογίσετε:

α) Πόσα μέτρα ψηλότερος είναι ο πύργος και

β) Πόσες φορές το ύψος του είναι μεγαλύτερο από το δικό σας.

2. Η διάμετρος μίας μπάλας ποδοσφαίρου είναι 30 cm, ενώ η ακτίνα

της Γης είναι $6,378 \cdot 10^6$ m. Να βρείτε πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της Γης από την ακτίνα της μπάλας.

3. Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, (γωνία Α = 90°) με ΑΒ = 16 cm. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ στην πλευρά ΑΓ. Αν ΑΔ = 12 cm να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΒΓ}{ΒΔ}$.

4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία Α (2, 2), Β (10, 8), και Γ (- 8, - 6). Αν Ο η αρχή των αξόνων να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΒ}{ΟΓ}$.

5. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 12 cm και ένα σημείο Γ μεταξύ των σημείων Α και Β ώστε $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{5}{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ.

6. Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά μήκους α. Να υπολογίσετε το λόγο της διαγωνίου ΒΔ προς την πλευρά α.
(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα:

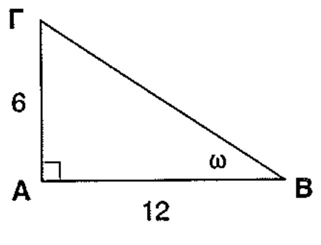
$\sqrt{α^2} = (\sqrt{α})^2 = α$)

4.2 Εφαπτομένη γωνίας - Κλίση ευθείας

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και πώς συμβολίζεται;



Απαντήσεις

1. Εφαπτομένη της οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι στην ω κάθετης πλευράς προς την προσκείμενή της κάθετη πλευρά και συμβολίζεται με **εφω**. Δηλαδή:

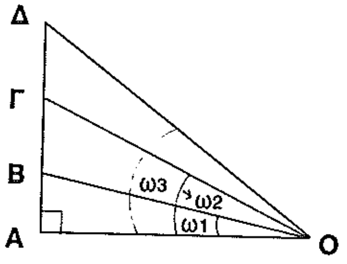
$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{6}{12} = 0,5$$

__Παρατήρηση:__ Αν η γωνία ω είναι ορθή τότε **δεν ορίζεται** η εφω.

2. Όταν η οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου μεταβάλλεται (αυξάνεται ή ελαττώνεται) τότε πώς μεταβάλλεται η εφω;



2. Όταν αυξάνεται μία οξεία γωνία τότε αυξάνεται και η εφαπτομένη της και αντιστρόφως. Πράγματι:

Αν ονομάσουμε $\widehat{AOB} = \omega_1$, $\widehat{AO\Gamma} = \omega_2$, $\widehat{AO\Delta} = \omega_3$ τότε από το σχήμα έχουμε ότι: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{AB}{OA}$, $\varepsilon\varphi\,\omega_2 = \dfrac{A\Gamma}{OA}$, $\varepsilon\varphi\,\omega_3 = \dfrac{A\Delta}{OA}$

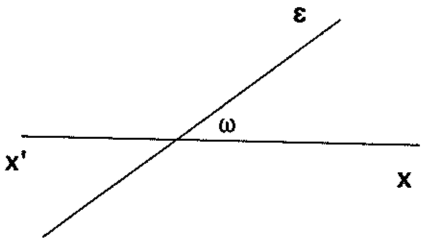
Επειδή $AB < A\Gamma < A\Delta$ θα είναι και

$\dfrac{AB}{OA} < \dfrac{A\Gamma}{OA} < \dfrac{A\Delta}{OA}$ επομένως

$\varepsilon\varphi\omega_1 < \varepsilon\varphi\omega_2 < \varepsilon\varphi\omega_3$.

Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε αν η οξεία γωνία ελαττώνεται, δηλαδή όταν ελαττώνεται η ω ελαττώνεται και η εφαπτομένη της.

3. Τι ονομάζεται κλίση ευθείας ε;



3. Κλίση της ευθείας ε ονομάζεται η εφαπτομένη της οξείας γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με την οριζόντια διεύθυνση.

Αν η ευθεία ε είναι **κάθετη** στην οριζόντια διεύθυνση, τότε **δεν ορίζεται** η εφω.

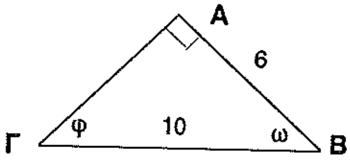
<u>Παρατήρηση:</u> Αν η διεύθυνση ενός ανηφορικού δρόμου σχηματίζει γωνία ω με την οριζόντια διεύθυνση, τότε η εφω λέγεται **κλίση του δρόμου.**

Η κλίση του δρόμου εκφράζεται και επί τοις εκατό (%) και μας δείχνει το ύψος που ανεβαίνουμε σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης.

Π.χ. Αν η κλίση ενός ανηφορικού δρόμου είναι 20 % ή 20/100 = 0,2 αυτό σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 20 m ύψος.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των οξειών γωνιών στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους. Τι παρατηρείτε;



Λύση

Με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την κάθετη πλευρά ΑΓ.

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή

$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$ άρα

$ΑΓ^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$.

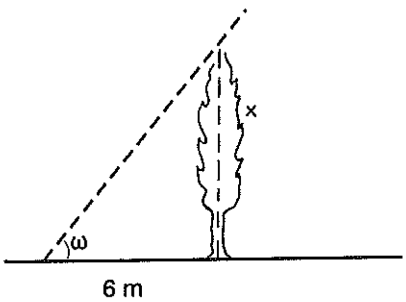
Τελικά ΑΓ = 8. Οπότε:

$$εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ και } εφφ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Παρατηρούμε ότι εφφ είναι ο αντίστροφος αριθμός της εφω δηλαδή:

$$εφφ = \frac{1}{εφω}.$$

2. Όταν οι ακτίνες του ήλιου έχουν κλίση 2,5 το δέντρο του σχήματος ρίχνει σκιά μήκους 6 m. Πόσο είναι το ύψος του δέντρου;



Λύση

Έστω x το ύψος του δέντρου. Η κλίση της ακτίνας του ήλιου είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζεται από την ακτίνα και την οριζόντια διεύθυνση. Έτσι έχουμε:

εφω = 2,5. Όμως:

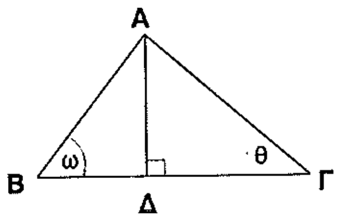
εφω = x/6 ή 2,5 = x/6 . Άρα:

$x = 2,5 \cdot 6 = 15$.

Επομένως το ύψος x του δέντρου είναι 15 m.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του ως προς την πλευρά ΒΓ. Αν εφω = 0,6, ΒΔ = 5 cm και ΑΓ = 0,5 dm, να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας θ.

Λύση



Μετατρέπουμε τα 0,5 dm σε cm. Έτσι έχουμε: ΑΓ = 0,5 dm = 5 cm.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΑ ισχύει:

$$εφθ = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα άγνωστα τμήματα ΑΔ και ΔΓ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΑ έχουμε:

$$εφω = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \text{ ή } 0,6 = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \text{ ή}$$

$ΑΔ = 0,6 \cdot ΒΔ$ άρα

$ΑΔ = 0,6 \cdot 5 = 3$ cm

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΑ έχουμε διαδοχικά:

$ΑΓ^2 = ΓΔ^2 + ΑΔ^2$ ή

$5^2 = ΓΔ^2 + 3^2$ ή

$25 = ΓΔ^2 + 9$ ή

$ΓΔ^2 = 25 - 9 = 16$ ή

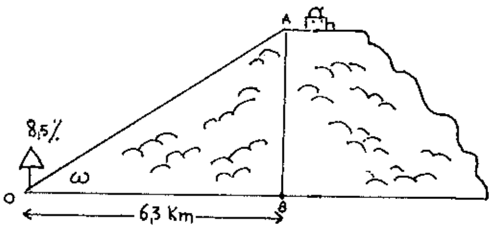
ΓΔ = 4

Επομένως:

$$εφθ = \frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{3}{4} = 0,75$$

4. Για καλύτερη ορατότητα το αστεροσκοπείο κατασκευάστηκε στην κορυφή ενός λόφου. Αν η κλίση του δρόμου που οδηγεί στο αστεροσκοπείο είναι 8,5 % και η οριζόντια απόστασή του από την αρχή του ανηφο-

ρικού δρόμου είναι 6,3 Km να υπολογίσετε το ύψος του λόφου.



Λύση

Η κλίση του ανηφορικού δρόμου είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω. Όμως:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} \;\; ή \;\; \frac{8{,}5}{100} = \frac{AB}{OB} \;\; ή \;\; 0{,}085 = \frac{AB}{OB}$$

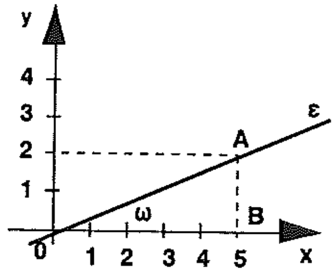
ή $AB = 0{,}085 \cdot OB$ άρα

$AB = 0{,}085 \cdot 6{,}3 = 0{,}5355$ Km ή

$AB = 0{,}5355 \cdot 1.000 = 535{,}5$ m.

5. Να σχεδιάσετε την ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και από το σημείο Α (5, 2) και να βρείτε την κλίση της.

Λύση



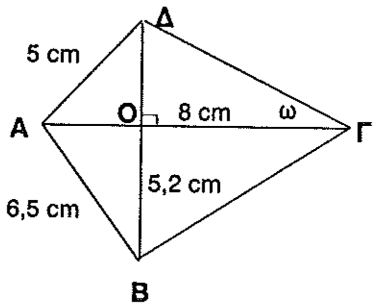
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ έχουμε:

$$\text{Κλίση της ΟΑ} = \varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί η εφω με προσέγγιση εκατοστού. Δίνεται: ΟΓ = 8 cm, ΑΔ = 5 cm, ΟΒ = 5,2 cm και ΑΒ = 6,5 cm.

Λύση



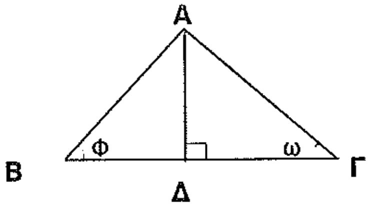
Η εφαπτομένη της γωνίας ω δίνεται από τη σχέση εφω = ΟΔ/ΟΓ . Όπου ΟΓ = 8 cm. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το άγνωστο τμήμα ΟΔ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε διαδοχικά:

$AB^2 = OA^2 + OB^2$

$6{,}5^2 = OA^2 + 5{,}2^2$ ....

2. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$



Λύση

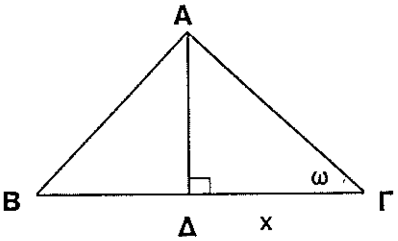
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$εφω = \frac{ΑΔ}{ΓΔ}$.

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ....

3. Το εμβαδό Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ με ΒΓ = 18 cm είναι 54 cm². Φέρουμε το ύψος ΑΔ στην πλευρά ΒΓ. Αν $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{1}{3}$ τότε να υπολογίσετε την εφω.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι:

$εφω = \frac{ΑΔ}{ΓΔ}$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τα άγνωστα τμήματα ΑΔ και ΓΔ. Έστω x το μήκος του ΓΔ δηλ. ΓΔ = x. Από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$\frac{ΒΔ}{ΓΔ} = \frac{1}{3}$ ή $ΒΔ = \frac{1}{3}ΓΔ$ άρα $ΒΔ = \frac{1}{3}x$

Όμως: ΒΔ + ΔΓ = ΒΓ. Οπότε:

$\frac{1}{3}x + x = 18$ ή $\frac{1}{3}x + \frac{3}{3}x = 18$ ή

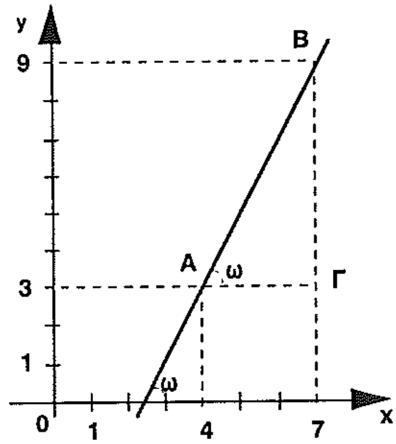
$\frac{4}{3}x = 18$ ή $4x = 18 \cdot 3$ ή $4x = 54$

ή $x = \frac{54}{4} = 13,5$

Άρα: ΓΔ = 13,5 cm. Μένει να υπολογίσουμε την ΑΔ ....

4. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία Α (4, 3) και Β (7, 9). Να σχεδιάσετε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία αυτή και τον οριζόντιο άξονα x'x να υπολογίσετε την εφω. (Η εφω είναι η κλίση της ευθείας ΑΒ).

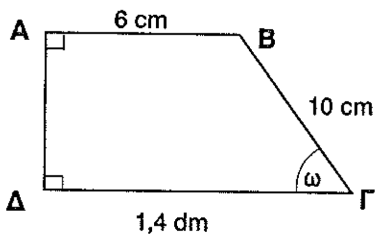
Λύση



Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον x'x τότε η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με την ω ως εντός εκτός και επί τα αυτά. Συνεπώς $εφω = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$, όπου ΑΓ = ...

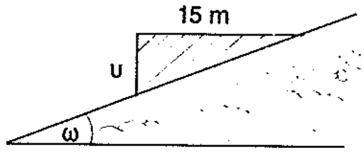
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ οι γωνίες Α και Β είναι 90°. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας ω.



2. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να βρείτε τα σημεία Α (- 3, 2) και Β (4, 5). Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την ευθεία που περνάει από τα σημεία αυτά και να βρείτε την κλίση της (ως προς τον οριζόντιο άξονα).

3. Κάποιος αγόρασε ένα οικόπεδο στην πλαγιά ενός λόφου η οποία έχει κλίση 12 %. Για βάση του σπιτιού που πρόκειται να κτίσει κατασκεύασε μία οριζόντια πλατφόρμα από μπετόν αρμέ η οποία έχει μήκος 15 m. Να βρείτε το μέγιστο ύψος υ της πλατφόρμας.



4. Από το σημείο Α ενός κύκλου (Ο, R) να σχεδιάσετε την εφαπτομένη ευθεία x'x του κύκλου. Στην ημιευθεία Αx να πάρετε τμήμα ΑΒ = 2R. Στη συνέχεια να φέρετε την ΒΟ. Αν η γωνία ΑΒΟ είναι ίση με την ω, να υπολογίσετε την εφω.

5. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 27 cm και η βάση του ΒΓ = 12 cm. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της οξείας γωνίας Β.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 90° να αποδείξετε ότι: εφΒ · εφΓ = 1.

4.3 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

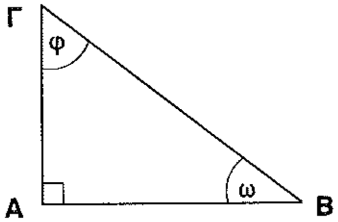
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται ημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και πώς συμβολίζεται;

Απαντήσεις

1. Ημίτονο της οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι στην ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου και συμβολίζεται με ημω.



Π.χ.

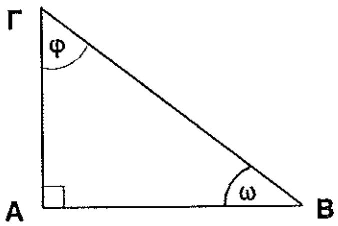
$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

Όμοια: $ημφ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο λόγος αυτός είναι **πάντοτε** μικρότερος από τη μονάδα γιατί το μήκος της υποτείνουσας είναι μεγαλύτερο από το μήκος της κάθετης πλευράς. Άρα είναι: **$0 < ημω < 1$.**

2. Τι ονομάζεται συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και πώς συμβολίζεται;

2. Συνημίτονο της οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης στην ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου και συμβολίζεται με **συνω**.



Π.χ.

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

Όμοια: $συνφ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$

<u>Παρατήρηση:</u> Και εδώ ισχύει η ανισότητα **$0 < συνω < 1$** για τον ίδιο λόγο που αναφέραμε προηγουμένως.

3. Πώς μεταβάλλεται το ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν μεταβάλλεται η γωνία;

3. Όταν αυξάνεται μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου αυξάνεται το ημίτονό της και αντιστρόφως.

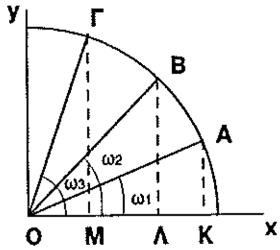
Πράγματι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

$ω_1 < ω_2 < ω_3$ και $ΑΚ < ΒΛ < ΓΜ$

Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R$ θα έχουμε και:

$$\frac{ΑΚ}{ΟΑ} < \frac{ΒΛ}{ΟΒ} < \frac{ΓΜ}{ΟΓ}$$

δηλαδή: $ημω_1 < ημω_2 < ημω_3$.



4. Πώς μεταβάλλεται το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου όταν μεταβάλλεται η γωνία;

4. Όταν αυξάνεται μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου ελαττώνεται το συνημίτονό της και αντιστρόφως.
Από το παραπάνω σχήμα έχουμε ότι: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ και ΟΚ > ΟΛ > ΟΜ.
Οπότε:

$$\frac{ΟΚ}{ΟΑ} > \frac{ΟΛ}{ΟΒ} > \frac{ΟΜ}{ΟΓ}, (ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R)$$

δηλαδή: $συν\omega_1 > συν\omega_2 > συν\omega_3$.

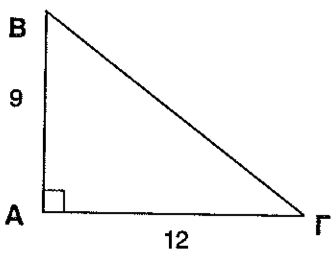
Παρατηρήσεις:

1. Το **ημω**, το **συνω** και η **εφω** μιας οξείας γωνίας ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** της γωνίας ω.
2. Συνηθίζεται αντί των συμβολισμών $(ημω)^2$, $(συνω)^2$ και $(εφω)^2$ να χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί: **$ημ^2ω$, $συν^2ω$** και **$εφ^2ω$**. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε τις παρενθέσεις.
3. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί: ημω, συνω και εφω συμβολίζονται διεθνώς με: **sinω, cosω** και **tanω** από τις λατινικές ονομασίες sine, cosine και tangent του ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης αντίστοιχα.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη των οξειών γωνιών Β και Γ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, (Α = 90°), όταν ΑΒ = 9 cm και ΑΓ = 12 cm.

Λύση



Με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε πρώτα την υποτείνουσα ΒΓ.
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή

$ΒΓ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

Οπότε: $ΒΓ = \sqrt{225} = 15$ cm.

Επομένως: $ημΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$,

$συνΒ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 18$ και

$εφΒ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

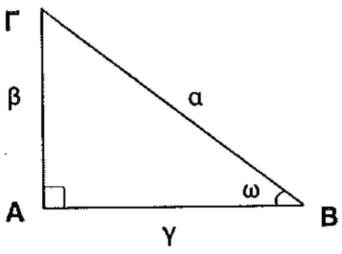
Όμοια: $ημΓ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$,

$συνΓ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ και

$εφΓ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

2. Να αποδείξετε ότι αν ω είναι μία οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου τότε $ημ^2ω + συν^2ω = 1$.

Λύση



Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A} = 90°$ και $\widehat{B} = \widehat{\omega}$, τότε:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} \quad (1)$$

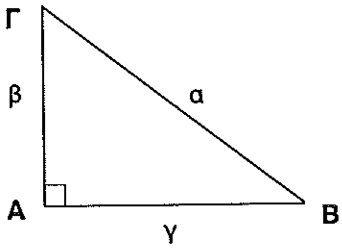
Όμως: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα). Επομένως:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

(θεμελιώδης νόμος της τριγωνομετρίας).

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90°$ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$.

Λύση



Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A} = 90°$.

Είναι: $\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \sigma\upsilon\nu^2 B = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 =$

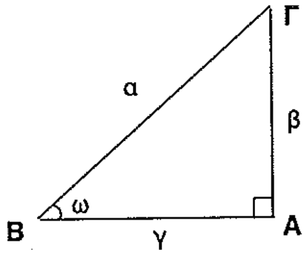
$$= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

αφού από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

4. Αν ω είναι μία οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Λύση



Έστω ΑΒΓ το ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{A} = 90°$. Υποθέτουμε ότι: $\widehat{B} = \widehat{\omega}$, τότε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \quad (1)$$

Όμως: $\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$. Οπότε:

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Η σχέση αυτή θα μας χρησιμεύσει για τη λύση άλλων ασκήσεων παρακάτω.

5. Αν ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου και $\eta\mu\omega = 3/5$ να βρείτε το συνω και την εφω.

Λύση

Από το θεμελιώδη νόμο της τριγωνομετρίας έχουμε:

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ ή

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ ή $\frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Οπότε: $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{1}{1} - \frac{9}{25} =$

$$= \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

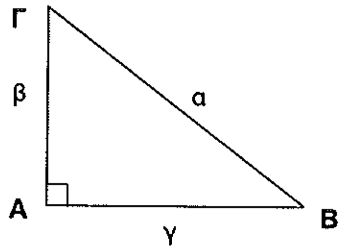
Τελικά: $συνω = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

και $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90° να αποδείξετε ότι:

$$εφB \cdot ημB = \frac{β^2}{αγ}$$

Λύση



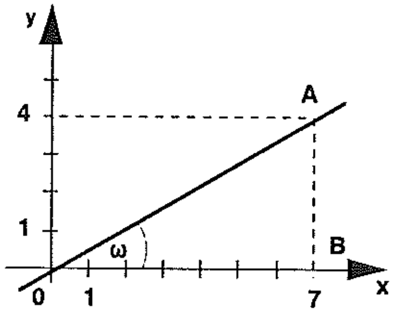
$εφB = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{β}{γ}$ και $ημB = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{β}{α}$

Οπότε: $εφB \cdot ημB = \frac{β}{γ} \cdot \frac{β}{α} = \frac{β \cdot β}{γ \cdot α} = \frac{β^2}{αγ}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή Ο να σημειώσετε το σημείο Α (7, 4). Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της οξείας γωνίας ω που σχηματίζεται από τον άξονα x'x και την ευθεία ΟΑ.

Λύση



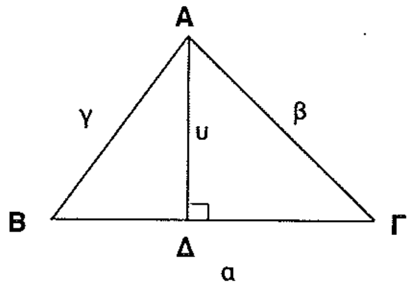
Το τρίγωνο ΟΑΒ με Ο (0, 0) Α (7, 4) και Β (7, 0) είναι ορθογώνιο.
Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος υπολογίζουμε την υποτείνουσα ΟΑ.

$ΟΑ^2 = ΟΒ^2 + ΑΒ^2 = 7^2 + 4^2 =$
$= 49 + 16 = 65$

Οπότε ΟΑ = ...

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = γ, ΑΓ = β και ΒΓ = α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}\, α \cdot β \cdot ημΓ \text{ ή } E = \frac{1}{2}\, α \cdot γ \cdot ημB$$

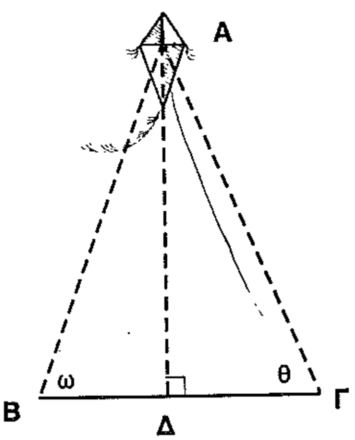


Λύση

Γνωρίζουμε ότι:
Ε = 1/2 (βάση) · (ύψος).
Πρέπει λοιπόν να βρούμε το ύψος ΑΔ = υ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$ημΓ = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{υ}{β}$ ή υ = ...

3. Αν η απόσταση ΒΓ είναι 76 cm και εφω = 2,7, εφθ = 3, να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ του χαρταετού.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι:

$$\text{εφω} = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \quad \text{ή} \quad 2{,}7 = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} \quad \text{οπότε}$$

$$ΒΔ = \frac{1}{2{,}7}\,ΑΔ = \frac{1}{\frac{27}{10}}\,ΑΔ = \frac{10}{27}\,ΑΔ \quad (1)$$

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει ότι:

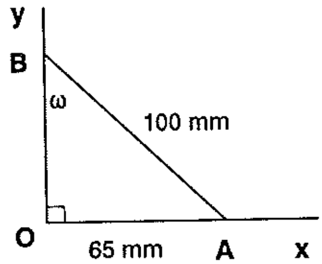
$$\text{εφθ} = \frac{ΑΔ}{ΓΔ} \quad \text{ή} \quad 3 = \frac{ΑΔ}{ΓΔ} \quad \text{οπότε} \quad ΓΔ = \frac{1}{3}\,ΑΔ \quad (2)$$

Όμως: ΒΔ + ΓΔ = 76 m.
Συνεπώς με αντικατάσταση από τις ισότητες (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{10}{27}\,ΑΔ + \frac{1}{3}\,ΑΔ = 76 \ldots\ldots$$

4. Να κατασκευάσετε την οξεία γωνία ω αν:
α) ημω = 0,65
β) εφω = 5/6.

Λύση



α) Κατασκευάζουμε μία ορθή γωνία xOy. Στην πλευρά Ox παίρνουμε το τμήμα ΟΑ = 65 mm. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τον κύκλο (Α, 100 mm) ο οποίος τέμνει την Oy στο Β. Η ζητούμενη γωνία ω είναι η ΟΒΑ. Πράγματι:

$$\text{ημ}B = \frac{OA}{BA} = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

β) ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας Β ενός ορθογωνίου τριγώνου εάν ΒΓ = 25 mm, ΑΓ = 1,5 cm και ΑΒ = 0,2 dm.

2. Αν θ είναι μία οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου και συνθ = 40/41 να υπολογίσετε το ημθ και την εφθ.

3. Αν ω είναι μία οξεία γωνία να αποδείξετε την ισότητα:

$$1 + \text{εφ}^2\omega = \frac{1}{\text{συν}^2\omega}$$

4. Δίνεται το σημείο Α (- 12, - 5). Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζει ο ημιάξονας Οx' και η ευθεία ΟΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

5. Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι Ε = 18 cm². Αν ΑΒ = 5 cm, ΑΓ = 10 cm και ΒΓ = 12 cm, να υπολογίσετε τα ημίτονα των γωνιών Β και Γ.

6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 90° οι δύο οξείες γωνίες Β και Γ είναι συμπληρωματικές. Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημΒ και συνΒ με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημΓ και συνΓ. Τι παρατηρείτε;

7. Να κατασκευάσετε την οξεία γωνία ω εάν είναι:

α) $ημω = \frac{5}{6}$, β) $συνω = \frac{2}{3}$, γ) $εφω = \frac{1}{4}$.

4.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 30°, 45° και 60°

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας ω;

1. Το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.**

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημω, συνω και εφω της οξείας γωνίας ω είναι πραγματικοί αριθμοί με: **0 < ημω < 1, 0 < συνω < 1** και **εφω > 0.**

2. Πώς υπολογίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45° και 60°;

2. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30°, 45° και 60° υπολογίζονται με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
Ο υπολογισμός τους γίνεται παρακάτω στις λυμένες ασκήσεις και καλό είναι τα αποτελέσματα αυτά να απομνημονευθούν για την ευκολότερη αντιμετώπιση των ασκήσεων. Για το σκοπό αυτό φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα:

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
εφω	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$	1	$\sqrt{3} = 1{,}732$

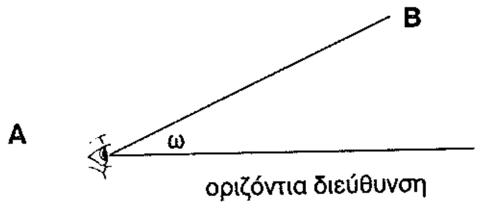
Μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα αυτόν με τη βοήθεια του μνημονικού κανόνα που ακολουθεί. Η γραμμή του **ημ** προκύπτει από τον τύπο:

$\frac{\sqrt{\kappa}}{2}$ για κ = 1, 2, 3

ενώ η γραμμή του συν προκύπτει απο τον ίδιο τύπο για κ = 3, 2, 1.
Η γραμμή της εφ. ω προκύπτει από τα αντίστοιχα πηλίκα ημω/συνω.

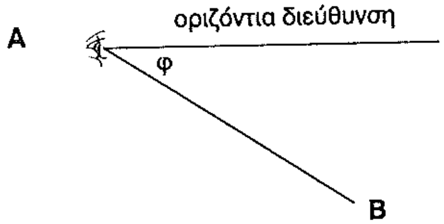
3. Τι εννοούμε λέγοντας γωνία ύψους;

3. Αν από ένα σημείο Α βλέπουμε ένα άλλο σημείο Β, που βρίσκεται ψηλότερα, τότε η γωνία ω που σχηματίζεται από την ευθεία ΑΒ και την οριζόντια ευθεία που περνά από το σημείο Α λέγεται **γωνία ύψους**.



4. Τι εννοούμε λέγοντας γωνία βάθους;

4. Αν από ένα σημείο Α βλέπουμε ένα άλλο σημείο Β, που βρίσκεται χαμηλότερα τότε η γωνία φ που σχηματίζεται από την ευθεία ΑΒ και την οριζόντια ευθεία που περνά από το σημείο Α λέγεται **γωνία βάθους**.



Τριγωνομετρικοί πίνακες

Για τη γρήγορη και σωστή αντιμετώπιση των τριγωνομετρικών προβλημάτων κατασκευάστηκαν πίνακες που δίνουν με προσέγγιση τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

των οξειών γωνιών από 1° έως 89°. Με τη βοήθεια των πινάκων αυτών μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ω ή αν γνωρίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό, να βρίσκουμε την αντίστοιχη οξεία γωνία.
Π.χ. Ζητάμε την εφ35°. Με τη βοήθεια του πίνακα βρίσκουμε ότι εφ35° = 0,7 ή αν ημω = 0,766 τότε ω = 50°.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

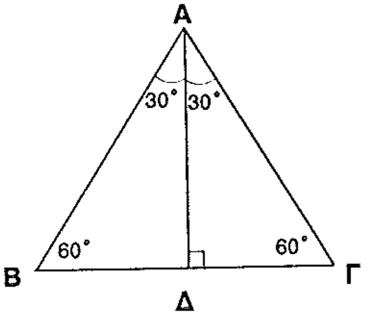
ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	33°	0,5446	0,8387	0,6494
2°	0,0349	0,9994	0,0349	34°	0,5592	0,8290	0,6745
3°	0,0523	0,9986	0,0524	35°	0,5736	0,8192	0,7002
4°	0,0698	0,9976	0,0699	36°	0,5878	0,8090	0,7265
5°	0,0872	0,9962	0,0875	37°	0,6018	0,7986	0,7536
6°	0,1045	0,9945	0,1051	38°	0,6157	0,7880	0,7813
7°	0,1219	0,9925	0,1228	39°	0,6293	0,7771	0,8098
8°	0,1392	0,9903	0,1405	40°	0,6428	0,7660	0,8391
9°	0,1564	0,9877	0,1584	41°	0,6561	0,7547	0,8693
10°	0,1736	0,9848	0,1763	42°	0,6691	0,7431	0,9004
11°	0,1908	0,9816	0,1944	43°	0,6820	0,7314	0,9325
12°	0,2079	0,9781	0,2126	44°	0,6947	0,7193	0,9657
13°	0,2250	0,9744	0,2309	45°	0,7071	0,7071	1,000
14°	0,2419	0,9703	0,2493	46°	0,7193	0,6947	1,036
15°	0,2588	0,9659	0,2679	47°	0,7314	0,6820	1,072
16°	0,2756	0,9613	0,2867	48°	0,7431	0,6691	1,111
17°	0,2924	0,9563	0,3057	49°	0,7547	0,6561	1,150
18°	0,3090	0,9511	0,3249	50°	0,7660	0,6428	1,192
19°	0,3256	0,9455	0,3443	51°	0,7771	0,6293	1,235
20°	0,3420	0,9397	0,3640	52°	0,7880	0,6157	1,280
21°	0,3584	0,9336	0,3839	53°	0,7986	0,6018	1,327
22°	0,3746	0,9272	0,4040	54°	0,8090	0,5878	1,376
23°	0,3907	0,9205	0,4245	55°	0,8192	0,5736	1,428
24°	0,4067	0,9135	0,4452	56°	0,8290	0,5592	1,483
25°	0,4226	0,9063	0,4663	57°	0,8387	0,5446	1,540
26°	0,4384	0,8988	0,4877	58°	0,8480	0,5299	1,600
27°	0,4540	0,8910	0,5095	59°	0,8572	0,5150	1,664
28°	0,4695	0,8829	0,5317	60°	0,8660	0,5000	1,732
29°	0,4848	0,8746	0,5543	61°	0,8746	0,4848	1,804
30°	0,5000	0,8660	0,5774	62°	0,8829	0,4695	1,881
31°	0,5150	0,8572	0,6009	63°	0,8910	0,4540	1,963
32°	0,5299	0,8480	0,6249	64°	0,8988	0,4384	2,050

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει ολοκληρωμένος πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 30° και της γωνίας 60°.

Λύση



Σχεδιάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ίση με 2 cm και φέρουμε το ύψος ΑΔ στην πλευρά ΒΓ. Ως γνωστόν το ύψος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και διάμεσος της πλευράς ΒΓ. Έτσι έχουμε:

$\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΓΑΔ} = 30°$ και $ΒΔ = ΓΔ = 1$ cm.

Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:
$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$ ή
$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

Τελικά: $ΑΔ = \sqrt{3}$ cm. Οπότε:

$ημ30° = \dfrac{ΒΔ}{ΑΒ} = \dfrac{1}{2}$, $συν30° = \dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

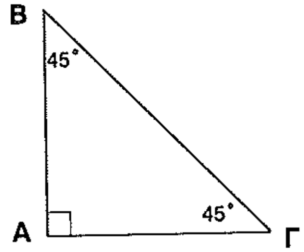
και $εφ30° = \dfrac{ΒΔ}{ΑΔ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$ημ60° = \dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $συν60° = \dfrac{ΒΔ}{ΑΒ} = \dfrac{1}{2}$

και $εφ60° = \dfrac{ΑΔ}{ΒΔ} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 45°.

Λύση



Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1. Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος υπολογίζουμε την υποτείνουσα ΒΓ. Έτσι έχουμε:
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Τελικά: $ΒΓ = \sqrt{2}$ cm. Οπότε:

$ημ45° = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$συν45° = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$εφ45° = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} = \dfrac{1}{1} = 1$.

3. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία x η οποία επαληθεύει τις εξισώσεις:

α) $3\,εφx = \sqrt{3}$ β) $2\,ημx - \sqrt{2} = 0$

Λύση

α) $3\,εφx = \sqrt{3}$ ή $\dfrac{3\,εφx}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή

$εφx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $\hat{x} = 30°$ γιατί

$εφ30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

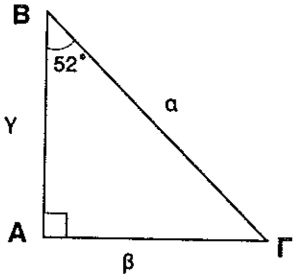
β) $2ημx - \sqrt{2} = 0$ ή $2ημx = \sqrt{2}$ ή

$\frac{2ημx}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα

$\hat{x} = 45°$ γιατί $ημ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 90°, β = 25,216 m και γωνία Β = 52°. Να υπολογίσετε την υποτείνουσα α, την κάθετη πλευρά γ καθώς και την οξεία γωνία Γ.

Λύση



Ισχύει: ημΒ = ημ52° = 0,788

Όμως $ημΒ = \frac{β}{α}$ οπότε: $α = \frac{β}{ημΒ} = \frac{25,216}{0,788} = 32$ m.

Γνωρίζουμε ότι στα ορθογώνια τρίγωνα το άθροισμα των οξειών γωνιών του είναι ίσο με 90°. Οπότε:

$\hat{B} + \hat{Γ} = 90°$ άρα $\hat{Γ} = 90° - \hat{B}$ ή

$\hat{Γ} = 90° - 52° = 38°$

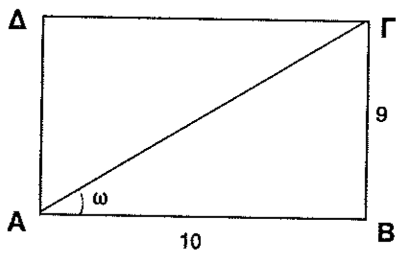
Ισχύει: ημΓ = ημ38 = 0,6157.

Όμως: ημΓ = γ/α οπότε:

γ = α · ημΓ = 32 · 0,6157 = 19,7 m.

5. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 10 cm και 9 cm. Να υπολογίσετε τη γωνία ω, που σχηματίζει η διαγώνιος ΑΓ με την πλευρά ΑΒ.

Λύση



Ισχύει: $εφω = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{9}{10} = 0,9.$

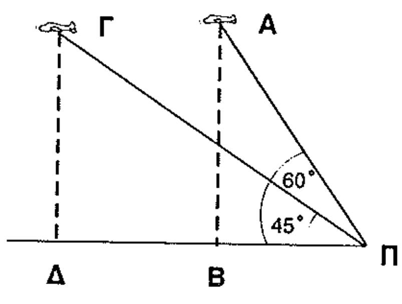
Με τη βοήθεια του πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι η γωνία ω, της οποίας η εφαπτομένη είναι ίση με 0,9 είναι 42°.

Επομένως $\widehat{ΓΑΒ} = 42°$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Ένα αεροσκάφος φαίνεται από το σημείο Π με γωνία ύψους 60°. Μετά από χρόνο t = 4 sec φαίνεται με γωνία ύψους 45°. Αν το ύψος του αεροσκάφους είναι και στις δύο περιπτώσεις ίσο με 1558,8 m, να βρείτε την ταχύτητα πτήσεώς του.

Λύση



Η ταχύτητα πτήσεως του αεροσκάφους υπολογίζεται από τη σχέση:
u = s/t όπου s το διάστημα που διανύει το αεροσκάφος σε χρόνο t = 4 sec. Στο σχήμα το s είναι ίσο με το μήκος ΑΓ ή ΔΒ. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το ΔΒ. Ισχύει:

$$εφ60° = \frac{ΑΒ}{ΡΒ} \quad ή \quad 1{,}732 = \frac{1558{,}8}{ΠΒ} \quad ή$$

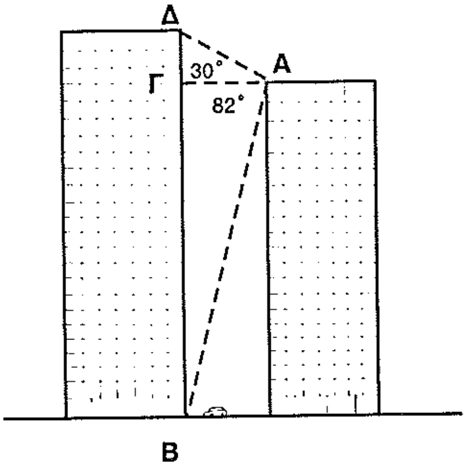
$$ΠΒ = \frac{1558{,}8}{1{,}732} = 900 \text{ m}.$$

Όμοια βρίσκουμε ότι:

$$εφ45° = \frac{ΓΔ}{ΠΔ} \quad ή \quad 1 = \frac{1558{,}8}{ΠΔ} \quad .....$$

2. Δύο ουρανοξύστες βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Η μεταξύ τους απόσταση είναι 30 m. Από την κορυφή του μικρότερου βλέπουμε τη βάση του ψηλότερου με γωνία βάθους 82° και την κορυφή του με γωνία ύψους 30°. Να βρείτε τα ύψη των δύο κτηρίων καθώς επίσης και τον αριθμό των ορόφων του ψηλότερου αν κάθε όροφος έχει ύψος 3 m.

Λύση



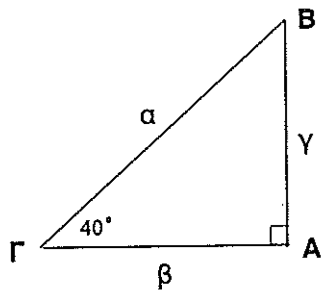
Το ύψος του ψηλότερου ουρανοξύστη είναι: ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ ενώ του μικρότερου είναι ΒΓ. Υπολογίζουμε το ύψος ΒΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου γνωρίζουμε την κάθετη πλευρά ΑΓ = 30 m και τη γωνία ΒΑΓ = 82°. Ισχύει:

$$εφ82° = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \quad ή$$

$$ΒΓ = ΑΓ \cdot εφ82° = 30 \cdot 7{,}115 = $$
$$= 213{,}45 \text{ m}$$

Το ύψος ΓΔ το υπολογίζουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο ....

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα α = 12 cm και γωνία Γ = 40°. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές β και γ καθώς και τη γωνία Β.



Λύση

Από τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι:
ημ40° = 0,6428, οπότε:

$$ημ40° = \frac{γ}{α} \quad ή$$

$γ = α \cdot ημ40° = 12 \cdot 0{,}6428 = 7{,}7136$ cm. Όμοια:

$$συν40° = \frac{β}{α} \quad ή \quad .....$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

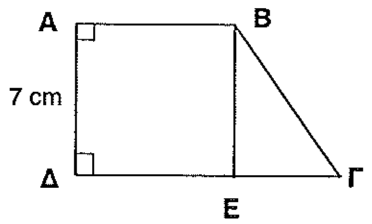
1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 90°, με γ = 371,55 dm και γωνία Β = 42°. Να υπολογίσετε την υποτείνουσα α, την κάθετη πλευρά β καθώς και την οξεία γωνία Γ.

2. Να βρεθεί η οξεία γωνία x η οποία επαληθεύει την εξίσωση:
α) 6 ημx + 5 = 8

β) 10 συνx - 5 $\sqrt{2}$ = 0

3. Η διαγώνιος ΒΔ ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 15 cm και σχηματίζει με την πλευρά ΒΓ γωνία φ = 37°. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

4. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει γωνίες Α και Δ ίσες με 90°, ΑΒ = 8,5 cm, ΓΔ = 18,5 cm και ύψος ΑΔ = 7 cm. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.



5. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου έχουν λόγο $\frac{8}{5}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες που σχηματίζει μία διαγώνιος του με τις πλευρές του.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Αν $\widehat{\omega} = 60°$, $\widehat{\varphi} = 30°$ και $\widehat{\theta} = 45°$, να να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω συναρτήσεων:
α) ημω · συνφ - ημφ · συνω
β) ημθ · συνφ - ημφ · συνθ

2. Ένα αεροπλάνο απογειώνεται με κλίση φ = 30° ως προς το έδαφος. Αφού διανύσει 2 km διπλασιάζει τη γωνία κλίσης προκειμένου να πάρει ύψος. Να βρεθεί σε πόσο ύψος από το έδαφος θα πετάει το αεροπλάνο τη στιγμή που θα έχει διανύσει 5 km από το σημείο της απογείωσης.

3. Αν 0° < ω < 90°, να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) 26 · συνω - 12 = 1

β) 6 · (ημω - 2) = 3 · ($\sqrt{2}$ - 4)

4. Αν $\frac{ημθ}{εφθ}$ = 0,208, να βρείτε τη γωνία θ.

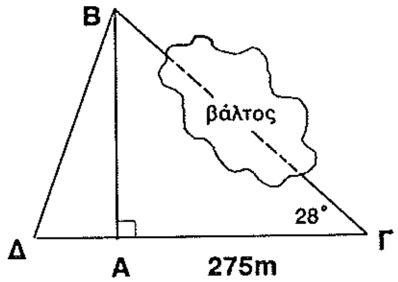
5. Για την οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου γνωρίζουμε ότι ημω = 3/5. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

6. Ένα παράθυρο απέχει από το έδαφος 8,2 m. Πόσο μήκος πρέπει να έχει μια πυροσβεστική σκάλα για να φτάσει μέχρι το χείλος του παραθύρου, αν πρέπει να σχηματίζει γωνία

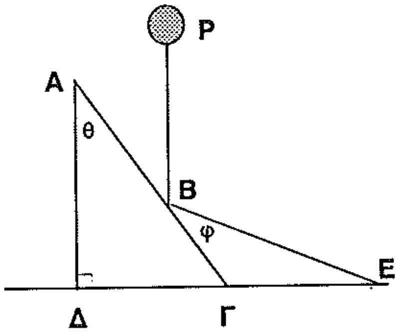
70° με το έδαφος;

7. Ένα αεροπλάνο απογειώνεται με γωνία κλίσεως 18°. Πόσα μέτρα θα διανύσει όταν φτάσει σε ύψος 800 m; Αν η γωνία κλίσεως ήταν 17° αντί για 18°, πόσα περισσότερα μέτρα θα διανύσει μέχρι να φτάσει στο ίδιο ύψος;

8. Ένας τοπογράφος θέλει να βρει την απόσταση δύο σημείων Β και Γ στο ενδιάμεσο των οποίων παρεμβάλεται ένας βάλτος. Με τη βοήθεια ενός γωνιομετρικού οργάνου προσδιόρισε ένα σημείο Α έτσι ώστε $\widehat{ΒΑΓ} = 90°$. Η απόσταση ΑΓ μετρήθηκε και βρέθηκε 275 m και η γωνία Γ βρέθηκε 28°. Πόση είναι η ΒΓ; Πόση είναι η γωνία Δ, αν ΑΔ = 10 m;



9. Μία μπάλα πέφτει κατακόρυφα κατά την ευθεία ΡΒ και κτυπά ένα κεκλιμένο επίπεδο ΑΓ. Μετά την κρούση ακολουθεί την ευθεία ΒΕ. Υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζει η ΒΕ με την οριζόντια διεύθυνση ΔΕ, αν γνωρίζετε ότι γωνία $\hat{θ} = 32°$ και $εφφ = \frac{3}{4} \cdot εφθ$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

BASIC 8

Όπως σας είναι ήδη γωνστό το ημ, συν, εφ μιας γωνίας συμβολίζεται διεθνώς με sin, cos και tan. Τα ίδια σύμβολα χρησιμοποιεί και η γλώσσα Basic.
Π.χ. ημ34° = sin34°.

Ο υπολογιστής όμως καταλαβαίνει τη γωνία μόνο αν είναι γραμμένη σε μια άλλη μονάδα: τα ακτίνια (Βλέπε κεφ. 8). Για το λόγο αυτό αν θελήσουμε να βρούμε το ημίτονο π.χ. μιας γωνίας 30°, πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τις μοίρες σε ακτίνια (πολ/ζοντάς τις επί π/180).
Π.χ. Αν πληκτρολογήσουμε

PRINT SIN (30*PI/180)

και πατήσουμε ENTER ή RETURN τότε η οθόνη θα δείξει 0,5 που είναι το ημ30° (PI = π).

Άσκηση

Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε όποια γωνία θέλουμε σε μοίρες και ο υπολογιστής θα μας υπολογίζει το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της αφού προηγουμένως θα έχει μετατρέψει τις μοίρες σε ακτίνια.
Στη συνέχεια αποθηκεύστε το (χρησιμοποιώντας SAVE) και κρατήστε το στο προσωπικό σας αρχείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Συναρτήσεις

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πότε λέμε ότι η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x;

1. Στα Μαθηματικά, όπως και σε πολλές άλλες επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Οικονομικά κ.ά.), συναντάμε τύπους οι οποίοι συνδέουν δύο διαφορετικά μεγέθη (μεταβλητές) x και y με κάποια συγκεκριμένη διαδικασία έτσι ώστε η αριθμητική τιμή του μεγέθους y να εξαρτάται από την αριθμητική τιμή του μεγέθους x. Λέμε λοιπόν ότι **η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x όταν σε κάθε τιμή της x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της y.**

Π.χ. Αν R είναι η ακτίνα ενός κύκλου και E το εμβαδόν του τότε $E = \pi \cdot R^2$. Εδώ κάθε φορά που δίνουμε μία τιμή στην R παίρνουμε ακριβώς μία τιμή για την E.
Στη Φυσική το διάστημα s που διανύει ένα κινητό το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ δίνεται από τη σχέση $s = υ \cdot t$, όπου t ο χρόνος κίνησής του. Αν η ταχύτητα είναι σταθερή, τότε σε κάθε μονάδα του χρόνου έχουμε μία διαφορετική τιμή για το διάστημα.

2. Πώς μπορούμε να συμβολίσουμε μία συνάρτηση;

2. Τη συνάρτηση (διαδικασία) με την οποία σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της μεταβλητής y, τη συμβολίζουμε με ένα γράμμα συνήθως f, g, h, κ.λπ. και την τιμή της y στην οποία αντιστοιχίζεται η x, τη συμβολίζουμε με f(x), g(x), h(x) κ.λπ. δηλαδή $y = f(x)$ κ.λπ.
Π.χ. Η συνάρτηση $y = 2x^2 - 1$ γράφεται και $f(x) = 2x^2 - 1$. Οπότε για $x = 3$ έχουμε:
$y = 2 \cdot 3^2 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 18 - 1 = 17$ ή $f(3) = 17$.

3. Τι είναι πεδίο ορισμού και τι πεδίο (σύνολο) τιμών μιας συνάρτησης;

3. Έστω $y = f(x)$ μία συνάρτηση. Τότε το σύνολο όλων των εμφανιζόμενων τιμών της μεταβλητής x ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, ενώ το σύνολο όλων των εμφανιζόμενων τιμών της μεταβλητής y ονομάζεται **πεδίο (ή σύνολο) τιμών** της συνάρτησης.

4. Τι είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης;

4. Είδαμε παραπάνω ότι στις συναρτήσεις, η αριθμητική τιμή κάποιου μεγέθους y εξαρτάται κατά ένα μοναδικό τρόπο από την τιμή που θα πάρει κάποιο άλλο μέγεθος x. Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των x και y σε μία συνάρτηση, μπορεί να δοθεί μ' έναν πίνακα που έχει δύο γραμμές. Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τις τιμές του x και στη δεύτερη γραμμή τις αντίστοιχες τιμές του y. Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας τιμών της συνάρτησης.** (Η παράσταση θα μπορούσε να γίνει και σε δύο στήλες.)

Έτσι π.χ. για τη συνάρτηση $y = 2x + 3$ έχουμε:

για $x = -1$, $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

για $x = 0$, $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

για $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

για $x = 2$, $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$

για $x = 3$, $y = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

Οπότε ο πίνακας τιμών είναι:

x	-1	0	1	2	3
y	1	3	5	7	9

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω πίνακες που περιέχουν τιμές των μεταβλητών x και y είναι πίνακες τιμών κάποιας συνάρτησης.

α)

x	-3	-2	0	2	3
y	-7	-5	-1	3	8

β)

x	1	-5	6	1	-1	2
y	2	7	2	4	3	3

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της μεταβλητής y. Επομένως ο πίνακας αυτός είναι πίνακας τιμών συνάρτησης.

β) Παρατηρούμε ότι στην τιμή 1 της μεταβλητής x αντιστοιχίζονται δύο διαφορετικές τιμές της μεταβλητής y (2 και 4). Επομένως ο πίνακας αυτός δεν μπορεί να είναι πίνακας τιμών κάποιας συνάρτησης.

2. Δίνεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	2	3	4	5	6
y	-7	-5	-3	-1	3	5	7	9	11

Με τη βοήθεια αυτού να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο που σχηματίζεται από τις εμφανιζόμενες τιμές της μεταβλητής x δηλαδή το

$A = \{-3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ενώ σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες εμφανιζόμενες τιμές της μεταβλητής y δηλαδή το

$B = \{-7, -5, -3, -1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

3. Αν $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $y = 2 \cdot (x - 1)$, να φτιάξετε τον πίνακα τιμών της.

Λύση

Για $x = -2$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (-2 - 1) = 2 \cdot (-3) = -6$
Για $x = -1$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (-1 - 1) = 2 \cdot (-2) = -4$
Για $x = 0$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (0 - 1) = 2 \cdot (-1) = -2$
Για $x = 1$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (1 - 1) = 2 \cdot 0 = 0$
Για $x = 2$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$
Για $x = 3$ έχουμε:
$y = 2 \cdot (3 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$
Άρα ο πίνακας τιμών της συνάρτησης είναι:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4

4. Έστω x η πλευρά ενός τετραγώνου.
α) Να εκφράσετε την περίμετρό του ως συνάρτηση της πλευράς του.
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση της πλευράς του.

Λύση

α) Ξέρουμε ότι οι πλευρές του τεραγώνου είναι ίσες. Έτσι εάν x είναι η πλευρά του και y η περίμετρός του, θα είναι: $y = 4x$.

β) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τις δύο διαστάσεις του. Έτσι αν ονομάσουμε y το εμβαδόν του τετραγώνου, θα είναι: $y = x^2$.

5. Ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης της μορφής $y = αx + β$ είναι:

x	0	1	2	3	4	5
y	-2				10	

α) Να υπολογίσετε το α και το β.
β) Να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα κενά.

Λύση

α) Από τον πίνακα τιμών καταλαβαίνουμε ότι αν η μεταβλητή x πάρει την τιμή 0 τότε η μεταβλητή y θα πάρει την τιμή - 2. Οπότε από τη σχέση $y = αx + β$ έχουμε:
$-2 = α \cdot 0 + β$ ή $-2 = β$ ή
$β = -2$
Επίσης για $x = 4$ έχουμε $y = 10$ οπότε από τη σχέση $y = αx - 2$ (θέσαμε $β = -2$) παίρνουμε:

$10 = α \cdot 4 - 2$ ή $10 + 2 = 4α$ ή

$4α = 12$ ή $α = \frac{12}{4}$ ή $α = 3.$

Ώστε η συνάρτηση είναι η $y = 3x - 2$.

β) Για $x = 1$ έχουμε:

$y = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$

Για $x = 2$ έχουμε:

$y = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$

Για $x = 3$ έχουμε:

$y = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$

Για $x = 5$ έχουμε:

$y = 3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών:

x	0	1	2	3	4	5
y	-2	1	4	7	10	13

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται ο πίνακας:

x	2	α	β
y	-3	-9	-12

Να βρείτε ποια σχέση πρέπει να συνδέει το α και β ώστε να είναι πίνακας τιμών συνάρτησης.

Λύση

Θα πρέπει σε κάθε τιμή της μεταβλητής x να αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της μεταβλητής y, δηλαδή πρέπει .....

2. Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = -2x^2 + β$ είναι ο

x	-2	-1	0	1	4/3
y		-7			

Να συμπληρώσετε τα κενά στον πίνακα τιμών.

Λύση

Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό β. Για $x = -1$ η αντίστοιχη τιμή του y είναι $y = -7$. Άρα

$-7 = -2 \cdot (-1)^2 + β$ .....

3. Το κεφάλαιο μιας επιχείρησης αυξάνεται, τα δύο χρόνια της λειτουργίας της, κατά 5 % και 15 % αντίστοιχα. Να εκφράσετε το τελικό κεφάλαιο της επιχείρησης ως συνάρτηση του αρχικού κεφαλαίου. Αν το τελικό κεφάλαιο είναι 6.000.000 να βρείτε το αρχικό κεφάλαιο.

Λύση

Έστω x το αρχικό κεφάλαιο. Τον πρώτο χρόνο αυξάνεται κατά 5 και γίνεται:

$$x + \frac{5}{100}x = \frac{100}{100}x + \frac{5}{100}x = \frac{105}{100}x$$

Το δεύτερο χρόνο το κεφάλαιο είναι $\frac{105}{100}x$.

Το κεφάλαιο αυτό αυξάνεται κατά 15% και γίνεται:

$$\frac{105}{100}x + \frac{15}{100} \cdot \frac{105}{100}x = \frac{105}{100}x + \frac{1575}{10.000}x =$$

$$= \frac{10.500}{10.000}x + \frac{1575}{10.000}x = \frac{12.075}{10.000}x$$

Αν y το τελικό κεφάλαιο τότε y = ...

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$y = f(x)$ όπου $f(x) = 5x + 1$ και

$y = g(x) = -2x^2$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παρα-

στάσεις:

$A = f(-1) - 3 \cdot g(-1) + 2$

$B = g(-2) \cdot f(\frac{1}{5}) + f(0)$

$\Gamma = -\dfrac{g(-5)}{f(5) + 24}$

Λύση

Για $x = -1$ έχουμε:
$y = f(-1) = 5 \cdot (-1) + 1 = -5 + 1 = -4$
Για $x = -1$ έχουμε:
$y = g(-1) = -2 \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 1 = -2$
Άρα: $A = f(-1) - 3 \cdot g(-1) + 2 =$
$= -4 - 3 \cdot (-2) + 2 = -4 + 6 + 2 = 4$
Όμοια ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης της μορφής $y = \alpha x + \beta$ είναι:

x	-2	-1	0	1	2	3	7/2
y		9	7				

α) Να υπολογίσετε τα α και β.
β) Να συμπληρώσετε τα υπόλοιπα κενά.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $y = -3x^2 - \frac{1}{2}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-1/2	0	1/2	1	2	5/2
y						

3. Να εξετάσετε πότε ο πίνακας

x	α	3	β	-4
y	-1	2	5	γ

είναι πίνακας τιμών κάποιας συνάρτησης.

4. Δίνεται η συνάρτηση: $y = f(x)$ με $y = \frac{1}{2} \cdot x - 5$. Να υπολογίσετε τις τιμές:

α) $f(-2), f(-1), f(0), f(\frac{4}{3}), f(-\frac{5}{2})$ και $f(\sqrt{3} - 1)$.

β) $f(-\frac{2}{5}) + \frac{1}{4} f(-3) \cdot f(\frac{1}{3})$

5. Η απόσταση της Λαμίας από την Αθήνα είναι 215 Km. Ένα τραίνο ξεκινάει από τη Λαμία με προορισμό την Αλεξανδρούπολη με ταχύτητα 80 Km την ώρα.
α) Να εκφράσετε την απόσταση του τραίνου από την Αθήνα ως συνάρτηση του χρόνου που κινείται και
β) Πόσο θα απέχει το τραίνο από την Αθήνα 7 ώρες μετά την αναχώρησή του;

6. Το ημερομίσθιο ενός τεχνίτη αυξάνεται τα δύο τελευταία χρόνια κατά 10 % και 20 % αντιστοίχως.
α) Να εκφράσετε το τελικό ημερομίσθιο του τεχνίτη ως συνάρτηση του αρχικού.
β) Αν το τελικό ημερομίσθιο είναι 5.500 δρχ., να υπολογίσετε το αρχικό ημερομίσθιο.

5.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θεωρία

Ερωτήσεις

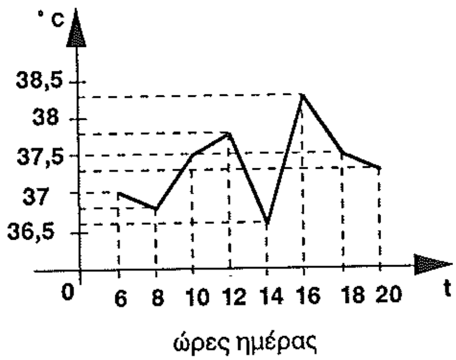
1. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Απαντήσεις

1. **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο των σημείων που βρίσκουμε, αν παραστήσουμε όλα τα ζεύγη (x, y) των αντιστοίχων τιμών μιας συνάρτησης, σ' ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει τη γεωμετρική εικόνα της συνάρτησης με την οποία μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα και γρηγορότερα τον τρόπο αλληλεξάρτησης των μεταβλητών της.

Π.χ.



Η γραφική παράσταση που έχουμε παραπάνω περιγράφει τον πυρετό ενός ασθενούς κατά τις διάφορες χρονικές στιγμές μιας ημέρας. Έτσι ο γιατρός έχει ανάγλυφη την εικόνα της θερμοκρασίας του ασθενούς.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$y = -1/2 \cdot x^2 + 2$, όταν $-4 \leq x \leq 4$ και α) x ακέραιος, β) x πραγματικός, γ) $x > 0$.

Λύση

Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών δίνοντας τις ακέραιες τιμές του x.

Για $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}(-4)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 2 = -6$

Για $x = -3$, $y = -\frac{1}{2}(-3)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 2 = -\frac{5}{2}$

Για $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}(-2)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 0$

Για $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}(-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = \frac{3}{2}$

Για $x = 0$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2$

Για $x = 1$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

Για $x = 2$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 0$

Για $x = 3$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 2 = -\frac{5}{2}$

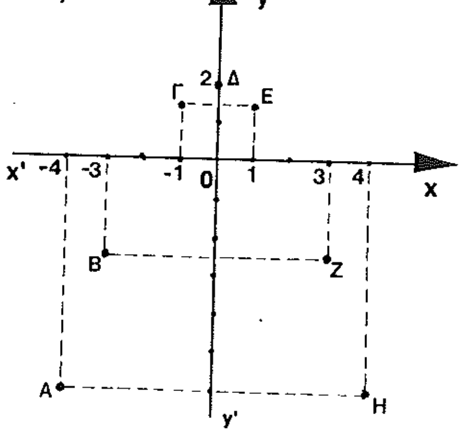
Για $x = 4$, $y = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 2 = -6$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-5/2	0	3/2	2	3/2	0	-5/2	-6

Το σχήμα (α) δίνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$ όταν $-4 \leq x \leq 4$ και x ακέραιος, που αποτελείται από εννέα σημεία.

α)

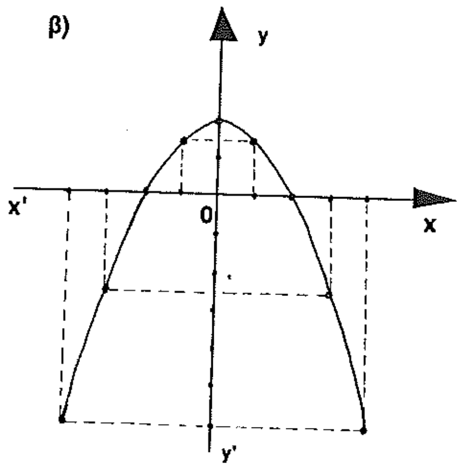


β) Όταν $-4 \leq x \leq 4$ και x πραγματικός, η μεταβλητή x παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές μεταξύ -4 και 4 γι' αυτό η γραφική παράσταση της

$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$ που δίνεται στο σχήμα (β)

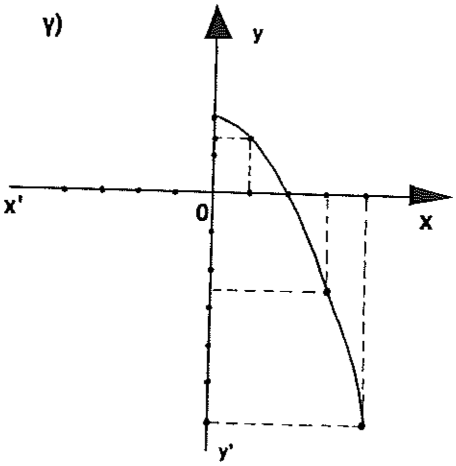
είναι μία συνεχής γραμμή.

β)

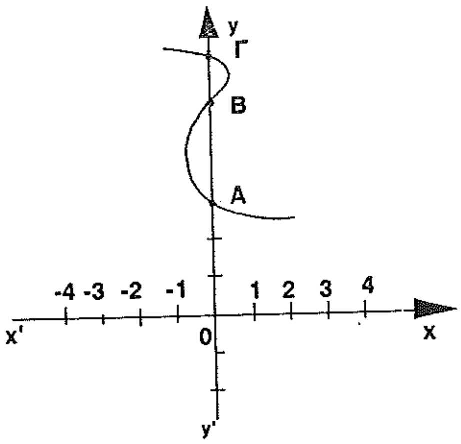


γ) Το σχήμα (γ) δίνει τη γραφική παράσταση της $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$ όταν $x \geq 0$.

γ)



2. Να εξετάσετε αν η καμπύλη του επόμενου σχήματος είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Να δικαιολογήσετε την άποψή σας.



Λύση

Μάθαμε στις συναρτήσεις, ότι σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της μεταβλητής y. Επομένως και στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν υπάρχουν δύο ή περισσότερα σημεία που να έχουν την ίδια τετμημένη. Παρατηρούμε ότι στην καμπύλη του σχήματος τα σημεία Α, Β και Γ έχουν την ίδια τετμημένη $x = 0$ επομένως δε μπορεί να είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

3. **Ένα ποδήλατο κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_o = 8$ m/sec. Ξαφνικά ο ποδηλάτης βλέπει ένα εμπόδιο και «πατάει» φρένο. Η ταχύτητα υ του ποδηλάτου από τη στιγμή που φρενάρει ο ποδηλάτης εκφράζεται ως συνάρτηση του χρόνου t με τη σχέση: $υ = 8 - 2t$.**

α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης $υ = 8 - 2t$ όπου $t = 0, 1, 2, 3$.

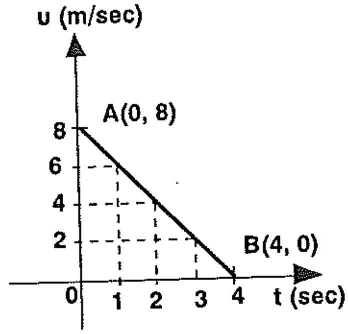
β) Σε πόσα sec η ταχύτητα θα γίνει ίση με το μισό της αρχικής ταχύτητας $υ_o$;

γ) Με τη βοήθεια του διαγράμματος να βρείτε σε πόσα sec θα σταματήσει το ποδήλατο.

Λύση

α) Για $t = 0$, $υ = 8 - 2 \cdot 0 = 8 - 0 = 8$
Για $t = 1$, $υ = 8 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$
Για $t = 2$, $υ = 8 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4$
Για $t = 3$, $υ = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$

t(sec)	0	1	2	3
υ(m/sec)	8	6	4	2

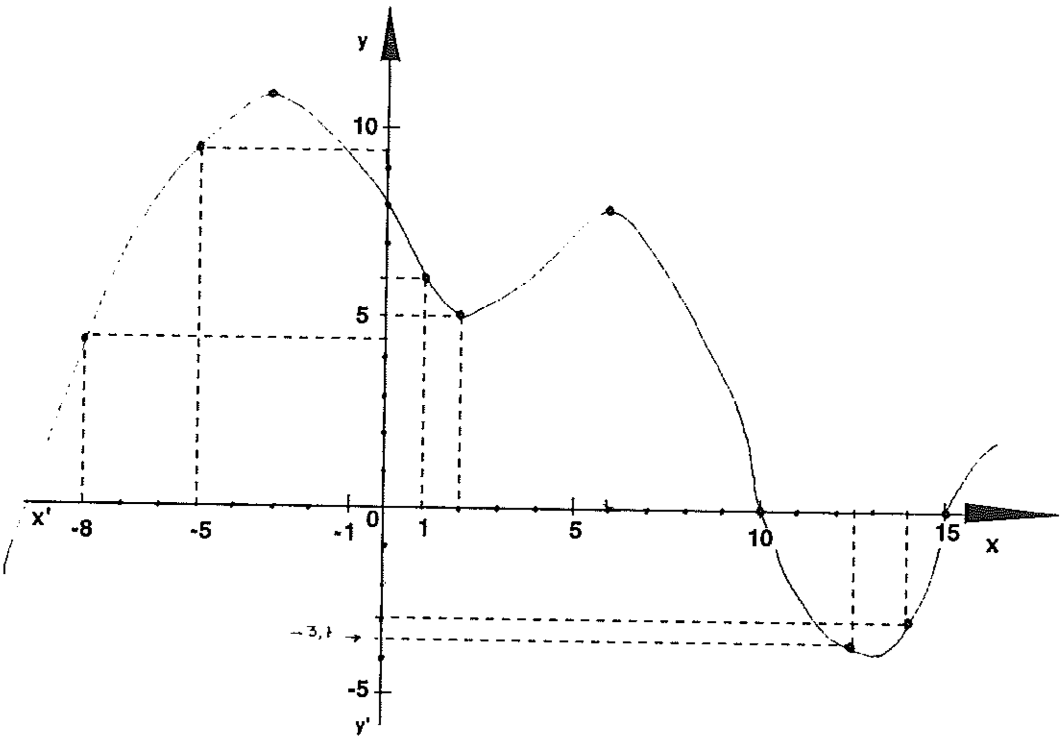


β) Από τον πίνακα τιμών συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα υ του ποδηλάτου θα γίνει ίση με το μισό της αρχικής ταχύτητας $υ_o = 8$ m/sec στο χρόνο $t = 2$ sec, από τη στιγμή που ο ποδηλάτης θα φρενάρει.

γ) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $υ = 8 - 2t$ είναι ευθεία γραμμή. Αν την προεκτείνουμε θα κόψει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο Β(4, 0). Άρα τη χρονική στιγμή $t = 4$ sec η ταχύτητα υ του ποδηλάτου θα γίνει ίση με $υ = 0$ m/sec. Επομένως το ποδήλατο θα σταματήσει μετά από 4 sec, από τη στιγμή που ο ποδηλάτης θα φρενάρει.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης:



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	-8	-5	0	1	2	10	12,5	14
y								

β) Για ποιες τιμές της μεταβλητής x η συνάρτηση παίρνει τη μικρότερη τιμή και για ποιες τη μεγαλύτερη τιμή της;

γ) Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης;

δ) Για ποιες θετικές τιμές της x η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές;

Λύση

α) Με τη βοήθεια της γραφικής παραστάσεως βρίσκουμε ότι:

x	-8	-5	0	1	2	10	12,5	14
y	4,5	9,5	8	6	5	0	-3,7	-3

β) .....

2. Δίνεται η συνάρτηση:
$y = -3\,|x| + 1$. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση:
α) όταν: $-3 \le x \le 4$ και x ακέραιος.
β) όταν: $-3 \le x \le 4$ και x πραγματικός.

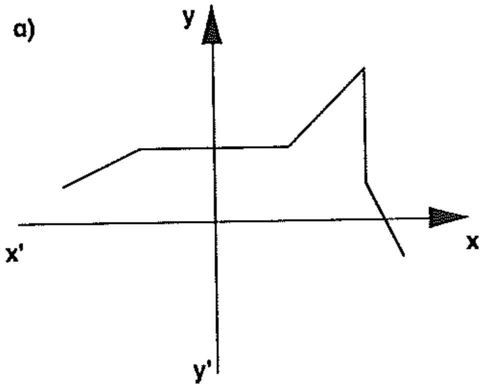
Λύση

α) Κάνουμε τον πίνακα τιμών για τις ακέραιες τιμές του x.
Για $x = -3$,
$y = -3\,|-3| + 1 =$
$= -3 \cdot 3 + 1 = -9 + 1 = -8$
Για $x = -2$, ...

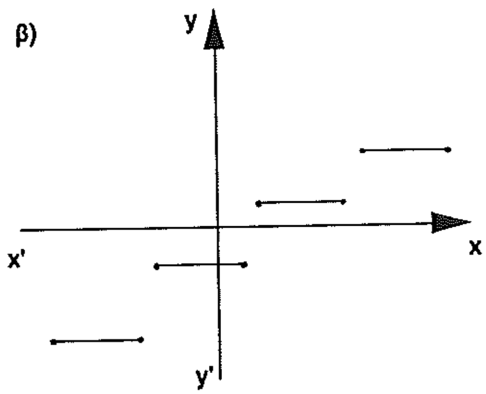
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και ποιες όχι.

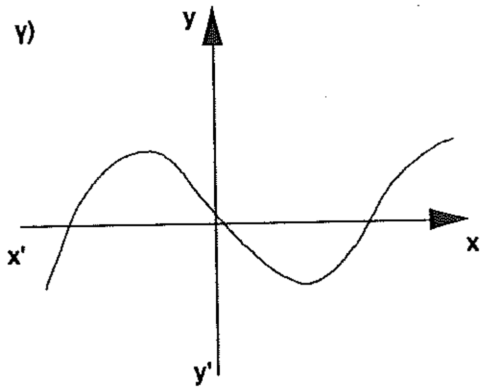
α)



β)

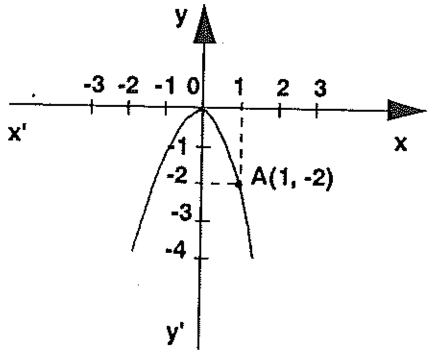


γ)



2. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x + 2$ και $y = 4 - x$ και να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x οι δυο συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή.

3. Το παρακάτω σχήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$.



α) Να υπολογίσετε τον αριθμό α.
β) Για ποια τιμή του x η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της.

γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + \beta$ περνάει από το σημείο Α (- 1, - 5).
α) Να βρεθεί ο αριθμός β.
β) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $-5 \le x \le 7$ και
i) x ακέραιος, ii) x πραγματικός.

5. 3 Ποσά ανάλογα - Η συνάρτηση y = αx

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

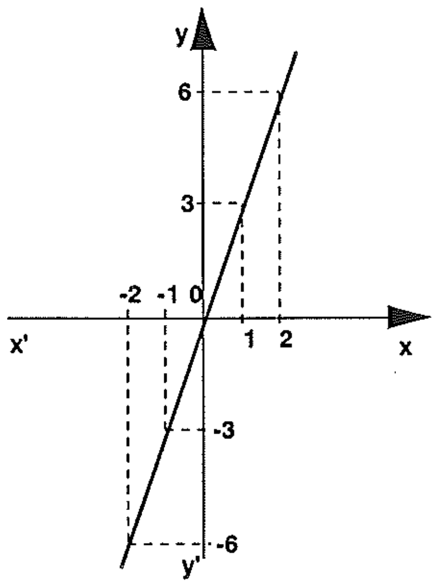
1. Πότε δύο ποσά λέγονται ανάλογα;

1. Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν **πολλαπλασιάζοντας** τις τιμές του **ενός** με έναν αριθμό, τότε **πολλαπλασιάζονται** και οι αντίστοιχες τιμές του **άλλου** ποσού με τον **ίδιο** αριθμό. π.χ.
α) Το βάρος ενός εμπορεύματος και η τιμή του είναι ποσά ανάλογα.
β) Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 80 Km/h. Τα ποσά χρόνος και διάστημα είναι ανάλογα.
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν δύο ποσά είναι ανάλογα τότε **ο λόγος των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερός.**

2. Με ποια σχέση συνδέονται δύο ποσά ανάλογα;

2. Όταν δύο ποσά x και y είναι ανάλογα τότε οι τιμές y του ενός ποσού εκφράζονται ως συνάρτηση των τιμών x του άλλου ποσού με την ισότητα:
$y = \alpha x$, όπου α είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

3. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx.



3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών R και α δοσμένος πραγματικός αριθμός, είναι μία ευθεία γραμμή που περνάει από την αρχή Ο(0, 0) των αξόνων.
π.χ. Η συνάρτηση με τύπο y = 3x έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

<u>Παρατήρηση:</u> Μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της y = αx είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο(0, 0) των αξόνων. Επομένως για να τη σχεδιάσουμε αρκεί να βρούμε ένα ακόμη σημείο της, αφού δύο σημεία ορίζουν τη θέση μίας μόνο ευθείας.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	-13/3	-4	-1/2	0,3	1/2	2	8
y	-13/4	-3	-3/8	0,225	3/8	3/2	6

α) Να εξετάσετε αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.
β) Αν τα ποσά είναι ανάλογα να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του πίνακα έχουν ίδιο λόγο, διότι:

$$\frac{-\frac{13}{4}}{-\frac{13}{3}} = \frac{13 \cdot 3}{13 \cdot 4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{-\frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 8} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{0,225}{0,3} = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Άρα τα ποσά είναι ανάλογα και ο λόγος των τιμών τους είναι:

$\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$

β) Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$y=\frac{3}{4}x$$

2. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις αντίστοιχες τιμές δύο ποσών x και y.

x	-3	1/2	3/5	1	2
y		1			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με την προϋπόθεση ότι τα ποσά είναι ανάλογα.

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

α) Επειδή πρόκειται για ανάλογα ποσά, ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός, για όλα τα ζεύγη (x, y) των αντίστοιχων τιμών.
Από τον πίνακα τιμών, για x = 1/2 και y = 1 έχουμε:

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Άρα ο σταθερός λόγος είναι 2. Οπότε:

$\frac{y}{-3}=2$ ή $y=-6$, $\frac{y}{1}=2$ ή $y=2$

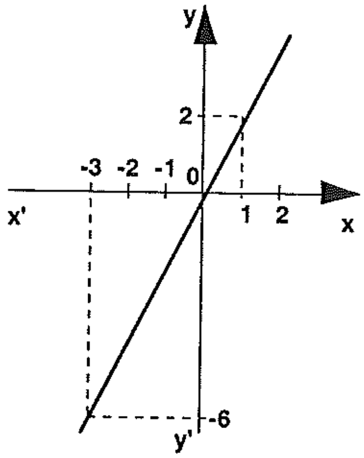
$\frac{y}{\frac{3}{5}}=2$ ή $y=\frac{6}{5}$, $\frac{y}{2}=2$ ή $y=4$.

Συνεπώς:

x	-3	1/2	3/5	1	2
y	-6	1	6/5	2	4

β) Η συνάρτηση είναι η y = 2x.

γ) Η γραφική παράσταση της y = 2x δίνεται από το παρακάτω σχήμα.



3. Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α (2, - 3).

α) Ποια συνάρτηση έχει την ευθεία αυτή για γραφική παράσταση;

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία αυτή διέρχεται και από τα σημεία Β (6, -9) και Γ (- 1, 1).

Λύση

α) Επειδή η ευθεία αυτή περνά από την αρχή των αξόνων, παριστάνει μία συνάρτηση της μορφής y = αx. Η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Α (2, - 3).
Επομένως για x = 2 είναι y = - 3. Οπότε - 3 = α · 2 ή α = - 3/2. Άρα η συνάρτηση που έχει την παραπάνω ευθεία για γραφική παράσταση είναι η

$$y=-\frac{3}{2}\cdot x.$$

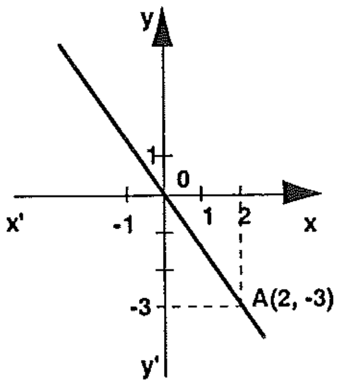
β) Για x = 6 έχουμε:

$$y=-\frac{3}{2}\cdot 6=-\frac{3\cdot 6}{2}=-9$$

Άρα η ευθεία διέρχεται και από το σημείο Β(6, - 9). Για x = - 1 έχουμε:

$$y = -\frac{3}{2} \cdot (-1) = \frac{3}{2}$$

άρα η ευθεία δε διέρχεται από το σημείο Γ(- 1, 1).
Η γραφική παράσταση της παραπάνω είναι:



4. Να υπολογίσετε τους αριθμούς x, y, z αν ξέρετε ότι:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \text{ και } x + y + z = 60.$$

Λύση

Ονομάζουμε α καθένα από τους τρεις ίσους λόγους. Τότε θα έχουμε:

$\frac{x}{3} = \alpha$ ή $x = 3\alpha$

$\frac{y}{5} = \alpha$ ή $y = 5\alpha$

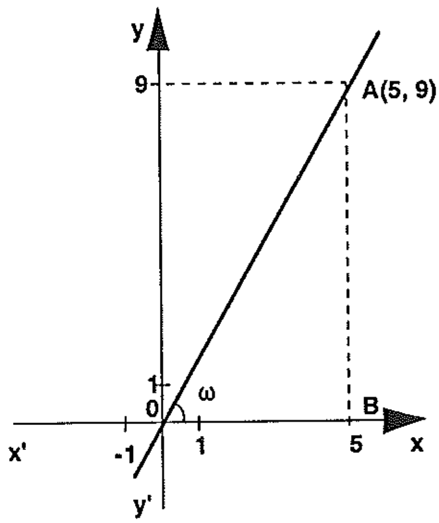
$\frac{z}{7} = \alpha$ ή $z = 7\alpha$

Οπότε η ισότητα x + y + z = 60 γίνεται: $3\alpha + 5\alpha + 7\alpha = 60$ ή $15\alpha = 60$ ή $\alpha = \frac{60}{15} = 4$. Επομένως:

$x = 3 \cdot 4 = 12$,
$y = 5 \cdot 4 = 20$ και
$z = 7 \cdot 4 = 28$.

5. Μία ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α (5, 9). Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζεται από την ευθεία αυτή και τον άξονα x'x.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Με τη βοήθεια του πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκουμε ότι ο αριθμός 1,8 αντιστοιχεί σε γωνία ω = 61° (με προσέγγιση).

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

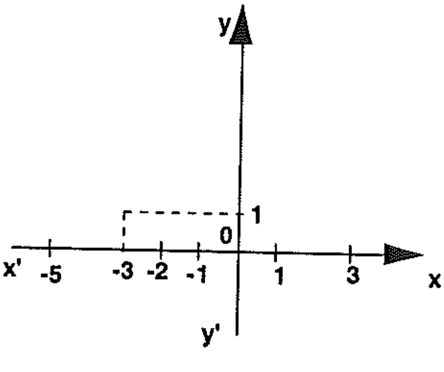
1. Με τον τύπο $y = -\frac{1}{3} \cdot x$ ορίζεται μία συνάρτηση f. Αν το x παίρνει τιμές από το σύνολο Α = {- 3, - 2, 0, 3, - 5, 1},
α) να κάνετε τη γραφική παράστασή της και
β) να βρείτε το άθροισμα:
$f(-3) - (2 - 1) \cdot f(0) + f(-5)$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή x παίρνει μόνο τις ακέραιες τιμές του συνόλου Α, όπου Α = {- 3, - 2, 0, 3, -5, 1}. Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών για τις αντίστοιχες τιμές του x.

Για $x = -3$, $y = -\frac{1}{3} \cdot (-3) = \frac{3}{3} = 1$.

Για $x = -2$, ...



2. Με τον τύπο $y = -\frac{4}{5} \cdot x$ ορίζεται η συνάρτηση g. Αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το σύνολο R των πραγματικών αριθμών, να βρεθεί το στοιχείο α του συνόλου R ώστε:
α) $g(\alpha) = -4$
β) $g(\alpha) = \frac{3}{2}$,
γ) $g(\alpha) = -\frac{1}{2} + 3\alpha$.

Λύση

α) Μάθαμε ότι $y = g(x)$.
Οπότε για $y = -4$ έχουμε:

$-4 = -\frac{4}{5}\alpha$ ή $-4 = -\frac{4 \cdot \alpha}{5}$ ή

$-20 = -4 \cdot \alpha$ ή $\alpha = \frac{-20}{-4} = 5$

β) Όμοια για $y = \frac{3}{2}$ έχουμε ....

γ) ....

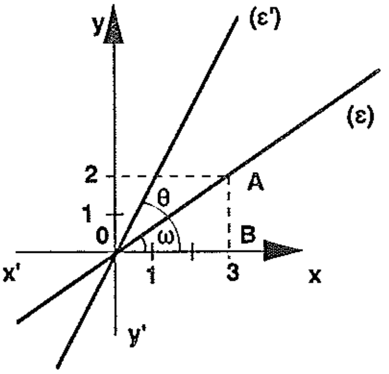
3. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Επειδή η γραφική παράσταση είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων η συνάρτηση είναι της μορφής $y = \alpha x$ ......

4. Η ευθεία (ε) είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αναλόγων ποσών.
α) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.
β) Αν $\varepsilon\varphi\theta = \frac{15}{4} \cdot \varepsilon\varphi\omega$, να βρεθεί η συνάρτηση των αναλόγων ποσών που έχει γραφική παράσταση την ευθεία (ε'), και που σχηματίζει γωνία $\theta < 90°$ με τον ημιάξονα Ox.

Λύση



α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αναλόγων ποσών, ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός για όλα τα ζεύγη (x, y) των αντιστοίχων τιμών. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για x = 3 είναι y = 2, άρα

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

Επομένως η συνάρτηση που ζητάμε είναι η ....

β) Ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ ισούται με την εφω. (Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ) Οπότε εφω $= \frac{2}{3}$. Από την ισότητα εφθ $=$ $= \frac{15}{4} \cdot$ εφω έχουμε: εφθ = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$y = -x$, $y = x$, $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

2. Να βρείτε τους αριθμούς x, y, z αν

$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}$ και $3x - y + z = 18$.

3. Αν εξατμιστούν 500 lit θάλασσας παράγονται 15 κιλά αλάτι.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αναλόγων ποσών.

lit	100	200	$3 \cdot 10^2$	400	500	1000
kg					15	

β) Να εκφράσετε το βάρος του παραγόμενου αλατιού, ως συνάρτηση του όγκου της θάλασσας που εξατμίζεται.

γ) Πόσο αλάτι θα παραχθεί από $4{,}5 \cdot 10^5$ lit θάλασσας;

δ) Για να παραχθούν 3 τόνοι αλατιού πόσα lit θάλασσας πρέπει να εξατμιστούν;

4. Μία ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(- 4, - 2) και από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0).

α) Ποια συνάρτηση έχει την ευθεία αυτή για γραφική παράσταση;

β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx διέρχεται από το σημείο Α (- 6, 2), να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (2 + \alpha) \cdot x$.

5.4 Εφαρμογές των αναλόγων ποσών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$ του χάρτη ή του σχεδίου;

Απαντήσεις

1. Κλίμακα $\frac{1}{\alpha}$ (ή 1:α) λέγεται ο σταθερός λόγος $\frac{1}{\alpha}$ που εκφράζει το πηλίκο της απόστασης δύο σημείων του χάρτη (ή του σχεδίου) προς την πραγματική τους απόσταση.

Π.χ. Στο υπόμνημα ενός χάρτη αναφέρεται η ένδειξη:

Κλίμακα: $\frac{1}{1.000.000}$ ή 1:1.000.000

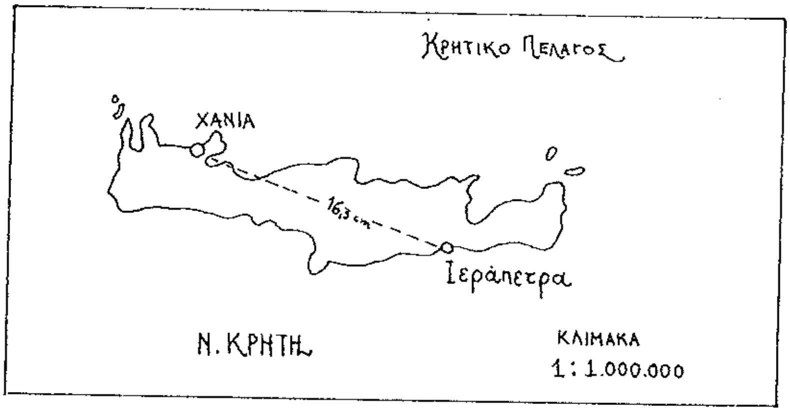
Αυτό σημαίνει ότι, αν η απόσταση δύο σημείων του χάρτη είναι 1 cm, τότε η πραγματική απόστασή τους είναι: 1.000.000 cm = 10.000 m = 10 km.

2. Πότε λέμε ότι ένα σχήμα είναι σε μεγέθυνση και πότε σε σμίκρυνση;

2. Ένα σχήμα είναι σε μεγέθυνση όταν η κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευαστεί είναι μεγαλύτερη της μονάδας, δηλαδή: $1/\alpha > 1$.
Ενώ ένα σχήμα είναι σε σμίκρυνση όταν: $1/\alpha < 1$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια του παρακάτω χάρτη να βρεθεί η πραγματική απόσταση Χανίων - Ιεράπετρας.



Λύση

Αν x είναι η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων σε cm θα έχουμε:

$\frac{16{,}3}{x} = \frac{1}{1.000.000}$ ή

$1 \cdot x = 16{,}3 \cdot 1.000.000$ ή

$x = 16.300.000$ cm ή

$x = 163.000$ m ή $x = 163$ Km.

Άρα η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων είναι 163 Km.

2. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις 17 m και 14 m. Να το σχεδιάσετε με κλίμακα 1 : 1.000.

Λύση

Ισχύει:

$\frac{\text{Μήκος σχεδίου}}{\text{Μήκος πραγματικό}} = \frac{1}{1.000}$ ή

$\frac{\text{Μήκος σχεδίου}}{17} = \frac{1}{1.000}$ ή

1.000 · (Μήκος σχεδίου) = 17 οπότε

Μήκος σχεδίου = 17/1.000 = 0,017 m = 1,7 cm.

Όμοια βρίσκουμε ότι:

$\frac{\text{Πλάτος σχεδίου}}{\text{Πλάτος πραγματικό}} = \frac{1}{1.000}$ ή

$\frac{\text{Πλάτος σχεδίου}}{14} = \frac{1}{1.000}$ ή

1.000 · (Πλάτος σχεδίου) = 14 οπότε

Πλάτος σχεδίου = 14/1.000 = 0,014 m = 1,4 cm.

Άρα οι διαστάσεις του οικοπέδου στο σχέδιο είναι 1,7 cm και 1,4 cm.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{3}{4} = \frac{x}{6}$, **β)** $\frac{0{,}01}{x} = \frac{3{,}2}{18}$,

γ) $\frac{x+3}{5} = \frac{4-x}{2}$

Λύση

α) $\frac{3}{4} = \frac{x}{6}$ ή $4x = 3 \cdot 6$ ή $4x = 18$

ή $\frac{4x}{4} = \frac{18}{4}$ ή $x = \frac{9}{2}$

β) $\frac{0{,}01}{x} = \frac{3{,}2}{18}$ ή $3{,}2x = 0{,}01 \cdot 18$ ή

$3{,}2x = 0{,}18$ ή $\frac{3{,}2x}{3{,}2} = \frac{0{,}18}{3{,}2}$ ή

$x = 0{,}05625$

γ) $\frac{x+3}{5} = \frac{4-x}{2}$ ή $2(x+3) = 5(4-x)$

ή $2x + 6 = 20 - 5x$ ή $2x + 5x = 20 - 6$

ή $7x = 14$ ή $\frac{7x}{7} = \frac{14}{7}$ ή

$x = 2$

4. Όταν ξέρουμε ότι, οι αριθμοί x, y, z είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ **.**

Με βάση τα παραπάνω να υπολογίσετε τρεις αριθμούς που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 4, 6 και έχουν άθροισμα 36.

Λύση

Επειδή οι αριθμοί x, y, z είναι ανάλογοι προς τους 2, 4, 6 θα έχουμε:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$

Ονομάζουμε α καθένα από τους τρεις ίσους λόγους. Τότε θα είναι:

$\frac{x}{2} = \alpha$ ή $x = 2\alpha$

$\frac{y}{4} = \alpha$ ή $y = 4\alpha$

$\frac{z}{6} = \alpha$ ή $z = 6\alpha$

Από την υπόθεση ισχύει ότι:
$x + y + z = 36$.
Οπότε με αντικατάσταση έχουμε:
$2\alpha + 4\alpha + 6\alpha = 36$ ή $12\alpha = 36$ ή $\alpha = 3$.
Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι:
$x = 2 \cdot 3 = 6$, $y = 4 \cdot 3 = 12$ και $z = 6 \cdot 3 = 18$.

5. Δίνονται οι αριθμοί x, y, z. Αν ο x αυξηθεί κατά μία μονάδα, ο y ελαττωθεί κατά δύο μονάδες και ο z αυξηθεί κατά τρεις μονάδες, τότε οι τρεις αριθμοί που θα προκύψουν είναι ανάλογοι προς τους 3, 4 και 5 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τους x, y, z αν 3x + y - 2z = 14.

Λύση

Οι τρεις νέοι αριθμοί που θα προκύψουν είναι οι: $x + 1$, $y - 2$ και $z + 3$. Επειδή είναι ανάλογοι προς τους 3, 4, 5 αντίστοιχα θα ισχύει:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{5}$$

Ονομάζουμε α καθέναν από τους τρεις ίσους λόγους. Τότε:

$\frac{x+1}{3} = \alpha$ ή $x + 1 = 3\alpha$ ή $x = 3\alpha - 1$

$\frac{y-2}{4} = \alpha$ ή $y - 2 = 4\alpha$ ή $y = 4\alpha + 2$

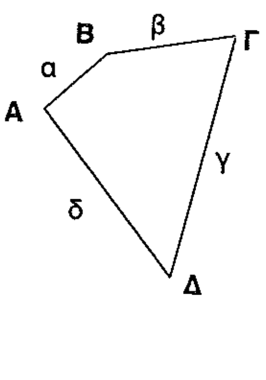
$\frac{z+3}{5} = \alpha$ ή $z + 3 = 5\alpha$ ή $z = 5\alpha - 3$

Από την υπόθεση ισχύει ότι:
$3x + y - 2z = 14$
Με αντικατάσταση έχουμε διαδοχικά:
$3 \cdot (3\alpha - 1) + 4\alpha + 2 - 2 \cdot (5\alpha - 3) = 14$
$9\alpha - 3 + 4\alpha + 2 - 10\alpha + 6 = 14$
$9\alpha + 4\alpha - 10\alpha = 14 + 3 - 2 - 6$
$3\alpha = 9$
$\alpha = 3$
Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι:
$x = 3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$,
$y = 4 \cdot 3 + 2 = 12 + 2 = 14$ και
$z = 5 \cdot 3 - 3 = 15 - 3 = 12$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Η περίμετρος ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 47,5 cm. Αν οι πλευρές του α, β, γ, δ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 2, 3, 8, 6, να βρείτε το μήκος τους.

Λύση



Έστω α, β, γ, δ οι πλευρές του τετραπλεύρου τότε:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{8} = \frac{\delta}{6} = \lambda$$

και $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 47{,}5$ ....

2. Τρεις φίλοι έπαιξαν ΛΟΤΤΟ και κέρδισαν το ποσό των 80.000.000 δραχμών. Τα κέρδη μοιράζονται ανάλογα με το ποσό που πλήρωσε καθένας για τη συμμετοχή του στο δελτίο του ΛΟΤΤΟ. Να βρείτε το ποσό που αντιστοιχεί στον καθένα αν η συμμετοχή του ήταν 1.500 δρχ., 2.000 δρχ. και 2.800 δρχ. αντίστοιχα.

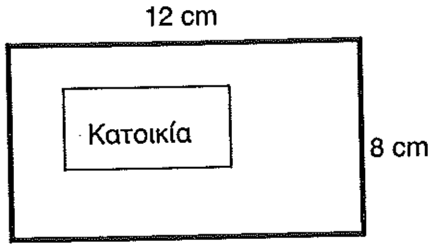
Λύση

Έστω x, y, z το ποσό που αντιστοιχεί στον καθένα, τότε:

$$\frac{x}{1.500} = \frac{y}{2.000} = \frac{z}{2.800} = \lambda$$

και $x + y + z = 80.000.000$. Οπότε .....

3. Σε τοπογραφικό σχέδιο με κλίμακα 1 : 250 ένα οικόπεδο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις 12 cm και 8 cm αντίστοιχα.
α) Να βρείτε το πραγματικό εμβαδόν του οικοπέδου.
β) Αν οι πραγματικές διαστάσεις της κατοικίας είναι 10 m και 7,5 m αντίστοιχα, να βρείτε τις διαστάσεις της στο χάρτη.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του ελεύθερου χώρου (σε m²).



Κλίμακα: 1 : 250

Λύση

Ισχύει:

$$\frac{\text{Μήκος σχεδίου}}{\text{Μήκος πραγματικό}} = \frac{1}{250} \text{ ή}$$

$$\frac{12}{\text{Μήκος πραγματικό}} = \frac{1}{250} \text{ ή}$$

Μήκος πραγματικό = 3.000 cm = 30m

και

$$\frac{\text{Πλάτος σχεδίου}}{\text{Πλάτος πραγματικό}} = \frac{1}{250} \text{ ή } ......$$

4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2\,(5x + 2)}{2x - 1} = \frac{8}{3}$$

Λύση

$$\frac{2\,(5x + 2)}{2x - 1} = \frac{8}{3} \text{ ή}$$

$$3 \cdot 2\,(5x + 2) = 8 \cdot (2x - 1) \text{ ή } ....$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{1}{3}$ και άθροισμα 12.

2. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{5}{2}$ και διαφορά 24.

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{5 - 2x}{3} = \frac{-3\,(x - 1)}{-2}$$

4. Ένας χάρτης σχεδιάστηκε με κλίμακα 1 : 1.000.000.
α) Αν η απόσταση δύο πόλεων στο χάρτη είναι 7,5 cm, πόση είναι η πραγματική τους απόσταση;

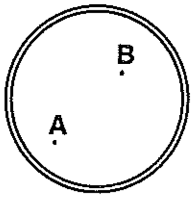
β) Αν η πραγματική απόσταση δύο άλλων πόλεων είναι 130 Km, πόση είναι η απόστασή τους στο χάρτη;

5. Αν $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{\omega+2}{4}$ και $x - 6y + 2\omega = 0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y, ω.

6. Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες με τους αριθμούς 2, 3, 4. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

7. Το παρακάτω σχέδιο δείχνει την απόσταση δύο βακτηριδίων σε μεγέθυνση. Αν η απόσταση των σημείων στο σχήμα είναι 8 mm ενώ η πραγματική απόσταση είναι

$2{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm, να βρείτε πόσες φορές μεγεθύνει ο φακός του μικροσκοπίου.



5. 5 Η γραμμική συνάρτηση y = αx + β

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: y = αx + β;

Απαντήσεις

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx + β, με x πραγματικό αριθμό και α, β δοσμένους πραγματικούς αριθμούς, είναι μία ευθεία που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, β) και είναι παράλληλη προς την ευθεία που παριστάνει η συνάρτηση y = αx.

Η ευθεία που παριστάνει η συνάρτηση y = αx + β τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, β) γιατί στη σχέση y = αx + β, αν θέσουμε x = 0 έχουμε $y = \alpha \cdot 0 + \beta = \beta$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

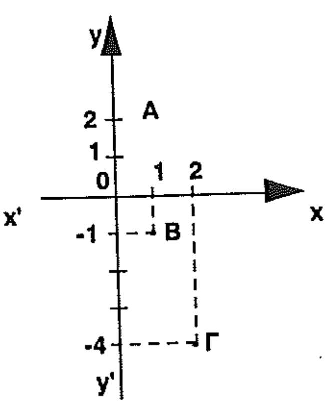
1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = - 3x + 2, όταν - 2 ≤ x ≤ 2 και α) x φυσικός, β) x ακέραιος, γ) x πραγματικός.

Λύση

α) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης y = - 3x + 2, όταν - 2 ≤ x ≤ 2 και x φυσικός.

x	0	1	2
y	2	-1	-4

Η γραφική παράσταση είναι τα μεμονωμένα σημεία Α(0, 2), Β(1, -1), Γ(2, -4)

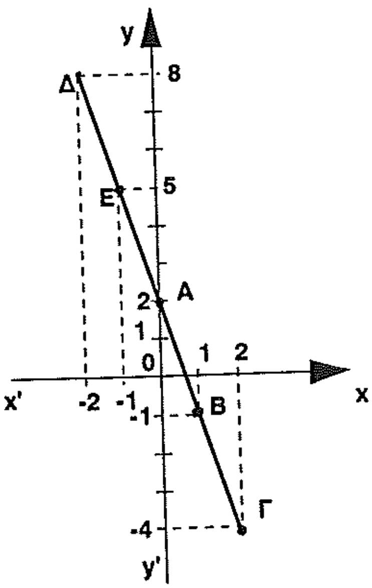


β) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης: $y = -3x + 2$ όταν $-2 \le x \le 2$ και x ακέραιος.

x	-2	-1	0	1	2
y	8	5	2	-1	-4

Η γραφική παράσταση είναι τα μεμονωμένα σημεία Δ (- 2, 8), Ε (- 1, 5), Α (0, 2), Β (1, - 1) και Γ (2, - 4).

γ) Όταν $-2 \le x \le 2$ και x πραγματικός, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ολόκληρο το τμήμα ΔΓ.



2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 4$ όταν

α) x οποιοσδήποτε πραγματικός και

β) $-2 \le x \le 3$.

Λύση

α) Μάθαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 4$ είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, 4). Για να χαράξουμε την ευθεία αυτή βρίσκουμε και ένα άλλο σημείο δίνοντας στο x οποιαδήποτε τιμή.

Π.χ. για x = 3, έχουμε ότι:

$y = -2/3 \cdot 3 + 4 = -2 + 4 = 2.$

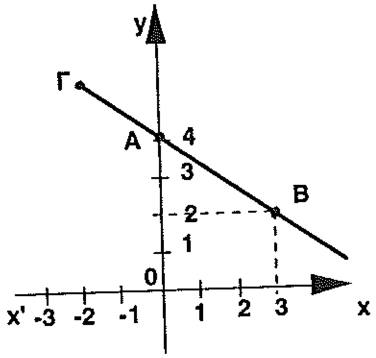
Ο πίνακας τιμών είναι:

x	0	3
y	4	2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2/3\, x + 4$ όταν x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός είναι η ευθεία ΑΒ.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2/3\, x + 4$ όταν $-2 \le x \le 3$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ όπου Γ (- 2, 16/3) γιατί για x = - 2 έχουμε:

$$y = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$$



3. Να βρείτε το β, αν ξέρετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x + β$ διέρχεται από το σημείο Α (2, 2).

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x + β$ είναι ευθεία, που διέρχεται από το σημείο Α (2, 2) άρα οι συντεταγμένες του Α θα επαληθεύουν την ισότητα $y = -3x + β$.
Έχουμε λοιπόν:
$2 = -3 \cdot 2 + β$
$2 = -6 + β$
$β = 2 + 6 = 8$
Επομένως η συνάρτηση είναι η
$y = -3x + 8$.

4. Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = (λ - 1)x + 5$ και $y = -6x$ είναι ευθείες παράλληλες.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = αx + β$ και $y=αx$ είναι ευθείες παράλληλες. Οπότε για να είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=(λ-1)x+5$ και $y = -6x$, ευθείες παράλληλες πρέπει:
$λ - 1 = -6$ ή $λ = -6 + 1 = -5$.

5. Ένας πωλητής αυτοκινήτων έχει ημερομίσθιο 3.500 δρχ. και παίρνει επιπλέον 15.000 δρχ. από κάθε αυτοκίνητο που πουλάει. Να εκφράσετε τις ημερήσιες αποδοχές του πωλητή ως συνάρτηση των αυτοκινήτων που πουλάει σε μία ημέρα. Είναι τα ποσά ανάλογα;

Λύση

Έστω x τα αυτοκίνητα που πουλάει ο πωλητής σε μία ημέρα και y οι ημερήσιες αποδοχές του. Τότε:
$y = 15.000x + 3.500$. Τα ποσά «ημερήσια αμοιβή» και «αριθμός αυτοκινήτων που πουλάει» δεν είναι ανάλογα αφού οι αντίστοιχες τιμές τους δε συνδέονται με σχέση της μορφής $y = αx$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους αριθμούς α και β της συνάρτησης $y = αx + β$, όταν ξέρετε ότι διέρχεται από τα σημεία: Α (0, -5) και Β (2, -4).

Λύση

Αφού η γραφική παράσταση της $y = αx + β$ διέρχεται από τα σημεία Α και Β, σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν στη γραφική παράσταση, άρα για $x = 0$ θα είναι $y = -5$. Έτσι από τη σχέση $y = αx + β$ έχουμε:
$-5 = α \cdot 0 + β$ ή $-5 = β$ ή $β = -5$.
Οπότε: $y = αx - 5$.
Επίσης για $x = 2$ έχουμε $y = -4$. Έτσι από τη σχέση $y = αx - 5$ έχουμε: .....

2. Χωρίς να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=\frac{5}{2}x - 1$, $y = 2,5x + 3$ και $y = \frac{5}{2}(x - 1)$ να αποδείξετε ότι οι ευθείες που παριστάνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Λύση

Γενικά γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx + β$

με x πραγματικό αριθμό, είναι μία ευθεία παράλληλη πρός τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx.
Οι τρεις συναρτήσεις είναι οι:

$y = \frac{5}{2}x - 1$

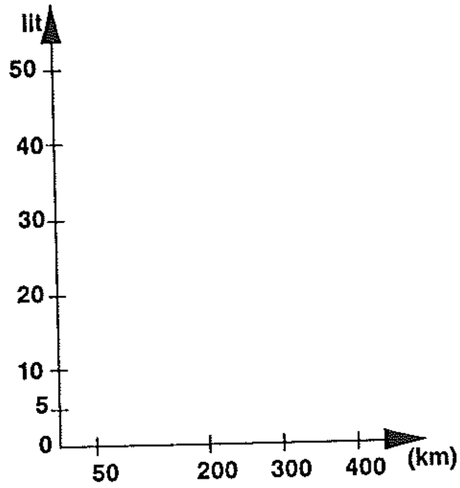
$y = 2{,}5x + 3$ ή $y = \frac{5}{2}x + 3$ και

$y = \frac{5}{2}(x - 1)$ ή $y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$ Οπότε ....

3. Η δεξαμενή καυσίμων (ρεζερβουάρ) ενός αυτοκινήτου χωράει 42 λίτρα βενζίνης. Αν η κατανάλωση του κινητήρα, σε βενζίνη είναι 0,14 λίτρα το χιλιόμετρο, (με ομαλές συνθήκες οδήγησης), να εκφράσετε την ποσότητα της βενζίνης που υπάρχει στο ρεζερβουάρ ως συνάρτηση των χιλιομέτρων που κινείται το αυτοκίνητο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. Στη συνέχεια από τη γραφική παράσταση να βρείτε σε πόσα χιλιόμετρα θα αδειάσει το ρεζερβουάρ.

Λύση

α) Αν η κατανάλωση του κινητήρα, σε βενζίνη, είναι 0,14 λίτρα το χιλιόμετρο, σε x χιλιόμετρα θα είναι 0,14x. Αν ονομάσουμε y την ποσότητα που έμεινε στη δεξαμενή καυσίμων, θα είναι:
$y = 42 - 0{,}14x$.
β) .....



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x + 2$ όταν:
α) x ακέραιος, β) x πραγματικός,
γ) x θετικός πραγματικός.

2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1{,}2x + 3$, όταν $-2 \leq x < 7$.

3. Χωρίς να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{2}{3}x - 10^3$

β) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}x + \sqrt{2}$

γ) $y = 1{,}5x + 1^{1991}$

να αποδείξετε ότι είναι ευθείες παράλληλες.

4. Να προσδιορίσετε το λ στις συναρτήσεις: $y = (2\lambda + 1)x + 5$ και $y = (3 - \lambda)x$ ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να είναι ευθείες παράλληλες.

5. Να προσδιορίσετε το λ στη συνάρτηση $y = (\lambda + 3)x - 4$ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α (1, 1)

6. Η Αθήνα απέχει από τη Ζυρίχη 2.570 Km. Ένα αεροσκάφος αναχωρεί προς Ζυρίχη με μέση ταχύτητα 1.000 Km την ώρα. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του χρόνου, την απόσταση του αεροσκάφους από τη Ζυρίχη και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε πόσες ώρες μετά την αναχώρησή του το αεροσκάφος θα απέχει από το αεροδρόμιο της Ζυρίχης 570 Km.

5.6 Ποσά αντιστρόφως ανάλογα
Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Απαντήσεις

1. Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν, πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Π.χ. ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που χρειάζεται για να τελειώσει ένα έργο είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Πράγματι, όσο περισσότερα άτομα εργάζονται σε ένα συγκεκριμένο έργο, τόσο λιγότερο χρόνο χρειάζεται για να τελειώσει.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό.

2. Με ποια σχέση συνδέονται οι αντίστοιχες τιμές δύο ποσών που είναι αντιστρόφως ανάλογα;

2. Αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε οι τιμές y του ενός ποσού εκφράζονται ως συνάρτηση των τιμών x του άλλου με τη σχέση $y = \alpha/x$ όπου α δοσμένος αριθμός. Στη συνάρτηση αυτή η μεταβλητή x δεν μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, ενώ δύο οποιεσδήποτε τιμές y και x έχουν σταθερό γινόμενο ίσο με το α.

Γιατί: $y = \frac{\alpha}{x}$ ή $y \cdot x = \alpha$

3. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y = \frac{\alpha}{x}$;

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha/x$, με x πραγματικό αριθμό είναι μια καμπύλη που αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς την αρχή O(0, 0) των αξόνων. Η καμπύλη αυτή λέγεται **υπερβολή**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{4}{x}$ και β) $y = -\frac{4}{x}$

Λύση

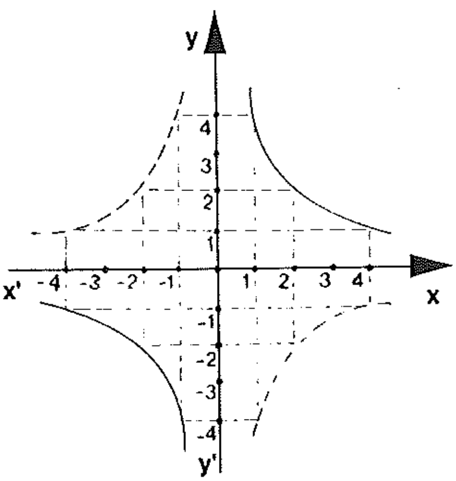
α) Κατασκευάζουμε πίνακα τιμών για τις τιμές: x = - 4, - 3, - 2, - 1, 1, 2, 3, 4.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	-1	-4/3	-2	-4	4	2	4/3	1

β) Όμοια:

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	4/3	2	4	-4	-2	-4/3	-1

Η γραφική παράσταση της $y = \frac{4}{x}$ έχει τους δύο κλάδους της στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο ενώ η γραφική παράσταση της $y = -\frac{4}{x}$ έχει τους δύο κλάδους της στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.



2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αν τα ποσά Α και Β είναι αντιστρόφως ανάλογα.

A	1	-1	2			-3	6
B		6		3	-2		

Λύση

Αφού τα δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν σταθερό γινόμενο. Έστω x η τιμή του Α και y η αντίστοιχη τιμή του Β. Τότε $x \cdot y$ = σταθερό. Από τον πίνακα έχουμε: $x \cdot y = -1 \cdot 6$ ή

$$x \cdot y = -6 \quad ή \quad y = -\frac{6}{x}.$$

Η ισότητα αυτή συνδέει τις τιμές του ποσού Α με τις τιμές του ποσού Β. Οπότε:

Για $x = 1$, $y = \frac{-6}{1} = -6$

Για $x = 2$, $y = \frac{-6}{2} = -3$

Για $y = 3$, $3 = \frac{-6}{x}$ ή $3x = -6$ ή

$x = \frac{-6}{3} = -2$

Για $y = -2$, $-2 = \frac{-6}{x}$ ή $-2x = -6$ ή

$x = \frac{-6}{-2} = 3$

Για $x = -3$, $y = \frac{-6}{-3} = 2$

Για $x = 6$, $y = \frac{-6}{6} = -1$

Άρα ο πίνακας που προκύπτει είναι:

A	1	-1	2	-2	3	-3	6
B	-6	6	-3	3	-2	2	-1

3. Δίνεται η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$. Να υπολογίσετε το α της συνάρτησης αν ξέρετε ότι το σημείο Α $(8, -\frac{1}{2})$ είναι σημείο της γραφικής της παράστασης.

Λύση

Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$ γίνεται $y \cdot x=\alpha$.

Οπότε για $x = 8$ και $y = -\frac{1}{2}$ έχουμε:

$-\frac{1}{2}\cdot 8=\alpha$ ή $-\frac{8}{2}=\alpha$ ή $\alpha=-4$.

4. Μία στρατιωτική μονάδα έχει 15 άνδρες και τρόφιμα για 60 ημέρες. Από αυτούς 5 πήραν μετάθεση σε άλλη στρατιωτική μονάδα. Για πόσες ημέρες θα φθάσουν τα τρόφιμα τώρα αν η μερίδα του φαγητού παραμείνει η ίδια;

Λύση

Τα ποσά «πλήθος ανδρών» και «αριθμός ημερών» είναι αντιστρόφως ανάλογα, άρα οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν το ίδιο γινόμενο. Έστω x οι ημέρες για τις οποίες θα φθάσουν τα τρόφιμα τότε:

$(15-5)\cdot x=15\cdot 60$ ή $10x=900$ ή $x=90$ ημέρες.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι 4,5 cm². Αν β η βάση του και υ το αντίστοιχο ύψος του, να εκφράσετε το ύψος του τριγώνου ως συνάρτηση της βάσεως. Τι συμπεραίνετε για τα ποσά «ύψος» και «βάση» του τριγώνου; Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε.

Λύση

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου δίνεται από τη σχέση:

$E=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $E = 4,5$ cm², άρα:

$4,5=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon$ ή $2\cdot 4,5=\beta\cdot\upsilon$ ή

$9=\beta\cdot\upsilon$ ή $\upsilon=\frac{9}{\beta}$ (1)

Η συνάρτηση (1) είναι της μορφής $y=\frac{\alpha}{x}$ άρα τα ποσά «ύψος» και «βάση» του τριγώνου είναι ......

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\upsilon = 9/\beta$ έχει ένα μόνο κλάδο (γιατί;).

2. Μία δεξαμενή γεμίζει με 4 βρύσες της ίδιας παροχής σε 15 ώρες. Αν οι βρύσες γίνουν 6 σε πόσες ώρες θα γεμίσει;

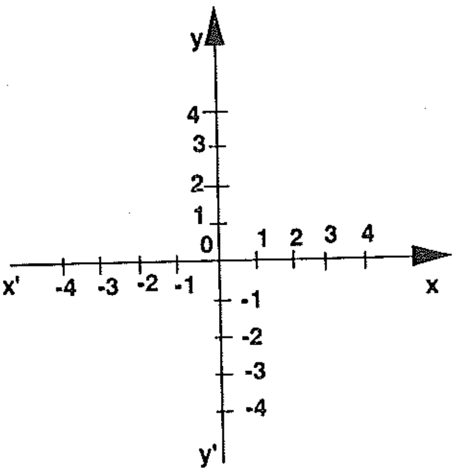
Λύση

Τα ποσά «αριθμός βρυσών» και «πλήθος ωρών» είναι αντιστρόφως ανάλογα. Άρα οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν το ίδιο γινόμενο. Έστω x οι ώρες στις οποίες θα γεμίσει η δεξαμενή με τις 6 βρύσες. Τότε .....

3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y=-\frac{5}{x}$ **όταν** $x>0$ **και**

β) $y = \frac{5}{x}$ όταν $x < 0$.



Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{5}{x}$ όταν $x > 0$ έχει ένα μόνο κλάδο στο 4ο τεταρτημόριο (γιατί;).

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{5}{x}$ όταν $x < 0$ έχει και αυτή ένα μόνο κλάδο στο 3ο τεταρτημόριο (γιατί;).

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αν τα ποσά Α και Β είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Α	-20	-15		30		100
Β		-2/3	1		1/4	

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$. Αν Α(3, 4) είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης, να προσδιορίσετε το α και να κάνετε τη γραφική παράσταση.

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{3}{x}$ και $y = 3x$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που τέμνονται οι δύο αυτές γραφικές παραστάσεις.

4. Ένας κτηνοτρόφος έχει 100 πρόβατα. Η τροφή τους φθάνει για 45 ημέρες. Πόσα πρόβατα πρέπει να πουλήσει ώστε η τροφή τους να φθάσει για 150 ημέρες;

5. 7 εργάτες μαζεύουν τις ελιές ενός ελαιώνα σε 8 ημέρες. Πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβουμε ακόμα αν θέλουμε να μαζέψουμε τις ελιές σε 2 ημέρες;

6. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E = \beta \cdot \upsilon$ όπου β η βάση του και υ το ύψος του.
α) Αν Ε σταθερό, τι συμπεραίνετε για τα ποσά «βάση» και «ύψος»;
β) Αν β σταθερό, τι συμπεραίνετε για τα ποσά «εμβαδόν Ε» και «ύψος»;
γ) Αν υ σταθερό, τι συμπεραίνετε για τα ποσά «βάση» και «εμβαδόν»;

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -3x - 7$ περιέχει τα σημεία $A(-9, 20)$ και $B(1, 9)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = f(x)$ με $f(x) = x + 2$ και $y = \varphi(x)$ με $\varphi(x) = -\frac{2}{x}$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = f(-1) \cdot \varphi(1) - 3 \cdot \varphi(6)$

β) $B = f(6) : 4 + \frac{5}{3} \cdot \varphi(-\frac{1}{2})$

3. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{13}{4}$ και άθροισμα 34.

4. Είναι σωστό να πούμε ότι «ανάλογα λέγονται δύο ποσά στα οποία, όταν αυξάνεται η τιμή του ενός, αυξάνεται και η αντίστοιχη τιμή του άλλου;»

5. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα και ποια αντιστρόφως ανάλογα:

α) Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου και η απόσταση που διανύει σε ορισμένο χρόνο.

β) Το βάρος ενός εμπορεύματος και η τιμή του.

γ) Η ταχύτητα και ο χρόνος που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο για να διανύσει μία ορισμένη απόσταση.

δ) Ο χρόνος και ο τόκος που δίνει ένα ορισμένο κεφάλαιο.

6. Είναι σωστό να πούμε ότι «Αντιστρόφως ανάλογα λέγονται δύο ποσά στα οποία, όταν αυξάνεται η τιμή του ενός, η αντίστοιχη τιμή του άλλου ελαττώνεται;»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

BASIC 9

Στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιήσαμε τις εντολές READ - DATA για να υποχρεώσουμε τον υπολογιστή να επαναλάβει ορισμένες εργασίες του προγράμματος. Κάτι παρόμοιο μπορούμε να κάνουμε με τις εντολές FOR και NEXT. Πληκτρολογήστε το επόμενο πρόγραμμα:

```
10 FOR x=2 TO 4 STEP 1     (↵)
20 PRINT 2x+3              (↵)
30 NEXT x                  (↵)
40 END                     (↵)
RUN                        (↵)
```

Τότε στην οθόνη θα εμφανιστούν οι αριθμοί:
7 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x + 3, αν x=2)
9 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x + 3, αν x=3)
11 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x + 3, αν x=4)

<u>Δηλαδή</u> υπολογίζει διαδοχικά όσες τιμές του θέσουμε αρχίζοντας από την πρώτη x = 2, αυξάνοντας κάθε φορά το βήμα κατά 1 (STEP 1) και τελειώνει όταν x = 4.
Φυσικά θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τα όρια του x καθώς και τα βήματα που κάνει κάθε φορά ανάλογα με τις ανάγκες μας.

Ένα πρόγραμμα σαν το προηγούμενο λέγεται βρόγχος (FOR - NEXT) ή κύκλωμα (FOR - NEXT) ή Loop και μπορεί να είναι μέρος ενός μεγαλύτερου προγράμματος.

Ασκήσεις

1. Να φτιάξετε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τον πίνακα της συνάρτησης y = - 3x + 2.

x	-2	-1	0	1	2
y					

2. Ομοίως για τη συνάρτηση: $y = 2x^2 + 1$.

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y							

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Στατιστική

6.1 Εικονογράμματα - Ραβδογράμματα

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

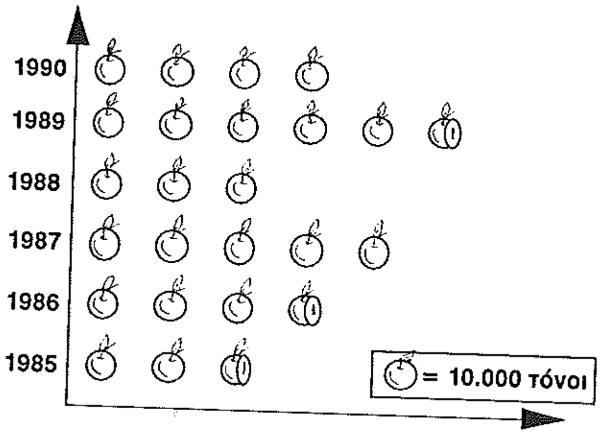
1. Τι είναι τα διαγράμματα και ποιες πληροφορίες παίρνουμε από αυτά;

1. Τα διαγράμματα είναι σχηματικές εικόνες ή διάφορα γεωμετρικά σχήματα (ευθείες, ορθογώνια, κύκλοι) που μας δίνουν εποπτικά και με σύντομο τρόπο, αριθμητικές πληροφορίες για την περιγραφή μιας κατάστασης ή για την εξέλιξη ενός φαινομένου.

2. Τι είναι τα εικονογράμματα;

2. Τα εικονογράμματα είναι τα διαγράμματα που μας δίνουν πληροφορίες με τη βοήθεια μιας επαναλαμβανόμενης εικόνας η οποία χρησιμοποιείται ως κλίμακα.

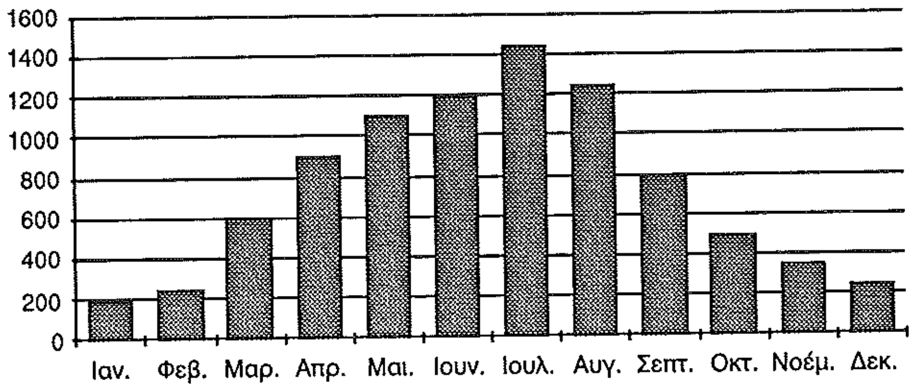
Π.χ. Οι εξαγωγές σε τόνους πορτοκαλιών που έκανε η Ελλάδα τα έτη 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, απεικονίζονται στο παρακάτω εικονόγραμμα:



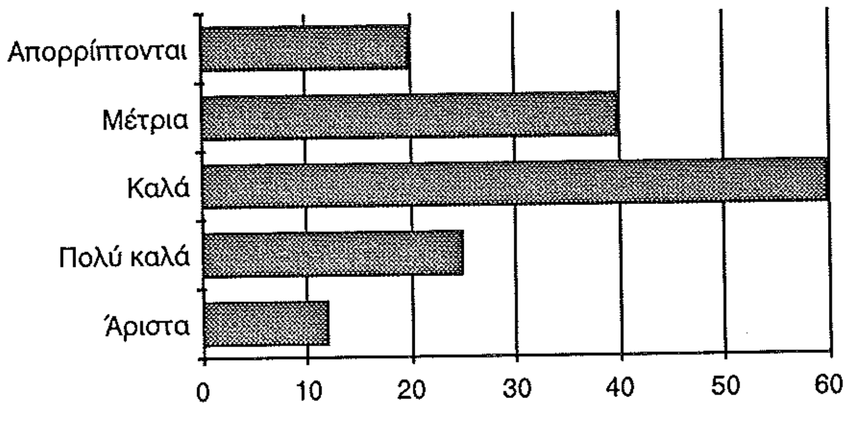
3. Τι είναι τα ραβδογράμματα;

3. Τα ραβδογράμματα είναι διαγράμματα που μας δίνουν πληροφορίες με τη βοήθεια κατακόρυφων (ή οριζόντιων) ορθογωνίων. Πολλές φορές αντί για ορθογώνια σχεδιάζονται ευθύγραμμα τμήματα. π.χ.

α) Πωλήσεις μοτοποδηλάτων κατά τη διάρκεια του 1990.

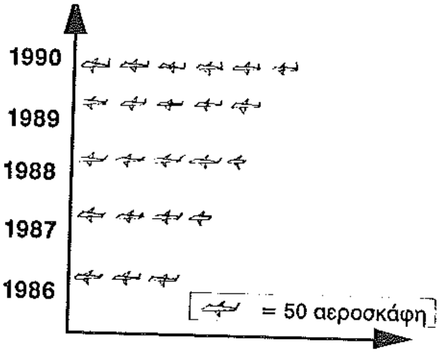


β) Επίδοση των μαθητών ενός Γυμνασίου.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Το παρακάτω εικονόγραμμα παρουσιάζει τα αεροσκάφη μιας αεροπορικής εταιρίας στην πενταετία 1986 - 1990.



Να βρείτε:

α) Πόσα αεροσκάφη είχε η εταιρία κάθε χρόνο;

β) Πόσο τοις % αυξήθηκαν τα αεροσκάφη την τριετία 1988 - 1990;

γ) Ποια χρονιά είχε η εταιρία τη μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση στον αριθμό των αεροσκαφών;

Λύση

α) Το 1986 η εταιρία είχε: 150 αεροσκάφη.
Το 1987 η εταιρία είχε: 175 αεροσκάφη.
Το 1988 η εταιρία είχε: 225 αεροσκάφη.
Το 1989 η εταιρία είχε: 250 αεροσκάφη.
Το 1990 η εταιρία είχε: 300 αεροσκάφη.

β) Τα αεροσκάφη κατά την τριετία 1988 - 90 αυξήθηκαν κατά: 300 - 225 = 75 αεροσκάφη.

γ) Βρίσκουμε την ποσοστιαία αύξηση κάθε χρόνου.

Για το 1987: $\frac{175-150}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$ ή 16,6 %

Για το 1988: $\frac{225-175}{175} = \frac{50}{175} = 0{,}285$ ή 28,5 %

Για το 1989: $\frac{250-225}{225} = \frac{25}{225} = 0{,}11$ ή 11 %

Για το 1990: $\frac{300-250}{250} = \frac{50}{250} = 0{,}2$ ή 20 %

Η εταιρία είχε τη μεγαλύτερη εκατοστιαία αύξηση το 1988.

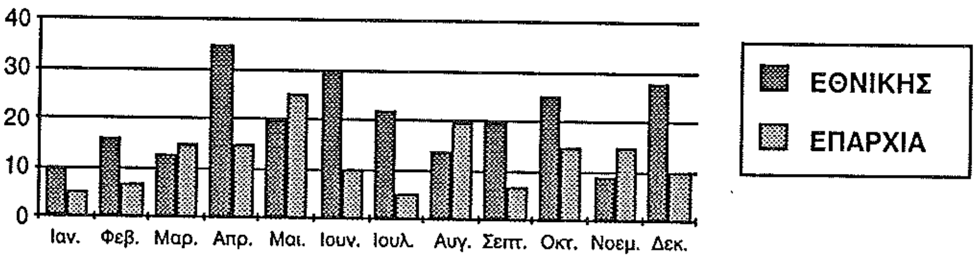
2. Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τα τροχαία ατυχήματα που έγιναν στους επαρχιακούς δρόμους και στην εθνική οδό τον προηγούμενο χρόνο.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των ατυχημάτων.

β) Ποιο μήνα παρουσιάστηκε μείωση ατυχημάτων σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα;

γ) Ποιο μήνα παρουσιάστηκε η μεγαλύτερη αύξηση ατυχημάτων σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα;

δ) Ποιο μήνα σημειώθηκαν περισσότερα από 30 ατυχήματα;



Λύση

α) Το σύνολο των ατυχημάτων είναι:
(10 + 5) + (16 + 7) + (13 + 15) + (35 + 15) + (20 + 25) + (30 + 10) + (22+ + 5) + (14 + 20) + (20 + 7) + (25 + + 15) + (9 + 15) + (28 + 10) = = 15 + 23 + 28 + 50 + 45 + 40 + 27 + 34 + 27 + 40 + 24 + 38 = 391

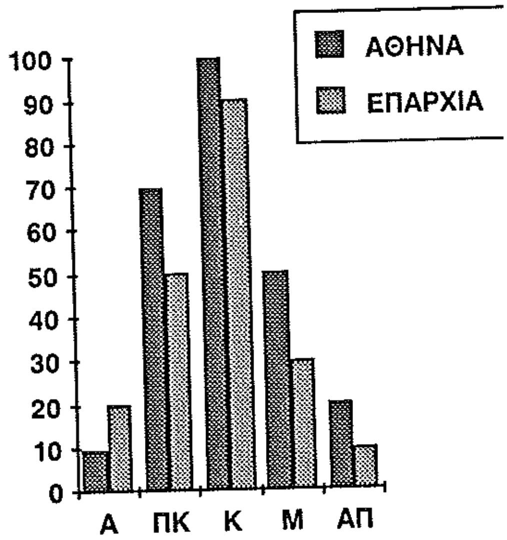
β) Μείωση είχαμε τους μήνες:
Μάιο - Ιούνιο - Ιούλιο - Σεπτέμβριο - Νοέμβριο.

γ) Από το ραβδόγραμμα βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα:
Ιαν. - Φεβ. αύξηση κατά 23 - 15 = 8 ατυχήματα.
Φεβ. - Μαρ. αύξηση κατά 28 - 23 = 5 ατυχήματα.
Μαρ. - Απρ. αύξηση κατά 50 - 28 = 22 ατυχήματα.
Απρ. - Μαι. μείωση κατά 50 - 45 = 5 ατυχήματα.
Μάι. - Ιουν. μείωση κατά 45 - 40 - 5 ατυχήματα.
Ιουν. - Ιουλ. μείωση κατά 40 - 27 = 13 ατυχήματα.
Ιουλ. - Αυγ. αύξηση κατά 34 - 27 = 7 ατυχήματα.
Αυγ. - Σεπτ. μείωση κατά 34 - 27 = 7 ατυχήματα.
Σεπτ. - Οκτ. αύξηση κατά 40 - 27 = 13 ατυχήματα.
Οκτ. - Νοεμ. μείωση κατά 40 - 24 = 16 ατυχήματα.
Νοεμ. - Δεκ. αύξηση κατά 38 - 24 = 14 ατυχήματα.
Τη μεγαλύτερη αύξηση τροχαίων ατυχημάτων, σε σχέση με τον προηγούμενο μήνα είχαμε τον Απρίλιο.

δ) Περισσότερα από 30 ατυχήματα σημειώθηκαν τους μήνες: Απρίλιο - Μάιο - Ιούνιο - Αύγουστο - Οκτώβριο - Δεκέμβριο.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Στη διπλανή στήλη έχουν σχεδιαστεί δύο ραβδογράμματα για την επίδοση των μαθητών 2 διαφορετικών Γυμνασίων. (Το ένα βρίσκεται στην επαρχία και το άλλο στην Αθήνα.) Να βρείτε:
α) Πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο της επαρχίας και πόσους το Γυμνάσιο που βρίσκεται στην Αθήνα;
β) Πόσο τοις % των μαθητών του Γυμνασίου της επαρχίας είναι αριστούχοι και πόσο τοις % των μαθητών του Γυμνασίου της Αθήνας;
γ) Ποιο Γυμνάσιο από τα δύο είχε καλύτερη επίδοση μαθητών; (άριστα - πολύ καλά)



Λύση

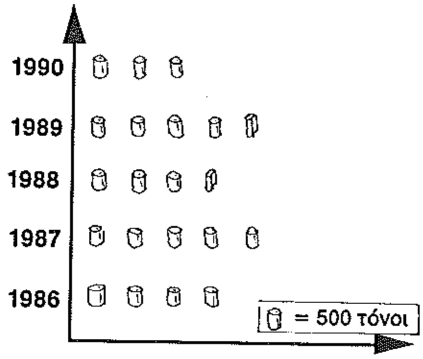
α) Για να βρούμε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο της επαρχίας αρκεί να αθροίσουμε τα ύψη των αντίστοιχων ορθογωνίων ....
Το ίδιο κάνουμε για να βρούμε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο στην Αθήνα ......
β) Στην επαρχία: Οι αριστούχοι μαθητές είναι το: 20/200 = ... % του συνόλου των μαθητών, ενώ στην Αθήνα .....
γ) ....

2. Με τη βοήθεια του εικονογράμματος να βρείτε:

α) Πόσους τόνους λάδι παρήγαγε ο νομός Α κάθε χρόνο;

β) Πόσο τοις % είναι αυξημένη η παραγωγή το 1987 σε σχέση με το 1986;

γ) Πόσο τοις % είναι μειωμένη η παραγωγή το 1990 σε σχέση με το 1987;



Λύση

α) Το 1986 παρήγαγε 4 · 500 = 2.000 τόνους λάδι.
Το 1987 παρήγαγε ....
β) Η αύξηση είναι 5 · 500 - 4 · 500 = = 2.500 - 2.000 = 500 τόνοι λάδι και αποτελεί το ..... % της παραγωγής του 1986. Επομένως η παραγωγή το 1987 αυξήθηκε κατά .... %.
γ) Ανάλογα εργαζόμαστε και για τη μείωση της παραγωγής του 1990 σε σχέση με το 1987. Δηλαδή ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μετά την καταμέτρηση των ψήφων σ' ένα εκλογικό τμήμα είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

κόμμα	Α	Β	Γ	Δ
ψήφοι	250	100	256	44

α) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.
β) Τι ποσοστό πήρε το κάθε κόμμα;

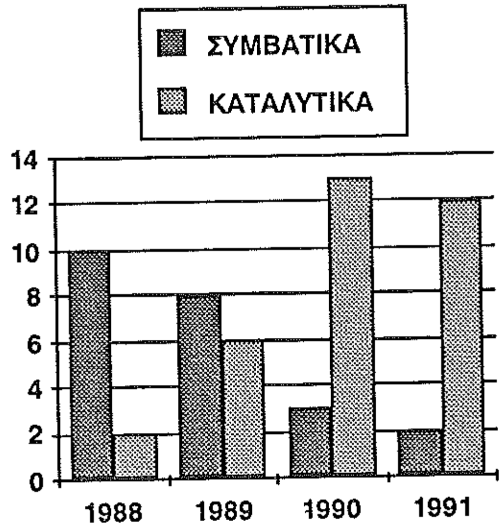
2. Η παραγωγή ντομάτας σε τόνους, ενός νομού για τα έτη 1989, 1990, 1991 και 1992 ήταν:

έτος	1989	1990	1991	1992
τόνοι	20	30	35	45

α) Να σχεδιάσετε ένα εικονόγραμμα χρησιμοποιώντας κλίμακα.
= 1. 000 κιλά ντομάτες.
β) Ποια τάση παρατηρείτε για την παραγωγή ντομάτας;

3. Με τη βοήθεια του ραβδογράμματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:
α) Πόσα αυτοκίνητα που καίνε αμόλυβδη βενζίνη (καταλυτικά) πουλήθη-

καν κάθε χρόνο;
β) Πότε παρουσιάστηκε η μεγαλύτερη αύξηση πωλήσεων σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά;
γ) Πότε παρουσιάστηκε η μικρότερη επί τοις % μείωση στις πωλήσεις συμβατικών αυτοκινήτων;
δ) Πόσα αυτοκίνητα είχαν πουληθεί μέχρι και το 1991;



6. 2 Κυκλικά διαγράμματα - Χρονογράμματα

Θεωρία

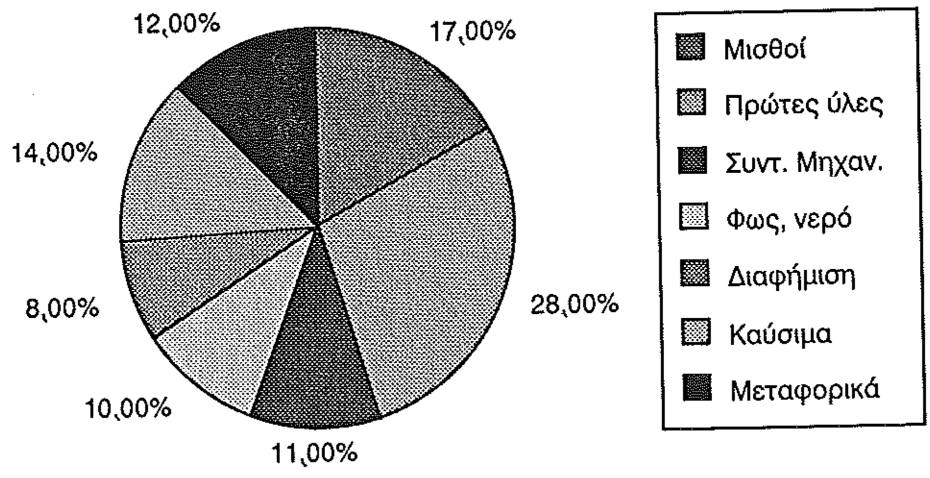
Ερωτήσεις

1. Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα;

Απαντήσεις

1. **Το κυκλικό διάγραμμα** είναι το διάγραμμα που μας δίνει πληροφορίες για τα διάφορα μέρη ενός ποσού, με τη βοήθεια κυκλικών τομέων ενός κυκλικού δίσκου. Δηλαδή είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κομμάτια (κυκλικοί τομείς) ώστε το κάθε κομμάτι να είναι ανάλογο προς το μέρος του ποσού που αντιπροσωπεύει. Ο κυκλικός δίσκος παριστάνει ολόκληρο το ποσό. π.χ.

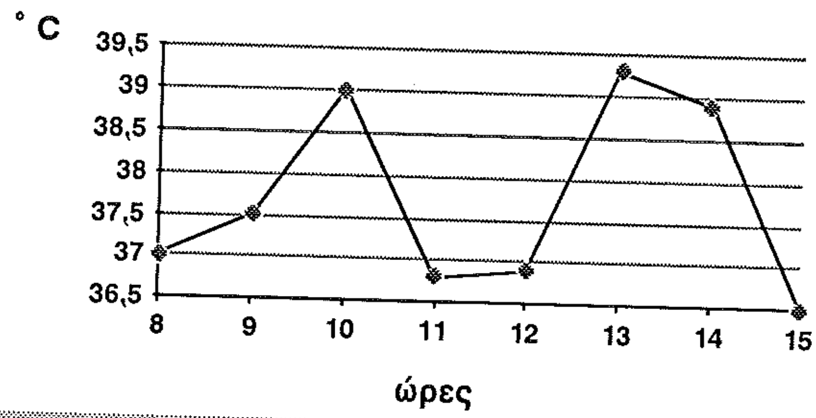
Μηνιαία έξοδα μιας επιχείρησης.



2. Τι είναι το χρονόγραμμα;

2. Το χρονόγραμμα είναι το διάγραμμα που μας δίνει πληροφορίες για την εξέλιξη ενός φαινομένου σε διάφορες χρονικές στιγμές. Σε ένα χρονόγραμμα, ο άξονας των τετμημένων είναι διαιρεμένος σε ίσα διαστήματα του χρόνου (ώρες, ημέρες, εβδομάδες, έτη.) π.χ.

Διάγραμμα θερμοκρασίας ασθενούς.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που δείχνει την κατανομή του Ελληνικού πληθυσμού το 1981 κατά περιοχές.

Περιοχές	Πληθυσμός
Αστικές	4.860.489
Ημιαστικές	2.918.769
Αγροτικές	2.000.183
Σύνολο	9.779.441

Να παρουσιάσετε τον πίνακα με κυκλικό διάγραμμα.

Λύση

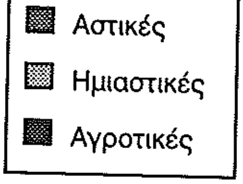
Υπολογίζουμε το μέρος της πλήρους γωνίας (360°) που αντιστοιχεί σε κάθε κατανομή.

Αστικές: $\frac{4.860.489}{9.779.441} \cdot 360° \approx 180°$

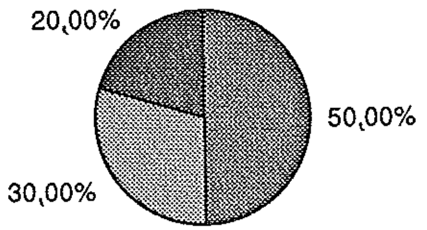
Ημιαστικές: $\frac{2.918.769}{9.779.441} \cdot 360° \cong 107°$

Αγροτικές: $\frac{2.000.183}{9.779.441} \cdot 360° \cong 73°$

Σχεδιάζουμε στη συνέχεια έναν κυκλικό δίσκο και με κορυφή το κέντρο του χαράζουμε διαδοχικά τις παραπάνω γωνίες.



Πληθυσμός



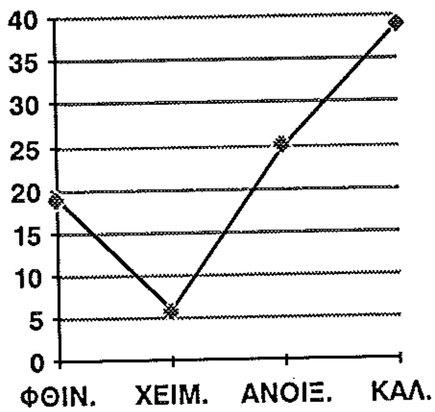
2. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη μέση θερμοκρασία μιας πόλης κατά τη διάρκεια του έτους 1992.

Φθινόπωρο	Χειμώνας	Άνοιξη	Καλοκαίρι
18°C	6°C	25°C	38°C

Να σχεδιάσετε το χρονόγραμμα της εξέλιξης της μέσης θερμοκρασίας των 4 εποχών του χρόνου για την πόλη αυτή.

Λύση

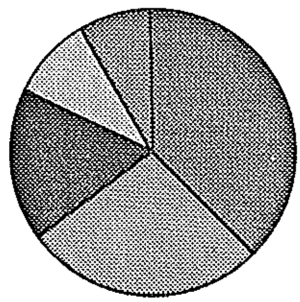
Κατασκευάζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Στον οριζόντιο άξονα x'x των τετμημένων τοποθετούμε τις χρονικές στιγμές (σε εποχές) και στον άξονα y'y των τεταγμένων τη θερμοκρασία (σε °C).



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει την έκταση (σε εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα) των πέντε Ηπείρων της Γης. Αν η συνολική έκταση και των πέντε είναι $114{,}8 \cdot 10^6$ Km² να βρείτε την έκταση κάθε μιας.

Ήπειροι



- Ασία 138°
- Αφρική 96°
- Αμερική 65°
- Ευρώπη 34°
- Ωκεανία 27°

Λύση

Η έκταση της Ασίας είναι:

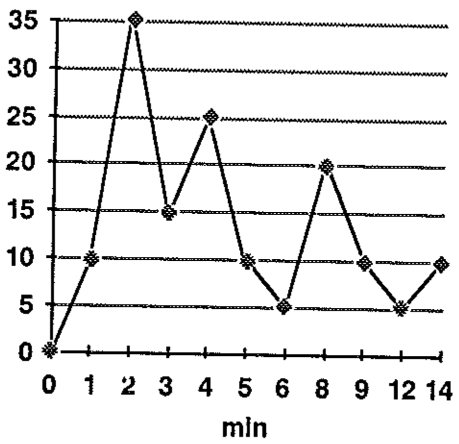
$$\frac{138°}{360°} \cdot 114{,}8 \cdot 10^6 = \frac{15842{,}4}{360} \cdot 10^6 =$$

$= 44 \cdot 10^6$ Km².

Η έκταση της Αφρικής είναι:

$$\frac{96°}{360°} \cdot 114{,}8 \cdot 10^6 = ...$$

2. Το παρακάτω χρονόγραμμα παρουσιάζει τη διάρκεια, σε πρώτα λεπτά, των τηλεφωνικών συνδιαλέξεων μιας οικογένειας.



Αν υποθέσουμε ότι η συνδιάλεξη χρεώνεται 5 δρχ. το πρώτο λεπτό, να βρείτε:

α) Τον αριθμό των τηλεφωνημάτων.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

min.	0	1	2	3	4	5	6	7
τηλ.								

min.	8	9	10	11	12	13	14	15
τηλ.								

γ) Πόσα είναι τα έξοδα της οικογένειας για τηλεφωνήματα;

Λύση

α) Με τη βοήθεια του χρονογράμματος βρίσκουμε ότι:

10 τηλεφωνήματα είχαν διάρκεια 1 min

35 τηλεφωνήματα είχαν διάρκεια 2 min

....

β) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος συμπληρώνουμε τον πίνακα......

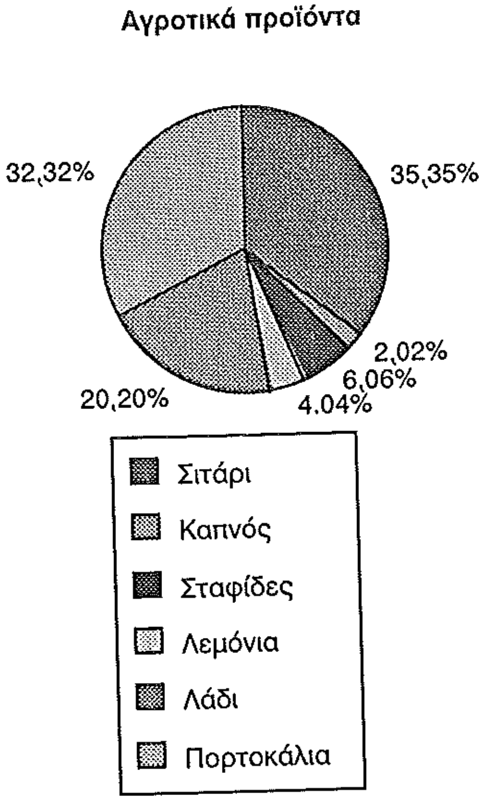
γ) Αθροίζουμε τα πρώτα λεπτά (min) των τηλεφωνικών συνδιαλέξεων και ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλήθηκαν το πρώτο εξάμηνο του 1992 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα.

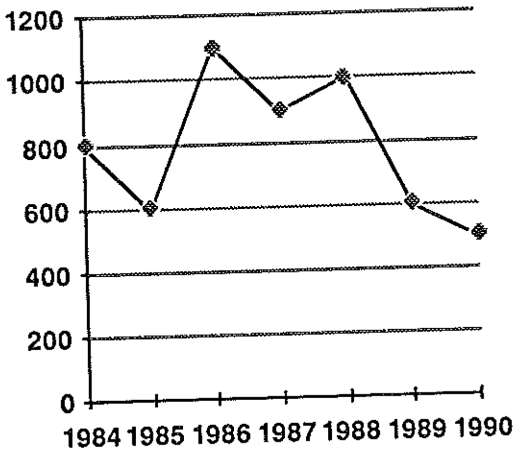
Κατηγορία	Αριθμός αυτ.
επιβατικά	10.200
ταξί	1.550
Λεωφορεία	500
Φορτηγά	250
Σύνολο	12.500

2. Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις εξαγωγές αγροτικών προϊόντων ενός νομού.



α) Να υπολογίσετε τα ποσοστά σε μοίρες.
β) Να υπολογίσετε την κάθε εξαγωγή σε τόνους αν το σύνολο των εξαγωγών είναι $2 \cdot 10^6$ τόνοι.

3. Το παρακάτω χρονόγραμμα δείχνει την περιεκτικότητα (σε δισεκατομμύρια m³) νερού μιας λίμνης που συγκεντρώνει το νερό της βροχής.



α) Να βρείτε ποια χρονιά είχε τη μεγαλύτερη περιεκτικότητα σε νερό.
β) Ποια χρονιά είχαμε τη μικρότερη περιεκτικότητα σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά;

4. Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα μηνιαία έξοδα της οικογένειάς σας.

6.3 Η έννοια του δείγματος

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι είναι η Στατιστική και τι σκοπό έχει;

Απαντήσεις

1. **Η Στατιστική** είναι ένας κλάδος των εφηρμοσμένων μαθηματικών που έχει ως σκοπό τη συλλογή, την επεξεργασία και την παρουσίαση διάφορων

πληροφοριών που προκύπτουν από την εξέταση των στοιχείων ενός συνόλου ως προς κάποια χαρακτηριστική ιδιότητά τους.

2. Τι λέγεται πληθυσμός και τι άτομα του πληθυσμού;

2. Πληθυσμός λέγεται το σύνολο που εξετάζουμε ως προς ένα χαρακτηριστικό του ή μια ιδιότητά του.
Άτομα λέγονται τα αντικείμενα του συνόλου αυτού που μπορεί να είναι έμψυχα ή άψυχα. Π.χ. Πληθυσμός είναι:

α) Ένα σύνολο οικογενειών, όταν κάθε οικογένεια εξετάζεται π.χ. ως προς τον αριθμό των μελών της.

β) Ένα σύνολο μαθητών, όταν κάθε μαθητής εξετάζεται ως προς τον αριθμό των απουσιών του (ή ως προς τη διαγωγή του).

γ) Ένα σύνολο αυτοκινήτων, όταν κάθε αυτοκίνητο εξετάζεται ως προς τον κυβισμό του (ή ως προς την εκπομπή καυσαερίων).

3. Τι ονομάζεται δείγμα του πληθυσμού, και τι στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις;

3. Δείγμα ονομάζεται το μέρος του πληθυσμού που εξετάζουμε ως προς κάποια ιδιότητά του.
Στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις ονομάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εξέταση των ατόμων του δείγματος.

4. Ποια είναι η πρακτική ανάγκη που επέβαλλε την εξέταση του δείγματος, αντί ολόκληρου του πληθυσμού;

3. Η χρησιμοποίηση του δείγματος αντί για ολόκληρο τον πληθυσμό επιβάλλεται από την πρακτική δυσκολία ή το οικονομικό κόστος της εξέτασης όλων των ατόμων ενός πληθυσμού. Έτσι εξετάζουμε το δείγμα (υποσύνολο) του πληθυσμού, φροντίζοντας αυτό να είναι αντιπροσωπευτικό και κατάλληλα επιλεγμένο.

π.χ.

α) Υποθέτουμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε πόσοι από τους κατοίκους της Αθήνας έχουν εξοχική κατοικία. Επειδή είναι δύσκολο να ερωτηθούν όλοι, εξετάζουμε μόνο ένα μέρος από αυτούς, επιλέγοντάς τους από τις συνοικίες της Αθήνας. Έτσι βγάζουμε κατά προσέγγιση τα συμπεράσματά μας.

β) Υποθέτουμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε την ποιότητα 5.000 κονσερβών που παράγει ένα εργοστάσιο την ημέρα. Επειδή δεν είναι δυνατόν να ανοίξουμε και τις 5.000 κονσέρβες (ασύμφορο οικονομικά) γι' αυτό παίρνουμε ένα δείγμα κονσερβών π.χ. 15 ή 20 κουτιά και εξετάζουμε την ποιότητά τους.

6.4 Κατανομή συχνοτήτων - Κατανομή σχετικών συχνοτήτων

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζεται συχνότητα μιας τιμής (ή παρατήρησης;)

1. **Συχνότητα μιας τιμής** ονομάζεται ο αριθμός ν_i που φανερώνει, σε πόσα άτομα του δείγματος (ή πληθυσμού) εμφανίζεται η τιμή (ή παρατήρηση) αυτή.

Π.χ. Οι επόμενες 20 παρατηρήσεις αναφέρονται στην επίδοση 20 μαθητών στο διαγώνισμα των Μαθηματικών.
18, 13, 10, 11, 10, 9, 15, 14, 17, 19, 13, 14, 17, 16, 16, 8, 9, 16, 16, 18.
Εδώ βλέπουμε ότι 4 μαθητές πήραν στο διαγώνισμα 16. Γι' αυτό λέμε ότι η τιμή 16 ή η παρατήρηση 16 έχει συχνότητα 4.

2. Τι λέγεται επικρατούσα τιμή;

2. **Επικρατούσα τιμή** λέγεται η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Στο προηγούμενο παράδειγμα η επικρατούσα τιμή είναι η παρατήρηση 16.

3. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας παρατήρησης (ή τιμής;)

3. **Σχετική συχνότητα** μιας παρατήρησης (ή τιμής) ονομάζουμε το λόγο της συχνότητάς της προς το πλήθος ν των ατόμων του δείγματος δηλαδή $\frac{\nu_i}{\nu}$ και

και εκφράζει το μέρος του δείγματος που παίρνει την τιμή αυτή. Η σχετική συχνότητα συνήθως εκφράζεται σε ποσοστό επί τοις % δηλ. $\frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$.

π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα η σχετική συχνότητα της τιμής 18 είναι

$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ ή $\frac{2}{20} \cdot 100 = \frac{1}{10} \cdot 100 = \frac{100}{10} = 10\,\%$

Μπορούμε να πούμε ότι 10 % των μαθητών πήραν στο διαγώνισμα των Μαθηματικών 18.

4. Τι εννοούμε λέγοντας κατανομή συχνοτήτων και τι κατανομή σχετικών συχνοτήτων;

4. **Κατανομή συχνοτήτων** και **κατανομή σχετικών συχνοτήτων** ονομάζουμε τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες αντίστοιχα όλων των παρατηρήσεων που παρουσιάζονται με πίνακες για την εύκολη και γρήγορη μελέτη τους.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Εξετάζουμε 30 μαθητές ενός Γυμνασίου ως προς την κατάσταση (της υγείας) των δοντιών τους και σχηματίζουμε την παρακάτω σειρά παρατηρήσεων.

Κ	Α	Κ	Μ	ΚΑ	Α	Μ	Μ
Κ	Α	Α	ΚΑ	Α	Μ	Α	ΚΑ
ΚΑ	Μ	Μ	Μ	Α	Κ	Κ	Α
ΚΑ	Α	Μ	Κ	Κ	ΚΑ		

όπου: (Α = άριστη κατάσταση, Κ = καλή, Μ = μέτρια, ΚΑ = κακή)

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

γ) Τι ποσοστό των μαθητών έχουν σε άριστη κατάσταση τα δόντια τους;

Λύση

α) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα στον οποίο έχουμε τη διαλογή των παρατηρήσεων καθώς και τις αντίστοιχες συχνότητες και σχετικές συχνότητες.

Κατάσταση δοντιών	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
ΚΑ	~~IIII~~ I	6	20
Μ	~~IIII~~ III	8	26,7
Κ	~~IIII~~ II	7	23,3
Α	~~IIII~~ IIII	9	30
Σύνολο		30	100

β) Η επικρατούσα τιμή είναι η Α (άριστη).

γ) Από τον πίνακα κατανομής των σχετικών συχνοτήτων φαίνεται αμέσως ότι 30 % των μαθητών έχουν σε άριστη κατάσταση την υγεία των δοντιών τους.

2. Οι 18 ποδοσφαιρικές ομάδες που μετέχουν στο ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα της Α' Εθνικής κατηγορίας σημείωσαν την Κυριακή τα παρακάτω τέρματα (γκολ):

2	0	2	0	2	1	1	1	3
0	2	1	3	2	1	4	2	2

α) Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

γ) Να παραστήσετε την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων με κυκλικό διάγραμμα.

Λύση

Κάνουμε τη διαλογή των παρατηρήσεων και στη συνέχεια τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Τέρματα	Διαλογή	Συχνότητα (ομάδας)	Σχετική συχνότητα
0	III	3	16,6
1	~~IIII~~	5	27,8
2	~~IIII~~ II	7	38,9
3	II	2	11,1
4	I	1	5,6
Σύνολο		18	100

β) Η επικρατούσα τιμή είναι τα 2 τέρματα.

γ) Υπολογίζουμε κατ' αρχάς το μέρος της πλήρους γωνίας (360°) που αντιστοιχεί σε κάθε σχετική συχνότητα.

Έτσι έχουμε:

0 τέρματα: $\frac{3}{18} \cdot 360° = 60°$

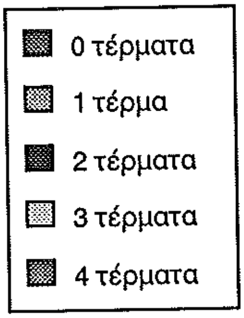
1 τέρμα: $\frac{5}{18} \cdot 360° = 100°$

2 τέρματα: $\frac{7}{18} \cdot 360° = 140°$

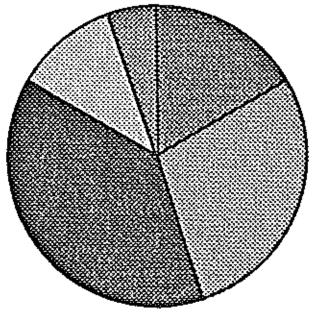
3 τέρματα: $\frac{2}{18} \cdot 360° = 40°$

4 τέρματα: $\frac{1}{18} \cdot 360° = 20°$

Σχεδιάζουμε έναν κυκλικό δίσκο και με κορυφή το κέντρο του χαράζουμε διαδοχικά τις παραπάνω γωνίες.



Τέρματα



3. Ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων παρουσιάζει το επίπεδο της μόρφωσης 50 κατοίκων μιας επαρχιακής πόλης με πληθυσμό 17.080 κατοίκων.

Γραμματικές γνώσεις	Συχνότητα
Α (αναλφάβητος)	4
Δ (δημοτικό)	8
Γ (γυμνάσιο)	11
Τ (τεχνική σχολή)	8
Λ (λύκειο)	12
Π (πανεπιστήμιο)	7
Σύνολο	50

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων.

β) Να παραστήσετε την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων με ραβδόγραμμα.

γ) Πόσοι επί τοις % έχουν Γυμνασιακή μόρφωση;

Λύση

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Α είναι: $\frac{4}{50} \cdot 100 = 8$.

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Δ είναι: $\frac{8}{50} \cdot 100 = 16$.

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Γ είναι: $\frac{11}{50} \cdot 100 = 22$.

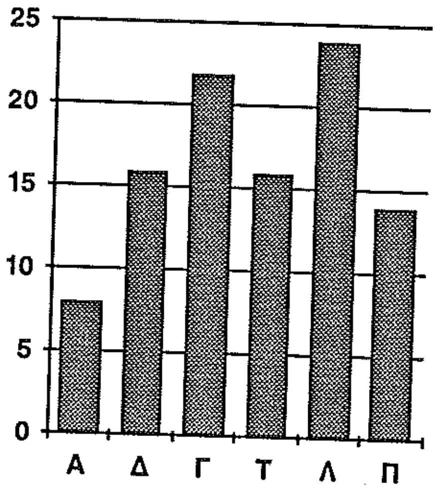
Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Τ είναι: $\frac{8}{50} \cdot 100 = 16$.

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Λ είναι: $\frac{12}{50} \cdot 100 = 24$.

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης Π είναι: $\frac{7}{50} \cdot 100 = 14$.

Επομένως ο πίνακας κατανομής των συχνοτήτων και των σχετικών συχνοτήτων είναι ο:

Γραμματικές γνώσεις	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Α	4	8
Δ	8	16
Γ	11	22
Τ	8	16
Λ	12	24
Π	7	14
Σύνολο	50	100



γ) Το 22 % των κατοίκων της επαρχιακής πόλης έχουν γυμνασιακή μόρφωση.

4. Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

Αποτέλεσμα	Μαθητές	%
Προάγονται	......	64,5
Μεταξεταστέοι	48	....
Απορρίπτονται	....	....
Σύνολο	50	100

Λύση

Έστω x ο αριθμός των μαθητών που προάγονται. Τότε:

$$\frac{x}{200} \cdot 100 = 64,5 \text{ ή } \frac{100x}{200} = 64,5$$
$$\text{ή } \frac{x}{2} = 64,5 \text{ ή } x = 2 \cdot 64,5 = 129$$

Η σχετική συχνότητα της παρατήρησης «μεταξεταστέοι» είναι:

$$\frac{48}{200} \cdot 100 = \frac{4800}{200} = \frac{48}{2} = 24\ \%$$

Οι μαθητές που απορρίπτονται είναι:
200 - (129 + 48) = 200 - 177 = 23.
Οπότε η σχετική συχνότητα της παρατήρησης «απορρίπτονται» είναι:

$$\frac{23}{200} \cdot 100 = \frac{2300}{200} = \frac{23}{2} = 11,5\ \%,$$

επομένως:

Αποτέλεσμα	Μαθητές	%
Προάγονται	129	64,5
Μεταξεταστέοι	48	24
Απορρίπτονται	23	11,5
Σύνολο	50	100

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Οι επόμενες παρατηρήσεις αναφέρονται στη βαθμολογία που πήραν δύο τμήματα της Β' τάξεως Γυμνασίου σε ένα ωριαίο διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

1ο τμήμα

14	18	9	11	19	9	9
11	18	16	8	18	16	16
8	15	9	9	18	17	

2ο τμήμα

13	17	8	12	8	17	10
9	17	10	9	10	17	10
10	17	10	13	11	18	8
16	15	14	13			

α) Να κατασκευάσετε κοινό πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Πόσο τοις % από το πρώτο τμήμα και πόσο τοις % από το δεύτερο τμήμα βρίσκεται κάτω από τη βάση;
γ) Πόσο τοις % από το πρώτο και πόσο τοις % από το δεύτερο τμήμα είναι πάνω από 15;
δ) Ποιο τμήμα έχει την καλύτερη επίδοση;

Λύση

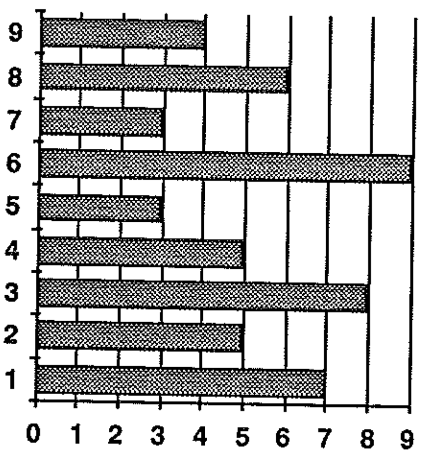
α) Το πρώτο τμήμα αποτελείται από 20 μαθητές, ενώ το δεύτερο τμήμα αποτελείται από 25 μαθητές. Κάνουμε διαλογή των παρατηρήσεων και στη συνέχεια κατασκευάζουμε κοινό πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία	Συχνότητα		Σχ. Συχνότητα %	
	1ο	2ο	1ο	2ο
8	2	3	10	12
9	1	2	5	8
10	4	6	20	24
11	2	1	10	4
12	–	1	–	4
13	–	3	–	12
14	1	1	5	4
15	1	1	5	4
16	3	1	15	4
17	1	5	5	20
18	4	1	20	4
19	1	–	5	–
	20	25	100	100

β) Κάτω από τη βάση, στο 1ο τμήμα, βρίσκεται το 10 + 5 = 15 %, ενώ κάτω από τη βάση, στο 2ο τμήμα βρίσκεται το ....
γ) Πάνω από το 15, στο 1ο τμήμα, βρίσκεται το 15 + 5 +20 + 5 = 45 %, ενώ πάνω από το 15, στο 2ο τμήμα, βρίσκεται το ....
δ) Καλύτερη επίδοση έχει το 1ο τμήμα (γιατί;)

2. Το ραβδόγραμμα του παρακάτω σχήματος δείχνει τα μετάλλια που πήραν ορισμένες χώρες στους Ολυμπιακούς αγώνες στίβου.
α) Πόσες από τις χώρες που μετείχαν σε αυτούς τους Ολυμπιακούς αγώνες στίβου πήραν μετάλλια;
β) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;
γ) Πόσες χώρες πήραν πάνω από 5 μετάλλια;

Μετάλια



Λύση

α) Το πλήθος των χωρών που πήραν μετάλλια είναι τόσο όσο το άθροισμα των συχνοτήτων των μεταλίων. Έτσι έχουμε:
Το 1 μετάλιο έχει συχνότητα 7 (δηλαδή 7 χώρες πήραν από 1 μετάλιο).
Τα 2 μετάλια έχουν συχνότητα 5.
Τα 3 μετάλια έχουν συχνότητα 8.
....
β) Η επικρατούσα τιμή είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα δηλαδή .....
γ) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Οι παρακάτω παρατηρήσεις αναφέρονται στις προτιμήσεις 40 μαθητών ενός Γυμνασίου για την ημέρα της εβδομάδας που θα γίνει η ημερήσια εκδρομή του σχολείου τους.

Δ	Τε	Τε	Τρ	Τε	Πε	Πα
Τρ	Τρ	Δ	Τε	Πα	Πε	Δ
Τρ	Τε	Πα	Πε	Τρ	Δ	Τε
Πα	Τε	Τε	Πα	Τε	Τε	Τρ
Δ	Πε	Δ	Δ	Τε	Τε	Τρ
Δ	Πε	Τε	Πα	Τε		

α) Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων των παρατηρήσεων αυτών.
β) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;

2. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα και το κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στον πίνακα:

Ανεξεταστέοι μαθητές Β' τάξης

Μάθημα	Συχνότητα
Αρχ. Ελληνικά	5
Μαθηματικά	8
Φυσική	9
Χημεία	6
Ιστορία	4
Σύνολο	32

3. Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

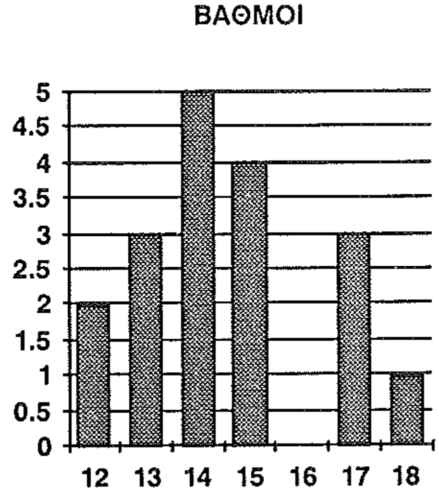
Αρ. Απουσιών	Συχνότητα	Σχ. Συχν.
0	......	20
1	18	....
2	....	....
3	....	0
4	9	....
Σύνολο	45	....

4. Το διπλανό ραβδόγραμμα δείχνει τους βαθμούς που πήραν οι 18 ομάδες ποδοσφαίρου Α' Εθνικής κατηγορίας στον Α' γύρο.

α) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή και πόσοι βαθμοί αντιστοιχούν σ' αυτή;

β) Ποια είναι η σχετική συχνότητα των 15 βαθμών;

γ) Πόσες ομάδες πήραν 14 βαθμούς και κάτω;



6.5 Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι είναι η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων;

1. Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων είναι ο χωρισμός του διαστήματος των τιμών σε μικρότερα διαστήματα, συνήθως του ίδιου **πλάτους**, τα οποία λέγονται **κλάσεις** και η μέτρηση (διαλογή) των παρατηρήσεων που βρίσκονται μέσα σε κάθε κλάση. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε συχνότητα μιας ορισμένης τιμής αλλά συχνότητα και σχετική συχνότητα μιας κλάσεως.

2. Πότε κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων;

2. Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων κάνουμε όταν η ιδιότητα (χαρακτηριστικό) ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα παίρνει πολλές τιμές διαφορετικές μεταξύ τους και κάθε μία εμφανίζεται με μικρή συχνότητα. Ο πίνακας συχνοτήτων τότε δεν απλουστεύει τη μελέτη των στατιστικών στοιχείων.

3. Τι ονομάζεται: α) άκρα της κλάσεως, β) πλάτος της κλάσεως,γ) κέντρο της κλάσεως.

3. **α) Άκρα της κλάσεως** λέγονται τα άκρα των διαστημάτων στα οποία χωρίσαμε το μεγάλο διάστημα των τιμών. π.χ.

Χωρίζουμε το διάστημα [130, 160] σε 6 μικρότερα (κλάσεις), έστω τις [130, 135], [135, 140] , [140, 145] , [145, 150] , [150, 155] , [155, 160].
Άκρα είναι τα 130 και 135. Όμοια τα 135 και 140 κ.λπ.

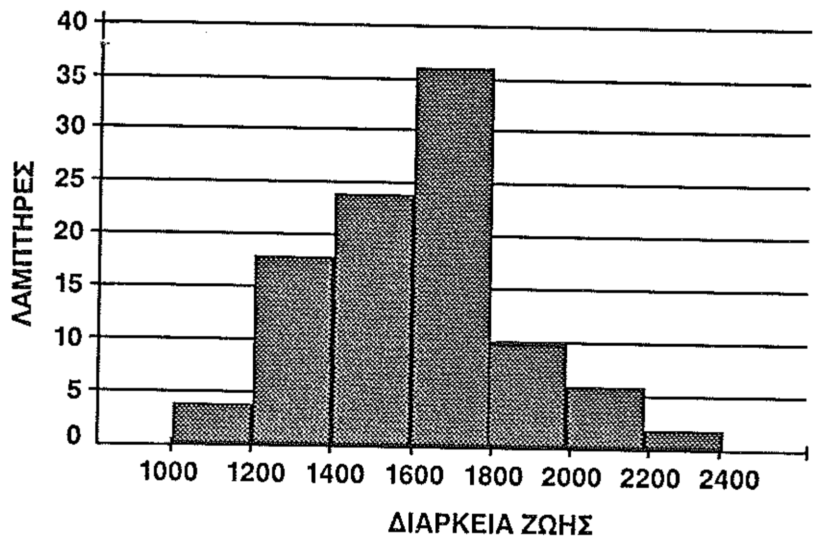
β) Πλάτος της κλάσεως λέγεται η διαφορά των άκρων μιας κλάσεως.
π.χ. Στις παραπάνω κλάσεις το πλάτος είναι: 135 - 130 = 5.

γ) Κέντρο της κλάσεως λέγεται το ημιάθροισμα των άκρων μιας κλάσεως.
π.χ. Το κέντρο της κλάσεως [130, 135] είναι:

$$\frac{130+135}{2} = \frac{265}{2} = 132{,}5$$

4. Τι είναι το ιστόγραμμα και από τι αποτελείται;

4. Ιστόγραμμα λέγεται το σχήμα που παριστάνει μια ομαδοποιημένη κατανομή. Αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια που έχουν ως βάσεις τις κλάσεις της κατανομής. Αν οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος, τότε και οι βάσεις των ορθογωνίων έχουν το ίδιο μήκος. Το ύψος τους είναι ίσο με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσεως.π.χ.
Το παρακάτω ιστόγραμμα παριστάνει τη διάρκεια ζωής 100 ηλεκτρικών λαμπτήρων.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Η θερμοκρασία σε 40 πόλεις της Ελλάδας στις 2 Οκτωβρίου 1992 σε βαθμούς Κελσίου είχε ως εξής:

13	7	18	6	7	17	10	8	12	7
8	14	12	7	12	11	9	7	10	16
15	16	12	14	10	18	17	10	15	9
13	11	12	13	15	10	18	19	9	8

α) Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη θερμοκρασία που σημειώθηκε.

β) Να γίνει ομαδοποίηση των στατιστικών δεδομένων σε κλάσεις πλάτους 2° C.

γ) Ποια είναι η επικρατέστερη κλάση;

Λύση

α) Η ελάχιστη θερμοκρασία ήταν 6° C, ενώ η μέγιστη θερμοκρασία ήταν19°C.

β)

Θερμοκρασία ° C	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
6 - 8	卌 I	6	15
8 - 10	卌 I	6	15
10 - 12	卌 II	7	17,5
12 - 14	卌 III	8	20
14 - 16	卌	5	12,5
16 - 18	IIII	4	10
18 - 20	IIII	4	10
Σύνολο		40	100

γ) Η επικρατέστερη κλάση είναι η 12 - 14 γιατί έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

2. Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες δρχ.) μιας επιχείρησης σε 50 εργάσιμες μέρες είναι:

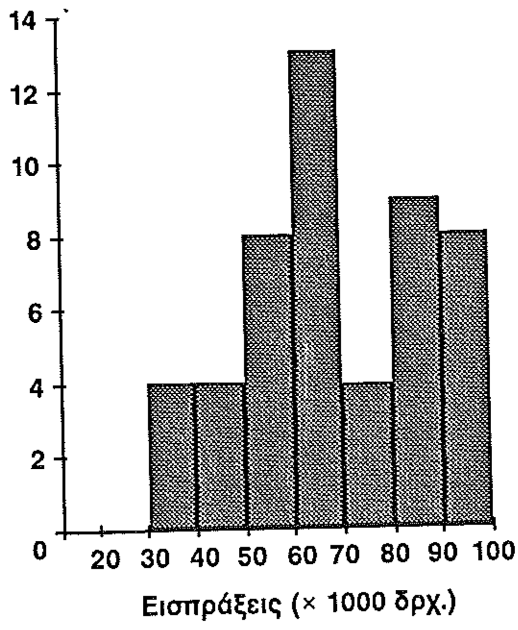
63	54	55	62	56	61	57	60	31	88
53	31	45	42	50	63	46	44	34	50
78	96	87	94	93	67	66	92	95	89
88	99	84	86	90	84	86	90	85	59
64	76	65	74	75	66	68	32	67	60

α) Να γίνει η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε κλάσεις πλάτους 10 χιλιάδες δρχ.

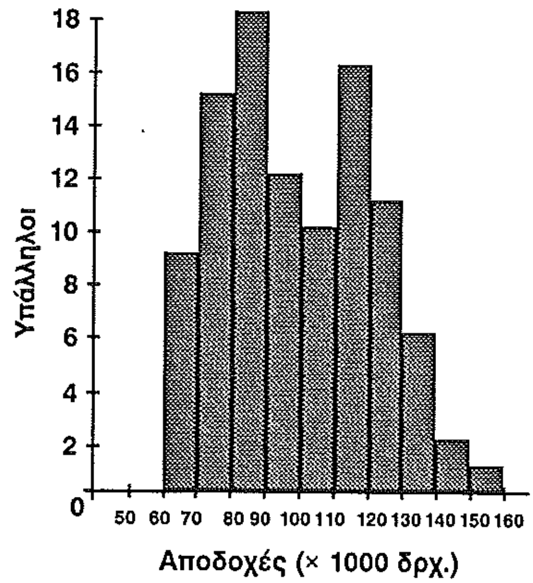
β) Να γίνει το ιστόγραμμα.

Λύση

Εισπράξεις σε χιλ. δρχ.	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
30 - 40	IIII	4	8
40 - 50	IIII	4	8
50 - 60	卌 III	8	16
60 - 70	卌 卌 III	13	26
70 - 80	IIII	4	8
80 - 90	卌 IIII	9	18
90 - 100	卌 III	8	16
Σύνολο		50	100



3. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο παρακάτω ιστόγραμμα, το οποίο παρουσιάζει τις μηνιαίες αποδοχές των υπαλλήλλων μιας εταιρίας.



α) Πόσοι υπάλληλοι εργάζονται στην εταιρία;

β) Πόσοι υπάλληλοι έχουν μηνιαίες αποδοχές μέχρι 100.000 δρχ. και πόσοι πάνω από 100.000 δρχ.;

Λύση

Από το ιστόγραμμα βλέπουμε ότι οι αποδοχές είναι ομαδοποιημένες σε 10 κλάσεις πλάτους 10. Από το ύψος των ορθογωνίων εύκολα βρίσκουμε τον αριθμό των υπαλλήλων των οποίων οι μηνιαίες αποδοχές βρίσκονται μέσα στην αντίστοιχη κλάση (βάση του ορθογωνίου). Έτσι θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Μηνιαίες αποδοχές(χιλ. δρχ.)	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
60 - 70	9	9%
70 - 80	15	15%
80 - 90	18	18%
90 - 100	12	12%
100 - 110	10	10%
110 - 120	16	16%
120 - 130	11	11%
130 - 140	6	6%
140 - 150	2	2%
150 - 160	1	1%
Σύνολο	100	100

α) Στην εταιρία εργάζονται 100 υπάλληλοι. (προσθέτουμε τις συχνότητες)

β) Μέχρι 100.000 δρχ. παίρνουν:
9 + 15 + 18 + 12 = 54 υπάλληλοι.
Πάνω από 100.000 δρχ. παίρνουν οι υπόλοιποι δηλ. 100 - 54 = 46 υπάλληλοι.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Οι επόμενοι αριθμοί δίνουν τη βαθμολογία των μαθητών της Β' τάξης ενός Γυμνασίου στα Μαθηματικά.

16	19	9	12	11	8	15	13	19	7
8	7	6	13	10	11	10	14	7	12
10	12	14	14	19	13	9	12	8	10
12	14	11	14	8	18	10	19	9	10
13	12	13	13	10	15	16	7	13	12
9	8	10	11	12	10	16	15	19	16
19	9	13	10	9	12	9	18	14	13
17	16	11	17	15	19	17	12	7	15

α) Να γίνει η ομαδοποίηση των δεδομένων σε κλάσεις πλάτους 3.
β) Να βρεθεί το κέντρο της κάθε κλάσεως.
γ) Να βρεθεί η επικρατέστερη κλάση.
δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν κάτω από 11, και το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν πάνω από 16.
ε) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα.

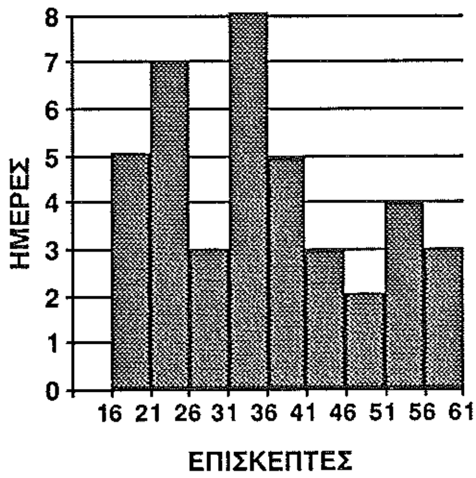
Λύση

α) Οι κλάσεις είναι: 5 - 8, ..., 17 - 20.
Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
5 - 8	IIII	5	6,25
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
17 - 20	....	....	....
Σύνολο		80	100

β) Το κέντρο της κλάσεως 5 - 8 είναι:
(8 + 5) : 2 = 13 : 2 = 6,5
....
γ) Η επικρατέστερη κλάση είναι η ....
δ) Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν κάτω από 11 είναι ......
ε) ....

2. Το επόμενο ιστόγραμμα παρουσιάζει την κατανομή των επισκεπτών ενός Αρχαιολογικού Μουσείου σε 40 εργάσιμες ημέρες.
α) Να βρείτε το πλάτος των κλάσεων.
β) Να βρείτε την επικρατέστερη κλάση.
γ) Να γίνει κατανομή σχετικών συχνοτήτων.



Λύση

α) Για να βρούμε το πλάτος των κλάσεων αρκεί να αφαιρέσουμε τα άκρα τους. Το πλάτος της κλάσεως 16 - 21 είναι 21 - 16 = ... κ.λπ.
β) ....
γ) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Οι ημέρες εργασίας 40 υπαλλήλων κατά τη διάρκεια ενός χρόνου είναι:

235	248	265	258	272	238
250	278	278	241	272	255
260	235	240	265	239	242
270	257	239	254	244	261
259	263	245	235	268	273
238	240	272	275	278	263
275	263	279	245		

α) Να γίνει ομαδοποίηση των δεδομένων σε 5 κλάσεις πλάτους 9.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα των συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

2. Οι επόμενες παρατηρήσεις αναφέρονται σε πλήθος ορθογραφικών λαθών 50 εκθέσεων που έγραψαν μαθητές της Β' τάξεως Γυμνασίου.

1	2	3	7	4	1	0	5
1	3	5	3	2	1	0	3
1	4	0	3	3	7	1	1
2	5	6	3	1	4	1	0
4	0	1	0	3	5	2	5
0	1	6	9	2	4	2	1
3	3						

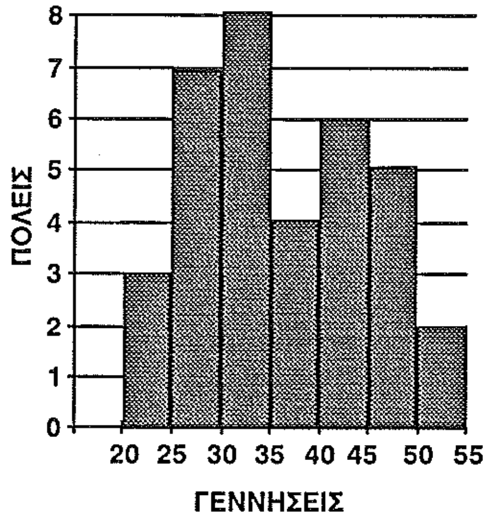
α) Να γίνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων σε 5 κλάσεις.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

γ) Ποια είναι η επικρατέστερη κλάση;

δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έκανε λιγότερα από 4 ορθογραφικά λάθη.

3. Στο σχήμα έχουμε το ιστόγραμμα μιας κατανομής συχνοτήτων των γεννήσεων κατά τη διάρκεια ενός χρόνου σε 3 πόλεις.
Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.



6. 6 Μέση τιμή - Διάμεσος

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε μέση τιμή, ν το πλήθος αριθμών;

Απαντήσεις

1. Μέση τιμή των αριθμών $x_1, x_2, \dots x_v$ (ν το πλήθος), ονομάζουμε τον αριθμό:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}$$

Δηλαδή τον αριθμό που βρίσκουμε αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους $x_1 + x_2 + \dots + x_v$ με το πλήθος τους ν.

Π.χ. Η μέση τιμή των αριθμών 16, 9, 15, 6, 4, 5 είναι ο αριθμός:

$$\frac{14 + 9 + 15 + 6 + 4 + 6}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

Επομένως στη Στατιστική για να βρούμε τη **μέση τιμή μιας κατανομής**, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε διά του πλήθους των παρατηρήσεων αυτών. Η μέση τιμή μπορεί να είναι ένας αριθμός που δεν ανήκει στα στατιστικά δεδομένα.

2. Τι ονομάζουμε διάμεσο στη Στατιστική;

2. Διάμεσο ονομάζουμε τη μεσαία τιμή όλων των παρατηρήσεων, αφού προηγουμένως τις έχουμε διατάξει κατά σειρά μεγέθους (συνήθως από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή). Αν δεν υπάρχει μεσαία παρατήρηση, και αυτό συμβαίνει όταν το πλήθος τους είναι ζυγός αριθμός, τότε ως διάμεσο των παρατηρήσεων παίρνουμε το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων τιμών όλων των παρατηρήσεων.

Π.χ. Η διάμεσος των παρατηρήσεων 0, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 7, 9, 11, 13, είναι ο αριθμός 5, ενώ η διάμεσος των αριθμών 9, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24 είναι το ημιάθροισμα:

$$\frac{14 + 15}{2} = \frac{29}{2} = 14,5$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Σε 9 διαδοχικούς μήνες μία μαθήτρια πήρε από τον πατέρα της τα παρακάτω ποσά για προσωπικά της έξοδα.

8.000	8.500	15.200	7.500
12.800	8.500	20.300	10.500

7.700 (δρχ.)

Ποιος είναι ο μέσος όρος και ποια η διάμεσος των παραπάνω ποσών που ξόδεψε η μαθήτρια στη διάρκεια των 9 μηνών;

Λύση

Ο μέσος όρος είναι:

$$\frac{8.000+8.500+15.200+7.500+12.800+8.500}{9} +$$

$$+ \frac{20.300+10.500+7.700}{9} = \frac{99.000}{9} =$$

= 11.000 δρχ.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό (μονό). Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά σειρά μεγέθους. Έτσι έχουμε:

7.500 7.700 8.000 8.500 8.500
10. 500 12.800 15.200 20.300

Η μεσαία τιμή όλων των παρατηρήσεων είναι η 8.500 άρα η διάμεσος = 8.500 δρχ.

2. Οι μετοχές μιας εταιρίας πετρελαιοειδών παρουσίασαν στο χρηματιστήριο σε 12 συνεχείς μέρες τις επόμενες μεταβολές (σε νομισματικές μονάδες.)

1 2 0 - 3 2 0 6 4
3 - 1 2 5

Να βρεθεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων, καθώς και η διάμεσός τους.

Λύση

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι:

$$\frac{1+2+0+(-3)+2+0+6+4+3+(-1)+2+5}{12} =$$

$$= \frac{1+2-3+2+6+4+3-1+2+5}{12} = \frac{21}{12} = 1,75$$

Διατάσσουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις κατά σειρά μεγέθους.

- 3, - 1, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6

Εφ' όσον ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι άρτιος, ως διάμεσο παίρνουμε το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων τιμών όλων των παρατηρήσεων.

Δηλαδή:

$$\text{Διάμεσος} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

3. Η μέση τιμή 4 διαδοχικών ακεραίων είναι 7,5.

α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

β) Να βρείτε τη διάμεσό τους.

Λύση

α) Ονομάζουμε x το μικρότερο από τους 4 διαδοχικούς ακεραίους, τότε επειδή ο καθένας θα είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του κατά 1, οι αριθμοί θα είναι της μορφής:

x, x + 1, x + 2, x + 3.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4} = 7,5 \quad ή$$

$$\frac{x+x+1+x+2+x+3}{4} = 7,5 \quad ή$$

$$\frac{4x+6}{4} = 7,5 \quad ή \quad 4x+6 = 4 \cdot 7,5 \quad ή$$

$4x + 6 = 30$ ή $4x = 30 - 6$ ή

$4x = 24$ ή $x = 6$

Άρα οι ζητούμενοι είναι: 6, 7, 8, 9 .

β) Η διάμεσός τους είναι:

$$\frac{7+8}{2} = 7,5$$

4. Δίνονται οι αριθμοί 2, 3, 5, 8, 12.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσό τους.

β) Αν οι αριθμοί αυτοί αυξηθούν κατά 3 μονάδες, πώς μεταβάλλεται τότε η μέση τιμή και η διάμεσος;

γ) Αν τριπλασιαστούν οι αριθμοί, τι παθαίνουν η μέση τιμή και η διάμε-

σος;

Λύση

α) Η μέση τιμή είναι:

$$\frac{2+3+5+8+12}{5}=\frac{30}{5}=6$$

Η διάμεσος είναι ο αριθμός 5.

β) Αυξάνουμε τους αριθμούς 2, 3, 5, 8, 12 κατά 3 μονάδες. Οι νέοι αριθμοί είναι οι 5, 6, 8, 11, 15. Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\frac{5+6+8+11+15}{5}=\frac{45}{5}=9$$

Παρατηρούμε ότι και η αρχική μέση τιμή αυξήθηκε κατά 3 μονάδες. Η νέα διάμεσος είναι ο αριθμός 8. Όμοια βλέπουμε ότι και η διάμεσος αυξήθηκε κατά 3 μονάδες.

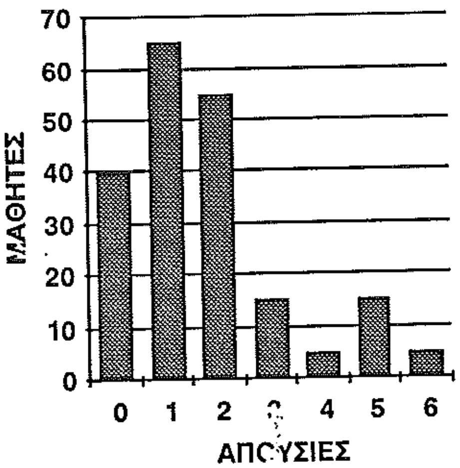
γ) Αν τριπλασιάσουμε τους αριθμούς έχουμε: 6, 9, 15, 24, 36. Η μέση τιμή είναι:

$$\frac{6+9+15+24+36}{5}=\frac{90}{5}=18$$

Παρατηρούμε ότι και η αρχική μέση τιμή τριπλασιάστηκε. Η διάμεσός τους είναι ο αριθμός 15. Όμοια βλέπουμε ότι και η αρχική διάμεσος τριπλασιάστηκε.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Το παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει τις απουσίες που έκαναν οι μαθητές ενός Γυμνασίου στη διάρκεια του Α' τριμήνου. Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή τους.



Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων.

Απουσίες	Συχνότητα
0	40
1	65
2	....
3	....
4	....
5	....
6	5
Σύνολο	200

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά σειρά μεγέθους.

0, 0, 0, ..., 0 (40 φορές), 1, 1, 1, ...,1 (65 φορές), ..., 6, 6, 6, 6, 6 (5 φορές).

Η διάμεσος των απουσιών είναι το ημιάθροισμα της 100ης και 101ης παρατήρησης που είναι ......

Για να βρούμε τη μέση τιμή των απουσιών προσθέτουμε τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος τους που είναι 200 δηλαδή:

$$\frac{(0+0+...+0)+(1+1+...1)+...+(6+6+...+6)}{200}$$

ή $\dfrac{40 \cdot 0 + 65 \cdot 1 + ... + 5 \cdot 6}{200} = ...$

2. Σε αγώνες ενόργανης γυμναστικής οι 10 κριτές βαθμολόγησαν τρεις αθλήτριες στους ασύμμετρους ζυγούς ως εξής:

1η:	7	8	6	8,95	7,8	10
	9,5	7,8	9,3	8,75		
2η:	8,9	9,2	7,8	7,9	9,5	7
	9,45	8,2	6,8	9		
3η:	7,2	8,9	7,5	9,1	8,45	9,3
	10	8,5	9,75	8,8		

Να βρείτε ποια από τις τρεις αθλήτριες θα πάρει το χρυσό μετάλλιο, ποια το αργυρό και ποια το χάλκινο.

Λύση

Θα βρούμε τους μέσους βαθμούς δηλαδή τις μέσες τιμές των βαθμών των τριών αθλητριών και θα τους συγκρίνουμε ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τη μέση τιμή 5 διαδοχικών ακεραίων, αν ο μεγαλύτερός τους είναι ο 22.

2. Να βρείτε 5 διαδοχικούς ακεραίους που έχουν μέση τιμή 9. Ποια είναι η διάμεσός τους;

3. Η διάμεσος 6 διαδοχικών ακεραίων είναι 4,5. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

4. Δίνεται παρακάτω ο αριθμός των πυρκαγιών που παρατηρήθηκαν κατά το μήνα Ιούνιο στην Ελλάδα.

2	0	0	1	0	1	2	3	4	1
0	0	5	2	1	3	0	1	2	2
1	2	3	4	0	1	5	1	0	4

α) Να βρεθεί η μέση τιμή των πυρκαγιών και η διάμεσός τους.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

5. Ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων δείχνει τη θερμοκρασία σε μία πόλη επί 30 συνεχείς ημέρες.

Θερμοκρ.	Συχνότητα
12	1
15	1
16	3
18	2
20	3
21	4
22	4
23	2
24	4
25	1
26	2
27	1
28	1
29	1
Σύνολο	30

Να βρεθεί η διάμεσος και η μέση τιμή των θερμοκρασιών.

6. Οι βαθμοί ενός μαθητή στα διάφορα μαθήματα του πρώτου τριμήνου είναι:
13 12 15 16 11 17 16 12 16 14 10
α) Να υπολογίσετε τη μέση βαθμολογία του.
β) Αν στο τρίτο τρίμηνο βελτίωσε τους βαθμούς του κατά 2 μονάδες, ποια είναι η νέα μέση βαθμολογία του;

6.7 Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς εργαζόμαστε για να βρούμε τη μέση τιμή μιας ομαδοποιημένης κατανομής;

Απαντήσεις

1. Για να βρούμε τη μέση τιμή μιας ομαδοποιημένης κατανομής, εργαζόμαστε ως εξής:
α) Βρίσκουμε το κέντρο κάθε κλάσης (προσθέτοντας τα άκρα και διαιρώντας το άθροισμα διά 2).
β) Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης επί τη συχνότητα που έχει αυτή και προσθέτουμε τα γινόμενα.
γ) Διαιρούμε το άθροισμα που βρήκαμε παραπάνω διά του αθροίσματος των συχνοτήτων.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Για να εκτιμήσουμε το ακριβές βάρος ενός αντικειμένου, το ζυγίσαμε 15 φορές, οπότε πήραμε τις εξής ενδείξεις σε gr.
140, 142, 139, 143, 136, 138, 140, 141, 139, 142, 137, 138, 141, 142, 140
α) Να κάνετε ομαδοποίηση των ενδείξεων σε κλάσεις πλάτους 2 gr.
β) Να βρείτε τη μέση τιμή (μέσο βάρος) των παρατηρήσεων.
γ) Να βρείτε τη μέση τιμή από την ομάδα των δεδομένων και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα. Τι παρατηρείτε;

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η μικρότερη ένδειξη (παρατήρηση) είναι 136 και η μεγαλύτερη 143. Η ομαδοποίηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βάρος (σε gr)	Συχνότητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
136 - 138	2	137	274
138 - 140	4	139	556
140 - 142	5	141	705
142 - 144	4	143	572
Σύνολο	15		2107

β) Άρα η μέση τιμή είναι:

$\frac{2107}{15} = 140{,}467$ gr

γ) Βρίσκουμε τώρα τη μέση τιμή από τα δεδομένα, πολλαπλασιάζοντας την κάθε παρατήρηση επί τη συχνότητά της, προσθέτοντας τα γινόμενα και διαιρώντας διά 15 (που είναι το πλήθος των παρατηρήσεων).

$$\frac{136 \cdot 1+137 \cdot 1+138 \cdot 2+139 \cdot 2}{15} +$$
$$+ \frac{140 \cdot 3+141 \cdot 2+142 \cdot 3+143 \cdot 1}{15} =$$
$$= \frac{2098}{15} = 139{,}867 \text{ gr}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των μέσων τιμών με τον πρώτο και το δεύτερο τρόπο είναι πολύ μικρή (0,6 gr περίπου). Άρα αντί να εργαζόμαστε με το δεύτερο τρόπο που είναι επίπονος μπορούμε να εργαζόμαστε με τις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις που είναι συντομότερη μέθοδος.

2. Σ' ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά οι 32 μαθητές μιας τάξης πήραν τους παρακάτω βαθμούς:

4	**12**	**16**	**20**	**8**	**9**	**13**	**10**	**10**
9	**8**	**15**	**16**	**15**	**8**	**6**	**14**	**9**
12	**13**	**8**	**18**	**7**	**8**	**10**	**12**	**14**
15	**15**	**14**	**17**	**11**				

α) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις αυτές σε κλάσεις πλάτους 5 και να βρείτε το μέσο όρο της τάξης στο διαγώνισμα αυτό.

β) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα της κατανομής.

γ) Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν κάτω από τη βάση και πόσοι πάνω από 15. Τι ποσοστά του συνόλου αντιπροσωπεύουν οι δύο αυτές κατηγορίες;

Λύση

α) Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

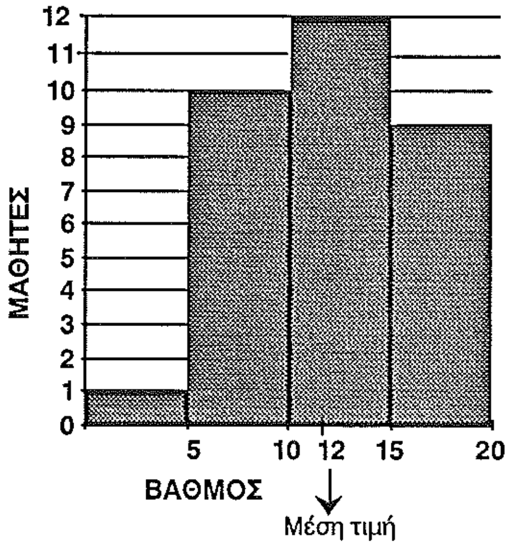
Βαθμός	Συχνότητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
0 - 5	1	2,5	2,5
5 - 10	10	7,5	75
10 - 15	12	12,5	150
15 - 20	9	17,5	157,5
Σύνολο	32		385

Άρα η μέση τιμή είναι:

$\frac{385}{32} = 12{,}031 \cong 12$

Άρα ο μέσος όρος της τάξης στο διαγώνισμα αυτό κυμάνθηκε στο 12.

β) Κατασκευάζουμε τώρα το ιστόγραμμα της κατανομής αυτής.



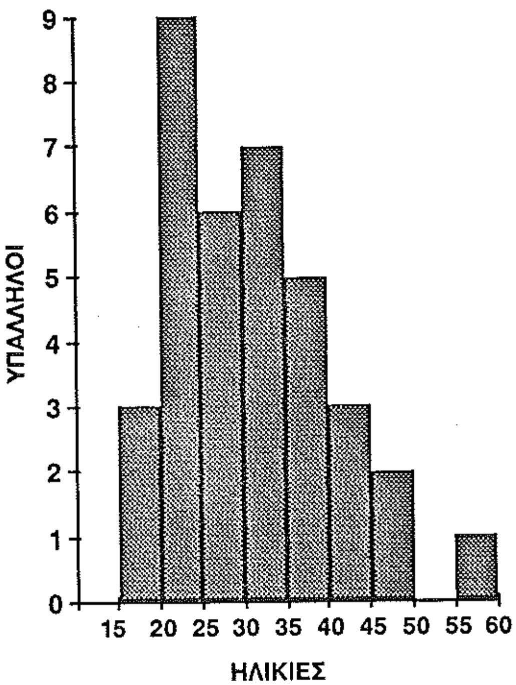
γ) Βλέπουμε ότι κάτω από τη βάση (δηλ. από 0 έως 9) βαθμολογήθηκαν 11 μαθητές δηλαδή ποσοστό:

$11/32 \cdot 100 = 34{,}375$ %, ενώ πάνω από

15 (δηλ. από 16 έως και 20), βαθμολογήθηκαν 5 μαθητές. (Αυτό το βρίσκουμε από τη συχνότητα της κλάσης 15 - 20 που είναι 9, αφαιρώντας τα 4 δεκαπεντάρια των δεδομένων).
Το ποσοστό εδώ είναι:

$$\frac{5}{32} \cdot 100 = 15{,}625\,\%.$$

3. Οι 36 υπάλληλοι ενός καταστήματος έχουν ηλικίες που φαίνονται ομαδοποιημένες στο παρακάτω ιστόγραμμα.
α) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή των υπαλλήλων αυτών.
β) Ο ιδιοκτήτης του καταστήματος προσέλαβε άλλους 4 υπαλλήλους που είχαν ηλικίες: 26, 37, 38, και 42 ετών αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε νέο ιστόγραμμα συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη νέα μέση τιμή των υπαλλήλων.
γ) Πόσοι υπάλληλοι είναι από 25 έως 35 ετών;



Λύση

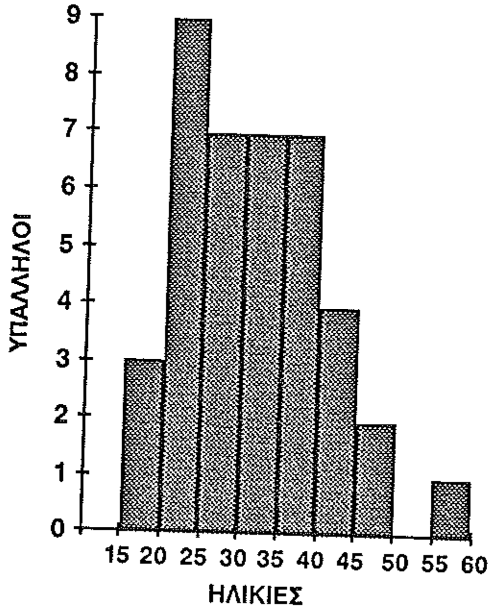
Παρατηρούμε από το σχήμα ότι οι κλάσεις είναι πλάτους 5 (το πλάτος των ορθογωνίων), ενώ η συχνότητα κάθε κλάσης είναι το ύψος του κάθε ορθογωνίου. Έχουμε λοιπόν:

Ηλικία	Συχνότητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
15 - 20	3	17,5	52,5
20 - 25	9	22,5	202,5
25 - 30	6	27,5	165
30 - 35	7	32,5	227,5
35 - 40	5	37,5	187,5
40 - 45	3	42,5	127,5
45 - 50	2	47,5	95
50 - 55	0	52,5	0
55 - 60	1	57,5	57,5
Σύνολο	36		1115

Η μέση τιμή των υπαλλήλων είναι:

$$\frac{1115}{36} = 30{,}972 \cong 31 \text{ ετών}$$

β) Με την πρόσληψη των τεσσάρων νέων υπαλλήλων το πλήθος τους έγινε τώρα 36 + 4 = 40 υπάλληλοι. Ο ένας ηλικίας 26 ετών προστίθεται στην τρίτη κλάση του παραπάνω πίνακα, άλλοι δύο ηλικίας 37 και 38 ετών προστίθενται στην πέμπτη κλάση, ενώ ο τέταρτος ηλικίας 42 ετών, στην έκτη κλάση. Το νέο ιστόγραμμα τώρα είναι:



Η νέα μέση τιμή της ηλικίας των υπαλλήλων είναι:

$$\frac{1115 + 26 + 37 + 38 + 42}{40} = \frac{1258}{40} =$$
$= 31{,}45$ έτη

αυξήθηκε δηλαδή κατά 0,45 έτη.

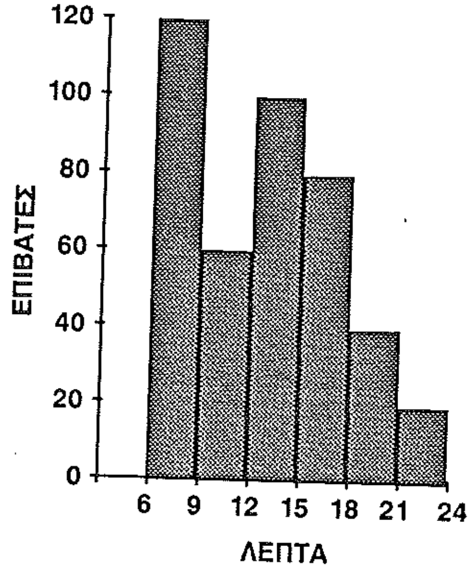
γ) Από το νέο ιστόγραμμα βρίσκουμε ότι από 25 ετών έως 35 ετών (δηλ. έως και 34 ετών) είναι 6 + 8 = 14 υπάλληλοι.

4. Ο αριθμός των επιβατών που περιμένουν σε μια στάση αστικού λεωφορείου κατά το χρονικό διάστημα μιας ημέρας από 06 λεπτά μέχρι και 24 λεπτά ακολουθεί την κατανομή που φαίνεται στο παρακάτω ιστόγραμμα (ομαδοποιημένη κατανομή συχνοτήτων).

α) Να βρείτε ποια είναι η μέση τιμή της παραπάνω κατανομής.

β) Πόσοι επιβάτες περίμεναν στη στάση από 6 έως 12 λεπτά; Τι ποσοστό του συνόλου αντιπροσωπεύουν;

γ) Πόσοι επιβάτες περίμεναν περισσότερο από 21 λεπτά; Τι ποσοστό αντιπροσωπεύουν;



Λύση

α) Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

Λεπτά	Συχνότητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
6 - 9	120	7,5	900
9 - 12	60	10,5	630
12 - 15	100	13,5	135
15 - 18	80	16,5	1320
18 - 21	40	19,5	780
21 - 24	20	22,5	450
Σύνολο	420		4215

Άρα η μέση τιμή της κατανομής είναι:

$\frac{4215}{420} = 10{,}036$ λεπτά

β) Από τον πίνακα ή το ιστόγραμμα βλέπουμε ότι από 6 έως 12 λεπτά περίμεναν 120 + 60 = 180 επιβάτες, δηλαδή ποσοστό

$\frac{180}{420} \cdot 100 = 42,86\,\%$,

ενώ περισσσότερο από 21 λεπτά περίμεναν 20 επιβάτες, δηλαδή ποσοστό

$\frac{20}{420} \cdot 100 = 4,76\,\%$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Οι χρόνοι στάθμευσης 39 αυτοκινήτων σε ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας είναι οι εξής:

5	2	4	5	1,5	6	6	5	1
1	2	3	2	3,5	5	2	1	2
4,5	3	4	1	4	2,5	3	5	7
4,5	3	2	1,5	4	3	5	2	6
1,5	3	2						

α) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της κατανομής αυτής. (Δηλαδή μέσο χρόνο στάθμευσης).

γ) Να κάνετε το ιστόγραμμά της και να σημειώσετε τη μέση τιμή.

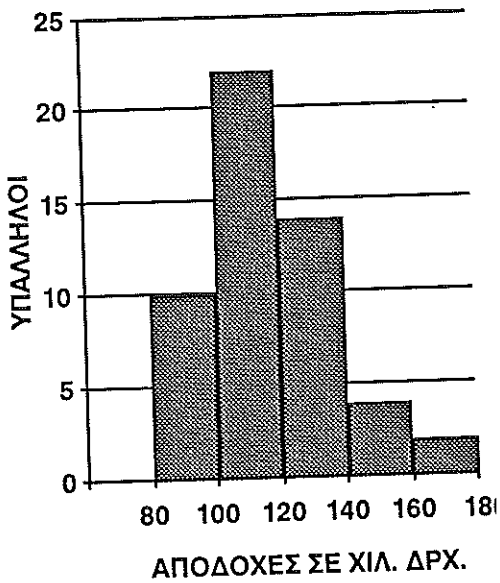
Λύση

Ομαδοποιούμε την κατανομή σε κλάσεις πλάτους 1.

Χρόνος σε ώρες	Συχνότητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
1 - 2	7	1,5	....
2 - 3	9	2,5	....
3 - 4	7	3,5	....
4 - 5	6	4,5	....
5 - 6	6	5,5	....
6 - 7	3	6,5	....
7 - 8	1	7,5	....
Σύνολο	39		

....

2. Να κάνετε πίνακα και να βρείτε (εκτιμήσετε) τη μέση τιμή της παρακάτω κατανομής που φαίνεται στο ιστόγραμμα.



Λύση

Κατασκευάζουμε πίνακα με κλάσεις πλάτους 20 (20 χιλιάδες δρχ.) η κάθε μία.

Αποδοχές σε χιλ. δρχ.	Συχνό-τητα	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα επί κέντρο
80 - 100	10	....	....
100 - 120	22	....	....
120 - 140	14	....	....
140 - 160	4	....	....
160 - 180	2	....	....
Σύνολο	....		

3. Στην προηγούμενη άσκηση να υπολογίσετε:

α) πόσοι υπάλληλοι παίρνουν μισθό πάνω από 140 χιλιάδες,

β) πόσοι από 100 έως 160 χιλιάδες.

Τι ποσοστά αντιπροσωπεύουν οι υπάλληλοι αυτοί σε κάθε περίπτωση;

Λύση

α) Από τον πίνακα συχνοτήτων παρατηρούμε ότι πάνω από 140 χιλιάδες παίρνουν 4 + 2 = 6 υπάλληλοι, δηλαδή ποσοστό

6/σύνολο υπαλλήλων · 100 = ... %

β) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

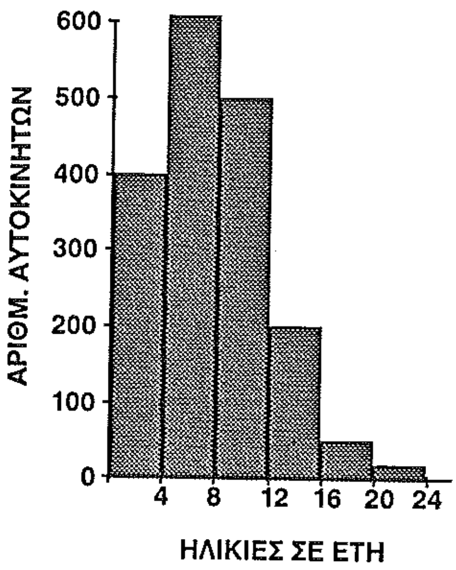
1. Μια μέτρηση που έγινε σε 24 μαθητές σχετικά με το ύψος τους, έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα (σε cm).

150	162	170	153	155	148	157
165	180	145	172	163	154	161
157	173	145	171	152	149	153
157	164	162				

Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις αυτές, σε κλάσεις πλάτους 5 cm (145 - 150, 150 - 155 κ.λπ.), να βρείτε τη μέση τιμή ύψους (εκτίμηση) και να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα της κατανομής.

2. Στην προηγούμενη άσκηση να βρείτε τι ποσοστό μαθητών έχουν ύψος πάνω από 160 cm και τι ποσοστό κάτω από 150 cm.

3 Με τη βοήθεια του παρακάτω ιστογράμματος, να κάνετε πίνακα της κατανομής και να εκτιμήσετε τη μέση τιμή της.



4. Στην προηγούμενη άσκηση να βρείτε πόσα αυτοκίνητα έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 8 ετών και τι ποσοστό του δείγματος αντιπροσωπεύουν.

5. Αν στο δείγμα αυτοκινήτων της άσκησης 3, προστεθούν 50 αυτοκίνητα ηλικίας μικρότερης των 4 ετών και 100 αυτοκίνητα ηλικίας από 8 - 12 έτη, να βρείτε τη νέα μέση τιμή του δείγματος.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Οι επόμενοι αριθμοί:

6	6	3	4	1	7	8	5	7	3
5	4	2	4	6	7	6	2	3	6
9	1	4	8	7	5	3	8	2	7

δείχνουν τις γεννήσεις που δηλώθηκαν στο Ληξιαρχείο της Σπάρτης στη διάρκεια του μήνα Απριλίου.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των γεννήσεων.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα των συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

2. Από την εξέταση ενός δείγματος 40 επιστολών, ως προς το βάρος τους, ο υπάλληλος των ΕΛΤΑ σημείωσε τα παρακάτω βάρη (σε gr).

9	8,9	8,7	8,76	7,9	8
8,4	8,2	7,7	5,5	5,3	3,9
4,6	3,5	3,7	5,32	5,6	6,1
4,9	5,52	5,62	4,6	6,09	5,2
4,3	4,12	8,4	8,2	8,9	9
7,6	7,8	8,45	5	4	4,1
6,2	7	3,6	3,8		

α) Να γίνει ομαδοποίηση των παρατηρήσεων αυτών σε τρείς κλάσεις πλάτους 2 (3-5, 5-7, 7-9) και ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

β) Να βρεθεί η επικρατέστερη κλάση.

γ) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή της ομαδοποιημένης κατανομής.

3. Τα χρόνια υπηρεσίας 200 ναυτικών μας στα πλοία του Ελληνικού εμπορικού στόλου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής των σχετικών συχνοτήτων.

Χρόνια Υπηρεσίας	Σχετ. Συχνότητα %
0 - 5	10
5 - 10	28
10 - 15	42
15 - 20	12
20 - 25	8
Σύνολο	100

α) Να υπολογίσετε το κέντρο της κάθε κλάσεως.

β) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της κάθε κλάσης.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή της ομαδοποιημένης κατανομής.

4. Στους 9 αγώνες του ποδοσφαιρικού πρωταθλήματος της Α' εθνικής κατηγορίας σημειώθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Α' ΕΘΝΙΚΗ

Ηρακλής - ΟΦΗ	2-0
Λάρισα - Παναθηναϊκός	1-2
Ολυμπιακός - Δόξα Δράμας	4-0
Πανσεραϊκός - Πανιώνιος	1-2
Παναχαϊκή - ΑΕΚ	0-2
Λεβαδειακός - Γιάννενα	1-0
Απόλλων Αθ. - Ξάνθη	2-1
Αθηναϊκός - Ιωνικός	2-0
Άρης - ΠΑΟΚ	0-1

Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τερμάτων (γκολ) που σημειώθηκαν στους 9 αγώνες.

5. Ένα εργοστάσιο απασχολεί 150 εργάτες. Η κατανομή των μισθών φαίνεται στον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

α) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή των μισθών των εργατών.

β) Να βρείτε το ποσοστό των εργατών με μισθό κάτω των 100.000 δρχ.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μισθός σε χιλ. δρχ	Συχνότητα (εργάτες)
70 - 80	12
80 - 90	8
90 - 100	15
100 - 110	20
110 - 120	25
120 - 130	40
130 - 140	20
140 - 150	10
Σύνολο	150

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

BASIC 10

Μάθαμε ότι για τον υπολογισμό της μέσης τιμής x μιας κατανομής πρέπει να προσθέσουμε όλες τις παρατηρήσεις και να διαιρέσουμε το άθροισμα S με το πλήθος τους N.
Το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει τη μέση τιμή N αριθμών (π.χ. το μέσο όρο των βαθμών ενός μαθητή) ως εξής:

```
10 LET S = 0                          (↵)
20 INPUT «Πόσα μαθήματα;», N          (↵)
30 FOR I = 1 TO N                     (↵)
40 INPUT «Βαθμός:», A                 (↵)
50 LET S = S + A                      (↵)
60 NEXT I                             (↵)
70 LET x = S/N                        (↵)
80 PRINT «O μέσος όρος είναι x =», x  (↵)
```

Παρατηρήστε ότι πρώτα μας ζητάει να ορίσουμε το πλήθος των μαθημάτων και στη συνέχεια έναν - έναν τους βαθμούς. Κάθε φορά που δίνουμε ένα βαθμό, τον προσθέτει στο μερικό άθροισμα και περιμένει τον επόμενο. Όταν τελειώσουν όλοι οι βαθμοί που θα δώσουμε (δηλαδή όταν το I = N) τότε υπολογίζει και τυπώνει το μέσο όρο.

Άσκηση

Χρησιμοποιείστε τις ασκήσεις του κεφαλαίου που μόλις μάθατε για να δημιουργήσετε αντίστοιχα προγράμματα. Μπορείτε να εργαστείτε και με τις εντολές READ και DATA, για την εισαγωγή των παρατηρήσεων μιας κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Συμμετρικά σχήματα

7.1 Σχήματα με άξονα συμμετρίας

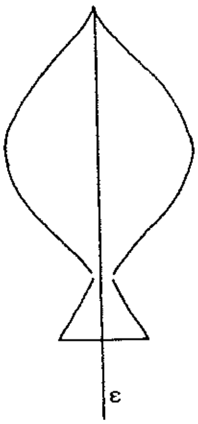
Θεωρία

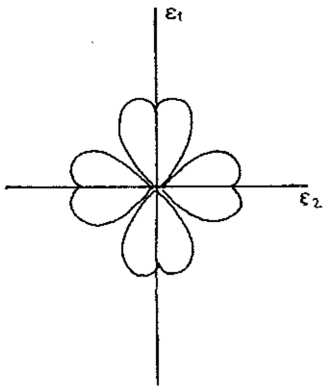
Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζονται άξονες συμμετρίας ενός σχήματος;

Απαντήσεις

1. Ας προσέξουμε τα παρακάτω σχήματα:

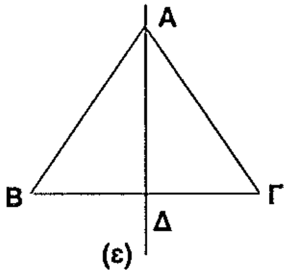




Παρατηρούμε ότι αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος των ευθειών που έχουν σχεδιαστεί τότε το ένα μέρος του σχήματος ταυτίζεται με το άλλο. Οι ευθείες αυτές ονομάζονται άξονες συμμετρίας του σχήματος. Άρα **άξονες συμμετρίας ενός σχήματος** ονομάζονται οι ευθείες εκείνες που, αν διπλώσουμε το σχήμα κατά μήκος τους, τότε το ένα μέρος του σχήματος ταυτίζεται με το άλλο.

2. Τι γνωρίζετε για την ευθεία της διαμέσου που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου;

Επίσης τι γνωρίζετε για τις γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου;



2. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρνουμε την ευθεία (ε) που ενώνει την κορυφή Α με το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν διπλώσουμε το χαρτί διαπιστώνουμε ότι οι γωνίες Β και Γ είναι μεταξύ τους ίσες καθώς και οι

γωνίες $\widehat{ΑΔΒ}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ είναι ίσες και ορθές.

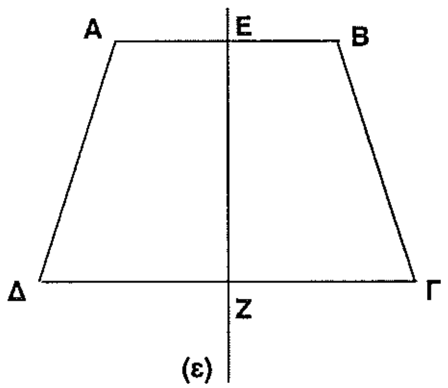
Επίσης οι γωνίες $\widehat{ΒΑΔ}$ και $\widehat{ΓΑΔ}$ είναι ίσες.

Άρα η διάμεσος ΑΔ είναι **άξονας συμμετρίας** του τριγώνου. Επίσης η διάμεσος ΑΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α και ύψος του τριγώνου. Ακόμα **οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.**

3. Τι γνωρίζετε για την ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων ισοσκελούς τραπεζίου;

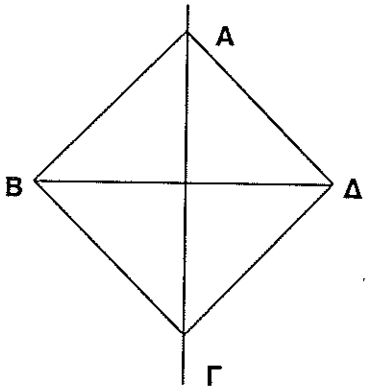
3. Αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα μέσα Ε και Ζ των βάσεων ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ διαπιστώνουμε ότι το τετράπλευρο ΑΕΖΔ συμπίπτει με το τετράπλευρο ΕΖΓΔ. Άρα η ευθεία (ε) είναι **άξονας συμμετρίας του τραπεζίου.** Παρατηρούμε επίσης ότι **οι προσκείμενες γωνίες** στις βάσεις του τραπεζίου είναι μεταξύ τους **ίσες.**

Δηλαδή $\hat{Α} = \hat{Β}$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ}$.



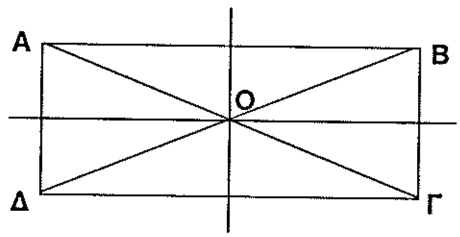
4. Τι γνωρίζετε για τις διαγώνιες του ρόμβου;

4. Αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός ρόμβου ΑΒΓΔ, παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοι είναι **άξονες συμμετρίας του.** Επίσης διαπιστώνουμε ότι διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου και τέμνονται μεταξύ τους κάθετα.



5. Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου; Τι γνωρίζετε για τις διαγωνίους του;

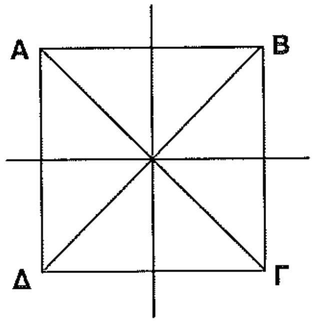
5. Με δίπλωση του φύλλου διαπιστώνουμε ότι οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι **άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου.** Επίσης από τη δίπλωση διαπιστώνουμε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου διχοτομούνται και είναι ίσες, δηλ.: ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΔ και ΑΓ = ΒΔ.



6. Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του τετραγώνου; Τι γνωρίζετε για τις διαγωνίους του;

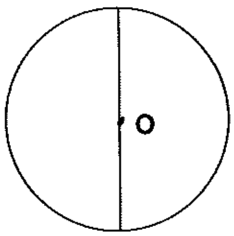
6. Επειδή το τετράγωνο συνδυάζει τις ιδιότητες του ρόμβου και του ορθογωνίου, (αφού είναι και ρόμβος και ορθογώνιο), τότε οι άξονες συμμετρίας του είναι οι **διαγώνιες του** και **οι ευθείες**

που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του.
Λόγω της συμμετρίας διαπιστώνουμε ότι **οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του, διχοτομούνται μεταξύ τους και τέμνονται κάθετα.**



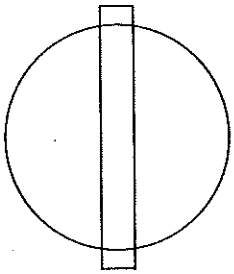
7. Έχει άξονες συμμετρίας ο κύκλος;

7. Αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος οποιασδήποτε διαμέτρου ενός κύκλου διαπιστώνουμε ότι αυτή είναι άξονας συμμετρίας του. Άρα **κάθε διάμετρος του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας.**

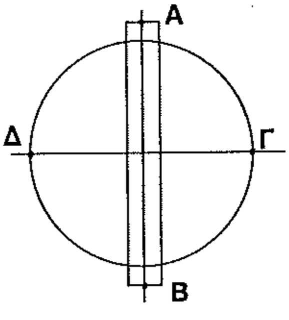


Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος:



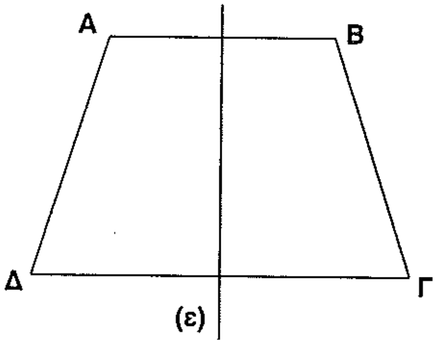
Λύση



Με δίπλωση του σχήματος κατά μήκος των ευθειών ΑΒ και ΓΔ παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι άξονες συμμετρίας του σχήματος.

2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ. Η γωνία Α είναι 138°. Να βρείτε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου.

Λύση



Γνωρίζουμε ότι οι προσκείμενες γωνίες των βάσεων ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.

Άρα οι $\widehat{A} = \widehat{B}$ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$.

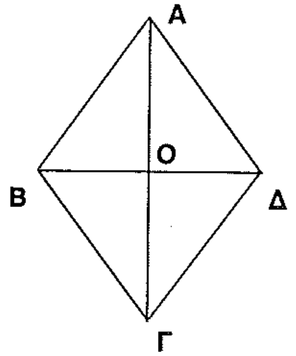
Επομένως η γωνία Β είναι 138°. Επιπλέον οι γωνίες Α και Δ είναι παραπληρωματικές, γιατί είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ΑΒ και ΓΔ.

Άρα $\widehat{\Delta} = 180° - 138°$ ή $\widehat{\Delta} = 42°$

επομένως και $\widehat{\Gamma} = 42°$.

3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Αν η γωνία $\widehat{B A \Delta} = 60°$, να βρείτε τις γωνίες $\widehat{\Gamma A \Delta}$ και $\widehat{B \Delta A}$.

Λύση



Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του. Άρα έχουμε:

$$\widehat{\Gamma A \Delta} = \widehat{B A \Gamma} = \frac{\widehat{B A \Delta}}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

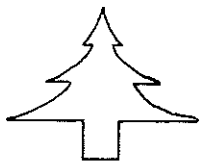
Επίσης γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα. Άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ορθογώνιο. Δηλαδή

$\widehat{A O \Delta} = 90°$, $\widehat{O A \Delta} = 30°$. Επομένως $\widehat{B \Delta A} = 60°$.

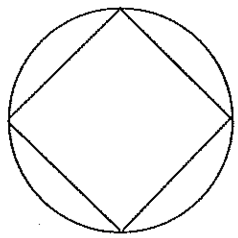
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα:

α)

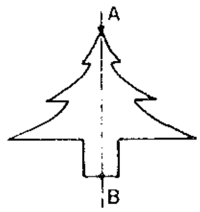


β)



Λύση

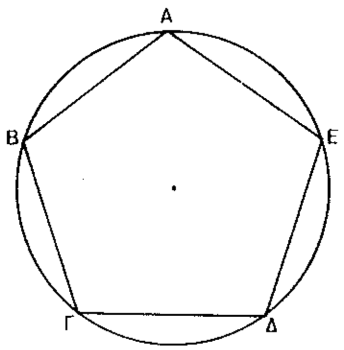
α)



Με δίπλωση παρατηρούμε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.

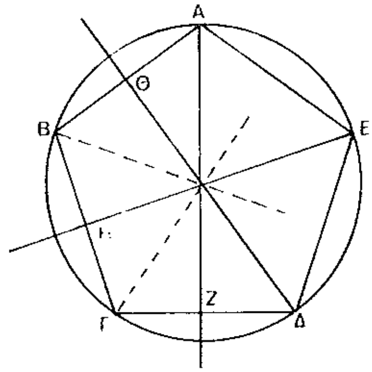
β) .....

2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας στο σχήμα. Τι συμπεράσματα βγάζετε για το σχήμα;



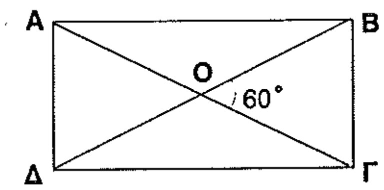
Λύση

Με δίπλωση κατά μήκος της ευθείας που περνά από την κορυφή A και το μέσο της πλευράς ΓΔ βλέπουμε ότι η ευθεία AZ είναι άξονας συμμετρίας. Ομοίως με δίπλωση βλέπουμε ότι και οι ευθείες EH, ΔΘ,...........



3. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και να φέρετε τις διαγωνίους του. Εάν αυτές τέμνονται στο O και η γωνία ΒΟΓ είναι 60°, τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισόπλευρο.

Λύση

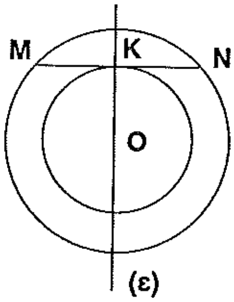


Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα OB = OΓ και το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

Άρα οι γωνίες $\widehat{OB\Gamma}$ και $\widehat{B\Gamma O}$ είναι ίσες.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180° και η γωνία ΒΟΓ = 60° τότε η κάθε μία από αυτές είναι ....

4. Να χαράξετε δύο ομόκεντρους κύκλους. Να πάρετε ένα σημείο K στον εσωτερικό κύκλο και να φέρετε την εφαπτομένη του σε αυτό το σημείο που τέμνει τον εξωτερικό κύκλο στα M, N. Να δείξετε ότι KM=KN.

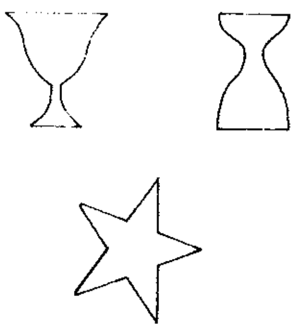


Λύση

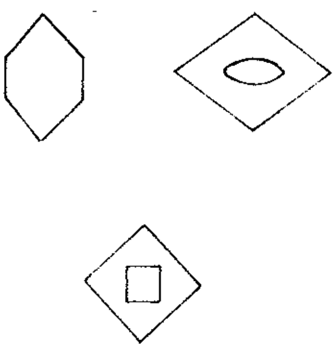
Με δίπλωση κατά μήκος της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ βρίσκουμε ότι αυτή είναι άξονας συμμετρίας.
Άρα.........

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονες συμμετρίας.

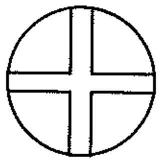


2. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα, αν υπάρχουν.

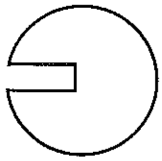


3. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα αν υπάρχουν.

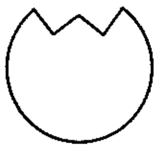
α)



β)



γ)



4. Να βρείτε ποια γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου έχουν άξονα συμμετρίας.

5. Υπάρχει κάποιος αριθμός που έχει άξονα συμμετρίας; Ποιος;

6. Να χαράξετε ένα ημικύκλιο και να βρείτε αν έχει άξονες συμμετρίας και ποιους.

7. Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και να πάρετε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να φέρετε τον κύκλο με διάμετρο

ΕΖ. Να δείξετε ότι αυτό εφάπτεται στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ ακριβώς στο μέσο τους.

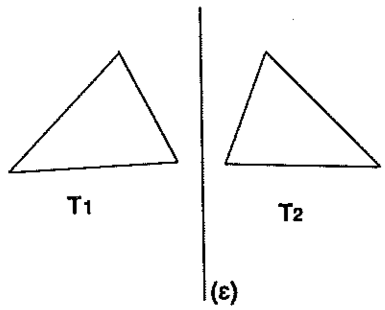
8. Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ισοπλεύρου τριγώνου και να δείξετε ότι αυτοί είναι άξονες συμμετρίας.

7.2 Σχήματα συμμετρικά ως προς ευθεία

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πότε δύο σημεία Α και Β λέγονται συμμετρικά και ως προς ευθεία (ε);	1. Δύο σημεία Α και Β λέγονται **συμμετρικά ως προς ευθεία (ε)** όταν η ευθεία είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που ορίζουν τα σημεία.
2. Ποιο είναι το συμμετρικό σημείου Α ως προς ευθεία (ε) όταν το Α ανήκει στην (ε);	2. Αν πάρουμε ένα σημείο Α πάνω σε μια ευθεία (ε) και διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας (ε), τότε το σημείο Α θα συμπέσει με τον εαυτό του. Άρα το **συμμετρικό ενός σημείου** που βρίσκεται πάνω σε ευθεία ως προς την ευθεία αυτή είναι **το ίδιο σημείο.**
3. Πότε δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία;	3. Αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ε παρατηρούμε ότι κάθε σημείο του τριγώνου (T_1) συμπίπτει με ένα σημείο του τριγώνου (T_2) και αντίστροφα. Άρα τα δύο σχήματα

είναι συμμετρικά. Επομένως **συμμετρικά** ως προς ευθεία (ε) λέγονται δύο σχήματα όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία (ε) με σημείο του άλλου και αντίστροφα.



4. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους δύο συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα;

4. Από το παραπάνω παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι δύο συμμετρικά ως προς ευθεία (ε) σχήματα είναι μεταξύ τους ίσα.

5. Ποιο είναι το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς ευθεία που είναι άξονας συμμετρίας του;

5. Το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς ευθεία που είναι **άξονας συμμετρίας του**, είναι το **ίδιο το σχήμα.**

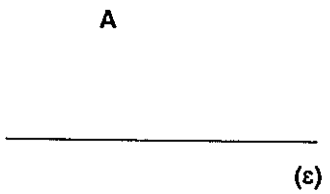
7.3 Κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς ευθεία

Θεωρία

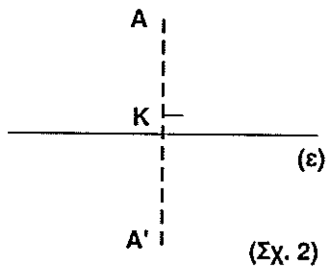
Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Α' ενός σημείου Α ως προς μια ευθεία (ε);

1. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Α' ενός σημείου Α ως προς μία ευθεία (ε), φέρνουμε από το Α το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ στην ε και στην προέκταση του παίρνουμε τμήμα ΚΑ' ίσο με το ΑΚ (ΚΑ' = ΑΚ).



(Σχ. 1)

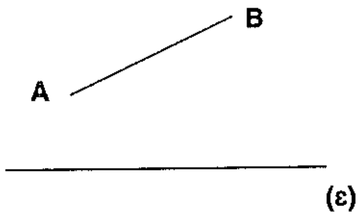


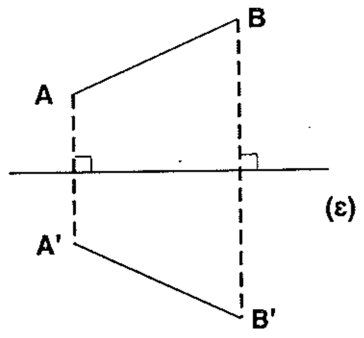
(Σχ. 2)

2. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς μια ευθεία (ε);

2. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς μια ευθεία ε, κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Α', Β' των άκρων Α και Β το ευθύγραμμο τμήμα Α'Β' είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως πρὸς την ευθεία ε.

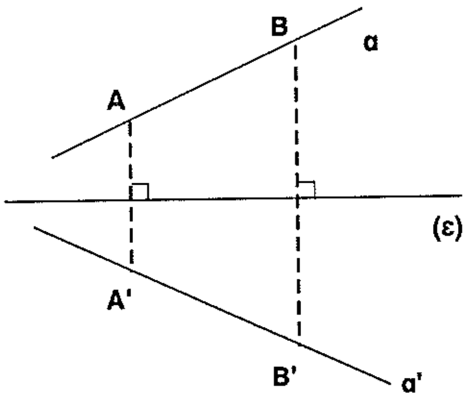
Το συμμετρικό Α'Β' είναι ίσο με το ΑΒ, **(Α'Β'= ΑΒ)**.





3. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό μιας ευθείας α ως προς μία ευθεία ε;

3. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό μιας ευθείας α ως προς μια ευθεία ε, κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Α', Β' δύο τυχαίων σημείων Α και Β της ευθείας α. Η ευθεία α' που ορίζεται από τα σημεία Α', Β' είναι η συμμετρική της α ως προς την ευθεία ε.



Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε το συμμετρικό μιας ημιευθείας ως προς μια ευθεία ε.

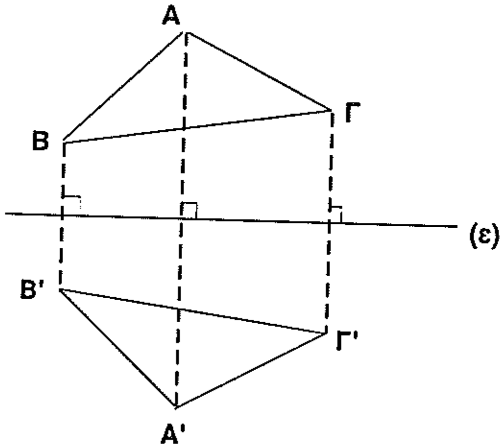
4. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς μία ευθεία ε;

4. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς μια ευθεία ε, κατασκευάζουμε τα συμμετρικά Α', Β' και Γ' των κορυφών Α, Β και Γ ως προςτην ευθεία ε. Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ε.

Ισχύει: τρίγωνο ΑΒΓ= τρίγωνο Α'Β'Γ'.

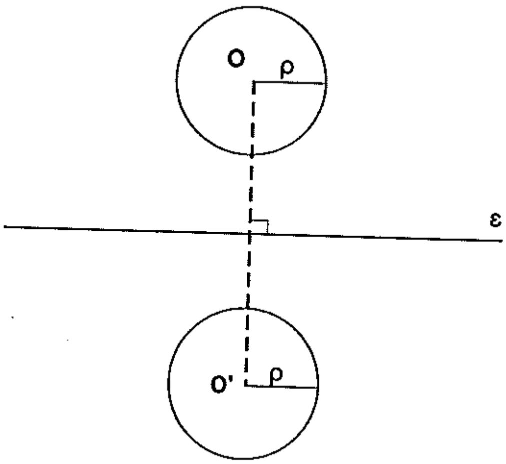
Κατά συνέπεια και $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$.

Από τις ισότητες αυτές συμπεραίνουμε ότι η συμμετρική μιας γωνίας ως προς μία ευθεία είναι μια γωνία ίση με αυτή.



5. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου (Ο,ρ) ως προς μία ευθεία (ε);

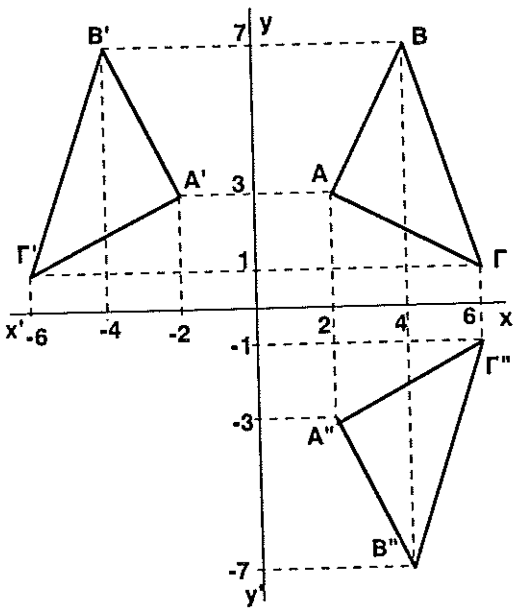
5. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου (Ο, ρ) ως προς μία ευθεία ε, κατασκευάζουμε το συμμετρικό Ο' του κέντρου Ο του κύκλου (Ο, ρ) ως προς την ευθεία. Στη συνέχεια με κέντρο το σημείο Ο' και ακτίνα ρ κατασκευάζουμε τον κύκλο (Ο', ρ). Ο κύκλος (Ο', ρ) είναι το συμμετρικό του κύκλου (Ο, ρ). Οι δύο κύκλοι είναι ίσοι.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων να απεικονίσετε τα σημεία: Α(2, 3), Β (4, 7) και Γ (6, 1). Να βρείτε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα y'y και ως προς τον άξονα x'x.

Λύση

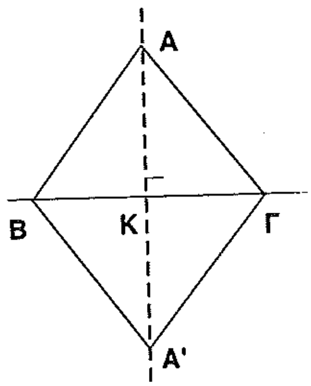


Τα συμμετρικά των σημείων Α, Β, Γ ως προς τον άξονα y'y είναι τα σημεία Α'(-2, 3), Β'(-4, 7) και Γ'(-6,1). Επομένως το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα y'y είναι το τρίγωνο Α'Β'Γ'.

Τα συμμετρικά των σημείων Α, Β, Γ ως προς τον άξονα x'x είναι τα σημεία Α''(2, -3), Β''(4, -7) και Γ''(6, -1). Επομένως το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα x'x είναι το τρίγωνο Α''Β''Γ''.

2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία της βάσεως του ΒΓ. Τι σχήμα ορίζεται από το τρίγωνο ΑΒΓ και το συμμετρικό του;

Λύση

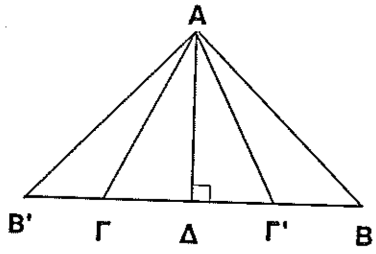


Τα συμμετρικά των κορυφών Β και Γ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τα ίδια σημεία, γιατί βρίσκονται πάνω στην ευθεία.

Για να βρούμε το συμμετρικό της κορυφής Α φέρουμε την ΑΚ κάθετη στη ΒΓ (είναι το ύψος) και στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα ΚΑ' = ΚΑ. Το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ είναι το τρίγωνο Α'ΒΓ. Το τετράπλευρο ΑΒΑ'Γ που σχηματίζεται είναι ρόμβος, γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες ΑΒ = ΒΑ' = Α'Γ = ΓΑ.

3. Να σχεδιάσετε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να βρείτε το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΑΔ. Αν Β' το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ΑΔ, τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΒ';

Λύση

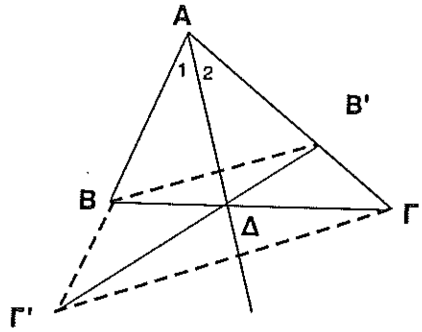


Το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς την ΑΔ είναι το ίδιο το Α, γιατί βρίσκεται πάνω στην ΑΔ. Το συμμετρικό του Β είναι το Β' και ισχύει ΒΔ = Β'Δ και το συμμετρικό του Γ είναι το Γ' (ΓΔ = Γ'Δ).

Εφόσον Α συμμετρικό του Α και Β' συμμετρικό του Β, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ' είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ευθεία ΑΔ άρα ΑΒ' = ΑΒ. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΒ' είναι ισοσκελές.

4. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο του ΑΔ. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΑΔ. Να δικαιολογήσετε γιατί τα συμμετρικά Β' και Γ' των κορυφών Β και Γ είναι σημεία των ευθειών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Λύση



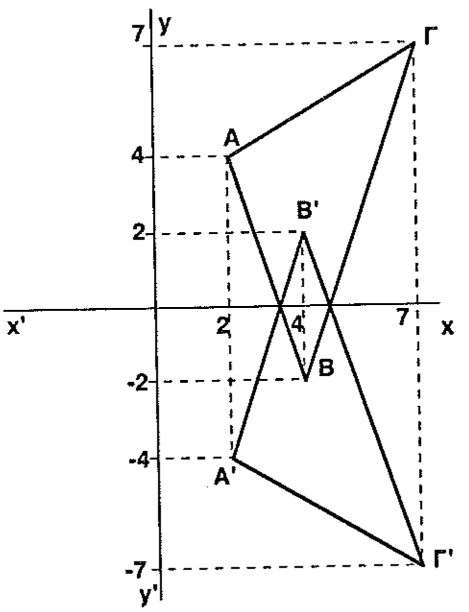
Έστω ΑΔ η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}$. Κατασκευάζουμε το συμμετρικό Β' του Β και το συμμετρικό Γ' του Γ ως προς την ευθεία ΑΔ. Παρατηρούμε ότι αν το Β' του Β δεν είναι σημείο της πλευράς ΑΓ τότε θα είναι εξωτερικό σημείο (ή εσωτερικό) της γωνίας $\widehat{ΔΑΓ}$ οπότε η γωνία $\widehat{ΔΑΓ}$ θα είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη) από τη γωνία $\widehat{ΔΑΒ'}$, κατά συνέπεια και η $\widehat{ΒΑΔ}$ θα είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη) από τη γωνία $\widehat{ΔΑΒ'}$ γιατί $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}$. Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί η $\widehat{ΔΑΒ'}$ είναι συμμετρική της $\widehat{ΒΑΔ}$ ως προς την ευθεία ΑΔ άρα είναι γωνία ίση με αυτήν δηλαδή $\widehat{ΔΑΒ'} = \widehat{ΒΑΔ}$

Επομένως το Β' είναι σημείο της ευθείας ΑΓ. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το Γ' είναι το σημείο της ευθείας ΑΒ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το συμμετρικό Α'Β'Γ' του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα x'x όταν Α(2, 4), Β(4, -2), Γ(7, 7). Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Κ, Λ, Μ όπου ΚΛΜ το συμμετρικό του τριγώνου Α'Β'Γ' ως προς τον άξονα y'y.

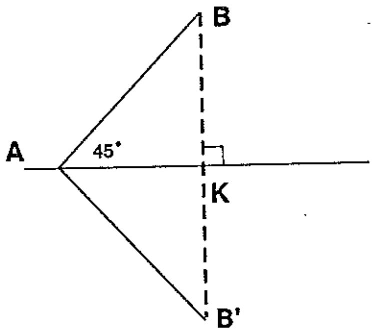
Λύση



Για να το συμμετρικό Α'Β'Γ' του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τον άξονα x'x αρκεί να κατασκευάσουμε τα συμμετρικά Α', Β', Γ' των σημείων Α, Β, Γ ως προς τον άξονα x'x. Το συμμετρικό Α' του Α είναι το σημείο Α' (2, -4). Το συμμετρικό Β' του Β είναι..............

2. Αν ΑΒ' το συμμετρικό του τμήματος ΑΒ ως προς την ευθεία ε. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΒ' (ως προς τις πλευρές και ως προς τις γωνίες του).

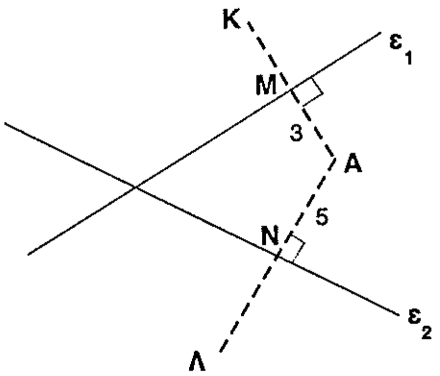
Λύση



Γνωρίζουμε ότι το συμμετρικό ΑΒ' του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς την ευθεία ε είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ΑΒ, άρα...........

3. Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 και ένα σημείο Α που βρίσκεται έξω από αυτές. Αν η απόσταση του Α από την ε_1 είναι 3 cm και η απόσταση του Α από την ε_2 είναι 5 cm να υπολογίσετε το άθροισμα ΚΑ+ΑΛ όπου Κ, Λ τα συμμετρικά του Α ως προς τις ευθείες ε_1, ε_2 αντίστοιχα.

Λύση



Έστω ΑΜ η απόσταση του Α από την ε_1 τότε ΑΜ = 3 cm και ΑΝ η απόσταση του Α από την ε_2 τότε ΑΝ = 5 cm.

Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Κ του Α ως προς την ευθεία ε_1 αρκεί να προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΚ = ...

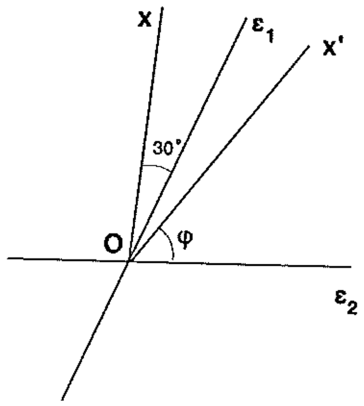
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια ευθεία που
α) διέρχεται από μία κορυφή του και δεν τέμνει το τρίγωνο
β) διέρχεται από μία κορυφή του και τέμνει το τρίγωνο.

2. Σε ένα σύστημα αξόνων να απεικονίσετε τα σημεία: A(0, 3), B(2, 0), Γ(6, 2) και Δ (3,5, 7). Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ως προς τον άξονα x'x και ως προς τον άξονα y'y.

3. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 που απέχουν μεταξύ τους 7cm. Αν Μ είναι ένα σημείο της μεσοπαραλλήλου τους να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ, όπου Α, Β τα συμμετρικά του σημείου Μ ως προς τις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

4. Στο παρακάτω σχήμα αν Ox' το συμμετρικό της ημιευθείας Ox ως προς την ευθεία ε_1 να υπολογίσετε τη γωνία φ, αν γνωρίζετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία ε_1 είναι ίση με 50°.



5. Να βρείτε τους άξονες συμμετρίας δύο ίσων κύκλων που τέμνονται στα σημεία Α και Β.

7.4 Σχήματα με κέντρο συμμετρίας

Θεωρία

Ερωτήσεις

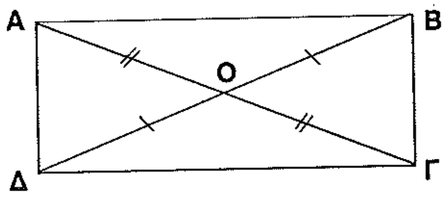
1. Τι ονομάζουμε κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος;

Απαντήσεις

1. Κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος ονομάζουμε ένα σημείο Ο όταν κατά την περιστροφή του σχήματος κατά 180° γύρω από το σημείο Ο παίρνουμε ένα σχήμα που συμπίπτει με το αρχικό.

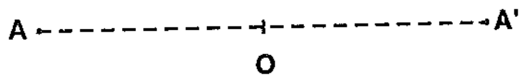
2. Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός παραλληλόγραμμου;

2. Το κέντρο συμμετρίας οποιουδήποτε παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Το γεγονός αυτό είναι αρκετό για να καταλάβουμε ότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, δηλαδή:
ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.



3. Πότε δύο σημεία Α και Α' είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Ο;

3. Θα λέμε ότι δύο σημεία Α και Α' είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΑ'.

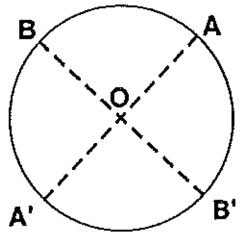


4. Πότε δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς το σημείο Ο;

4. Θα λέμε ότι δύο σχήματα Σ και Σ' είναι **συμμετρικά ως προς το σημείο Ο**, όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το σημείο Ο.

Τα συμμετρικά σχήματα ως προς το σημείο Ο είναι **σχήματα ίσα.**

__Παρατήρηση:__ Αν ένα σχήμα Σ έχει κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, τότε το συμμετρικό Σ' ως προς το Ο είναι το ίδιο σχήμα Σ.
Π.χ. Σε κάθε κύκλο το κέντρο του είναι κέντρο συμμετρίας αυτού, γιατί το συμμετρικό του ως προς Ο είναι ο ίδιος ο κύκλος.



7.5 Κατασκευές συμμετρικών σχημάτων ως προς σημείο

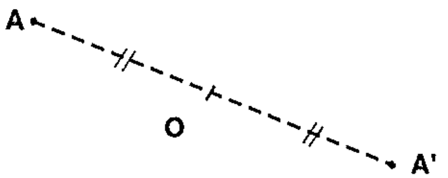
Θεωρία

Ερωτήσεις

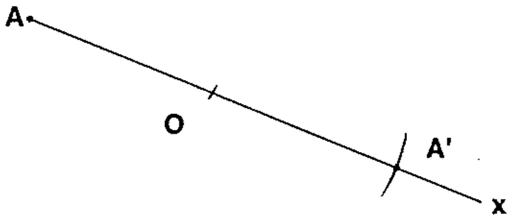
1. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς ένα σημείο Ο;

Απαντήσεις

1. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό σημείο Α' ενός σημείου Α ως προς σημείο Ο αρκεί να φέρουμε το τμήμα ΑΟ και να προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΑ' = ΑΟ.

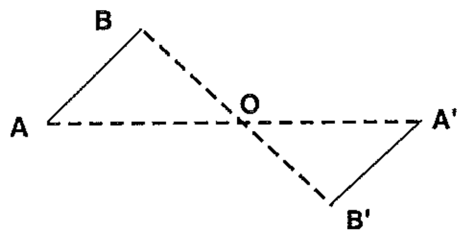


Η κατασκευή μπορεί να γίνει και με κανόνα (χάρακα) και διαβήτη. Φέρουμε την ημιευθεία Αx που διέρχεται από το σημείο Ο. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ = ΟΑ γράφουμε κύκλο που τέμνει την Αx στο Α'. Το Α' είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Ο.



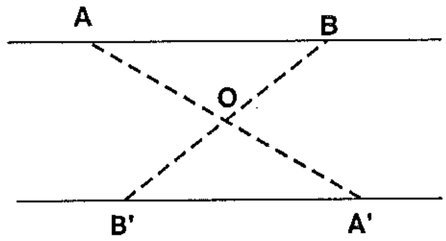
2. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο Ο;

2. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο, αρκεί να κατασκευάσουμε τα συμμετρικά Α', Β' των άκρων Α και Β ως προς το σημείο Ο. Το Α'Β' είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς το σημείο Ο. Το ευθύγραμμο τμήμα Α'Β' είναι ίσο και παράλληλο προς το ΑΒ.



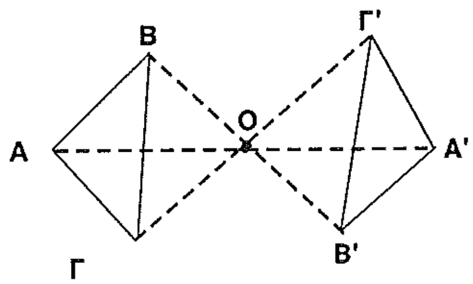
3. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό μιας ευθείας ε ως προς ένα σημείο Ο;

3. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό μιας ευθείας ε ως προς το σημείο Ο αρκεί να κατασκευάσουμε τα συμμετρικά Α', Β' δύο τυχαίων σημείων Α και Β της ευθείας ε. Η ευθεία ε' που ορίζεται από τα σημεία Α', Β' είναι η συμμετρική της ε ως προς το σημείο Ο και είναι ε//ε'.



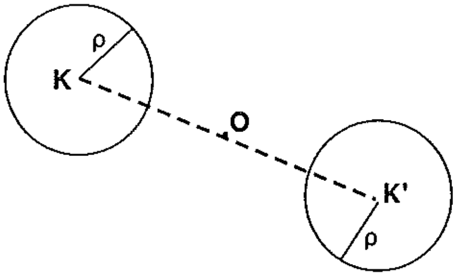
4. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς ένα σημείο Ο;

4. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο αρκεί να κατασκευάσουμε τα συμμετρικά Α', Β', Γ' των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ ως προς το σημείο Ο. Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς το σημείο Ο και είναι τρίγωνο ΑΒΓ= τρίγωνο Α'Β'Γ'. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ' μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το συμμετρικό μιας γωνίας Α ως προς ένα σημείο Ο είναι γωνία Α' ίση με αυτή.



5. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου ως προς ένα σημείο Ο;

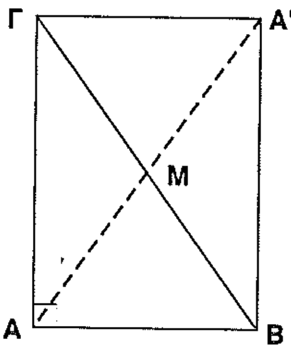
5. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό ενός κύκλου (Κ, ρ) ως προς σημείο Ο αρκεί να κατασκευάσουμε το συμμετρικό Κ' του κέντρου Κ του κύκλου (Κ ,ρ) ως προς το σημείο Ο. Ο κύκλος (Κ', ρ) είναι το συμμετρικό του κύκλου (Κ, ρ).



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°). Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, να κατασκευάσετε το συμμετρικό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ως προς το σημειο Μ. Αν Α' το συμμετρικό του Α ως προς το Μ, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΑ'Γ;

Λύση

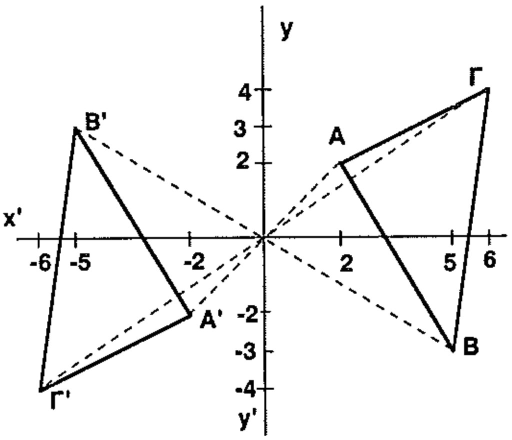


Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ (ΒΜ = ΜΓ). Το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ είναι η κορυφή Γ, γιατί ΒΜ = ΜΓ. Όμοια και η κορυφή Β είναι το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς το Μ. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό του Α ως προς το Μ φέρουμε την ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΜΑ' = ΑΜ. Το τρίγωνο Α'ΒΓ είναι το συμμετρικό του ΑΒΓ.

Το τετράπλευρο ΑΒΑ'Γ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται (ΑΜ = ΜΑ', ΒΜ = ΜΓ). Όμως η γωνία Α = 90° κατά συνέπεια είναι και ορθογώνιο.

2. Σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων με αρχή Ο να απεικονίσετε τα σημεία Α(2, 2), Β(5, - 3) και Γ(6, 4). Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ το σημείο Ο. Τι παρατηρείτε;

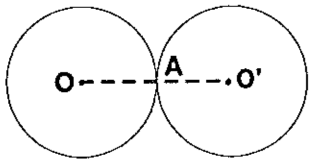
Λύση



Τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ ως προς την αρχή Ο των ορθογωνίων αξόνων είναι τα σημεία: Α'(- 2, - 2), Β'(- 6, 3) και Γ' (- 8, - 4). Το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς το Ο. Παρατηρούμε ότι τα συμμετρικά σημεία Α', Β', Γ' έχουν αντίθετες συντεταγμένες από τα αντίστοιχα σημεία Α, Β, Γ.

3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός κύκλου (Ο,3) ως προς ένα σημείο του Α.

Λύση

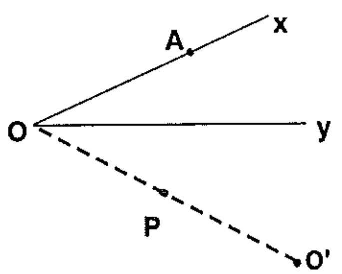


Έστω Α ένα σημείο του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3. Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΑΟ' = 3. Με κέντρο το σημείο Ο' και ακτίνα ρ' = 3 κατασκευάζουμε κύκλο (Ο', 3) που είναι το συμμετρικό του (Ο, 3). Παρατηρούμε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται (τέμνονται δηλαδή σε ένα μόνο σημείο).

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε μια γωνία xOy = 35° και στη συνέχεια να κατασκευάσετε το συμμετρικό της ως προς ένα σημείο Ρ που βρίσκεται έξω από αυτή.

Λύση

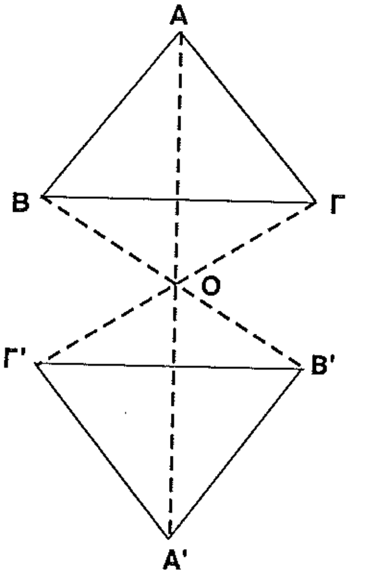


Με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου σχεδιάζουμε μια γωνία xOy = 35°. Έστω Ρ ένα εξωτερικό σημείο της γωνίας. Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό της γωνίας xOy ως προς το σημείο Ρ αρκεί να κατασκευάσουμε τα συμμετρικά των ημιευθειών Οx και Οy ως προς το σημείο Ρ. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε ένα σημείο Α της ημιευθείας Οx και ....

2. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς το σημείο Ο. Να

αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΟ και Α'Β'Ο' είναι ίσα.

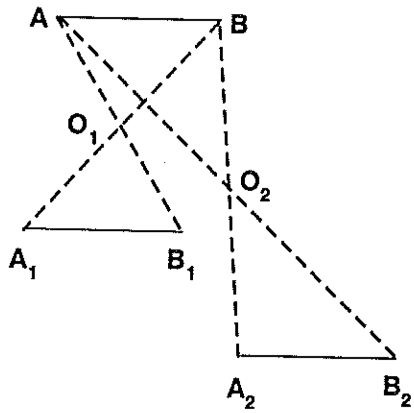
Λύση



Αρκεί να δείξουμε ότι οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΟ είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του τριγώνου Α'Β'Ο'. Πράγματι: το Α' είναι το συμμετρικό του Α ως προς το σημείο Ο άρα ΑΟ = Α'Ο. Όμοια..............

3. Στο παρακάτω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα A_1B_1 είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς το σημείο O_1 και το ευθύγραμμο τμήμα A_2B_2 είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως πρός το σημείο O_2. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα A_1B_1 είναι ίσο και παράλληλο με το ευθύγραμμο τμήμα A_2B_2.

Λύση



Μάθαμε ότι το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος ως προς ένα σημείο είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο και παράλληλο με αυτό.
Επομένως..................

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ). Να κατασκευάσετε το συμμετρικό μιας χορδής ΑΒ ως προς κέντρο συμμετρίας το κέντρο Ο. Να δικαιολογήσετε γιατί το συμμετρικό της χορδής ΑΒ είναι και αυτή χορδή του κύκλου.

2. Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και να βρείτε το συμμετρικό του ως προς το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Τι παρατηρείτε;

3. Σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων με αρχή Ο να απεικονίσετε τα σημεία Α (3, 0), Β (6, 3) και Γ (8, 1).
α) Να βρείτε τα συμμετρικά σημεία A_1, B_1, $Γ_1$, των Α, Β, Γ ως προς τον

άξονα x'x.
β) Να βρείτε τα συμμετρικά σημεία A_2, B_2, $Γ_2$ των A_1, B_1, $Γ_1$ ως προς τον άξονα y'y.
γ) Να βρείτε τα συμμετρικά σημεία A_3, B_3, $Γ_3$ των Α, Β, Γ ως προς την αρχή Ο. Τι παρατηρείτε;

4. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας:
α) Ο ρόμβος
β) Το τετράγωνο
γ) Το παραλληλόγραμμο
δ) Το ορθογώνιο.

5. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς το κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαμέσων του.

6. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο και μια εφαπτομένη ευθεία σε αυτόν στο σημείο Α. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό της εφαπτομένης ως προς το κέντρο του κύκλου. Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό μιας γωνίας xOy ως προς την κορυφή της Ο. Τι παρατηρείτε;

2. Να σχεδιάσετε μια γωνία xOy = 40° και πάνω στη πλευρά Ox να πάρετε τρία σημεία της Α, Β, Γ τέτοια ώστε ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ.
α) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό της πλευράς Ox ως προς την ευθεία Oy.
β) Αν Ox' το συμμετρικό της Ox ως προς την ευθεία Oy να αποδείξετε ότι yOx' = 40°.
γ) Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά Ο', Α', Β', Γ' των σημείων Ο, Α, Β, Γ ως προς την ευθεία Oy και να αποδείξετε ότι Ο'Α' = Α'Β' = Β'Γ'.

3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός κύκλου ως προς μια εφαπτομένη του. Αν Α είναι το σημείο επαφής να κατασκευάσετε το συμμετρικό του κύκλου ως προς το σημείο Α. Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή Ο να απεικονίσετε τα σημεία Α (-3, 2), Β (-1, 8), Γ (6, 2) και Δ (2, 4). Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ως προς τον άξονα y'y. Τι συμπεραίνετε για τις συντεταγμένες του συμμετρικού σχήματος;

5. Να εξετάσετε ποια από τα 24 γράμματα της αλφαβήτου έχουν άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

BASIC 11

Όπως όλοι γνωρίζετε στον υπολογιστή, μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφικές εικόνες από τις πιο απλές ως τις πιο σύνθετες. Οι εντολές που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι PLOT (για το σημείο), DRAW (για χάραξη ευθειών) και CIRCLE (για τη δημιουργία κύκλων).

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι από υπολογιστή σε υπολογιστή υπάρχουν διαφορές ως προς τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι εντολές αυτές. Για το λόγο αυτό θα ήταν χρήσιμο να συμβουλευτείτε το βιβλίο οδηγιών του υπολογιστή σας.

Η εντολή PLOT συνοδεύεται από δυο αριθμούς x, y (συντεταγμένες). Ο x δηλώνει την οριζόντια απόσταση και ο y την κάθετη.

Από τους δυο αριθμούς x, y συνοδεύεται και η εντολή DRAW αλλά η σημασία τους εξαρτάται από τον υπολογιστή σας.

Η εντολή CIRCLE συνοδεύεται από 3 αριθμούς x, y, z εκ των οποίων οι δυο πρώτοι δηλώνουν το σημείο του κέντρου και ο τρίτος την ακτίνα του κύκλου. Ας προσπαθήσουμε να πληκτρολογήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα.

```
10 PLOT  20,30    (↵)
20 DRAW  70,30    (↵)
30 DRAW  70,80    (↵)
40 DRAW  20,80    (↵)
50 DRAW  20,30    (↵)
   RUN            (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκε ένα τετράγωνο.

Έστω το πρόγραμμα:

```
10 CIRCLE 80,100,30    (↵)
20 CIRCLE 80,100,50    (↵)
30 CIRCLE 80,100,70    (↵)
   RUN                 (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκαν τρεις ομόκεντροι κύκλοι.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει έξι ομόκεντρους κύκλους που η ακτίνα τους να διαφέρει κατά 10 ξεκινώντας από το 20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο κύκλους που εφάπτονται στην ίδια ευθεία.

BASIC 12

Πληκτρολογήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

```
10 PLOT 30,40      (↵)
20 DRAW 120,40     (↵)
30 PLOT 30,40      (↵)
40 DRAW 120,60     (↵)
   RUN             (↵)
```

Παρατηρούμε ότι σχηματίστηκε μια γωνία.

Αν συνεχίσουμε με τις:

```
50 PLOT 30,40      (↵)
60 DRAW 30,120     (↵)
   RUN             (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχηματίζονται τώρα δυο εφεξής γωνίες και μάλιστα συμπληρωματικές.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο εφεξής γωνίες και παραπληρωματικές αν η κορυφή είναι το σημείο 60,20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

Μέτρηση κύκλου

8.1 Επίκεντρες γωνίες

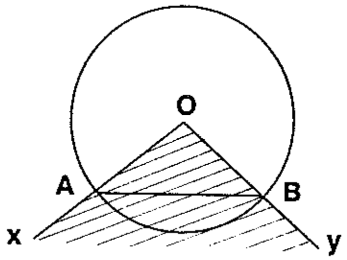
Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πότε μια γωνία λέγεται επίκεντρη;

1. Επίκεντρη λέγεται μια γωνία όταν η κορυφή της βρίσκεται, στο κέντρο ενός κύκλου.

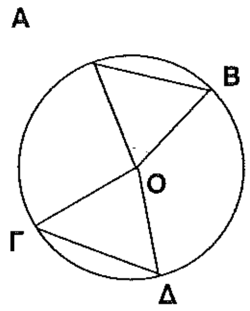
Π.χ. Η $\widehat{xOy}$ είναι επίκεντρη γωνία.



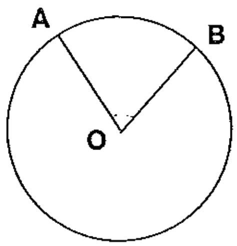
Το τόξο ΑΒ λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της και η χορδή ΑΒ λέγεται **αντίστοιχη χορδή** της.

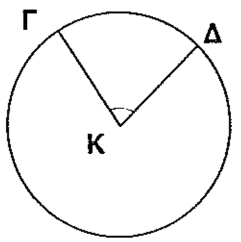
2. Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ποια είναι η σχέση μεταξύ επίκεντρων γωνιών, αντίστοιχων τόξων και αντίστοιχων χορδών;

2. Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα και τα αντίστοιχα τόξα τους και ίσα τόξα έχουν ίσες τις αντίστοιχες χορδές τους.



Αν $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ τότε τόξο ΑΒ = τόξο ΓΔ και ΑΒ = ΓΔ.





Έστω ότι οι κύκλοι του διπλανού σχήματος είναι ίσοι.

Αν $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma K\Delta}$ τότε τόξο ΑΒ = τόξο ΓΔ και ΑΒ = ΓΔ.

3. Δύο τόξα μ° είναι πάντοτε ίσα;

3. Δύο τόξα μ° είναι ίσα μόνο όταν είναι τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων.

4. Ποια η σχέση μιας επίκεντρης γωνίας σε μοίρες με το αντίστοιχο τόξο της;

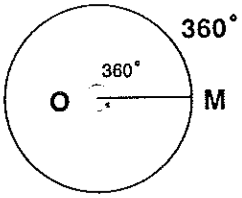
4. Μια επίκεντρη γωνία σε μοίρες είναι ίση με το αντίστοιχο τόξο της.

Α. Λυμένες ασκήσεις

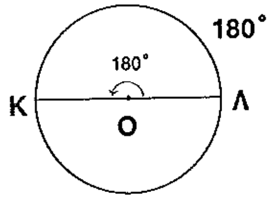
1. Να βρεθεί πόσων μοιρών είναι:
α) ένας κύκλος, β) ένα ημικύκλιο,
γ) κάθε ένα από τα τόξα που χωρίζεται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους.

Λύση

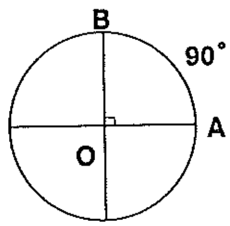
α)



β)



γ)



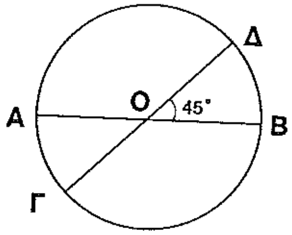
α) Ένας κύκλος αντιστοιχεί σε πλήρη επίκεντρη γωνία άρα είναι 360°.

β) Ένα ημικύκλιο αντιστοιχεί σε ευθεία επίκεντρη γωνία άρα είναι 180°.

γ) Οι διάμετροι είναι κάθετοι άρα σχηματίζονται 4 επίκεντρες γωνίες που κάθε μία είναι 90° άρα το τόξο ΑΒ είναι 90° (τεταρτοκύκλιο).

2. Δύο διάμετροι ενός κύκλου τέμνονται και σχηματίζουν γωνία 45°. Να βρεθεί πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζουν τον κύκλο οι διάμετροι αυτές.

Λύση



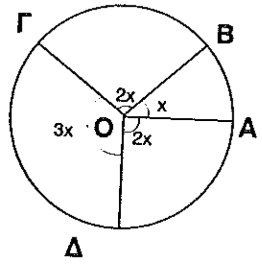
Οι γωνίες $\widehat{BO\Delta}$ και $\widehat{AO\Gamma}$ είναι ίσες γιατί είναι κατακορυφήν επομένως τόξο ΒΔ = = τόξο ΑΓ = 45°. Οι γωνίες $\widehat{AO\Delta}$ και $\widehat{BO\Delta}$ είναι παραπληρωματικές, άρα:

$\widehat{AO\Delta} = 180° - \widehat{BO\Delta}$ ή $\widehat{AO\Delta} = 180° - 45° =$ $= 135°$. Οι γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ και $\widehat{BO\Delta}$ είναι ίσες γιατί είναι κατακορυφήν, επομένως:

τόξο ΑΔ = τόξο ΒΓ = 135°.

3. Σε κύκλο (Ο, ρ) να υπολογισθούν τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αν είναι γνωστές οι σχέσεις των γωνιών όπως φαίνονται στο σχήμα.

Λύση



Παρατηρούμε ότι τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ είναι διαδοχικά και το άθροισμά τους είναι ολόκληρος ο κύκλος. Άρα:

ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 360° ή

$x + 2x + 3x + 2x = 360°$ ή

$8x = 360°$ ή

$$x = \frac{360°}{8} = 45°$$

Επομένως: τόξο ΑΒ = 45°,

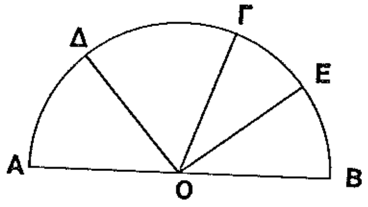
τόξο ΒΓ = 2 · 45° = 90°,

τόξο ΓΔ = 3 · 45° = 135°,

τόξο ΔΑ = 90°.

4. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ είναι γωνία ΒΟΓ = 80°. Φέρουμε την κάθετη ΟΔ στη διχοτόμο ΟΕ της γωνίας ΒΟΓ. Να υπολογίσετε το τόξο ΑΔ.

Λύση



Παρατηρούμε ότι: $\widehat{\Gamma OE} = \widehat{EOB} = \dfrac{80°}{2} =$

$= 40°$, γιατί ΟΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BO\Gamma}$.

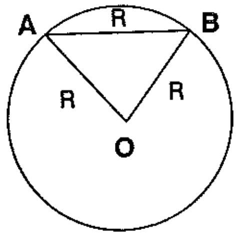
Άρα η $\widehat{AO\Delta} = 180° - \widehat{\Delta OE} - \widehat{EOB} =$

$= 180° - 90° - 40° = 50°$

Επομένως: τόξο ΑΔ = 50°.

5. Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε μια χορδή ΑΒ = R να υπολογίσετε το τόξο ΑΒ.

Λύση



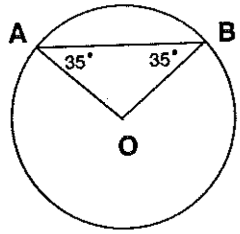
Επειδή ΑΒ = ΟΑ = ΟΒ = R το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο άρα:

$$\widehat{AOB} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Επομένως: τόξο ΑΒ = 60°.

6. Σε κύκλο (Ο, R) γράφουμε μια επίκεντρη γωνία ΑΟΒ. Αν η γωνία ΑΒΟ είναι 35° να βρεθεί το τόξο ΑΒ.

Λύση



Επειδή ΟΑ = ΟΒ = R το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές άρα:

$\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = 35^\circ$.

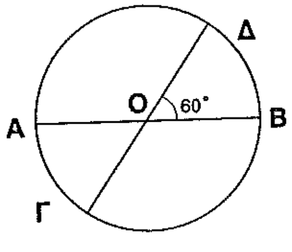
Άρα η $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{ABO} - \widehat{OAB} =$

$= 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$. Δηλαδή: τόξο ΑΒ = 110°.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δύο διάμετροι ενός κύκλου τέμνονται και σχηματίζουν γωνία 60°. Να βρεθεί πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζουν τον κύκλο οι διάμετροι αυτοί.

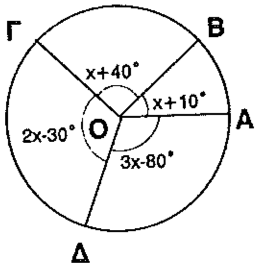
Λύση



Είναι: $\widehat{BO\Delta} = \widehat{AO\Gamma}$.... και

$\widehat{AO\Delta} = 180^\circ - \widehat{BO\Delta} =$ ....

2. Να υπολογισθούν τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του παρακάτω σχήματος:



Λύση

Είναι: $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OA} = 360^\circ$

Άρα:

$x + 10^\circ + x + 40^\circ + 2x - 30^\circ + 3x - 80^\circ =$

$= 360^\circ$ ή ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δύο διάμετροι ενός κύκλου τέμνονται και σχηματίζουν γωνία 80°. Να υπολογισθούν πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζουν οι διάμετροι αυτές τον κύκλο.

2. Σε κύκλο (Ο, ρ) γράφουμε τα τόξα ΑΒ = 35°, ΒΓ = 48°, ΓΔ = 85°. Να υπολογισθούν οι επίκεντρες γωνίες:

$\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$ και $\widehat{AO\Delta}$.

3. Σε κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε τόξο ΑΒ = 2x, τόξο ΒΓ = 3x + 20°, τόξο ΓΔ = 20° + x, τόξο ΔΑ = 3x - 40°. Να υπολογισθούν σε μοίρες τα τόξα.

4. Το άθροισμα τριών διαδοχικών επίκεντρων γωνιών είναι 280°. Αν κάθε μία είναι διπλάσια από την προηγούμενή της, πόσες μοίρες είναι η κάθε μια;

5. Σε κύκλο (Ο, ρ) φέρουμε μία διάμετρο ΑΒ. Αν Γ είναι ένα σημείο του κύκλου και Κ και Λ είναι τα μέσα των τόξων ΑΓ και ΓΒ να υπολογίσετε τη γωνία ΚΟΛ.

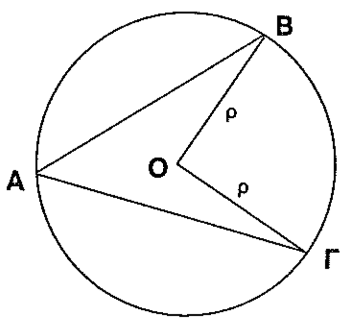
6. Πάρτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ = 3 cm και κατασκευάστε τους κύκλους (Μ, ΜΝ) και (Ν, ΜΝ) οι οποίοι τέμνονται στα Κ, Λ. Να υπολογίσετε τα τόξα ΜΚ, ΚΝ, ΝΛ, ΛΜ και να δείξετε ότι το τετράγωνο ΚΜΛΝ είναι ρόμβος.

8. 2 Εγγεγραμμένες γωνίες

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη σε κύκλο;



Απαντήσεις

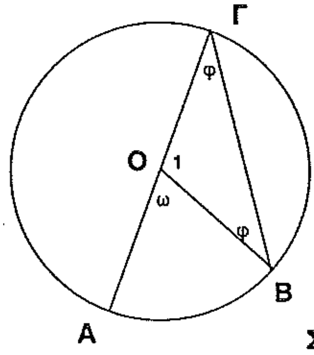
1. **Εγγεγραμμένη** σε κύκλο λέγεται μια γωνία όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο (Ο, ρ).

Το τόξο ΒΓ λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της εγγεγραμμένης $\widehat{BA\Gamma}$.

Λέμε ότι η εγγεγραμμένη $\widehat{BA\Gamma}$ **βαίνει** στο στο τόξο ΒΓ.

2. Ποια η σχέση μιας εγγεγραμμένης με μια επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο;



Σχ. (α)

2. Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο με μια επίκεντρη του ίδιου κύκλου, ισούται με το μισό της επίκεντρης.

<u>Απόδειξη:</u>

α) Έστω ότι η μια πλευρά της εγγεγραμμένης ΑΓΒ περνάει από το κέντρο του κύκλου, τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα (α), το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές (ΟΓ = ΟΒ = ακτίνες). Άρα:

$\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = \widehat{\varphi}$ και $\widehat{O_1} + 2\widehat{\varphi} = 180^\circ$ (1)

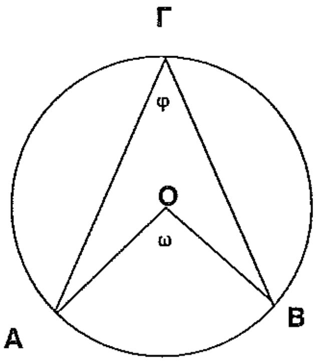
Όμως $\widehat{O_1}$ και $\widehat{\omega}$ είναι παραπληρωματικές,

δηλ.: $\widehat{O_1} + \widehat{\omega} = 180^\circ$ (2)

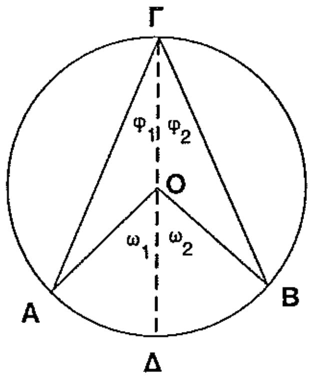
Επειδή τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα θα είναι και τα πρώτα, άρα:

$$\widehat{O_1} + 2\widehat{\varphi} = \widehat{O_1} + \widehat{\omega} \quad \text{ή} \quad 2\widehat{\varphi} = \widehat{\omega} \quad \text{ή} \quad \widehat{\varphi} = \frac{\widehat{\omega}}{2}$$

β) Αν όμως η εγγεγραμμένη έχει τη θέση που δείχνει το σχήμα (β), τότε:



ή



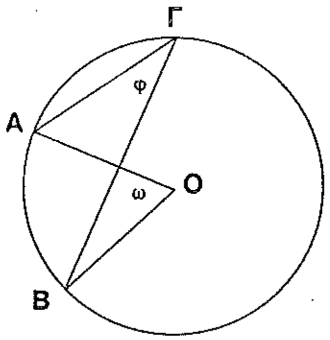
Σχ. (β)

Φέρνουμε τη διάμετρο ΓΔ και έτσι εμφανίζεται δεξιά και αριστερά της διαμέτρου η προηγούμενη περίπτωση, δηλαδή:

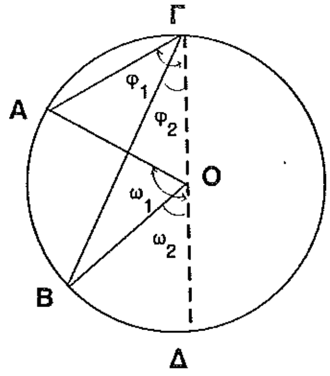
$\widehat{\varphi_1} = \dfrac{\widehat{\omega_1}}{2}$ και $\widehat{\varphi_2} = \dfrac{\widehat{\omega_2}}{2}$ άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2} = \frac{\widehat{\omega_1}}{2} + \frac{\widehat{\omega_2}}{2} = \frac{\widehat{\omega_1} + \widehat{\omega_2}}{2} \quad \text{ή} \quad \widehat{\varphi} = \frac{\widehat{\omega}}{2}$$

γ)



ή



Σχ. (γ)

Στο σχήμα (γ) έχουμε λόγω της περίπτωσης (α):

$\widehat{\varphi}_1 = \dfrac{\widehat{\omega}_1}{2}$ και $\widehat{\varphi}_2 = \dfrac{\widehat{\omega}_2}{2}$ άρα με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\widehat{\varphi}_1 - \widehat{\varphi}_2 = \frac{\widehat{\omega}_1}{2} - \frac{\widehat{\omega}_2}{2} = \frac{\widehat{\omega}_1 - \widehat{\omega}_2}{2} \text{ ή } \widehat{\varphi} = \frac{\widehat{\omega}}{2}$$

3. Ποια η σχέση του μέτρου μιας εγγεγραμμένης γωνίας σε μοίρες με το αντίστοιχο τόξο της;

3. Η εγγεγραμμένη γωνία σε μοίρες ισούται με το μισό του αντίστοιχου τόξου της.

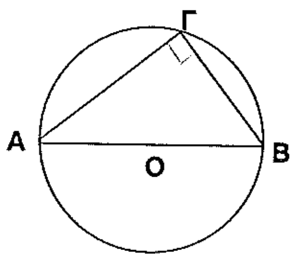
4. Ποια η σχέση μεταξύ εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο και γιατί;

4. Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους, γιατί κάθε μία από αυτές σε μοίρες ισούται με το μισό του τόξου.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Λύση



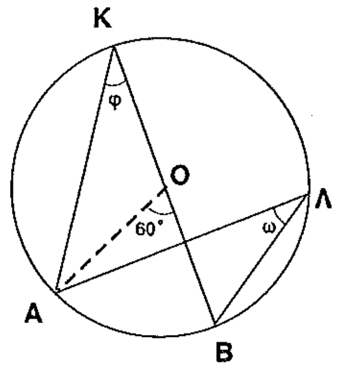
Η εγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ βαίνει σε ημικύκλιο, δηλαδή σε τόξο 180°, άρα θα ισούται σε μοίρες με το μισό του.

Οπότε: $\widehat{ΑΓΒ} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Επομένως οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές.

2. Να συγκρίνετε και να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω του σχήματος.

Λύση

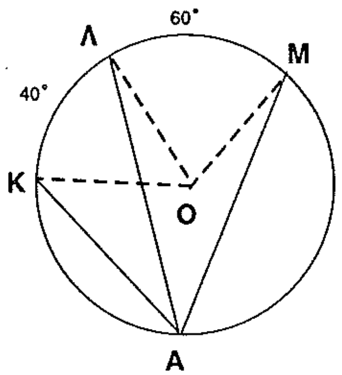


Οι γωνίες φ και ω είναι εγγεγραμμένες γωνίες και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΒ άρα κάθε μία θα είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας ΑΟΒ δηλαδή:

$\hat{\omega} = \hat{\varphi} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

3. Σε κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα ΚΛ = 40° και ΛΜ = 60°. Να υπολογίσετε τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα ΚΛ και ΛΜ.

Λύση



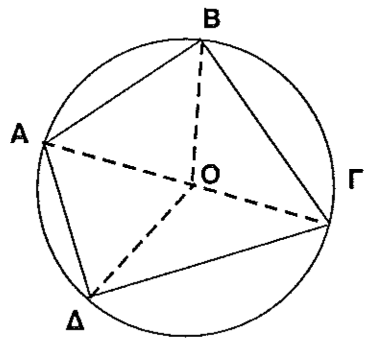
Η εγγεγραμμένη $\widehat{ΚΑΛ} = \frac{\widehat{ΚΟΛ}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

και η εγγεγραμμένη $\widehat{ΛΑΜ} = \frac{\widehat{ΛΟΜ}}{2} = \frac{60^\circ}{2} =$

$= 30^\circ$.

4. Να υπολογισθούν οι γωνίες του παρακάτω τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αν η γωνία ΒΟΔ = 120°.

Λύση



Οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Δ}$ βαίνουν σε ημικύκλιο, γιατί η ΑΓ είναι διάμετρος.

Άρα: $\hat{Β} = \hat{Δ} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

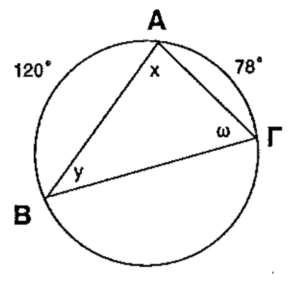
Επίσης $\widehat{ΒΓΔ} = \frac{\widehat{ΒΟΔ}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Άρα η $\widehat{ΒΑΔ} = 360^\circ - \hat{Β} - \hat{Δ} - \hat{Γ} =$

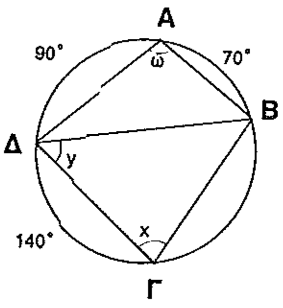
$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

5. Να υπολογισθούν οι γωνίες x, y, ω στα παρακάτω σχήματα:

α)



β)



Λύση

α) Η γωνία $\widehat{\omega}$ βαίνει στο τόξο ΑΒ = 120°, άρα: $\widehat{\upsilon} = \frac{120°}{2} = 60°$. Η γωνία $\widehat{y}$ βαίνει στο τόξο ΑΓ = 78°, άρα: $\widehat{y} = \frac{78°}{2} = 39°$.

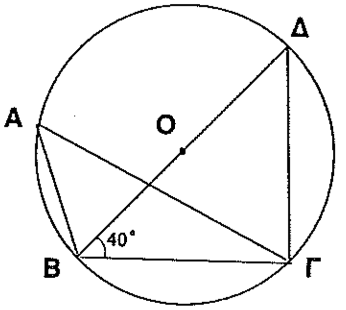
Άρα η γωνία $\widehat{x} = 180° - 60° - 39° = 81°$.

β)Η γωνία $\widehat{x}$ βαίνει στο τόξο ΑΒ = 90° + + 70° = 160°, άρα: $\widehat{x} = \frac{160°}{2} = 80°$. Η γωνία $\widehat{y}$ βαίνει στο τόξο ΒΓ = 360° - 70° - - 90° - 140° = 60°, άρα: $\widehat{y} = \frac{60°}{2} = 30°$

και η γωνία $\widehat{\omega} = \frac{140° + 60°}{2} = \frac{200°}{2} =$ = 100°.

6. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία Α.

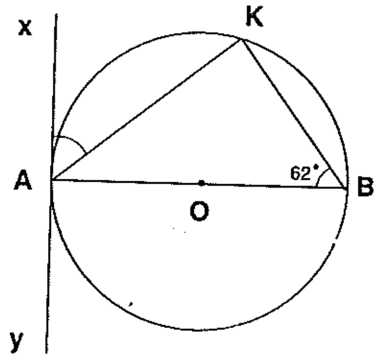
Λύση



Η γωνία $\widehat{ΒΓΔ}$ = 90°, γιατί βαίνει σε ημικύκλιο, άρα η γωνία $\widehat{Δ}$ που είναι γωνία του τριγώνου ΒΓΔ είναι: $\widehat{Δ}$ = 180° - 90° - 40° = 50°, και επειδή η $\widehat{Α}$ και η $\widehat{Δ}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ η $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$ = 50°.

7. Δίνεται διάμετρος ΑΒ κύκλου (Ο, ρ) και φέρνουμε την εφαπτομένη xΑy του κύκλου στο Α. Αν Κ σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε γωνία ΑΒΚ = 62°, να υπολογίσετε τη γωνία xΑΚ. Τι παρατηρείτε;

Λύση



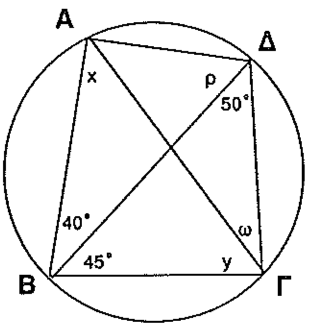
Η γωνία $\widehat{Κ}$ = 90°, γιατί βαίνει σε ημικύκλιο, άρα η γωνία $\widehat{ΚΑΒ}$ = 180° - 90° - 62° = 28°, και επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στη διάμετρο ΑΒ η $\widehat{xΑΚ}$ = 90° - 28° = 62°.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $\widehat{xΑΚ} = \widehat{Β}$.

<u>Δηλαδή:</u> Η γωνία που σχηματίζεται από μία εφαπτομένη του κύκλου και από μία χορδή του είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο αυτής της χορδής.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, ω, ρ στο παρακάτω σχήμα.

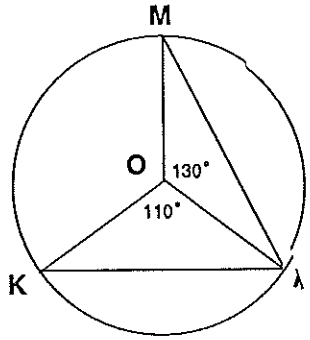


Λύση

Η γωνία $\widehat{x} = \widehat{B\Delta\Gamma}$ γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο ....

Η $\widehat{\omega} = \widehat{AB\Delta}$ γιατί ....

2. Να υπολογίσετε τη γωνία ΚΛΜ του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Είναι $\widehat{KOM} = 360° - (110° + 130°) = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) να πάρετε διαδοχικά τα τόξα ΑΒ = 40°, ΒΓ = 52°. Να υπολογίσετε τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ.

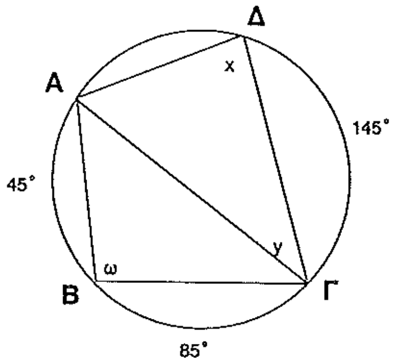
2. Μια εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της ορθής. Να βρείτε σε μοίρες το αντίστοιχο τόξο της.

3. Σε ένα κύκλο να πάρετε διαδοχικά τα τόξα ΑΒ και ΒΓ ώστε το τόξο ΑΒ να είναι το $\frac{1}{6}$ του κύκλου και το τόξο ΒΓ να είναι τα $\frac{2}{3}$ του κύκλου. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Σε ένα κύκλο παίρνουμε τρία διαδοχικά τόξα ΑΒ = 67°, ΒΓ = 75° και ΓΔ = 120°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

5. Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες ΑΟΒ = 135° και ΒΟΓ = 75°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Σε ένα κύκλο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι όπως στο επόμενο σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, ω.



8. 3 Κανονικά πολύγωνα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιο πολύγωνο λέγετε κανονικό;

2. Πώς κατασκευάζουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές εγγεγραμμένο σε κύκλο; Ποιος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολύγωνου;

3. Ποια γωνία ονομάζεται κεντρική γωνία κανονικού ν-γώνου και με τι ισούται;

Απαντήσεις

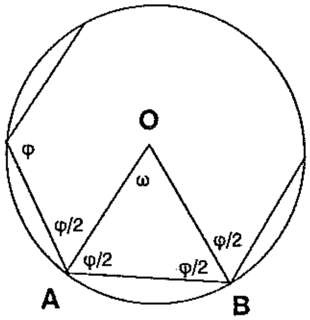
1. **Κανονικό πολύγωνο** λέγεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες.

2. Για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές εγγεγραμμένο σε κύκλο κάνουμε τα εξής:
α) Χωρίζουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα με τη βοήθεια διαδοχικών ίσων επίκεντρων γωνιών (κάθε μία ίση με 360 : ν μοίρες).
β) Ενώνουμε διαδοχικά τα σημεία στα οποία ο κύκλος χωρίστηκε. Το πολύγωνο που κατασκευάσαμε μ' αυτόν τον τρόπο είναι κανονικό. Ο κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πολυγώνου. Το κέντρο του κύκλου λέγεται **κέντρο του πολυγώνου.**

3. **Κεντρική γωνία** κανονικού ν-γώνου ονομάζεται η επίκεντρη γωνία ω που βαίνει σε τόξο που αντιστοιχεί σε χορδή όση η πλευρά του πολυγώνου. Ισούται σε μοίρες όσο και το αντίστοιχο τόξο. Όμως το τόξο αυτό είναι ένα από τα ν ίσα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από το πολύγωνο. Άρα:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{\nu}$$

4. Με τι ισούται κάθε μία από τις ίσες γωνίες του πολυγώνου;



4. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι η γωνία του πολυγώνου φ ισούται με το άθροισμα των δύο γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΒ. Άρα:

$$\frac{\hat{\varphi}}{2}+\frac{\hat{\varphi}}{2}=180^\circ-\hat{\omega} \quad ή \quad \hat{\varphi}=180^\circ-\hat{\omega}$$

Επομένως κάθε μία από τις γωνίες του πολυγώνου ισούται με:

$$\hat{\varphi}=180^\circ-\frac{360^\circ}{\nu}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου, εξαγώνου, οκταγώνου, δωδεκαγώνου.

Λύση

Η γωνία του κανονικού ν -γώνου δίνεται από τον τύπο $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{\nu}$,

άρα του πενταγώνου είναι $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$,

του εξαγώνου είναι $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$,

του οκταγώνου είναι $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$,

του δωδεκαγώνου είναι $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$.

2. Να βρείτε πόσες πλευρές έχει ένα κανονικό πολύγωνο, αν γνωρίζετε ότι η κεντρική του γωνία είναι:
α) 20°, β) 30°, γ) 36°, δ) 2/3 ορθής.

Λύση

Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι:

$\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{\nu}$.

Αν $\hat{\omega}=20^\circ$ έχουμε $20^\circ=\frac{360^\circ}{\nu}$ ή

$\nu=\frac{360^\circ}{20^\circ}=18$ κανονικό δεκαοκτάγωνο.

Αν $\hat{\omega}=30^\circ$ έχουμε $30^\circ=\frac{360^\circ}{\nu}$ ή

$\nu=\frac{360^\circ}{30^\circ}=12$ κανονικό δωδεκάγωνο.

Αν $\hat{\omega}=36^\circ$ έχουμε $36^\circ=\frac{360^\circ}{\nu}$ ή

$\nu=\frac{360^\circ}{36^\circ}=10$ κανονικό δεκάγωνο.

Αν $\hat{\omega}=\frac{2}{3}$ ορθής $=\frac{2}{3}\cdot 90^\circ=60^\circ$ έχουμε

$60^\circ=\frac{360^\circ}{\nu}$ ή $\nu=\frac{360^\circ}{60^\circ}=6$

κανονικό εξάγωνο.

3. Να υπολογισθεί το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού ν-γώνου.

Λύση

Η γωνία κάθε πολυγώνου είναι:

$\hat{\varphi} = 180° - \hat{\omega}$

Επειδή στο ν-γωνο έχουμε ν γωνίες, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$\nu \cdot \hat{\varphi} = \nu \cdot (180° - \hat{\omega}) = \nu \cdot 180° - \nu \cdot \hat{\omega} =$$
$$= \nu \cdot 180° - \nu \cdot \frac{360°}{\nu} = \nu \cdot 180° - 360° =$$
$$= 180° \cdot (\nu - 2) \quad \text{ή σε ορθές } 2 \cdot (\nu - 2).$$

4. Αν η γωνία ενός πολυγώνου είναι 135°, να βρεθεί ο αριθμός των πλευρών του.

Λύση

Αφού είναι $\hat{\varphi} = 135°$, από το γνωστό τύπο έχουμε: $\hat{\omega} = 180° - \hat{\varphi} = 180° - 135° = 45°$ και από τον τύπο $\hat{\omega} = \frac{360°}{\nu}$ έχουμε:

$$45° = \frac{360°}{\nu} \quad \text{ή} \quad \nu = \frac{360°}{45°} = 8.$$

Άρα το πολύγωνο είναι κανονικό οκτάγωνο.

5. Από ένα κανονικό ν-γωνο να κατασκευάσετε ένα πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών.

Λύση

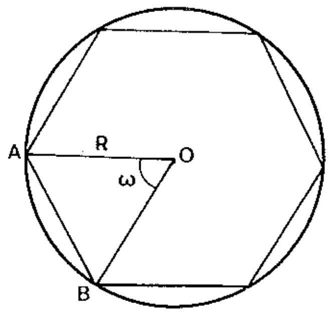
Αν ονομάσουμε ω τη κεντρική γωνία του ν-γώνου και θ του 2ν-γώνου τότε:

$$\hat{\omega} = \frac{360°}{\nu} \text{ και } \hat{\theta} = \frac{360°}{2\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{\nu} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \hat{\omega} \text{ δηλαδή } \hat{\theta} = \frac{\omega}{2}$$

Άρα, αν φέρουμε τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του ν-γώνου, τότε κάθε μία από τις γωνίες που δημιουργείται θα είναι κεντρική γωνία του 2ν-γώνου. Οι προεκτάσεις των διχοτόμων τέμνουν τον περιγεγραμμένο στο ν-γωνο κύκλο στα μέσα των τόξων που τον χωρίζει το ν-γωνο. Αν ενώσουμε αυτά τα σημεία με τις κορυφές του ν-γώνου παίρνουμε το 2ν-γωνο.

6. Να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο.

Λύση



Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360°}{6} = 60°$$

Άρα το τρίγωνο AOB όπου AB η πλευρά του είναι ισόπλευρο. Επομένως AB = OA = OB = R, δηλαδή για να κατασκευάσουμε ένα εξάγωνο παίρνουμε πάνω στον κύκλο διαδοχικά 6 χορδές ίσες με την ακτίνα.

6. Να κατασκευασθεί: α) κανονικό δωδεκάγωνο και β) κανονικό τρίγωνο.

Λύση

α) Κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο και διχοτομούμε τις γωνίες του. Έτσι έχουμε τις κορυφές του κανονικού δωδεκαγώνου.

β) Ενώνουμε τις κορυφές του εξαγώνου ανά 2 και έχουμε τις κορυφές του κανονικού τριγώνου.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί πόσες πλευρές έχει το κανονικό πολύγωνο που έχει κεντρική γωνία:
α) 9°, β) 18°, γ) 20°, δ) 36°.

Λύση

Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι:

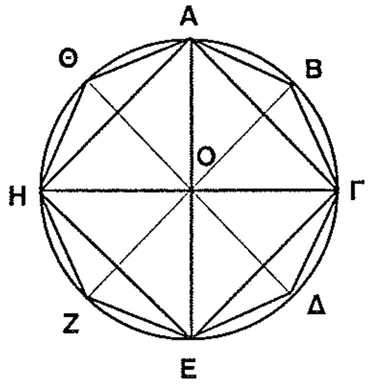
$\hat{\omega} = \dfrac{360°}{\nu}$ άρα ο αριθμός των πλευρών του είναι $\nu = \dfrac{360°}{\hat{\omega}}$.

α) $\nu = \dfrac{360°}{9} = 40$ πλευρές

β) ....

2. Να κατασκευάσετε ένα οκτάγωνο και να υπολογίσετε την κεντρική του γωνία και το άθροισμα όλων των γωνιών του.

Λύση



Κατασκευάζουμε δύο κάθετες χορδές ΑΕ, ΗΓ και φτιάχνουμε το τετράγωνο ΑΓΕΗ....
Η κεντρική γωνία είναι ω = 360/ν οπότε ..... και το άθροισμα των γωνιών του είναι Σ = (2ν - 4) ορθές. Δηλαδή

3. Να βρείτε τη γωνία φ ενός κανονικού πενταγώνου, εξαγώνου οκταγώνου, δωδεκαγώνου.

Λύση

Η γωνία $\hat{\varphi}$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι: $\hat{\varphi} = 180° - \hat{\omega}$ και η $\hat{\omega} = \dfrac{360°}{\nu}$ άρα του πενταγώνου είναι $\hat{\omega} = \dfrac{360°}{\nu} = 72°$

Ομοίως του οκταγώνου ....

4. Να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρές 3 cm.

Λύση

Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι όση η ακτίνα του κύκλου άρα ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε πόσες πλευρές έχει ένα πολύγωνο που έχει κεντρική γωνία: α) 72°, β) 20°, γ) 30°, δ) 22,5°.

2. Να υπολογίσετε σε ποιο πολύγωνο η γωνία του είναι ίση με: α) 144°, β) 162°, γ) 150°, δ) 140°.

3. Κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνία είναι 20°. Να βρείτε τη γωνία του πολυγώνου φ, τον αριθμό των πλευρών του και το άθροισμα των γωνιών του.

4. Σε κανονικό πολύγωνο το άθροισμα όλων των γωνιών του είναι 1440°. Να βρείτε την κεντρική γωνία του.

8.4 Πλευρά κανονικού πολυγώνου

Θεωρία

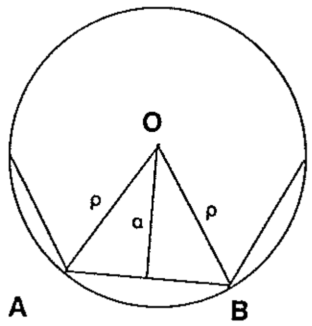
Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου;

Απαντήσεις

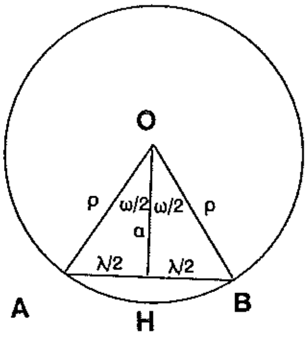
1. **Απόστημα** ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από το κέντρο του πολυγώνου κάθετα προς μια πλευρά του πολυγώνου.

Προφανώς τα αποστήματα ενός κανονικού πολυγώνου είναι όσα και οι πλευρές του και είναι ίσα μεταξύ τους.



2. Να υπολογίσετε την πλευρά λ και την περίμετρο Τ ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο διαμέτρου δ.

2. Έστω ΑΒ η πλευρά ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,ρ). Έστω επίσης ΟΗ το απόστημα του πολυγώνου.
Αν ω είναι η κεντρική γωνία τότε από



το τρίγωνο ΑΗΟ θα έχουμε ότι:

$$ημ\frac{ω}{2} = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{λ}{2}}{ρ} \quad ή \quad ημ\frac{ω}{2} = \frac{λ}{2ρ}$$

οπότε $λ = 2ρ \cdot ημ\frac{ω}{2}$

Άρα $T = ν \cdot λ$ ή $T = ν \cdot 2ρ \cdot ημ\frac{ω}{2}$

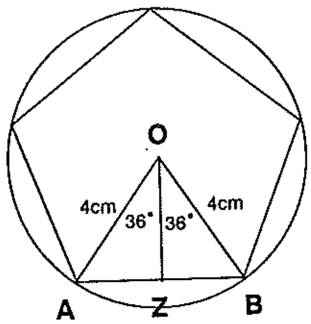
και επειδή $δ = 2ρ$ έχουμε

$$\boldsymbol{λ = δ \cdot ημ\frac{ω}{2} \quad \text{και} \quad T = ν \cdot δ \cdot ημ\frac{ω}{2}}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την πλευρά λ και την περίμετρο Τ ενός κανονικού πενταγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου δ = 8 cm.

Λύση



Η κεντρική γωνία του πενταγώνου είναι:

$$\hat{ω} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Από τον τύπο $λ = δ \cdot ημ\frac{ω}{2}$ που μας δίνει την πλευρά ενός κανονικού ν-γώνου έχουμε για το κανονικό πεντάγωνο:

$$λ = 8 \cdot ημ\frac{72^\circ}{2} = 8 \cdot ημ36^\circ = 8 \cdot 0{,}588 =$$

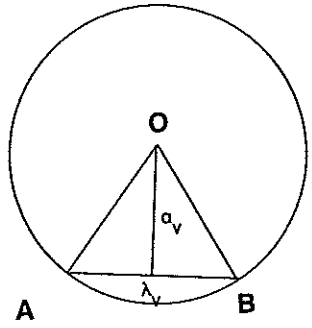
$= 4{,}704$ cm.

Επομένως η περίμετρός του είναι:

$T = 5 \cdot 4{,}704 = 23{,}52$ cm.

2. Να βρεθεί το εμβαδόν ενός κανονικού ν-γώνου αν είναι γνωστά το απόστημά του $α_ν$ και η πλευρά του $λ_ν$.

Λύση



Το ν-γωνο αποτελείται από ν ίσα τρίγωνα πλευράς $λ_ν$ και ύψους $α_ν$, άρα το εμβαδόν του είναι:

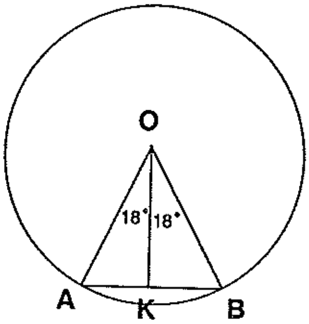
$$E = ν \cdot \frac{1}{2} λ_ν \cdot α_ν$$

Επειδή όμως η περίμετρός του είναι $T_ν = ν \cdot λ_ν$ ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$E = \frac{1}{2} T_ν \cdot α_ν$$

3. Να υπολογίσετε την πλευρά, την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα 2,5 cm.

Λύση



Η κεντρική γωνία του κανονικού δεκαγώνου είναι: $ω = 360°/10 = 36°$.
Η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου

σύμφωνα με τον τύπο $λ = δ \cdot ημ\frac{ω}{2}$ θα

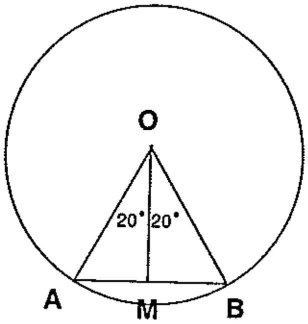
είναι:
$λ = 5 \cdot ημ18° = 5 \cdot 0,309 = 1,545$ cm.
Άρα η περίμετρος του κανονικού δεκαγώνου θα είναι: $T = 10 \cdot 1,545$ cm. Το εμβαδόν του κανονικού δεκαγώνου αποτελείται από το εμβαδόν δέκα ισοσκελών τριγώνων μεταξύ τους ίσα. Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΟΑΒ το οποίο είναι: $E = 1/2 \cdot AB \cdot OK$.
Την ΑΒ τη γνωρίζουμε $AB = λ = 1,545$ cm.
Η ΟΚ βρίσκεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ.
$συν18° = OK/OA$ ή $OK = OA \cdot συν18°$ ή $OK = 2,5 \cdot 0,951 = 2,3775$ cm.

Άρα: $E = \frac{1}{2} \cdot 1,545 \cdot 2,3775 \cong 1,836$ cm².

Άρα το εμβαδόν του κανονικού δεκαγώνου είναι περίπου: $10 \cdot 1,836 = 18,36$ cm².

4. Ένα κανονικό εννεάγωνο πλευράς 8 cm είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Λύση



Η κεντρική του γωνία είναι: $\hat{ω} = \frac{360°}{9} = 40°$. Άρα $\widehat{AOM} = \frac{40°}{2} = 20°$ και $AM = \frac{8}{2} = 4$ cm.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε ότι:

$εφ20° = \frac{AM}{OM}$ ή $OM = \frac{AM}{εφ20°}$ ή

$OM = \frac{4}{0,364} \cong 10,98$ cm.

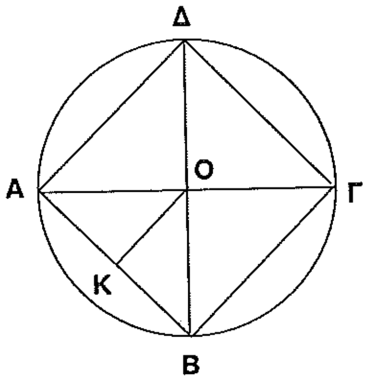
Άρα το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10,98 = 21,96 \text{ cm}^2.$$

Οπότε το εμβαδόν του 9-γώνου θα είναι: $9 \cdot 21,96 = 197,64$ cm².

5. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 12 cm.

Λύση



Η κεντρική γωνία του τετραγώνου είναι 90°. Η πλευρά του τετραγώνου είναι:

$\lambda = 2\rho \cdot \eta\mu \frac{\omega}{2}$ δηλαδή $\lambda = 2 \cdot 12 \cdot \eta\mu 45° =$

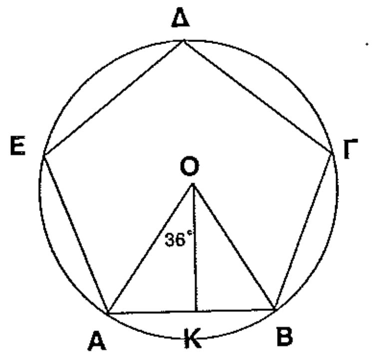
$= 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 16,97$ cm.

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:
$E = \lambda^2 = (16,97)^2 = 288$ cm^2.

B. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, αν το απόστημά του είναι 12 cm.

Λύση



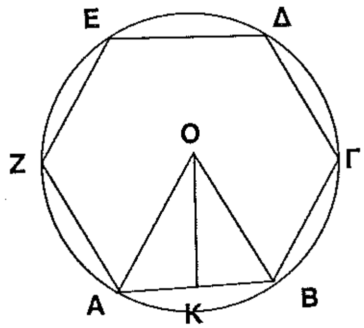
Κεντρική γωνία: $\hat{\omega} = \frac{360°}{5} = 72°$, άρα

$\widehat{AOK} = ...$

Υπολογίζουμε από το τρίγωνο ΑΟΚ την ΑΚ, εφ 36° = ...
και βρίσκουμε το εμβαδόν του ΑΟΒ τριγώνου. Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ είναι ....

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα 46 cm.

Λύση



Η ακτίνα είναι όσο και η πλευρά του άρα η περίμετρος είναι .....
Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με 1/2 · ΑΒ · ΟΚ . Όμως ΟΚ = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 14,5 dm.

2. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 15 cm.

3. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο διαμέτρου 14 cm.

4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 25 cm.

5. Να υπολογίσετε την πλευρά λ και το εμβαδόν Ε ενός κανονικού 12-γώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου 12 cm.

6. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού δεκαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 5 cm.

7. Να υπολογίσετε την πλευρά, το απόστημα και το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο διαμέτρου 8 cm.

8.5 Μήκος κύκλου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να δώσουμε την έννοια του μήκους ενός κύκλου;

2. Ποιος λόγος συμβολίζεται με το γράμμα π και με ποιον τύπο βρίσκεται το μήκος ενός κύκλου;

Απαντήσεις

1. Αν πάρουμε έναν κύκλο και γύρω του τοποθετήσουμε ένα σχοινί, τότε το μήκος του τεντωμένου σχοινιού θα είναι το μήκος του κύκλου.

2. Με το Ελληνικό γράμμα π συμβολίζουμε διεθνώς το σταθερό λόγο του μήκους ενός κύκλου Γ προς τη διάμετρο δ του κύκλου δηλαδή: $\pi = \frac{\Gamma}{\delta}$ από τον οποίο έχουμε: $\Gamma = \pi \cdot \delta$. Ο π είναι ένας άρρητος αριθμός και μια προσέγγιση του είναι ο 3,14159... Στον τύπο $\Gamma = \pi \cdot \delta$ επειδή $\delta = 2\rho$ (όπου ρ η ακτίνα του κύκλου) έχουμε: $\Gamma = \pi \cdot 2\rho$. Δηλαδή το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\Gamma = 2\pi\rho}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου ακτίνας 15 cm.

Λύση

Από τον τύπο $Γ = 2πρ$ έχουμε:
$Γ = 2 \cdot 3,14 \cdot 15 = 34,2$ cm.

2. Να υπολογίσετε τη διάμετρο ενός κύκλου με περίμετρο Γ = 91,06 dm.

Λύση

Από τον τύπο $Γ = π \cdot δ$ έχουμε:

$$δ = \frac{Γ}{π} \quad ή \quad δ = \frac{91,06}{3,14} = 29 \text{ cm.}$$

3. Η περίμετρος μιας κυκλικής πλατείας είναι 314 m. Να βρεθεί η διάμετρος της πλατείας.

Λύση

Από τον τύπο $Γ = π \cdot δ$ έχουμε:

$$δ = \frac{Γ}{π} \quad ή \quad δ = \frac{314}{3,14} = 100 \text{ m.}$$

4. Αν η ακτίνα της γης είναι 6.400 km, να υπολογίσετε πόσα χιλιόμετρα θα είναι ο ισημερινός της γης.

Λύση

Από τον τύπο $Γ = 2πρ$ με $ρ = 6.400$km έχουμε:
$Γ = 2 \cdot 3,14 \cdot 6.400 = 40.192$ km.

5. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί ένα αεροπλάνο να κάνει το γύρο της γης, αν κινείται με 700 km/h και σε ύψος h = 20 km από τη γη; (ακτίνα γης ρ = 6.400 km)

Λύση

Η ακτίνα της τροχιάς του αεροπλάνου θα είναι $ρ = 6.400 + 20 = 6.420$ km.
Άρα το μήκος της τροχιάς του αεροπλάνου θα είναι:
$Γ = 2πρ$ ή $Γ = 2 \cdot 3,14 \cdot 6.420 =$
$= 40.317,6$ km.

Άρα θα κάνει χρόνο $t = \dfrac{40.317,6}{700} \cong$
$\cong 57,6$ h.

6. Να υπολογίσετε τη διάμετρο ενός κύκλου που έχει μήκος όσο η περίμετρος ενός τετράγωνου εμβαδού 3943,84 m².

Λύση

Η πλευρά του τετραγώνου α βρίσκεται από τη σχέση: $Ε = α^2 = 3943,84$ m².

Άρα $α = \sqrt{3943,84} = 62,8$ m.

Επομένως η περίμετρος του τετραγώνου είναι: $4 \cdot 62,8 = 251,2$ m και ισούται με το μήκος του κύκλου. Άρα από τον τύπο $Γ = π \cdot δ$ έχουμε:

$$δ = \frac{Γ}{π} \quad ή \quad δ = \frac{251,2}{3,14} = 80 \text{ m.}$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το μήκος περιφέρειας κύκλου με ακτίνα:
α) ρ = 3 cm, β) ρ = 6 cm, γ) ρ = 12 cm, δ) ρ = 24 cm.
Τι σχέση έχουν μεταξύ τους τα μήκη;

Λύση

Από τον τύπο Γ = 2πρ έχουμε:
α) Γ = 2 · 3,14 · 3 = ...
β) Γ = 2 · 3,14 · 6 = ...

2. Να υπολογίσετε τις ακτίνες κύκλων των οποίων τα μήκη είναι αντίστοιχα:
α) 31,4 cm, β) 169,56 cm, γ) 339,12 cm.

Λύση

Από τον τύπο Γ = 2πρ έχουμε:

$$\rho = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad \text{άρα}$$

α) $\rho = \dfrac{31,4}{2 \cdot 3,14} = 5$ cm.

β) ....
γ) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το μήκος κύκλων, αν είναι γνωστό ότι η ακτίνα τους είναι: α) 7,2 cm, β) 8,25 cm, γ) 32,3 cm, δ) 5,7 cm.

2. Να υπολογίσετε το μήκος των κύκλων των οποίων οι διάμετροι είναι: α) 27 cm, β) 35 cm, γ) 42 cm, δ) 58 cm.

3. Να βρεθεί η ακτίνα των κύκλων των οποίων είναι γνωστά ότι τα μήκη τους είναι: α) 263,76 cm, β) 207,24 cm, γ) 364,24 cm, δ) 596,6 cm.

4. Ένας δορυφόρος περιφέρεται γύρω από τη γη σε ύψος 1.080 km. Αν η ακτίνα της γης είναι 6.400 km, να υπολογίσετε:
α) το μήκος της τροχιάς του δορυφόρου,
β) το μήκος της τροχιάς του αν ανέβει 2 km ψηλότερα.

5. Να υπολογίσετε πόσες ώρες θα χρειαστεί ένα αεροπλάνο να κάνει το γύρο της γης, αν κινείται σε ύψος 15 km από την επιφάνεια αυτής με ταχύτητα 500 km/h και είναι γνωστό ότι η ακτίνα της γης είναι 6.400 km. Πόσο χρόνο περισσότερο θα χρειαστεί αν κινείται σε ύψος 17 km από την επιφάνεια της γης;

6. Αν οι περίμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 12 cm, να βρείτε πόσο διαφέρουν οι ακτίνες τους και οι διάμετροί τους.

7. Αν οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο $\frac{3}{2}$, να βρείτε το λόγο των ακτίνων τους και των διαμέτρων τους.

8.6 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς βρίσκεται το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου (Ο, ρ);

Απαντήσεις

1. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου (Ο, ρ) βρίσκεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = \pi \cdot \rho^2}$$

το οποίο λέγεται και **εμβαδόν κύκλου.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κύκλου που έχει ακτίνα: α) 5 cm, β) 21 dm, γ) 1,8 m.

Λύση

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι:
$E = \pi\rho^2$, άρα έχουμε:

α) $E = 3,14 \cdot 5^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ cm}^2$.

β) $E = 3,14 \cdot 21^2 = 3,14 \cdot 441 = 1384,74 \text{ dm}^2$.

γ) $E = 3,14 \cdot (1,8)^2 = 3,14 \cdot 3,24 = 10,1736 \text{ m}^2$.

2. Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου που έχει εμβαδόν: α) 471 m², β) 1962,5 cm², γ) 254,34 m².

Λύση

Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι:
$E = \pi\rho^2$. Λύνοντας ως προς ρ έχουμε:

$\rho^2 = \dfrac{E}{\pi}$ ή $\rho = \sqrt{\dfrac{E}{\pi}}$ άρα:

α) $\rho = \sqrt{\dfrac{471}{3,14}} \cong 12,24 \text{ m}$

β) $\rho = \sqrt{\dfrac{1962,5}{3,14}} \cong 25 \text{ cm}$

γ) $\rho = \sqrt{\dfrac{254,34}{3,14}} \cong 9 \text{ m}$

3. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου με εμβαδόν 314 cm².

Λύση

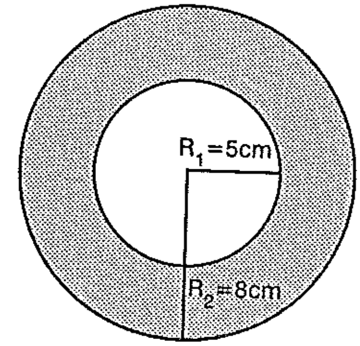
Από τον τύπο $E = \pi\rho^2$ έχουμε:

$\rho^2 = \dfrac{E}{\pi}$ ή $\rho = \sqrt{\dfrac{E}{\pi}}$ άρα

$\rho = \sqrt{\dfrac{314}{3,14}} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

επομένως το μήκος κύκλου από τον τύπο $\Gamma = 2\pi\rho$ θα είναι:
$\Gamma = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 62,8 \text{ cm}$.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του παρακάτω σχήματος (κυκλικού δακτυλίου).



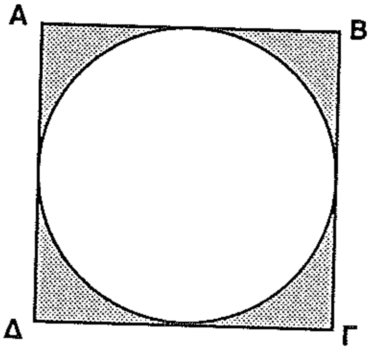
Λύση

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των δύο ομόκεντρων κύκλων με ακτίνες $R_1 = 8$ cm και $R_2 = 5$ cm. Άρα για να το υπολογίσουμε αρκεί από το εμβαδόν του κύκλου με τη μεγαλύτερη ακτίνα να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κύκλου με τη μικρότερη ακτίνα. Άρα:

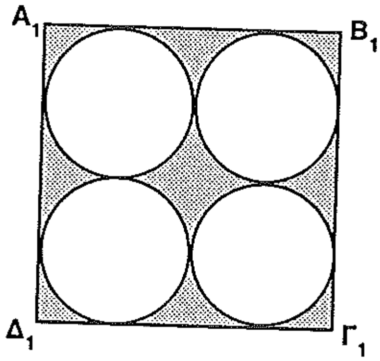
$E = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi \cdot (R_1^2 - R_2^2)$ ή

$E = 3,14 \cdot (8^2 - 5^2) = 3,14 \cdot (64 - 25) =$
$= 3,14 \cdot 39 = 122,46$ cm².

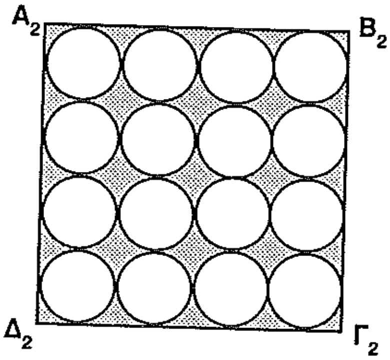
5. Αν γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ΑΒ = 20 cm.
α) Ποιο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος;



β) Αν το $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ΑΒΓΔ, ποιο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος; (οι κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους).



γ) Ομοίως αν $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ΑΒΓΔ και οι κύκλοι είναι ίσοι, ποιο είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν; Τι παρατηρείτε;



Λύση

α) Για να βρούμε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας E_1 αρκεί να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ το εμβαδόν του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι:

$\rho = \frac{20}{2} = 10$ cm.

Έχουμε: $E_1 = E_{τετρ.} - E_{κυκλ.} =$
$= 20^2 - 3,14 \cdot 10^2 = 400 - 314 = 86$cm²

β) Το γραμμοσκιασμένο τμήμα έχει εμβαδόν E_2 που βρίσκεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του τετραγώνου το τετραπλάσιο του εμβαδού ενός κύκλου ακτίνας $\rho = \frac{20}{4} = 5$ cm.

Άρα: E_2 = Ετετρ. - 4 · Εκυκλ. =

$= 20^2 - 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 400 - 314 =$

$= 86\ cm^2$.

γ) Το γραμμοσκιασμένο τμήμα έχει εμβαδόν E_3 που βρίσκεται αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε το 16-πλάσιο του εμβαδού ενός κύκλου ακτίνας $\rho = 20/8 = 2{,}5$ cm, άρα:

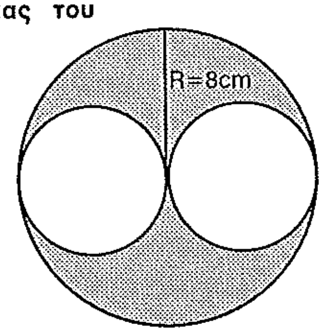
E_3 = Ετετρ. - 16 · Εκύκλ. =

$= 20^2 - 16 \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 =$

$= 400 - 314 = 86\ cm^2$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $E_1 = E_2 = E_3$.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Το εμβαδόν της επιφάνειας που ζητούμε Ε βρίσκεται αν από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των δύο ίσων μικρών κύκλων. Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα R = 8 cm και ο μικρός κύκλος ακτίνα $\rho = 8/4 =$ $= 2$ cm.

Άρα $E = E_1 - E_2 = \pi \cdot R^2 - 2 \cdot \pi\rho^2 =$

$= \pi \cdot (R^2 - 2\rho^2) =$

$= 3{,}14 \cdot (8^2 - 2 \cdot 2^2) =$

$= 3{,}14 \cdot (64 - 8) = 3{,}14 \cdot 56 =$

$= 175{,}84\ cm^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των κύκλων που έχουν ως διαμέτρους:
α) 12 cm, β) 42 dm, γ) 28 cm, δ) 48 m.

Λύση

Οι ακτίνες των κύκλων είναι:

α) $\frac{12}{2} = 6$ cm, β) $\frac{42}{2} = 21$ dm,

γ) $\frac{28}{2} = 14$ cm και δ) $\frac{48}{2} = 24$ cm.

Άρα το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$ και

α) $E = 3{,}14 \cdot 6^2 = ...$

β) Ε = ...

γ) Ε = ..., δ) Ε = ...

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου που έχει μήκος 37,68 cm.

Λύση

Το μήκος του κύκλου είναι $\Gamma = 2\pi\rho$.

Άρα: $\rho = \frac{\Gamma}{2\pi}$ ή ρ = ... και το εμβαδόν

δόν του κύκλου $E = \pi\rho^2 = ...$

3. Να υπολογίσετε την ακτίνα των κύκλων που έχουν εμβαδόν:
α) 615,44 cm^2, β) 379,94 cm^2, γ) 1519,76 m^2.

Λύση

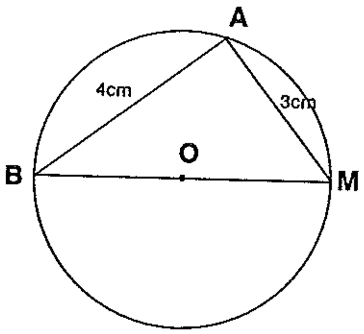
Το εμβαδόν του κύκλου είναι $Ε = πρ^2$ και λύνοντας ως προς την ακτίνα έχουμε:

$ρ^2 = \frac{Ε}{π}$ ή $ρ = \sqrt{\frac{Ε}{π}}$ άρα:

α) $ρ = \sqrt{\frac{615,44}{3,14}} = ...$

β) ρ= ....
γ) ρ= ....

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου του παρακάτω σχήματος:



Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και βρίσκουμε το μήκος της ΒΓ η οποία είναι η διάμετρος του κύκλου άρα βρίσκουμε την ακτίνα την οποία αντικαθιστούμε στον τύπο $Ε = πρ^2$ ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας: α) 7 cm, β) 15 cm, γ) 34 cm, δ) 8,3 cm, ε) 5,9 cm.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου διαμέτρου:
α) 29 cm, β) 55 cm, γ) 38 cm.

3. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου που έχει εμβαδόν:
α) 3322,12 cm², β) 12.717 cm².

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου που έχει μήκος:
α) 514,96 cm, β) 590,32 m.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου που έχει μήκος ίσο με τη περίμετρο ενός τετραγώνου εμβαδού 8.100 m².

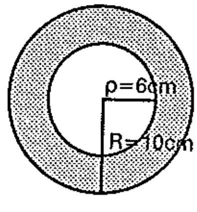
6. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου που έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο με πλευρές 18 cm και 25,12 cm αντίστοιχα.

7. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου που έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο περιμέτρου 121,40 cm και βάση μεγαλύτερη από το ύψος κατά 29,30 cm.

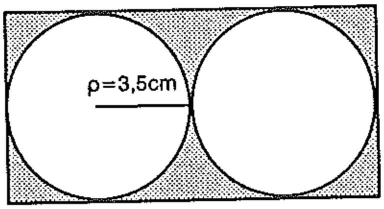
8. Να βρείτε το εμβαδόν ενός κανονικού τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο εμβαδού 70.650 cm².

9. Να βρείτε το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων τμημάτων των παρακάτω σχημάτων.

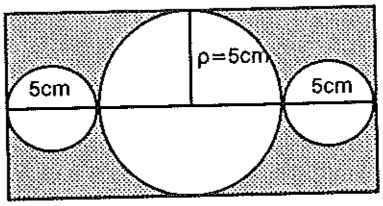
α)



β)



γ)



8.7 Μήκος τόξου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιος τύπος δίνει το μήκος S ενός τόξου μ° κύκλου με ακτίνα ρ;

Απαντήσεις

1. Το μήκος S τόξου μ° κύκλου με ακτίνα ρ δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{S = \frac{\pi \rho \mu}{180^\circ}}$$

2. Τι είναι το ακτίνιο ή rad;

2. **Ακτίνιο (ή rad)** είναι μονάδα μέτρησης τόξων. Ένα ακτίνιο είναι τόξο μήκους όσο η ακτίνα του κύκλου.

3. Με ποια σχέση μπορούμε να μετατρέψουμε τις μοίρες ενός τόξου σε ακτίνια;

3. Με τη σχέση $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ μετατρέπουμε τις μοίρες μ° σε ακτίνια α rad και αντιστρόφως.

8.8 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

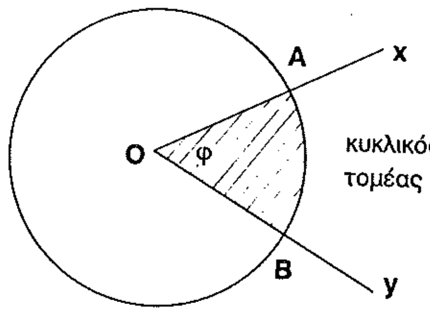
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται κυκλικός τομέας γωνίας φ ενός κύκλου (Ο, ρ);

Απαντήσεις

1. **Κυκλικός τομέας** γωνίας φ ενός κύκλου (Ο, ρ) λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που καταλαμβάνει μια επίκεντρη γωνία φ.



κυκλικός τομέας

2. Ποιο είναι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα;

2. Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού τομέα γωνίας μ° κύκλου (Ο, ρ) είναι:

$$\boxed{E = \frac{\pi \rho^2 \mu^\circ}{360^\circ}}$$

Μια άλλη μαθηματική έκφραση του τύπου αυτού είναι:

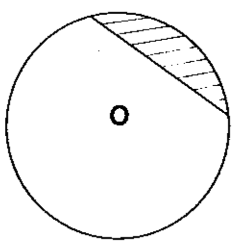
$E = \dfrac{\pi \rho^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi\rho \cdot \rho \cdot \mu}{2 \cdot 180^\circ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi\rho \cdot \mu}{180^\circ} \cdot \rho$ και επειδή $S = \dfrac{\pi\rho \cdot \mu}{180^\circ}$ (μήκος του αντίστοιχου τόξου) έχουμε:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho}$$

Δηλαδή το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι ίσο με το μισό του γινομένου του μήκους του αντίστοιχου τόξου επί την ακτίνα του κύκλου.

3. Τι λέγεται κυκλικό τμήμα ενός κύκλου (Ο, ρ);

3. Κυκλικό τμήμα ενός κύκλου (Ο, ρ) λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από τον κύκλο και μια χορδή του.
Π.χ.

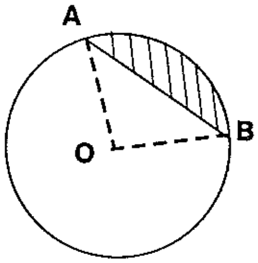


κυκλικό τμήμα

4. Πώς βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος;

4. Το εμβαδόν κυκλικού τμήματος το βρίσκουμε αφαιρώντας από το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που εχει κορυφή το κέντρο του κύκλου και βάση τη χορδή του κυκλικού τμήματος. Δηλαδή:

$$E_{\text{κυκλ.τμημ.}AB} = E_{\text{κυκλ.τομ.}AOB} - E_{\text{τριγ.}AOB}$$



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε σε μοίρες το τόξο του κύκλου (Ο, ρ) όταν το μήκος του είναι ίσο με 2ρ.

Λύση

Ένα τόξο που είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου είναι ίσο με 1 rad άρα αυτό που είναι ίσο με 2ρ θα είναι με 2 rad.

Άρα από τον τύπο $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ έχουμε:

$\mu \cdot \pi = \alpha \cdot 180^\circ$ ή $\mu = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$ ή

$\mu = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3{,}14}$ ή $\mu \simeq 114{,}65^\circ$

2. Να βρείτε σε ακτίνα το μήκος ενός τόξου κύκλου (Ο, ρ): α) 30°, β) 45°, γ) 60°, δ) 90°.

Λύση

Άρα από τον τύπο $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ έχουμε

$\alpha = \frac{\mu}{180} \cdot \pi$. Άρα:

α) $\alpha = \frac{30}{180} \cdot \pi$ ή $\alpha = \frac{\pi}{6}$

β) $\alpha = \frac{45}{180} \cdot \pi$ ή $\alpha = \frac{\pi}{4}$

γ) $\alpha = \frac{60}{180} \cdot \pi$ ή $\alpha = \frac{\pi}{3}$

δ) $\alpha = \frac{90}{180} \cdot \pi$ ή $\alpha = \frac{\pi}{2}$

3. Να βρείτε σε μοίρες το μήκος ενός τόξου κύκλου (Ο, ρ):

α) $\frac{2\pi}{3}$ rad, β) $\frac{3\pi}{4}$ rad, γ) $\frac{3\pi}{2}$ rad,

δ) 2π rad.

Λύση

Από τον τύπο $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ έχουμε

$\mu = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$. Άρα:

α) $\mu = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3\pi} \cdot 180^\circ =$

$$= \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$$

$$\beta)\ \mu = \frac{3\pi}{4\pi} \cdot 180° = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$$

$$\gamma)\ \mu = \frac{3\pi}{2\pi} \cdot 180° = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$$

$$\delta)\ \mu = \frac{2\pi}{\pi} \cdot 180° = 360°$$

4. Να βρείτε σε cm το μήκος ενός τόξου κύκλου (0, 3 cm):

α) $\frac{\pi}{4}$ rad, β) $\frac{\pi}{3}$ rad, γ) $\frac{\pi}{6}$ rad,

δ) 40°, ε) 90°.

Λύση

Το μήκος ενός τόξου βρίσκεται από το τύπο $S = \frac{\pi\rho \cdot \mu}{180°}$. Τα ακτίνια θα τα μετατρέψουμε σε μοίρες από τον τύπο

$$\frac{\mu°}{180°} = \frac{\alpha}{\pi} \text{ ή } \mu = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°.$$

$$\alpha)\ \mu = \frac{\pi}{4\pi} \cdot 180° = \frac{180°}{4} = 45° \text{ και}$$

$$S = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 45°}{180°} = \frac{9{,}42}{4} = 2{,}355 \text{ cm}.$$

$$\beta)\ \mu = \frac{\pi}{3\pi} \cdot 180° = \frac{180°}{3} = 60° \text{ και}$$

$$S = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 60°}{180°} = 3{,}14 \text{ cm}.$$

$$\gamma)\ \mu = \frac{\pi}{6\pi} \cdot 180° = \frac{180°}{6} = 30° \text{ και}$$

$$S = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 30°}{180°} = \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57 \text{ cm}.$$

$$\delta)\ S = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 40°}{180°} = \frac{12{,}56}{6} = 2{,}09 \text{ cm}.$$

$$\varepsilon)\ S = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 90°}{180°} = 4{,}71 \text{ cm}.$$

5. Σε κύκλο με μήκος 40,82 cm να υπολογίσετε το μήκος ενός τόξου 3π/2 ακτινίων.

Λύση

Το μήκος του κύκλου είναι: $\Gamma = 2\pi\rho$ ή

$$\rho = \frac{\Gamma}{2\pi} \text{ ή } \rho = \frac{40{,}82}{2 \cdot 3{,}14} = 6{,}5 \text{ cm}.$$

Από τον τύπο $\frac{\mu°}{180°} = \frac{\alpha}{\pi}$ έχουμε

$$\mu = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180° \text{ ή } \frac{\frac{3\pi}{2}}{\pi} \cdot 180° =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 180° = 270° \text{ και } S = \frac{\pi\rho \cdot \mu}{180°} =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 6{,}5 \cdot 270°}{180°} = 30{,}615 \text{ cm}.$$

6. Δίνονται τρεις κύκλοι με ακτίνες αντίστοιχα 2 cm, 3 cm, 4 cm. Να υπολογίσετε το μήκος ενός τόξου 60° για κάθε κύκλο.

Λύση

Για τον 1ο $S_1 = \frac{\pi\rho_1 \cdot \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 60°}{180°} = \frac{2\pi}{3}$.

Για τον 2ο $S_2 = \frac{\pi\rho_2 \cdot \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 60°}{180°} = \pi$.

Για τον 3ο $S_3 = \frac{\pi\rho_3 \cdot \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 60°}{180°} = \frac{4\pi}{3}$.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας: α) 60°, β) 45° ενός κύκλου (0, 4 cm).

Λύση

Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

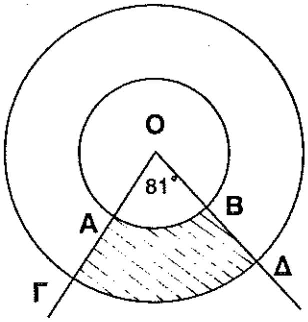
$$E = \frac{\pi \rho^2 \mu°}{360°} \text{ άρα}$$

$$\alpha)\ E = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{50{,}24}{6} \cong 8{,}37 \text{ cm}^2$$

$$\beta)\ E = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 45°}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 16}{8} = 6{,}28 \text{ cm}^2$$

8. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του παρακάτω σχήματος, αν είναι γνωστό ότι η γωνία Ο είναι

81° και οι κύκλοι έχουν ακτίνες ρ_1 = $= 12$ cm και $\rho_2 = 20$ cm αντίστοιχα.



Λύση

Το γραμμοσκιασμένο τμήμα που ελέγχουμε έχει περίμετρο με μήκος ίσο με το άθροισμα των μηκών των δύο τόξων ΑΒ και ΓΔ και των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Το μήκος του τόξου ΑΒ είναι:

$$S_{AB} = \frac{\pi \rho_1 \mu^\circ}{180^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 12 \cdot 81^\circ}{180^\circ} = 16{,}95 \text{ cm}$$

Το μήκος του τόξου ΓΔ είναι:

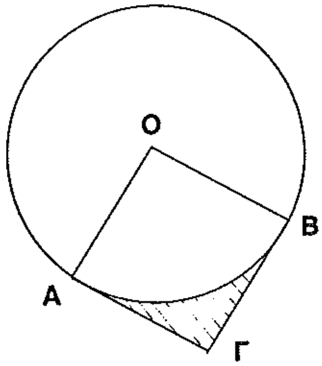
$$S_{\Gamma\Delta} = \frac{\pi \rho_2 \mu^\circ}{180^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 20 \cdot 81^\circ}{180^\circ} = 28{,}26 \text{ cm}$$

Το μήκος του ΑΓ = ΒΔ = $\rho_2 - \rho_1 =$
$= 20 - 12 = 8$ cm.
Άρα η περίμετρος είναι:
S = 16,95 + 28,26 + 8 + 8 =61,21cm.
Το εμβαδόν του τμήματος θα το βρούμε αν από το εμβαδόν του τομέα ΟΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τομέα ΟΑΒ.

$$E = \frac{\pi \rho_2^2 \mu^\circ}{180^\circ} - \frac{\pi \rho_1^2 \mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot \mu^\circ}{180^\circ} \cdot (\rho_2^2 - \rho_1^2) =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 81}{180} \cdot (20^2 - 12^2) = 361{,}728 \text{ cm}^2$$

9. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του παρακάτω σχήματος, αν γνωρίζουμε ότι το ΟΑΓΒ είναι τετράγωνο και ότι η ακτίνα του κύκλου είναι 25 cm.



Λύση

Για να βρούμε την περίμετρο του ΑΓΒ αρκεί να αθροίσουμε το μήκος του τόξου ΑΒ και των τμημάτων ΑΓ και ΓΒ. Το μήκος του ΑΒ είναι:

$$S = \frac{\pi \rho \mu^\circ}{180^\circ} \quad \text{ή} \quad S = \frac{3{,}14 \cdot 25 \cdot 90}{180^\circ} =$$

$$= \frac{78{,}5}{2} = 39{,}25 \text{ cm}$$

Άρα η περίμετρος είναι:
39,25 + 25 + 25 = 89,25 cm.
Το εμβαδόν θα το βρούμε αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΟΑΓΒ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τομέα ΟΑΒ το οποίο είναι:

$$E = \frac{\pi \rho^2 \mu^\circ}{360^\circ} \quad \text{ή} \quad E = \frac{3{,}14 \cdot 25^2 \cdot 90}{360^\circ} =$$

$$= 490{,}625 \text{ cm}^2$$

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:
$25^2 = 625$ cm².
Άρα το ζητούμενο είναι:
625 - 490,625 = 134,375 cm².

10. Να βρείτε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 144° που αντιστοιχεί σε κύκλο μήκους 75,36 cm.

Λύση

Το μήκος κύκλου είναι Γ = 2πρ άρα:

$$\rho = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{75{,}36}{6{,}28} = 12\ \text{cm}.$$

Άρα το εμβαδόν είναι: $E = \dfrac{\pi\, \rho^2\, \mu^\circ}{360^\circ} =$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 144}{360^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 144 \cdot 144}{360^\circ} = \frac{65111{,}04}{360^\circ} = 180{,}864\ \text{cm}^2$$

11. Να βρείτε τη γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε κύκλο εμβαδού 50,24 cm² και έχει εμβαδόν 22,6080 cm².

Λύση

Από τον τύπο $E_{\text{κυκλ.τομ.}} = \dfrac{\pi\, \rho^2\, \mu}{360}$ και τον τύπο $E_{\text{κυκλ.}} = \pi\, \rho^2$ έχουμε:

$$E_{\text{κυκλ.τομ.}} = \frac{E_{\kappa} \cdot \mu}{360} \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{E_{\text{κυκλ.τομ.}} \cdot 360}{E_{\kappa.}} = \frac{22{,}6080 \cdot 360}{50{,}24} = 162^\circ$$

12. Να υπολογίσετε τη γωνία του τομέα που έχει εμβαδόν 180,8640 cm² και αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας 12 cm.

Λύση

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

$$E = \frac{\pi\, \rho^2\, \mu}{360^\circ} \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{E \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \rho^2} = \frac{180{,}8640 \cdot 360^\circ}{3{,}14 \cdot 12^2} = \frac{65111{,}04}{452{,}16} = 144^\circ$$

13. Να υπολογίσετε την ακτίνα κύκλου που αντιστοιχεί σε κυκλικό τομέα εμβαδού 101,7360 cm² και έχει γωνία 144°.

Λύση

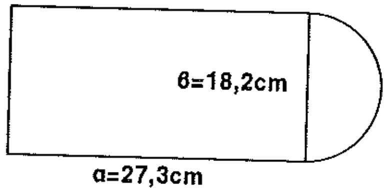
Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

$$E = \frac{\pi\, \rho^2\, \mu}{360^\circ} \quad \text{ή} \quad \rho^2 = \frac{E \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \mu} \quad \text{ή}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{E \cdot 360^\circ}{\pi \cdot \mu}} \quad \text{ή}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{360^\circ \cdot 101{,}7360}{3{,}14 \cdot 144^\circ}} = 9$$

14. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος:



Λύση

Το σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο διαστάσεων α = 27,3 cm και β = 18,2 cm και ένα ημικύκλιο ακτίνας ρ = 18,2/2 = 9,1 cm.
Άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E = \alpha \cdot \beta + \frac{\pi\, \rho^2\, \mu}{360^\circ} =$$

$$= 27{,}3 \cdot 18{,}2 + \frac{3{,}14 \cdot (9{,}1)^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} =$$

$$= 496{,}86 + 130{,}01 = 626{,}87\ \text{cm}^2.$$

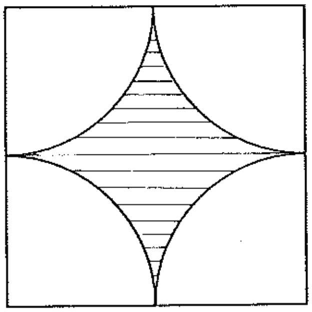
Η δε περίμετρος είναι:

$$\Pi = 2\alpha + \beta + \frac{\pi\, \rho\, \mu}{180^\circ} =$$

$$= 2 \cdot 27{,}3 + 18{,}2 + \frac{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 180^\circ}{180^\circ} =$$

$$= 54{,}6 + 18{,}2 + 9{,}734 = 82{,}534\ \text{cm}.$$

15. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του παρακάτω σχήματος αν είναι γνωστό ότι το τετράγωνο είναι πλευράς 4 cm.



Λύση

Η περίμετρος είναι ίση με το άθροισμα 4 τόξων μήκους:

$$S = \frac{\pi \rho \mu}{180^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = 6{,}28 \text{ cm}$$

Άρα το μήκος είναι: $4 \cdot 6{,}28 = 25{,}12$ cm. Για να βρούμε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν αρκεί να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του τετραγώνου το εμβαδόν τεσσάρων ίσων κυκλικών τομέων γωνίας 90° και ακτίνας $\rho = 4/2 = 2$ cm.

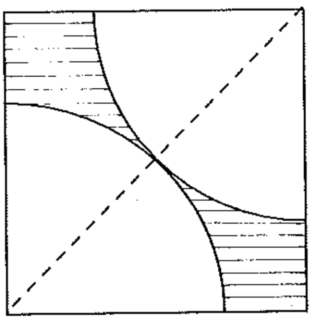
$E_{\text{τετρ.}} = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$

$$E_{\text{κυκλ.τομ.}} = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} =$$

$= 3{,}14 \text{ cm}^2$.

Άρα $E = E_{\text{τετρ.}} - 4 \cdot E_{\text{κυκλ.τομ.}} =$
$= 16 - 4 \cdot 3{,}14 = 16 - 12{,}56 =$
$= 3{,}44 \text{ cm}^2$.

16. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του τετραγώνου πλευράς 12 cm.



Λύση

Το γραμμοσκιασμένο τμήμα θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των δύο κυκλικών τομέων γωνίας 90° και ακτίνας ίσης με το μισό της διαγωνίου του τετραγώνου.
Η διαγώνιος βρίσκεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα:
$\delta^2 = 12^2 + 12^2$ ή $\delta^2 = 288$ άρα

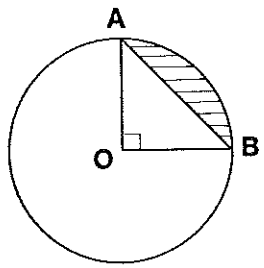
$\delta = \sqrt{288} \approx 16{,}97$ cm

Άρα η ακτίνα είναι: $\rho = 16{,}97/2 =$
$= 8{,}48$ cm. Επομένως:
$E_{\text{τετρ.}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$.

$$E_{\text{κυκλ.τομ.}} = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot (8{,}48)^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} =$$

$= 56{,}52 \text{ cm}^2$.
Άρα $E = E_{\text{τετρ.}} - 2 \cdot E_{\text{κυκλ.τομ.}} =$
$= 144 - 2 \cdot 56{,}52 = 30{,}96 \text{ cm}^2$.

17. Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος του παρακάτω σχήματος κύκλου (0, 5 cm).



Λύση

Το εμβαδόν θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ακτίνας $\rho = 5$ cm και γωνίας 90° αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ άρα:

$$E_{κυκλ.τομ.} = \frac{π ρ^2 μ}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 90°}{360°} =$$

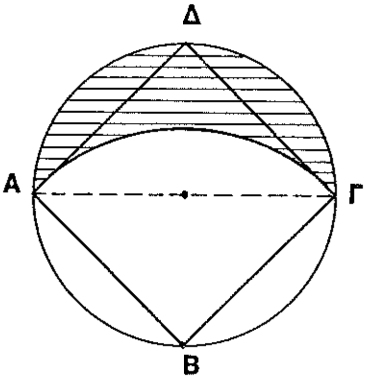
$$= 19{,}625 \text{ cm}^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} =$$

$$= 12{,}5 \text{ cm}^2$$

Άρα: $E_{κ.τμημ.} = E_{κ.τομ.} - E_{τριγ.} =$
$= 19{,}625 - 12{,}5 = 7{,}125 \text{cm}^2$.

18. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος (κυκλικού μηνίσκου) του παρακάτω σχήματος αν το τετράγωνο είναι πλευράς 10 cm.



Λύση

Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των δύο αυτών τόξων θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος του κυκλικού τομέα ΒΑΓ με χορδή ΑΓ.

$$E_{ημικυκλ.} = \frac{π \left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2}{2} = \frac{π \cdot \frac{ΑΓ^2}{4}}{2} = \frac{π \cdot ΑΓ^2}{8}$$

αλλά $ΑΓ^2 = ΔΓ^2 + ΑΔ^2$ ή
$ΑΓ^2 = 10^2 + 10^2$ ή
$ΑΓ^2 = 100 + 100 = 200$

άρα $E_{ημικυκλ.} = \dfrac{3{,}14 \cdot 200}{8} = 78{,}5 \text{ cm}^2$

$$E_{κυκλ.τμημ.} = E_{τομέα} - E_{τριγ.ΒΑΓ} =$$

$$= \frac{π \cdot ΒΑ^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot ΒΑ \cdot ΑΓ =$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 =$$

$$= 78{,}5 - 50 = 28{,}5 \text{ cm}^2.$$

Άρα $E_{μην.} = E_{ημικ.} - E_{κυκλ.τμημ.} =$
$= 78{,}5 - 28{,}5 = 50 \text{ cm}^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε σε ακτίνια το μήκος ενός τόξου κύκλου (Ο, ρ):
α) 24°, β) 72°, γ) 120°, δ) 180°.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\frac{μ°}{180°} = \frac{α}{π} \quad ή \quad α = \frac{μ}{180} \cdot π \quad \text{οπότε:}$$

α) $α = \dfrac{24}{180} \cdot π = ...$

β) ....

2. Να βρείτε σε μοίρες το μήκος ενός τόξου κύκλου (Ο, ρ):
α) π/2, β) π, γ) 3π, δ) 3π/4.

Λύση

Από τον τύπο $\dfrac{μ°}{180°} = \dfrac{α}{π}$ έχουμε

$μ = \dfrac{α}{π} \cdot 180°$ άρα:

$$α)\ μ = \frac{\frac{π}{2}}{π} \cdot 180° = \frac{π}{2π} \cdot 180° = 90°$$

β) μ= ....

3. Σε κύκλο ακτίνας 6 cm να υπολογίσετε το μήκος ενός τόξου: α) 30°, β) 45°, γ) 75°, δ) 100°, ε) 180°.

Λύση

Από τον τύπο $S = \frac{π \cdot ρ \cdot μ}{180°}$ έχουμε:

$$α)\ S = \frac{3{,}14 \cdot 6 \cdot 30°}{180°} = 3{,}14 \text{ cm}$$

β) S = ...

4. Να βρείτε το μήκος ενός τόξου 25° 50' που αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας 15 m.

Λύση

Ο τύπος είναι: $S = \frac{π \cdot ρ \cdot μ}{180°}$

Θα μετατρέψουμε πρώτα τις μοίρες σε πρώτα λεπτά.
360° = 360 · 60' = 21.600'
25° = 25 · 60' = 1.500'
25° 50' = 1.500' + 50' = 1.550' και αντικαθιστούμε ....

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας: α) 90°, β) 70°, γ) 120°, δ) 150° κύκλου (0, 6 cm).

Λύση

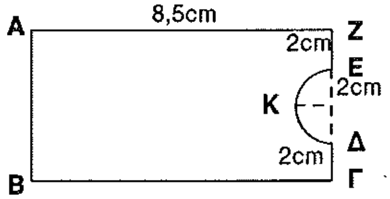
Το εμβαδόν κυκλικού τομέα δίνεται από τον τύπο:

$E = \frac{π \cdot ρ^2 \cdot μ}{360°}$ άρα:

$$α)\ E = \frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 90°}{360°} = ...$$

β) ....

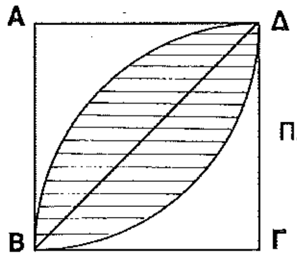
6. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Η περίμετρος είναι το άθροισμα του μήκους του ημικυκλίου ΕΚΔ ακτίνας 2 cm και των πλευρών του ορθογωνίου.
Άρα περίμετρος = ...
Το εμβαδόν θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του ορθογωνίου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του παρακάτω σχήματος.



Πλευρά AB=4cm

Λύση

Το εμβαδόν βρίσκεται αν προστεθούν τα εμβαδά των δύο κυκλικών τμημάτων που δημιουργεί η διαγώνιος ΒΔ. Το εμβαδόν του καθενός από τα κυκλικά τμήματα βρίσκεται αν από το εμβαδόν του τομέα που αντιστοιχεί σ' αυτό αφαιρέσουμε το εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου δηλαδή ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε σε μοίρες το τόξο ενός κύκλου (Ο, ρ):
α) 2π/5 rad, β) 3π/7 rad, γ) 4π rad, δ) 8π rad.

2. Να υπολογίσετε σε ακτίνια το μήκος τόξου κύκλου (Ο, ρ) αν είναι:
α) 72°, β) 120°, γ) 135°, δ) 150°, ε) 270°.

3. Να βρείτε σε cm το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας ρ = 8 cm και μήκους:
α) π/6 rad, β) 2π/3 rad, γ) 3π/4 rad.

4. Να υπολογίσετε σε μοίρες ένα τόξο 7,85 cm που αντιστοιχεί σε κύκλο μήκους 471 cm.

5. Να υπολογίσετε σε μοίρες ένα τόξο μήκους 17,6625 m που αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας 25 m.

6. Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου του οποίου ένα τόξο έχει μήκος 10,048 cm και γωνία 72°.

7. Να υπολογίσετε τη διάμετρο ενός κύκλου του οποίου ένα τόξο έχει μήκος 36,6595 m και γωνία 140° 6'.

8. Δύο γωνίες ενός κύκλου έχουν άθροισμα 120° και η μία είναι τα 2/3 της άλλης. Αν γνωρίζετε ότι ο κύκλος έχει ακτίνα 18 m να υπολογίσετε το μήκος καθενός από τα τόξα που αντιστοιχούν στις γωνίες αυτές.

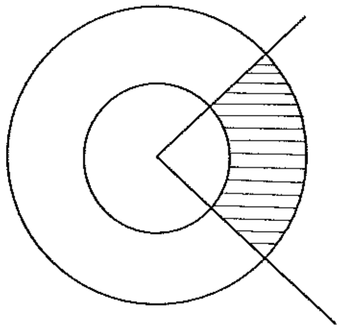
9. Σ' ένα κύκλο ένα τόξο 126° έχει μήκος 26,376 cm. Να υπολογίσετε το μήκος ενός άλλου τόξου του ίδιου κύκλου 192°.

10. Σ' ένα κύκλο ένα τόξο 108° έχει μήκος 33,912 cm. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι ένα τόξο του ίδιου κύκλου που έχει μήκος 50,868 cm.

11. Ένας κύκλος έχει ακτίνα 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν των κυκλικών τομέων γωνίας:
α) 60°, β) 54°, γ) 72°, δ) 108°.

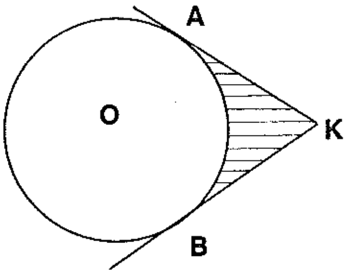
12. Να βρείτε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα 48° και διαμέτρου 18 cm.

13. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του παρακάτω σχήματος.



Οι κύκλοι έχουν ακτίνες 25 cm και 18 cm και η γωνία είναι 72°.

14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου τμήματος του παρακάτω σχήματος.



Είναι γνωστό ότι η γωνία ΑΚΒ = 60° και ο κύκλος είναι ακτίνας ρ = 15 cm.

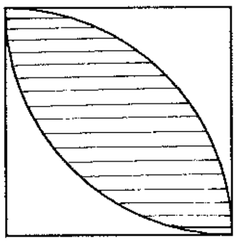
15. Δύο κύκλοι έχουν εμβαδόν 200,96 cm^2 και 113,04 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 72° που ανήκει σε κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με τα 6/7 του αθροίσματος των ακτίνων των δύο κύκλων.

16. Να υπολογίσετε τη γωνία ενός κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν 245,3125 m^2 και αντιστοιχεί σε κύκλο του οποίου το μήκος είναι 94,20 m.

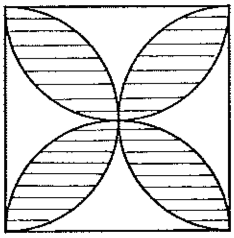
17. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός κύκλου του οποίου ένας κυκλικός τομέας έχει εμβαδόν 227,9640 m^2 και γωνία 216°.

18. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος των παρακάτω σχημάτων, αν είναι γνωστό ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι 5 cm.

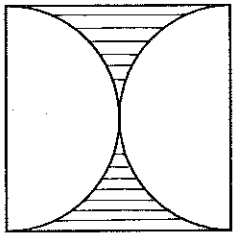
α)



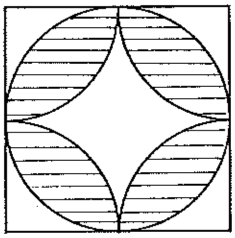
β)



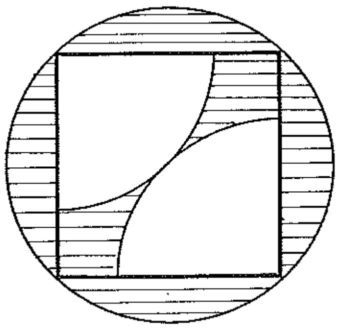
γ)



δ)



ε)



19. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των γραμμοσκιασμένων τμημάτων της προηγούμενης άσκησης, αν η πλευρά του τετραγώνου είναι α = 8 cm.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Δύο κύκλοι (Ο, ρ) και (Ο', ρ') τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

2. Ένα κανονικό εννεάγωνο έχει πλευρά 16 cm και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του.

3. Σε κύκλο (Κ, ρ) γράφουμε μια ακτίνα ΚΑ. Με διάμετρο την ΚΑ κατασκευάζουμε άλλο κύκλο. Αν μία ακτίνα ΚΒ του μεγάλου κύκλου τέμνει το μικρό κύκλο στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι τα τόξα ΑΒ και ΑΓ έχουν το ίδιο μήκος, δεδομένου ότι γωνία ΑΟΓ = 65° και ρ = 5 cm.

4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν το περιεχόμενο μεταξύ τριών ίσων κύκλων ακτίνας ρ = 6 cm, οι οποίοι εφάπτονται ανά δύο.

5. Δίνεται κύκλος ακτίνας 1 m. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος το οποίο ορίζεται από την πλευρά α) του εγγεγραμμένου τετραγώνου, β) του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου και γ) του ισοπλεύρου τριγώνου.

6. Δίνεται εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R = 1 m. Με κέντρα τις κορυφές Α, Γ και Ε γράφουμε τρία τόξα ακτίνας R τα οποία βρίσκονται εντός του κύκλου και περατούνται στις κορυφές Β, Ζ και Δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των τριών σχηματιζόμενων φύλλων.

7. Δύο ακτίνες ΟΑ και ΟΒ ενός κύκλου (Ο, R) με R = 4 cm σχηματίζουν γωνία 60°. Από το σημείο Α φέρουμε την ΑΓ κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του μέρους που περιλαμβάνεται μεταξύ της καθέτου ΑΓ, της εφαπτομένης ΒΓ και του τόξου ΑΒ.

8. Σε κύκλο με διάμετρο δ = 1 m φέρουμε δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ από τις οποίες η ΑΒ είναι ίση με την ακτίνα και η ΑΓ ίση με την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο και τέτοιες ώστε τα τόξα ΑΒ και ΑΓ να έχουν την ίδια φορά. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που περιέχεται μεταξύ των δύο χορδών και του τόξου ΒΓ.

9. Με διάμετρο την πλευρά ΒΓ=5cm ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε ημικύκλιο προς το μέρος του τριγώνου. Να υπολογισθούν τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων τα οποία βρίσκονται εκτός του τριγώνου.

10. Επί του τόξου ΑΒ ενός τεταρτοκυκλίου ΟΑΒ παίρνουμε δύο σημεία Γ και Δ τα οποία απέχουν ίση απόσταση από το μέσο του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις κάθετες ΓΓ' και ΔΔ' στην ΟΑ. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος ΓΔΔ'Γ' είναι ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΓΔΟ.

11. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους δύο ίσων κύκλων των οποίων η απόσταση των κέντρων τους είναι ίση με την ακτίνα τους ρ = 1 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

BASIC 13

Γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο Γ = 2πρ και το εμβαδόν του από τον τύπο Ε = πρ², όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.
Άρα το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει το μήκος και το εμβαδόν ενός κύκλου αν εμείς του δίνουμε την ακτίνα του.

```
10 INPUT R          (↵)
20 LET G=2*π*R      (↵)
30 LET E=π*R↑2      (↵)
40 PRINT G, E       (↵)
50 GO TO 10         (↵)
```

Παρατηρήστε ότι το παραπάνω πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Διότι, μόλις τυπώσει τα G και E (σειρά 40) πηγαίνει πάλι στη 10 περιμένοντας νέο R (λόγω της 50).
(Μπορείτε - χρησιμοποιώντας βρόγχο FOR - NEXT - να μετατρέψετε το πρόγραμμα έτσι, ώστε να σταματά μετά από πέντε επαναλήψεις).

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει την πλευρά κανονικού πολυγώνου αν εμείς του δίνουμε την ακτίνα του κύκλου.

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει το μήκος ενός τόξου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα αν εμείς δίνουμε την ακτίνα R και τη γωνία του τόξου σε ακτίνια. (Αν η γωνία δοθεί σε μοίρες τότε θυμήσου την παρατήρηση στο Κεφ. 4, Basic).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

Μέτρηση στερεών

9.1 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Θεωρία

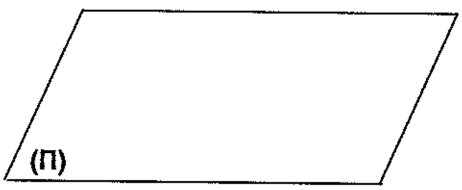
Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι εννοούμε λέγοντας επίπεδο στη Γεωμετρία;

1. Επίπεδο στη Γεωμετρία εννοούμε μια επιφάνεια την οποία έχουμε προεκτείνει απεριόριστα από όλες τις κατευθύνσεις και πάνω στην οποία εφαρμόζει απόλυτα ένας χάρακας κατά οποιαδήποτε διεύθυνση.

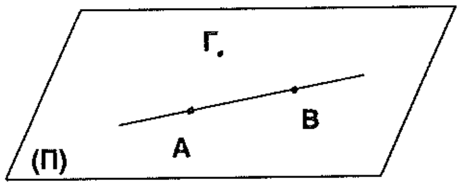
2. Πώς παριστάνουμε ένα επίπεδο;

2. Για να παραστήσουμε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα μέσα σε παρένθεση. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το επίπεδο (Π).



3. Από πόσα σημεία δεχόμαστε ότι διέρχεται μόνο ένα επίπεδο;

3. Στη Γεωμετρία δεχόμαστε ότι:
Από τρία σημεία που δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.
Η παραπάνω παραδοχή είναι ένα από τα αξιώματα της Γεωμετρίας.



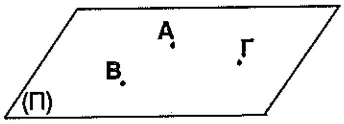
<u>Παρατήρηση:</u>
Από το παραπάνω αξίωμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα επίπεδο ορίζεται με μοναδικό τρόπο με έναν από τους επόμενους τρόπους:

α) Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

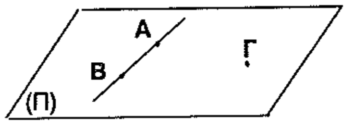
β) Από μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής.

γ) Από δύο τεμνόμενες ευθείες.

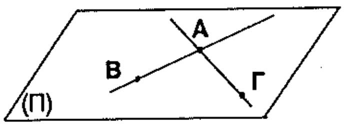
δ) Από δύο παράλληλες ευθείες.



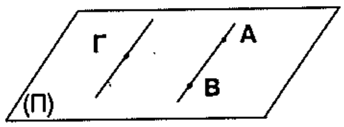
(α)



(β)



(γ)



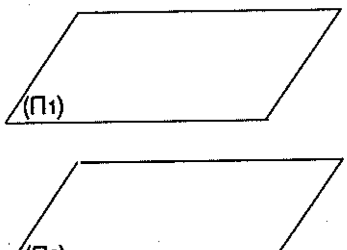
(δ)

4. Ποια είναι η σχετική θέση δύο επιπέδων;

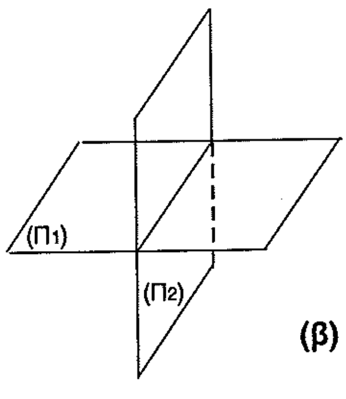
4. Δύο επίπεδα μπορεί να είναι:

α) παράλληλα, δηλαδή να μην έχουν κοινά σημεία.

β) να τέμνονται κατά μια ευθεία η οποία λέγεται και **τομή** των δύο επιπέδων.



(α)



(β)

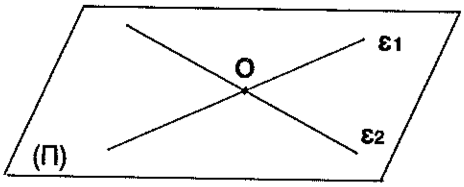
5. Ποια είναι η σχετική θέση δύο ευθειών στο χώρο;

5. Δύο ευθείες στο χώρο μπορεί:

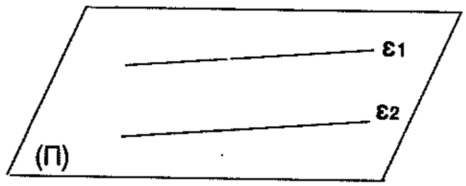
α) Να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και να τέμνονται, δηλαδή να έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και να είναι παράλληλες, δηλαδή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

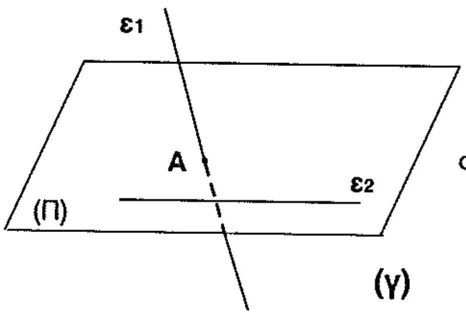
γ) Να μη βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, οπότε δεν είναι περάλληλες και ούτε έχουν κοινό σημείο. Στην περίπτωση αυτή οι δύο ευθείες λέγονται **ασύμβατες.**



τεμνόμενες **(α)**



παράλληλες **(β)**



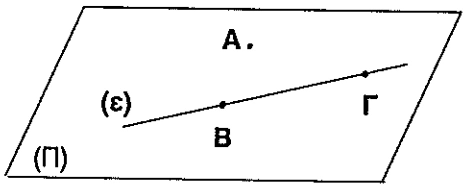
ασύμβατες

(γ)

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι: Από μία ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.

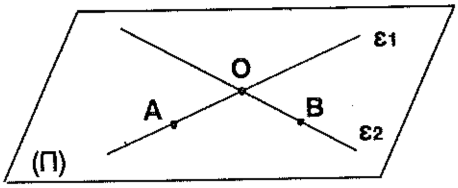
Λύση



Γνωρίζουμε ότι από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχεται μόνο ένα επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σημεία Β και Γ της ευθείας (ε) τα οποία μαζί με το Α αποτελούν τρία μη συνευθειακά σημεία. Από τα τρία αυτά σημεία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο (Π), το οποίο περιέχει και την ευθεία (ε) καθότι η ευθεία αυτή διέρχεται από δύο σημεία Β, Γ του επιπέδου (Π).

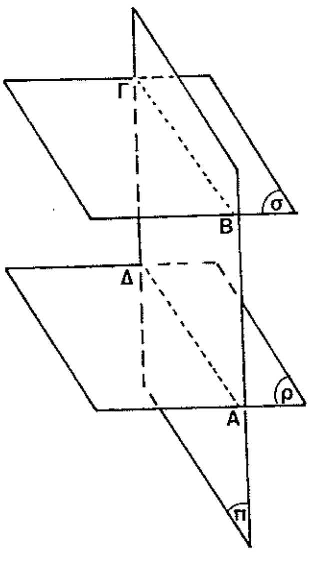
2. Να αποδείξετε ότι από δύο τεμνόμενες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.

Λύση



Έστω ότι οι δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο Ο. Θεωρούμε ένα σημείο Α της ευθείας $ε_1$ διαφορετικό από το Ο και ένα σημείο Β της ευθείας $ε_2$ διαφορετικό και αυτό από το Ο. Τα τρία σημεία Α, Β, Ο είναι τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, άρα από αυτά διέρχεται μόνο ένα επίπεδο (Π). Το επίπεδο αυτό περιέχει τις τεμνόμενες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ γιατί κάθε μία διέρχεται από δύο σημεία του.

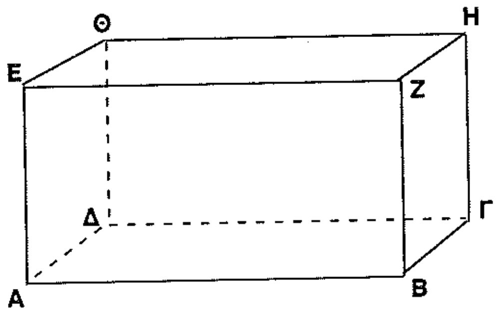
3. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τη θέση των επιπέδων π, ρ, σ μεταξύ τους.



Λύση

Τα επίπεδα π και ρ τέμνονται κατά την ευθεία ΑΔ. Τα επίπεδα π και σ τέμνονται κατά την ευθεία ΒΓ, ενώ τα επίπεδα ρ και σ είναι μεταξύ τους παράλληλα.

4. Στο παρακάτω παραλληλεπίπεδο να βρείτε: α) δύο ζεύγη παραλλήλων επιπέδων, β) δύο ζεύγη τεμνόμενων επιπέδων.



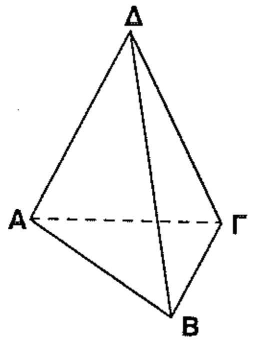
Λύση

Τα επίπεδα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι παράλληλα καθώς και τα ΕΘΔΑ, ΗΖΒΓ ενώ τα ΑΒΓΔ με το ΒΓΗΖ τέμνονται κατά την ευθεία ΒΓ και το ΕΖΗΘ και ΕΘΔΑ τέμνονται κατά την ευθεία ΕΘ.

5. Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ που δεν είναι συνεπίπεδα. Να ονομάσετε τα επίπεδα που ορίζουν ανά τρία και να βρείτε τις τομές τους ανά δύο.

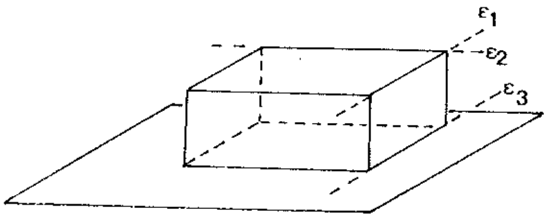
Λύση

Τα τέσσερα σημεία ορίζουν τα επίπεδα ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΑΓ τα οποία τέμνονται ως εξής:
Τα ΑΒΓ και ΔΑΒ κατά την ΑΒ.
Τα ΑΒΓ και ΔΒΓ κατά την ΒΓ.



Τα ΑΒΓ και ΔΑΓ κατά την ΑΓ.
Τα ΔΑΒ και ΔΒΓ κατά την ΔΒ.
Τα ΔΑΒ και ΔΑΓ κατα την ΔΑ
και τα ΔΒΓ και ΔΑΓ κατά την ΔΓ.

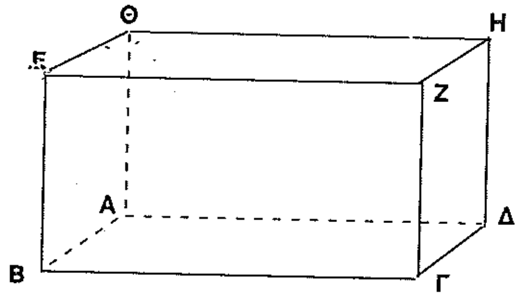
6. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε την θέση των ευθειών ε_1, ε_2 και ε_3 μεταξύ τους.



Λύση

Όπως βλέπουμε στο σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Η, οι ευθείες ε_1 και ε_3 είναι παράλληλες και οι ευθείες ε_2 και ε_3 είναι ασύμβατες.

7. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε:
α) δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών,
β) δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών,
γ) δύο ζεύγη ασυμβάτων ευθειών.

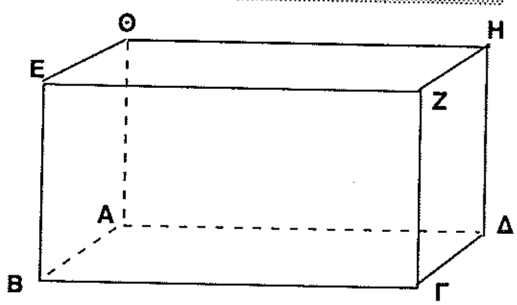


Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:
α) ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ//ΕΘ.
β) Οι ευθείες ΕΘ και ΕΖ τέμνονται στο Ε, οι ΗΖ και ΖΓ τέμνοται στο Ζ.
γ) Ενώ οι ΕΖ και ΔΓ είναι ασύμβατες, όπως και οι ΗΘ και ΑΒ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

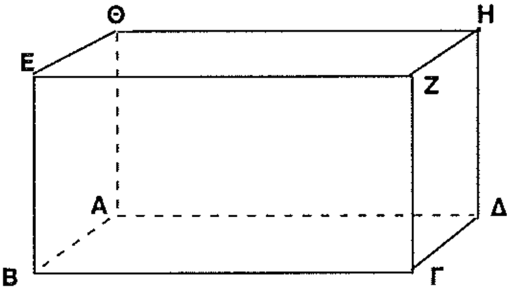
1. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε όλα τα ζεύγη των παραλλήλων επιπέδων.



Λύση

Το επίπεδο ΑΒΓΔ είναι παράλληλο με το ....
το ΗΔΓΖ είναι παράλληλο με το ....
το ΑΔΗΘ είναι παράλληλο με το ....

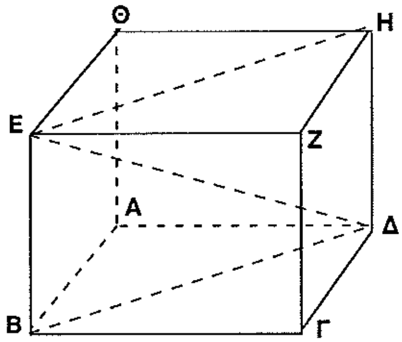
2. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι ασύμβατες με την ΕΖ.



Λύση

Η ΕΖ είναι ασύμβατη με τη ΔΓ και με την ....

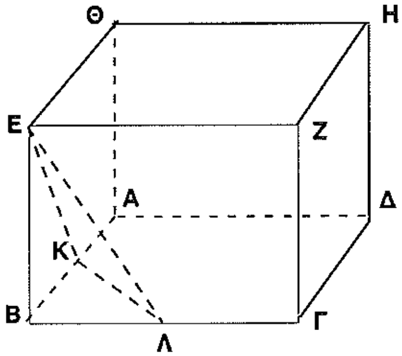
3. Στον παρακάτω κύβο να βρείτε την τομή των επιπέδων:
α) ΑΒΓΔ και ΗΖΓΔ,
β) ΕΗΔ και ΘΗΖΕ
γ) ΕΗΔ και ΑΒΓΔ
δ) ΑΓΖΘ και ΘΕΖΗ.



Λύση

α) Τα ΑΒΓΔ και ΗΖΓΔ έχουν κοινά τα Γ και Δ άρα και την ....
β) Τα ΕΗΔ και ΘΗΖΕ έχουν κοινά τα ...
γ) ....

4. Στον παρακάτω κύβο δίνονται τα μέσα των Κ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να βρείτε την τομή των επιπέδων:
α) ΕΚΛ και ΑΒΓΔ,
β) ΕΚΛ και ΑΒΕΘ.

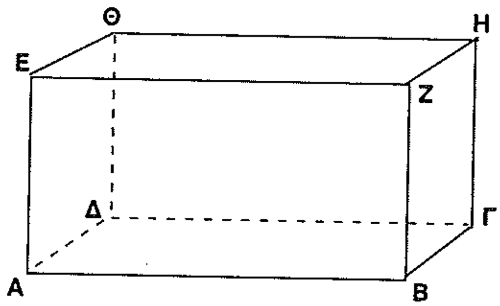


Λύση

α) Το ΕΚΛ και το ΑΒΓΔ έχουν κοινά σημεία το Κ και το Λ άρα τέμνονται κατά την ευθεία ΚΛ.
β) Το ΕΚΛ και το ΑΒΕΘ έχουν κοινά σημεία το Ε και το ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε τη θέση που έχουν τα επίπεδα ΑΒΓΔ, ΕΘΖΗ και ΒΓΗΖ μεταξύ τους.



2. Στο προηγούμενο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε τρία ζεύγη τεμνόμενων επιπέδων και τρία ζεύγη παράλληλων επιπέδων.

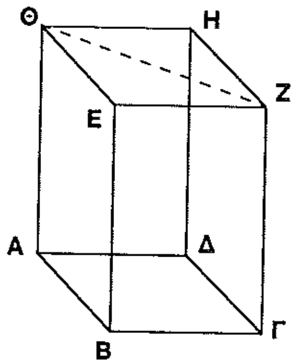
3. Δίνεται το παρακάτω παραλληλεπίπεδο. Να βρείτε:

α) Δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών.

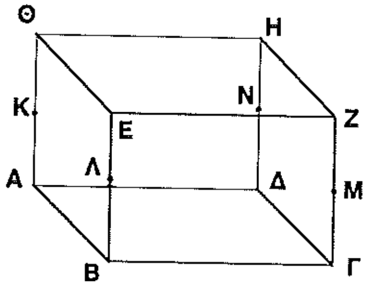
β) Δύο ζεύγη τεμνόμενων ευθειών.

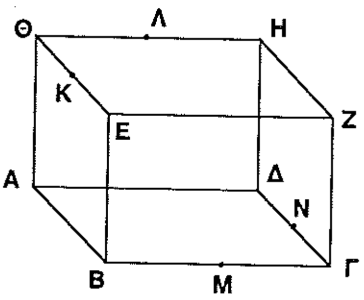
γ) Δύο ζεύγη ασυμβάτων ευθειών.

δ) Τις ευθείες που είναι ασύμβατες με τη ΘΖ.



4. Στα παρακάτω σχήματα Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των ακμών. Να βρείτε τι είδους σχήματα είναι το ΚΛΜΝ και την τομή του με τις έδρες του κύβου.

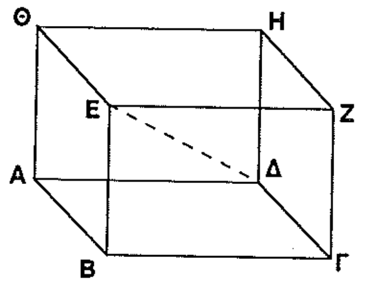




5. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε:

α) τις ευθείες που τέμνουν την ΕΔ,

β) τις ευθείες που είναι ασύμβατες με την ΕΔ.



9.2 Θέσεις ευθείας και επιπέδου

Θεωρία

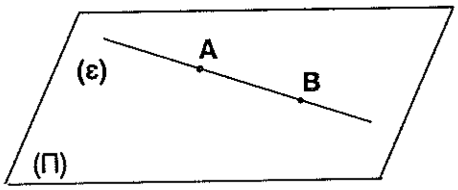
Ερωτήσεις

1. Ποιες σχετικές θέσεις μπορεί να έχει μία ευθεία ως προς ένα επίπεδο;

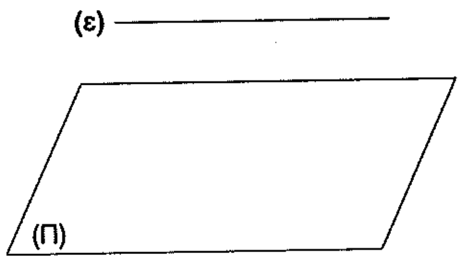
Απαντήσεις

1. Οι σχετικές θέσεις που μπορεί να έχει μία ευθεία (ε) ως προς το επίπεδο (Π) είναι τρεις:

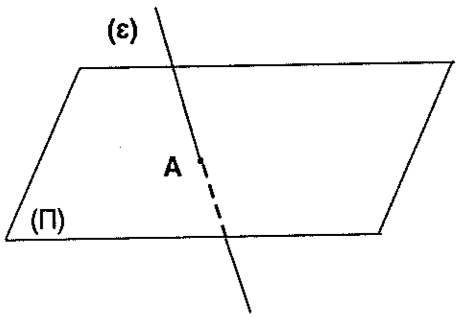
α) Η (ε) να περιέχεται στο (Π), δηλαδή να έχει όλα της τα σημεία πάνω στο επίπεδο. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί η ευθεία να έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με το επίπεδο.



β) Η (ε) να είναι παράλληλη προς το (Π), δηλαδή να μην έχει κοινά σημεία με το επίπεδο.



γ) Η (ε) να τέμνει το (Π), δηλαδή να έχει ένα μόνο κοινό σημείο με το επίπεδο το οποίο λέγεται και **ίχνος** της ευθείας (ε) πάνω στο (Π).

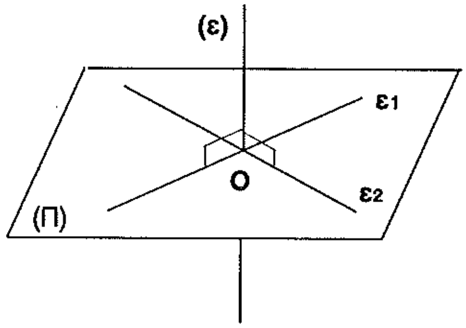


2. Πότε μία ευθεία ε λέγεται κάθετη σε ένα επίπεδο (Π);

2. Μια ευθεία (ε) λέγεται **κάθετη** προς το επίπεδο (Π) όταν τέμνει το (Π) και είναι κάθετη προς δύο τουλάχιστον ευθείες του (Π) που διέρχονται από το ίχνος της.

Παρατήρηση:

Αν η ευθεία (ε) τέμνει κάθετα το επίπεδο (Π), τότε είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της.

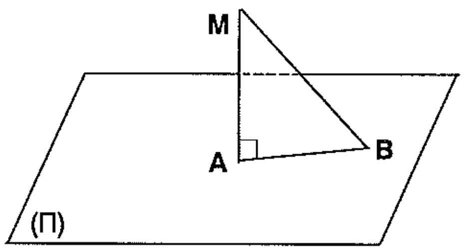


3. Τι λέγεται απόσταση ενός σημείου Μ από το επίπεδο (Π);

3. Απόσταση ενός σημείου Μ από το επίπεδο (Π) λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από το σημείο Μ προς το επίπεδο (Π).

Παρατήρηση:

Η κάθετος από το σημείο Μ είναι το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που μπορούμε να σχεδιάσουμε από το σημείο αυτό προς το επίπεδο.

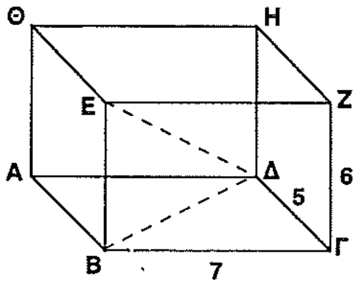


$MA < MB$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 5 cm, 6 cm, 7 cm, αντίστοιχα.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και υπολογίζουμε τη ΒΔ.

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2$ ή

$ΒΔ^2 = 7^2 + 5^2$ ή $ΒΔ^2 = 74$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΔ (γωνία Β = 1L) έχουμε:

$ΕΔ^2 = ΕΒ^2 + ΒΔ^2$ ή

$ΕΔ^2 = 36 + 74$ ή

$ΕΔ^2 = 110$ ή

$ΕΔ = \sqrt{110}$ ή $ΕΔ \cong 10{,}48$ cm

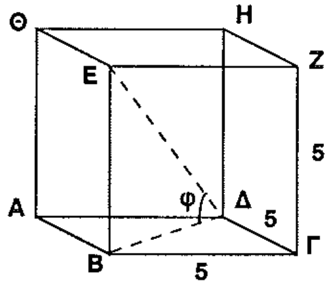
2. Να βρείτε τη διαγώνιο ενός κύβου πλευράς 5 cm καθώς και τη γωνία που σχηματίζει αυτή με τη διαγώνιο της βάσης την οποία τέμνει.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ (γωνία Γ = 1L) εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$ΒΔ^2 = ΒΓ^2 + ΓΔ^2$ ή

$ΒΔ^2 = 5^2 + 5^2$ ή



$ΒΔ^2 = 50$

Στο δε ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΔ (γωνία Β = 1L) έχουμε:

$ΕΔ^2 = ΕΒ^2 + ΒΔ^2$ ή

$ΕΔ^2 = 25 + 50$ ή

$ΕΔ^2 = 75$ ή

$ΕΔ = \sqrt{75}$ ή $ΕΔ \cong 8{,}66$ cm

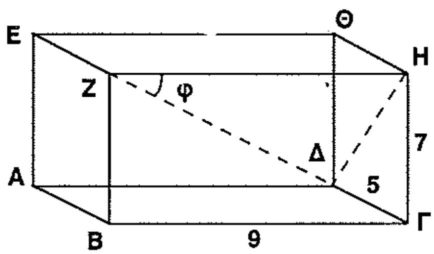
Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΔ έχουμε:

$εφφ = \dfrac{ΕΒ}{ΒΔ}$ ή $εφφ = \dfrac{5}{7{,}07} = 0{,}70$ άρα

$φ \cong 35°$

3. Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του σχήματος να υπολογισθούν:
α) το ΖΔ, β) η γωνία φ.

Λύση



α) Το τρίγωνο ΗΔΓ είναι ορθογώνιο αφού γωνία Γ = 1L άρα:

$ΗΔ^2 = ΔΓ^2 + ΗΓ^2$ ή

$ΗΔ^2 = 5^2 + 7^2$ ή

$ΗΔ^2 = 25 + 49$ ή $ΗΔ^2 = 74$.

Το τρίγωνο ΖΗΔ είναι επίσης ορθογώνιο διότι γωνία Η = 1L (ΖΗ είναι κάθετη στο επίπεδο ΘΗΓΔ, επομένως είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου, άρα και στην ΗΔ) άρα:

$ΖΔ^2 = ΖΗ^2 + ΗΔ^2$ ή

$ΖΔ^2 = 9^2 + 74$ ή

$ΖΔ^2 = 81 + 74$ ή $ΖΔ^2 = 155$ ή

$ΖΔ = \sqrt{155}$ ή $ΖΔ = 12{,}44$ cm

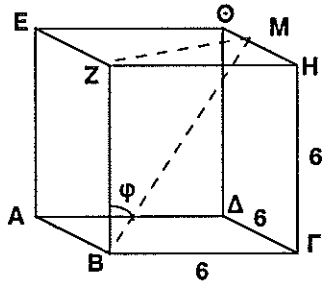
β) Η γωνία φ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$εφφ = \frac{ΗΔ}{ΖΔ} = \frac{8{,}6}{12{,}44} = 0{,}69$$

Άρα από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ότι φ = 34,5°.

4. Στον παρακάτω κύβο να υπολογισθούν: α) το ΒΜ, β) η γωνία φ (Μ μέσο της ΘΗ).

Λύση



α) Το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ορθογώνιο

($\widehat{Η} = 1L$) και $ΜΗ = \frac{ΘΗ}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm.

Άρα: $ΜΖ^2 = 6^2 + 3^2$ ή

$ΜΖ^2 = 36 + 9$ ή $ΜΖ^2 = 45$ ή

$ΜΖ = \sqrt{45}$ ή $ΜΖ \cong 6{,}7$ cm

Το τρίγωνο ΜΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί ΒΖ είναι κάθετη στο επίπεδο ΗΖΕΘ οπότε ΒΖ κάθετη στη ΜΖ άρα γωνία ΜΖΒ = 1L. Έτσι έχουμε:

$ΜΒ^2 = ΒΖ^2 + ΜΖ^2$ ή

$ΜΒ^2 = 6^2 + (6{,}7)^2$ ή

$ΜΒ^2 = 36 + 45$ ή $ΜΒ^2 = 81$ ή

ΜΒ = 9 cm.

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΜ έχουμε:

$$εφφ = \frac{ΜΖ}{ΒΖ} = \frac{6{,}7}{6} = 1{,}116$$

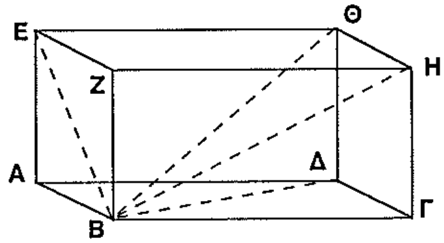
και από τριγωνομετρικούς πίνακες:

φ = 48°.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω ορθογώνιο να βρεθούν ποιες από τις γωνίες είναι ορθές.

α) $\widehat{ΕΒΓ}$, β) $\widehat{ΔΒΘ}$, γ) $\widehat{ΗΒΖ}$, δ) $\widehat{ΒΗΘ}$, ε) $\widehat{ΒΔΘ}$



Λύση

α) Επειδή η ΒΓ είναι κάθετη στο επίπεδο ΕΖΒΑ θα είναι κάθετη και σε οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το Β, άρα ΒΓ είναι κάθετη στην ΕΒ. Οπότε γωνία ΕΒΓ = ...

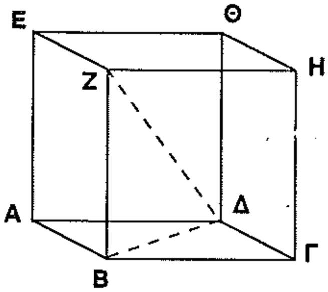
β) Το τρίγωνο ΘΒΔ είναι ορθογώνιο στο Δ άρα ....

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΒ αποκλείεται η ....

δ) ....

ε) ....

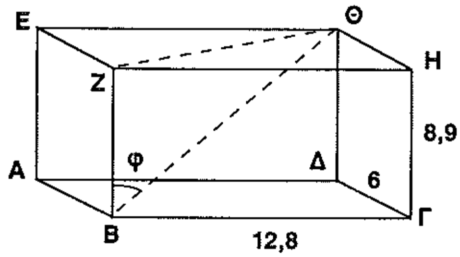
2. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ενός κύβου πλευράς 12,5 cm.



Λύση

Υπολογίζουμε τη ΒΔ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ και κατόπιν τη ΔΖ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ.

3. Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Λύση

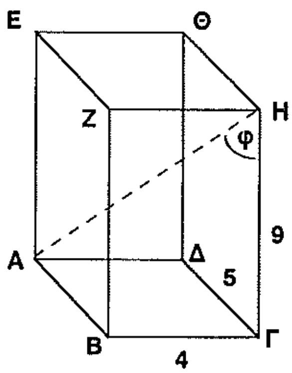
Βρίσκουμε τη ΘΖ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΘ και κατόπιν την εφφ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΘ.....

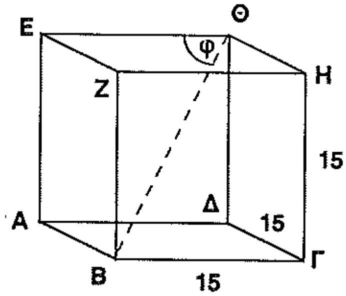
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 3,5 cm, 4,2 cm και 5,6 cm.

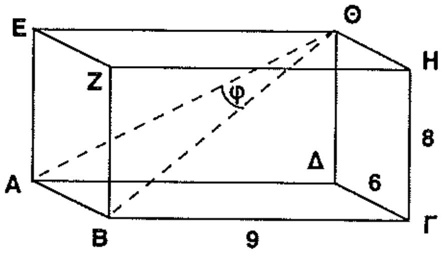
2. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός τετραγώνου πλευράς 13 cm.

3. Να υπολογίσετε τη γωνία φ στα παρακάτω σχήματα:

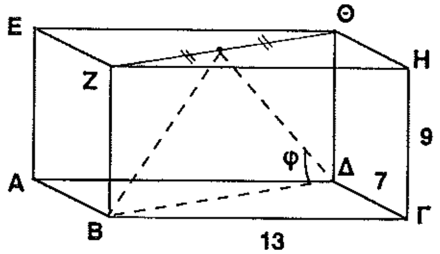




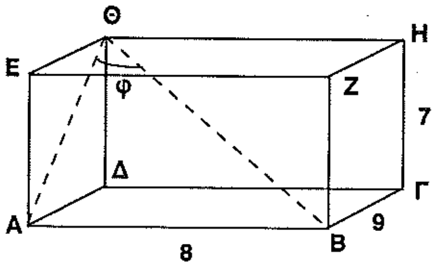
4. Να υπολογίσετε τη γωνία φ και το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΘ και ΑΘ στο παρακάτω σχήμα:



5. Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα:



6. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία φ και την ΘΒ.

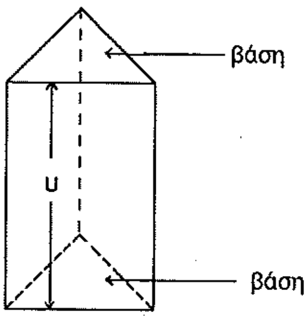


9.3 Ορθά πρίσματα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται ορθό πρίσμα;



Απαντήσεις

1. **Ορθό πρίσμα** λέγεται το στερεό το οποίο αποτελείται από δύο παράλληλες έδρες που είναι ίσα πολύγωνα (όχι κατ' ανάγκη κανονικά), ενώ οι άλλες έδρες του είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Οι δύο παράλληλες έδρες (δηλαδή τα δύο ίσα πολύγωνα) λέγονται **βάσεις** του πρίσματος.

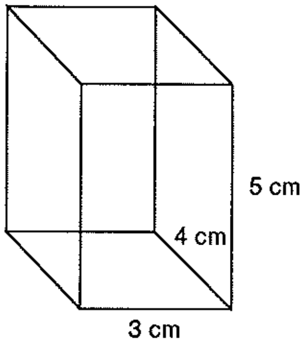
<u>**Παρατήρηση:**</u> Ένα πρίσμα ονομάζεται τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό εξαγωνικό, κ.λπ. ανάλογα με το σχήμα της βάσης του.

2. Τι λέγεται παράπλευρη επιφάνεια ενός πρίσματος και πώς βρίσκεται το εμβαδόν της;

2. Παράπλευρη επιφάνεια ενός πρίσματος είναι το σύνολο όλων των εδρών εκτός των βάσεων του και το εμβαδόν της βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε την περίμετρο της βάσης του πρίσματος επί το ύψος του.
Σημειώνουμε εδώ ότι **ύψος** του πρίσματος λέγεται το ύψος υ μιας παράπλευρης έδρας.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παρακάτω σχήματος:

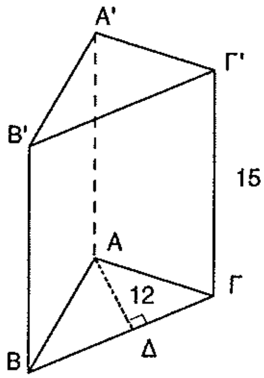


Λύση

Αν συμβολίσουμε με $E_{ολ.}$ το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας, με $E_π$ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και $E_β$ το εμβαδόν της βάσεως του πρίσματος τότε: $E_{ολ.} = E_π + 2\ E_β$, όπου:
$E_π = (4 + 3 + 4 + 3) \cdot 5 = 14 \cdot 5 = 70$ cm² και $E_β = 3 \cdot 4 = 12$ cm².
Άρα $E_{ολ.} = 70 + 2 \cdot 12 = 70 + 24 = 94$ cm².

2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός τριγωνικού πρίσματος που η βάση του είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 12 cm και το ύψος του είναι 15 cm.

Λύση



Αν $E_{ολ.}$ το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος, $E_π$ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και $E_β$ το εμβαδόν της βάσεώς του τότε:
$E_{ολ.} = E_π + 2\ E_β$, όπου:
$E_π = (12 + 12 + 12) \cdot 15 = 36 \cdot 15 =$
$= 540$ cm².
Για να βρούμε το $E_β$ υπολογίζουμε πρώτα το ΑΔ.
$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$ ή
$ΑΔ^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$ ή

$A\Delta = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm

Άρα $E_\beta = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10{,}4 =$

$= 62{,}4$ cm².

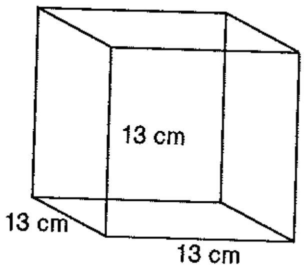
Επομένως: $E_{ολ} = 540 + 2 \cdot 62{,}4 =$

$= 540 + 124{,}8 =$

$= 664{,}8$ cm².

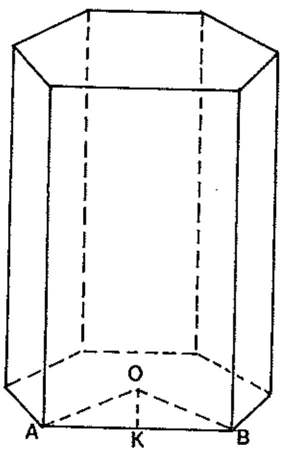
3. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου ακμής 13 cm.

Λύση



Το εμβαδόν της μιας έδρας είναι:
$E = 13^2 = 169$ cm².
Άρα: $E_{ολ} = 6 \cdot 169 = 1014$ cm².

4. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός πρίσματος με βάσεις κανονικά εξάγωνα περιμέτρου 108 cm και ύψος τα 5/9 της πλευράς της βάσης.



Λύση

Η πλευρά του εξαγώνου είναι:
108 : 6 = 18 cm και το ύψος του πρίσματος είναι: $5/9 \cdot 18 = 10$ cm.
Έτσι έχουμε: $E_{ολ.} = E_\pi + 2\,E_\beta$, όπου:
$E_\pi = 108 \cdot 10 = 1080$ cm² και
$E_\beta = 6 \cdot E_{OAB}$.
Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο με ύψος ΟΚ. Συνεπώς $OK^2 = OA^2 - A\Gamma^2$ ή
$O\Gamma^2 = 18^2 - 9^2 = 324 - 81 = 243$ ή

$OK = \sqrt{243} \approx 15{,}5$ cm

Άρα $E_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15{,}5 =$

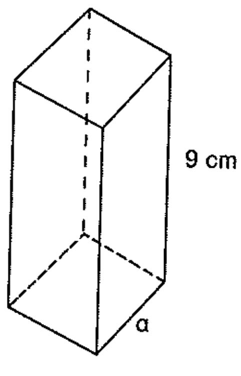
$= 139{,}5$ cm².

Επομένως $E_\beta = 6 \cdot 139{,}5 = 837$ cm².
Τελικά: $E_{ολ} = 1080 + 2 \cdot 837 =$

$= 1080 + 1674 = 2754$cm².

5. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος με βάση ρόμβο είναι $E_\pi = 432$ cm². Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ρόμβου αν το ύψος του πρίσματος είναι 9 cm.

Λύση



Γνωρίζουμε ότι:
$E_\pi =$ (περιμ. βάσης) $\cdot$ (ύψος).
Αν η πλευρά του ρόμβου είναι α και το ύψος του πρίσματος είναι υ τότε:

$E_\pi = 4\alpha \cdot \upsilon$ άρα

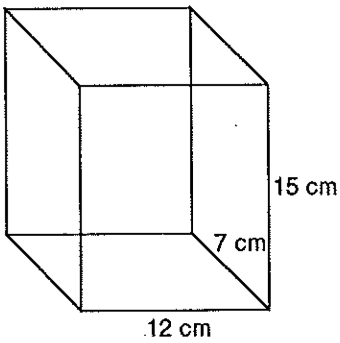
$\alpha = \dfrac{E_\pi}{4\upsilon}$ δηλαδή:

$\alpha = \dfrac{432}{4 \cdot 9} = \dfrac{432}{36} = 12$ cm.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων 7 cm, 12 cm και 15 cm.

Λύση



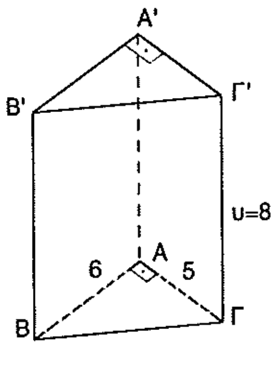
Γνωρίζουμε ότι:

$E_{ολ.} = E_\pi + 2\,E_\beta$ και

$E_\pi =$ (περιμ. βάσης) $\cdot$ (ύψος)

άρα $E_\pi =$ ....

2. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παρακάτω τριγωνικού πρίσματος.



Λύση

Οι βάσεις του τριγωνικού πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα άρα:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $ΒΓ =$ ....

Ισχύει: $E_\pi = (ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ) \cdot \upsilon$ άρα

$E_\pi =$ ....

Επίσης $E_\beta =$ .....

Τελικά $E_{ολ} = E_\pi + 2\,E_\beta$.

3. Μια πισίνα έχει μήκος 30 m, πλάτος 15 m και ύψος 2,5 m. Να βρείτε:
α) Πόση είναι η εσωτερική της επιφάνεια.
β) Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν για να την επενδύσουμε εσωτερικά, αν κάθε πλακάκι είναι τετράγωνο πλευράς α = 40 cm.

Λύση

Η βάση της πισίνας έχει εμβαδόν:

$E_\beta =$ (μήκος) $\cdot$ (πλάτος)

Η παράπλευρη επιφάνειά της έχει εμβαδόν:

$E_\pi =$ (περίμετρος βάσης) $\cdot$ ύψος

Άρα το εμβαδόν της πισίνας είναι:

$E = E_\pi + E_\beta$

Κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν:

$E_{πλακ.} = \alpha^2$ ....

Άρα .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 25 cm και ύψος πρίσματος 18 cm.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο περιμέτρου 96 cm και ύψος τα $\frac{3}{8}$ της πλευράς της βάσης.

3. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος με βάση ρόμβο, αν ξέρετε ότι η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι 16,2 cm, το εμβαδόν του είναι 174,96 cm^2 και το ύψος του πρίσματος είναι 12 dm.

4. Να υπολογίσετε το ύψος ενός τριγωνικού πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 525 cm^2 και πλευρά βάσης 14 cm.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός πρίσματος που έχει βάση ρόμβο, γνωρίζοντας ότι η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν 3.444 cm^2, το ύψος του πρίσματος είναι 42 cm και η μικρή διαγώνιος του ρόμβου είναι 9 cm.

6. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός εξαγωνικού πρίσματος, αν γνωρίζετε ότι η περίμετρος της βάσης είναι 90 cm και το ύψος είναι τα $\frac{4}{5}$ της πλευράς της βάσης.

7. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός πρίσματος που έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο, αν γνωρίζετε ότι η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος είναι 750 cm^2, το άθροισμα των κάθετων πλευρών του τριγώνου της βάσης είναι 34 cm και η μία κάθετη είναι τα $\frac{5}{12}$ της άλλης.

9.4 Όγκος πρίσματος

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς βρίσκουμε τον όγκο ενός πρίσματος;

Απαντήσεις

1. Για να βρούμε τον όγκο V ενός πρίσματος αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν E_β της βάσεώς του με το ύψος του υ.

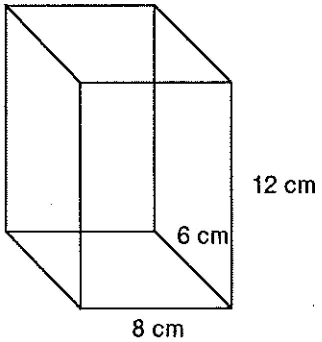
Δηλαδή:

$$\boxed{V = E_\beta \cdot u}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί ο όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 6 cm, 8 cm και 12 cm.

Λύση



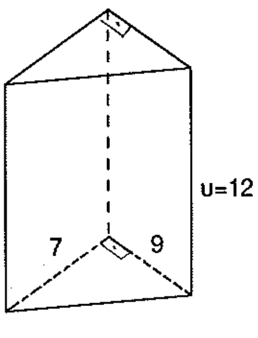
Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ένα ορθό πρίσμα με βάση ορθογώνιο. Άρα ο όγκος του δίνεται από τη σχέση: $V = E_\beta \cdot u$, όπου:

$E_\beta = 6 \cdot 8 = 48$ cm² και $u = 12$ cm.

Συνεπώς: $V = 48 \cdot 12 = 576$ cm³.

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός τριγωνικού πρίσματος με βάση ορθογώνιο τρίγωνο, αν οι κάθετες πλευρές του είναι 7 cm και 9 cm αντίστοιχα, ενώ το ύψος του πρίσματος είναι 15 cm.

Λύση



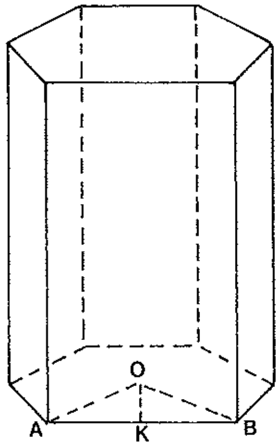
Ο όγκος του πρίσματος δίνεται από τη σχέση: $V = E_\beta \cdot u$, όπου:

$$E_\beta = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 = \frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ cm}^2$$

Άρα $V = 31{,}5 \cdot 12 = 378$ cm³.

3. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο πλευράς 5 cm και ύψους 8 cm.

Λύση



Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο με ύψος ΟΚ. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΚΟ βρίσκουμε ότι:

$$OK^2 = OA^2 - AK^2 = 5^2 - (2{,}5)^2 =$$
$$= 25 - 6{,}25 \quad \text{ή}$$
$$OK^2 = 18{,}75 \quad \text{ή}$$
$$OK = \sqrt{18{,}75} \cong 4{,}3 \text{ cm}$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

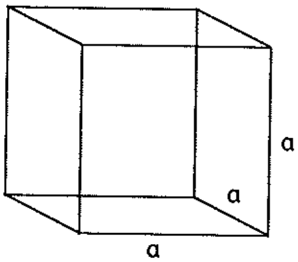
$E = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}3 = \frac{21{,}5}{2} = 10{,}75\ cm^2$

Οπότε το εμβαδόν του εξαγώνου είναι $E_\beta = 6 \cdot 10{,}75 = 64{,}5\ cm^2$.

Επομένως ο όγκος του πρίσματος είναι: $V = E_\beta \cdot u = 64{,}5 \cdot 8 = 516\ cm^3$.

4. Να βρείτε τον όγκο ενός κύβου πλευράς α = 5 cm.

Λύση



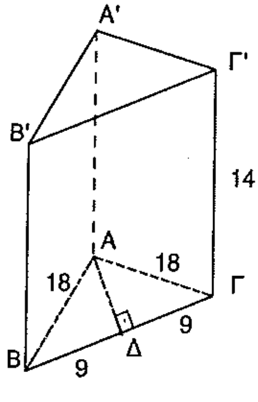
$E_\beta = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

$V = E_\beta \cdot u$ ή $V = \alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$.

Άρα $V = 5^3 = 125\ cm^3$.

5. Να βρείτε τον όγκο ενός πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 18 cm και ύψος 14 cm.

Λύση



Το ύψος ΑΔ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ:

$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$ ή

$A\Delta^2 = 18^2 - 9^2 = 324 - 81 = 243$ ή

$A\Delta = \sqrt{243} \approx 15{,}58$ cm

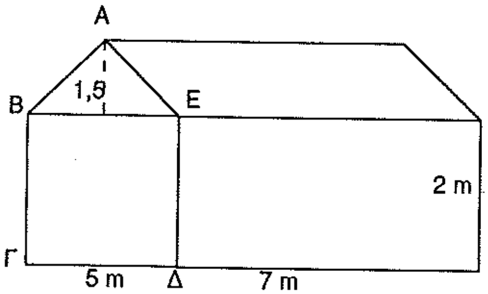
Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι:

$E_\beta = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15{,}58 = \frac{280{,}44}{2} \approx 140{,}3\ cm^2$

Άρα ο ογκος του πρίσματος είναι:

$V = E_\beta \cdot u = 140{,}3 \cdot 14 = 1964{,}1\ cm^3$.

6. Να υπολογίσετε τον όγκο της παρακάτω σκηνής:



Λύση

Η σκηνή έχει το σχήμα ενός πρίσματος με βάση το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το οποίο αποτελείται από ένα τρίγωνο βάσης 5 m και ύψος 1,5 m και ένα ορθογώνιο διαστάσεων 2 m και 5 m. Το δε ύψος του πρίσματος είναι 7 m. Το εμβαδό της βάσης ειναι:

$E_\beta = E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} + E_{o\rho\theta o\gamma\omega\nu\acute{\iota}o\upsilon} =$

$= 1/2 \cdot 5 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 5 =$

$= 3{,}75 + 10 = 13{,}75\ cm^2$.

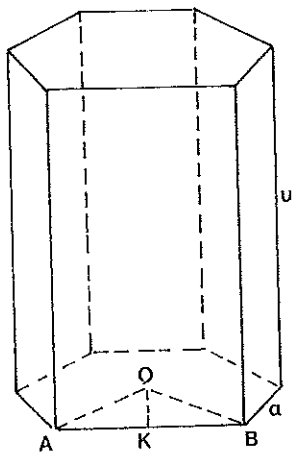
Άρα ο όγκος της σκηνής είναι:

$V = E_\beta \cdot u = 13{,}75 \cdot 7 = 96{,}25\ m^3$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο περιμέτρου 84 cm και ύψους 25 cm.

Λύση



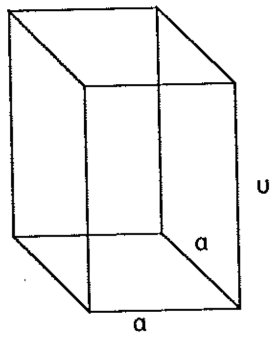
Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου

είναι: $\alpha = \frac{84}{6} = ...$

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο, του οποίου το ύψος υπολογίζεται με το πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε και το εμβαδόν του. Επομένως: $E_\beta = 6 \cdot E_{OAB}$ και ο όγκος $V = E_\beta \cdot \upsilon$ .....

2. Να υπολογίσετε το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο με πλευρά α = 7 cm και όγκο V = 735 cm³.

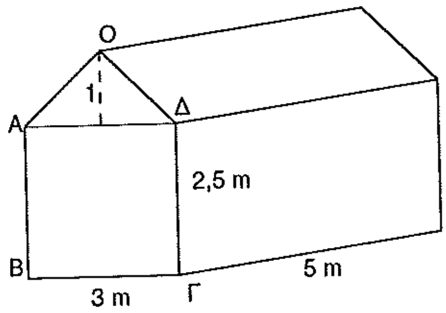
Λύση



Το εμβαδόν της βάσης είναι: $E_\beta = \alpha^2$ και ο όγκος $V = E_\beta \cdot \upsilon$ άρα

$\upsilon = \frac{V}{E_\beta} = ...$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο της παρακάτω σκηνής.



Λύση

Η σκηνή είναι πρίσμα με βάση το πολύγωνο ΟΑΒΓΔ και ύψος 5 m, άρα αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν της βάσης, που είναι το άθροισμα των εμβαδών ενός τριγώνου και ενός ορθογωνίου ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κύβου πλευράς α = 17 cm.

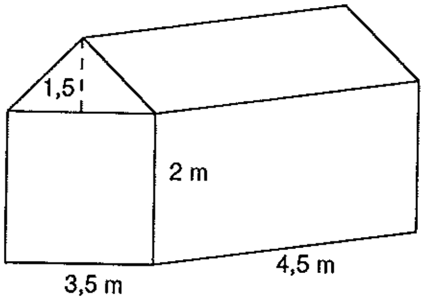
2. Να βρείτε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 12,5 cm, 17,6 cm και 23,7 cm.

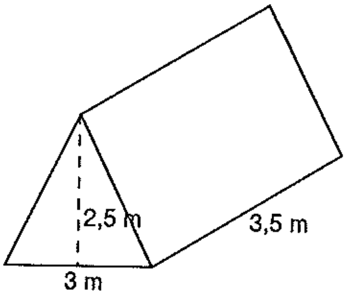
3. Να βρείτε τον όγκο ενός πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο πλευράς α = 16,5 cm και ύψους υ = 23,7 cm.

4. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός τριγωνικού πρίσματος με βάση ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο έχει τις κάθετες πλευρές του ίσες και υποτείνουσα μήκους 25 cm, ενώ το ύψος του πρίσματος είναι 32 cm.

5. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α = 19,5 cm και ύψους 45 cm.

6. Να βρείτε τον όγκο κάθε μιας από τις παρακάτω σκηνές:





7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας, της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ενός πρίσματος με βάση κανονικό εξάγωνο περιμέτρου 90 cm και ύψους που ισούται με τα $\frac{4}{5}$ της πλευράς της βάσης.

9.5 Κύλινδρος

Θεωρία

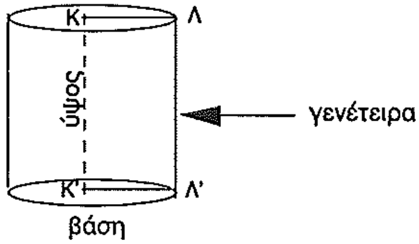
Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται κύλινδρος και ποια είναι τα στοιχεία του;

Απαντήσεις

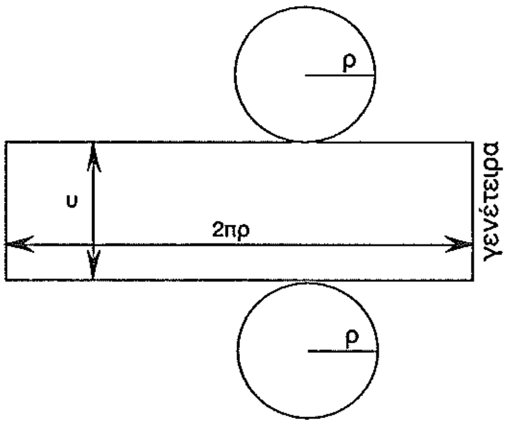
1. **Κύλινδρος** λέγεται το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου γύρω από μία πλευρά του. Η περιστροφή της απέναντι από αυτήν πλευράς δημιουργεί την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου γι' αυτό και η πλευρά αυτή λέγεται και γενέτειρα του κυλίνδρου.

Οι δύο άλλες πλευρές του ορθογωνίου κατά την περιστροφή τους δημιουργούν δύο ίσους κυκλικούς δίσκους που λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου.
Το ύψος υ του ορθογωνίου είναι και **ύψος** του κυλίνδρου.

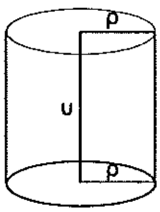


2. Τι γνωρίζετε για το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου;

2. Το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου αποτελείται από δύο ίσους κυκλικούς δίσκους ακτίνας ρ και από ένα ορθογώνιο με μήκος 2πρ και ύψος υ, όσο δηλαδή είναι και το μήκος της γενέτειρας του κυλίνδρου.



3. Πώς βρίσκεται το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου;



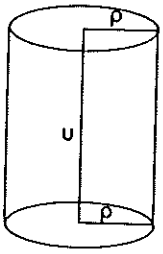
3. Για να βρούμε το εμβαδόν $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την περίμετρο της βάσης του επί το ύψος του υ. Εφ' όσον η βάση είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας ρ, η περίμετρός της έχει μήκος 2πρ. Άρα:

$$\boxed{E_κ = 2πρ \cdot υ}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει ύψος 3,5 cm και ακτίνα βάσης 1,2 cm.

Λύση

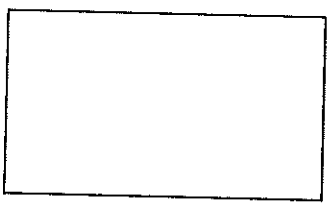


Είναι: $E_{ολ} = E_κ + 2E_β$

όπου $E_{ολ}$ το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας, $E_κ$ το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και $E_β$ το εμβαδόν της βάσης. Είναι όμως: $E_κ = 2πρ \cdot υ =$
$= 2 \cdot 3,14 \cdot 1,2 \cdot 3,5 = 26,376\ cm^2$ και
$E_β = πρ^2 = 3,14 \cdot (1,2)^2 = 4,5216\ cm^2$.
Άρα: $E_{ολ} = 26,376 + 2 \cdot 4,5216 =$
$= 26,376 + 9,0432 =$
$= 35,4192\ cm^2$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου, αν γνωρίζετε ότι το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ένα ορθογώνιο διαστάσεων 15 cm και 25,12 cm.

Λύση



Έχουμε: $υ = 15$ cm και $2πρ = 25,12$ cm
άρα:

$$ρ = \frac{25,12}{2 \cdot 3,14} = \frac{25,12}{6,28} = 4\ cm$$

άρα $E_κ = 2πρ \cdot υ = 25,12 \cdot 15 = 376,8$ cm
και $E_β = πρ^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 3,14 \cdot 16 =$
$= 50,24\ cm^2$.
Οπότε: $E_{ολ} = E_κ + 2E_β =$
$= 376,8 + 2 \cdot 50,24 = 477,28\ cm^2$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου που έχει περίμετρο βάσης 37,68 cm και ύψος 12,5 cm.

Λύση

Έχουμε ότι $2πρ = 37,68$ cm άρα

$$ρ = \frac{37,68}{2 \cdot 3,14} = \frac{37,68}{6,28} = 6\ cm$$

άρα $E_κ = 2πρ \cdot υ = 37,68 \cdot 12,5 =$
$= 471\ cm^2$ και
$E_β = πρ^2 = 3,14 \cdot (12,5)^2 = 490,625\ cm^2$.
Οπότε: $E_{ολ} = 37,68 + 2 \cdot 490,625 =$
$= 37,68 + 981,25 = 1018,93\ cm^2$.

4. Θέλουμε να βάψουμε εξωτερικά 500 κυλινδρικά βαρέλια ύψους 2 m και ακτίνας 0,60 m. Να υπολογίσετε πόσο θα πληρώσουμε για τη βαφή τους αν το 1 m^2 κοστίζει 120 δρχ.

Λύση

Αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας κάθε βαρελιού το οποίο δίνεται από τη σχέση:
$E_{ολ} = E_κ + 2E_β$

Όπου: $E_κ = 2πρ \cdot υ = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,6 \cdot 2 =$
$= 7,536\ m^2$,
$E_β = πρ^2 = 3,14 \cdot (0,6)^2 = 1,13\ m^2$.
Οπότε: $E_{ολ} = 7,536 + 21,13 = 9,786\ m^2$.
Το εμβαδόν και των 500 βαρελιών είναι: $500 \cdot 9,786 = 4898\ m^2$.
Επομένως θα πληρώσουμε:
$4898 \cdot 120 = 587.760$ δρχ.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει εμβαδόν βάσεων 226,08 cm² και ύψος 15 cm.

Λύση

Το εμβαδόν της μιας βάσης είναι:
$E_β = πρ^2$, άρα το εμβαδόν και των δύο βάσεων είναι:
$2 \cdot πρ^2 = 226,08$ ή $ρ^2 = 226,08 : 6,28$
ή $ρ^2 = 36$ ή $ρ = 6$ cm.
Συνεπώς: $E_κ = 2πρ \cdot υ =$
$= 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 15 = 565,2\ cm^2$.
Επομένως: $E_{ολ} = E_κ + 2E_β =$
$= 565,2 + 226,08 = 791,28\ cm^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου διαμέτρου βάσης δ = 14 cm και ύψους υ = 16 cm.

Λύση

Υπολογίζουμε την ακτίνα $ρ = \frac{δ}{2} = ...$

άρα $E_κ = 2πρ \cdot υ = ...$ και
$E_{ολ} = E_κ + 2E_β = ...$ όπου $E_κ = π \cdot ρ^2$
$= .....$

2. Να βρείτε το ύψος κυλίνδρου όταν είναι $E_κ$ = 183,69 cm² και ακτίνα ρ = 4,5 cm.

Λύση

Έχουμε $E_κ = 2πρ \cdot υ$ άρα

$υ = \frac{E_κ}{2πρ}$ οπότε υ = ...

3. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης καθώς και το ύψος ενός κυλίνδρου εμβαδού βάσης 50,24 cm² και εμβαδού κυρτής επιφανείας 150,72 cm².

Λύση

Ισχύει: $E_β = πρ^2$ ή $ρ^2 = \frac{E_β}{π}$

άρα ρ = ...
Επίσης $E_κ = 2πρ \cdot υ$ άρα

$υ = \frac{E_κ}{2πρ}$ οπότε υ = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ=7,2cm και ύψος υ=12,3cm.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου, αν γνωρίζετε ότι το άθροισμα της ακτίνας και του ύψους είναι 35 cm

και ότι το ένα είναι τα $\frac{2}{5}$ του άλλου.

3. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου, της οποίας το ανάπτυγμά της είναι ένα ορθογώνιο διαστάσεων 15 cm και 21,352 cm αντίστοιχα.

4. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με περίμετρο βάσης 125,6 cm και ύψος $υ = 35$ cm.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής και ολικής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει εμβαδόν βάσης 314 cm^2 και ύψος 24 cm. Υπολογίστε επίσης το εμβαδόν του ορθογωνίου που αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα της κυρτής του επιφάνειας.

6. Υπολογίστε την ακτίνα βάσης και το ύψος κυλίνδρου που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 734,76 cm^2 και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 508,68 cm^2.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του ορθογωνίου που προκύπτει από την επιφάνεια κυλίνδρου εμβαδού βάσης $E_β = 1256$ cm^2 και εμβαδού κυρτής επιφανείας $E_κ$ $=3768$ cm^2 αφού πρώτα υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου.

9.6 Όγκος κυλίνδρου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς βρίσκουμε τον όγκο ενός κυλίνδρου;

Απαντήσεις

1. Για να βρούμε τον όγκο V ενός κυλίνδρου αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν $E_β$ της βάσης με το ύψος υ του κυλίνδρου. Δηλαδή:

$$V = E_β \cdot υ$$

Επειδή η βάση είναι κύκλος με ακτίνα ρ ισχύει: $E_β = πρ^2$, άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$V = πρ^2 \cdot υ$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $ρ = 16,5$ cm και ύψος $υ = 35$ cm.

Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon = 3,14 \cdot (16,5)^2 \cdot 35 =$
$= 3,14 \cdot 272,25 \cdot 35 = 29920,275 \text{ cm}^3.$

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κυλίνδρου όταν το μήκος της περιφέρειας της βάσης του είναι 94,2 cm και το ύψος του είναι 18 cm.

Λύση

$$2\pi\rho = 94,2 \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{94,2}{2 \cdot 3,14} = 15 \text{ cm}$$

Άρα $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 18 =$
$= 12,717 \text{ cm}^2.$

3. Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφανείας του είναι 455,30 m² και το μήκος της περιφέρειας της βάσης είναι 31,4 m.

Λύση

Είναι $E_\kappa = 2\pi\rho \cdot \upsilon$ (1)
αλλά το $2\pi \cdot \rho = 31,4$

$$\text{οπότε: } \rho = \frac{31,4}{2 \cdot 3,14} = \frac{31,4}{6,28} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Από (1) } \upsilon = \frac{E_\kappa}{2\pi\rho} = \frac{455,30}{31,4} = 14,5 \text{ cm.}$$

Άρα $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 14,5 =$
$= 3,14 \cdot 25 \cdot 14,5 = 1138,25 \text{ m}^3.$

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου που έχει όγκο 706,5cm³ και ύψος 4m.

Λύση

$$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon \text{ άρα } \rho^2 = \frac{V}{\pi \cdot \upsilon} \quad \text{ή}$$

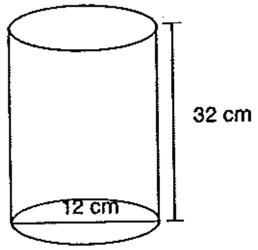
$$\rho^2 = \frac{706,5 \text{ m}^3}{3,14 \cdot 4 \text{ m}} \quad \text{ή} \quad \rho^2 = 56,25 \text{ m}^2 \quad \text{ή}$$

$$\rho = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ m}$$

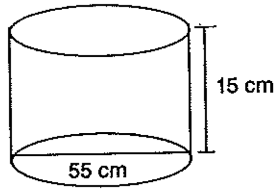
Επομένως $E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta$
$E_\kappa = 2\pi\rho \cdot \upsilon = 2 \cdot 3,14 \cdot 7,5 \cdot 4 =$
$= 188,4 \text{ m}^2$ και
$E_\beta = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 56,25 = 176,625 \text{ m}^2$
άρα $E_{o\lambda} = 188,4 + 2 \cdot 176,625 =$
$= 541,5 \text{ m}^2.$

5. Να υπολογίσετε σε λίτρα την χωρητικότητα των παρακάτω δοχείων.

α)



β)



Λύση

α) Η ακτίνα του πρώτου δοχείου είναι $\rho = 12/2 = 6$ cm, άρα $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon =$
$= 3,14 \cdot 6^2 \cdot 32 = 3617,28 \text{ cm}^3$,
δηλαδή 3617,28 : 1000 = 3,61728 λίτρα.

β) $\rho = 55/2 = 27,5$ επομένως
$V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon = 3,14 \cdot (27,5)^2 \cdot 15 =$
$= 35619,37 \text{ cm}^3$ και σε λίτρα:
35619,37 : 1000 = 35,619 λίτρα.

6. Ένα δοχείο περιέχει 1,5 λίτρα κρασί. Να βρεθεί πόσα ποτήρια σχήματος κυλίνδρου με βάση διαμέτρου 3 cm και ύψος 4 cm μπορούμε να γεμίσουμε;

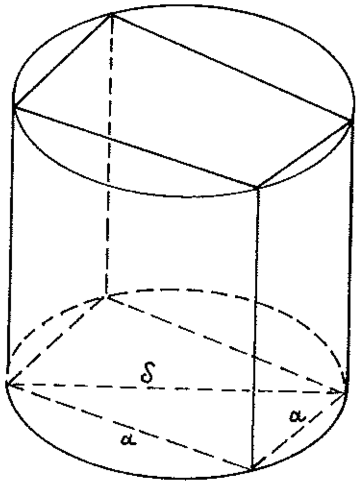
Λύση

Είναι $\rho = 3/2 = 1,5$ cm. Κάθε ποτήρι έχει όγκο $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon =$
$= 3,14 \cdot (1,5)^2 \cdot 4 = 3,14 \cdot 2,25 \cdot 4 =$

$= 28{,}26\ cm^3$.

Έχουμε ότι 1,5 l = 1500 cm^3 και επομένως μπορούμε να γεμίσουμε
1500 : 28,26 = 53 ποτήρια.

7. Να υπολογισθεί ο όγκος που απομένει, αν τοποθετήσουμε μέσα σε κύλινδρο ένα τετράγωνο πρίσμα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύλινδρος έχει ύψος υ = 30 cm και η διάμετρος της βάσης του είναι δ = 18 cm.



Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$V_\kappa = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$, όπου $\rho = 18/2 = 9$ cm.

Άρα $V = 3{,}14 \cdot 9^2 \cdot 30 = 7630{,}2\ cm^3$.

Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου της βάσης του τετραγωνικού πρίσματος είναι α τότε:

$\alpha^2 + \alpha^2 = \delta^2$ ή $2\alpha^2 = \delta^2$ ή

$\alpha^2 = \dfrac{\delta^2}{2}$ ή $\alpha^2 = \dfrac{18^2}{2}$ ή

$\alpha^2 = \dfrac{324}{2}$ ή $\alpha^2 = 162$

Το τετραγωνικό πρίσμα έχει όγκο:

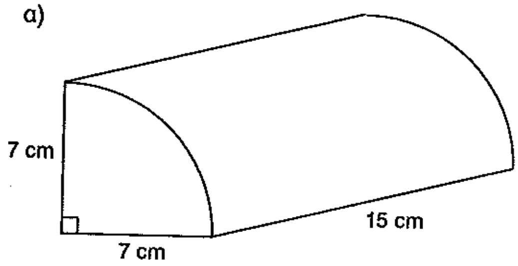
$V_\pi = E_\beta \cdot \upsilon$ ή $V_\pi = \alpha^2 \cdot \upsilon = 162 \cdot 30 =$
$= 4860\ cm^3$.

Άρα ο όγκος που απομένει είναι:

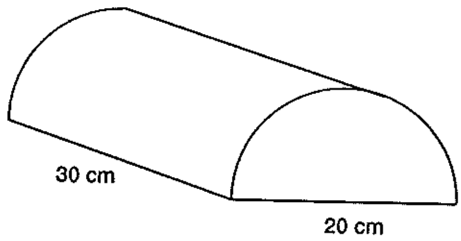
$V = V_\kappa - V_\pi = 7630{,}2 - 4860 = 2770{,}20$ cm^3.

8. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών:

α)



β)



Λύση

α) Το πρώτο στερεό είναι το 1/4 ενός κυλίνδρου ακτίνας ρ = 7 cm και ύψους υ = 15 cm.

Άρα $V_\alpha = \dfrac{1}{4} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 15 =$
$= 576{,}975\ cm^3$.

β) Το δεύτερο στερεό είναι το 1/2 ενός κυλίνδρου διαμέτρου 20 cm δηλαδή ακτίνας ρ = 20/2 = 10 cm και ύψους 30 cm. Άρα:

$V_\beta = \dfrac{1}{2} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 30 =$
$= 4710\ cm^3$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου του οποίου η κυρτή επιφάνεια έχει εμβαδόν 351,68 cm², αν ξέρετε ότι το ύψος του είναι 8 cm.

Λύση

Από τον τύπο $E_\kappa = 2\pi\rho \cdot \upsilon$ έχουμε:

$$\rho = \frac{E_\kappa}{2\pi \cdot \upsilon} = ...$$

Οπότε $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$ .....

2. Ένα βαρέλι σχήματος κυλίνδρου έχει ύψος1 m και χωράει 282,6 λίτρα νερό. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

Λύση

Ο όγκος του είναι $V = 282{,}6 \cdot 1000 = 282.600$ cm³ και το ύψος του είναι $\upsilon = 1$ m $\cdot\ 100 = 100$ cm.

Από τον τύπο $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon$ βρίσκουμε την ακτίνα ρ. Οπότε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

$E_{o\lambda} = 2\pi\rho \cdot \upsilon + 2 \cdot \pi\rho^2 = ...$

3. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο ενός κυλίνδρου που έχει ύψος υ = 32,4 cm και η βάση του έχει μήκος Γ= 5/2 · υ.

Λύση

Το μήκος του κύκλου είναι:

$\Gamma = 5/2 \cdot 32{,}4 = ...$

Από τον τύπο $\Gamma = 2\pi\rho$ έχουμε:

$\rho = \Gamma/2\pi = ...$

Οπότε $E_\kappa = 2\pi\rho \cdot \upsilon = ...$

και $V = \pi\rho^2 \cdot \upsilon = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ = 20,5 cm και ύψος υ = 32,4 cm.

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κυλίνδρου που το μήκος της περιφέρειας της βάσης του είναι 219,8 cm και το ύψος του είναι 50 cm.

3. Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφανείας είναι 800,7 cm² και η περίμετρος της περιφέρειας της βάσης είναι 53,38 cm.

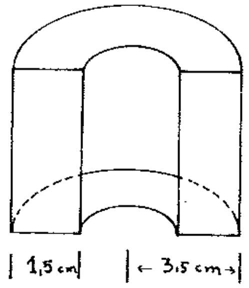
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου που έχει όγκο V = 3532,5 cm³ και ύψος υ = 20 cm.

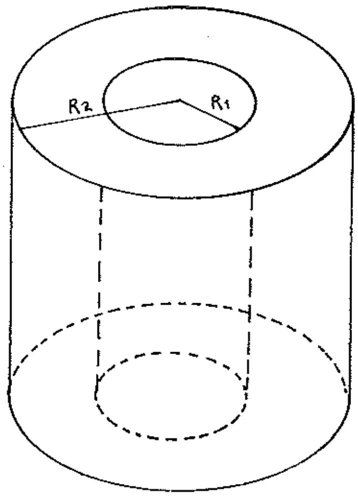
5. Ένα βαρέλι σχήματος κυλίνδρου περιέχει κρασί. Αν έχει διάμετρο 1,5 m και ύψος 2 m, να υπολογίσετε πόσες φιάλες μπορούμε να γεμίσουμε που να έχουν όγκο 0,75 lt η κάθε μία.

6. Κατασκευάζουμε μια κυλινδρική δεξαμενή από μπετόν ύψους 3 m. Αν η εξωτερική διάμετρος είναι 15 m και

η εσωτερική 14,30 m, να υπολογίσετε πόσα κυβικά μέτρα μπετόν χρειάστηκαν και πόσο θα στοιχίσει αν το 1m³ κοστίζει 30.000 δρχ.

7. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών ύψους 17,5 cm.





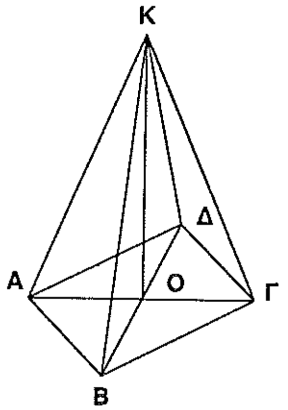
R1 = 5cm R2 = 7cm

9.7 Πυραμίδα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται πυραμίδα και ποια είναι τα στοιχεία της;



Απαντήσεις

1. **Πυραμίδα** λέγεται το στερεό του οποίου η μία έδρα είναι ένα οποιοδήποτε πολύγωνο **(βάση)** και οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή **(παράπλευρες έδρες)**.

Η απόσταση της κοινής κορυφής των παράπλευρων εδρών από τη βάση ονομάζεται **ύψος** της πυραμίδας.

Παρατήρηση:

Η πυραμίδα παίρνει το όνομά της από το πολύγωνο της βάσης. Αν η βάση είναι τρίγωνο λέγεται τριγωνική, αν είναι τετράπλευρο λέγεται τετραπλευρική κ.λπ.

Π.χ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

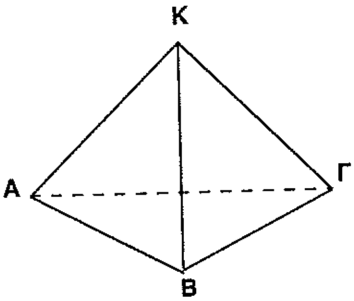
(ΑΒΓΔ): βάση

(ΟΚ): ύψος

(ΚΑΒ), (ΚΒΓ), (ΚΓΔ), (ΚΔΑ): οι παράπλευρες έδρες.

2. Ποια πυραμίδα λέγεται κανονική;

2. Κανονική λέγεται η πυραμίδα της οποίας η βάση είναι κανονικό πολύγωνο (δηλ. ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, κανονικό πεντάγωνο κ.λπ.) και το ίχνος του ύψους της συμπίπτει με το κέντρο της βάσης. Οι παράπλευρες έδρες της είναι ίσα και ισοσκελή τρίγωνα.



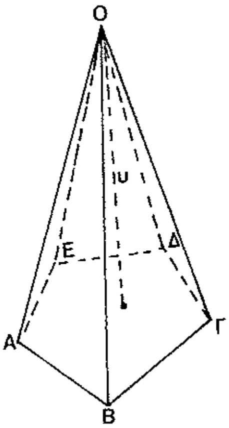
<u>Παρατήρηση:</u>

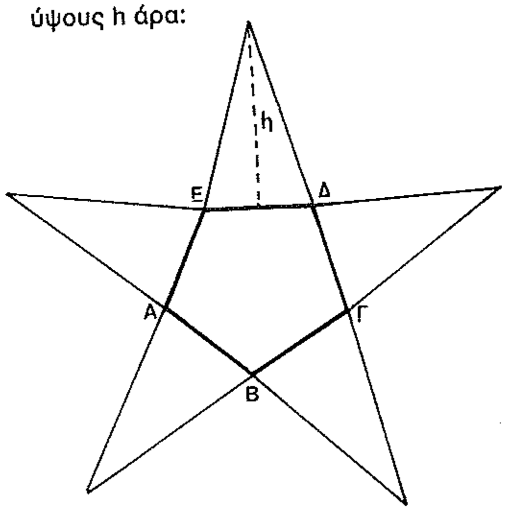
Αν μία τριγωνική πυραμίδα έχει όλες τις ακμές της ίσες τότε ονομάζεται **κανονικό τετράεδρο.**

Π.χ. Στο διπλανό σχήμα η πυραμίδα ΚΑΒΓ είναι κανονικό τετράεδρο γιατί:
ΚΑ = ΚΒ =ΚΓ = ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ.

3. Πώς βρίσκεται το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής πενταγωνικής πυραμίδας;

3. Αν θεωρήσουμε μια κανονική πενταγωνική πυραμίδα με ύψος υ και h το ύψος της παράπλευρης έδρας της τότε η παράπλευρη επιφάνειά της είναι πέντε ίσα ισοσκελή τρίγωνα ύψους h άρα:





$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h + \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Delta \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \Delta E \cdot h + \frac{1}{2} \cdot EA \cdot h =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot h \cdot (AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\text{Περίμετρος βάσης})$$

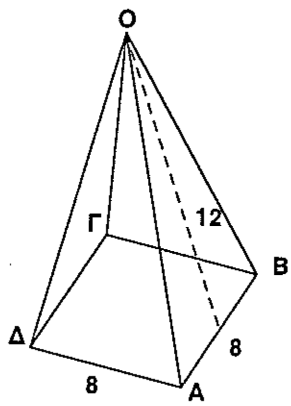
Άρα γενικεύουμε και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας οποιασδήποτε κανονικής πυραμίδας είναι:

$$\mathbf{E_\pi = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\text{Περίμετρος βάσης})}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας μιας τετραγωνικης πύραμιδας της οποίας η βάση έχει πλευρά 8 cm και το ύψος μιας παράπλευρης έδρας είναι 12 cm.

Λύση



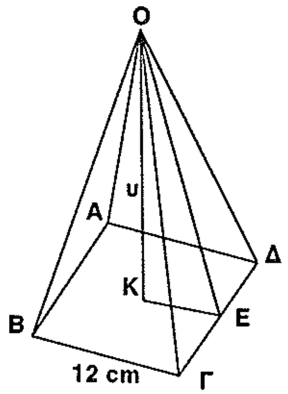
Αν με $E_п$ ονομάσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και με $E_β$ το εμβαδόν της βάσης τότε:

$$E_п = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\text{Περιμ. βάσης}) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot 8 =$$
$$= 192 \text{ cm}^2 \text{ και}$$
$$E_β = 8^2 = 64 \text{ cm}^2.$$

Άρα $E_{ολ} = 192 + 64 = 256$ cm².

2. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 12 cm και ύψος 7 cm. Να βρείτε την ολική της επιφάνεια.

Λύση



Το εμβαδόν της βάσης είναι:
$E_β = 12^2 = 144$ cm².

Για να βρούμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αρκεί να βρούμε το παράπλευρο ύψος ΟΕ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΕ έχουμε:

$OE^2 = OK^2 + KE^2$ ή $OE^2 = 7^2 + 6^2$ ή
$OE^2 = 85$ ή

$OE = \sqrt{85} = 9{,}21$ cm.

Άρα το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$$E_п = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot (\text{Περιμ. βάσης}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}21 \cdot 4 \cdot 12 = 221{,}04 \text{ cm}^2$$

και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι:

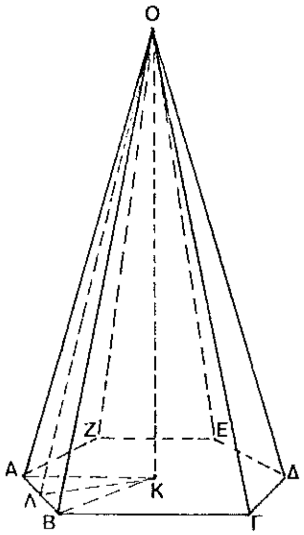
$$E_{ολ} = E_п + E_β = 221{,}04 + 144 =$$
$$= 365{,}26 \text{ cm}^2.$$

3. Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει ύψος υ = 15 cm, παράπλευρη ακμή 18 cm και πλευρά βάσης 14 cm. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.

β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

Λύση



α) Έχουμε ότι ΟΚ = 15 cm, ΟΒ = 18 cm και ΑΒ = 14 cm. Το εμβαδόν μιας παράπλευρης έδρας είναι:

$$E_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot O\Lambda = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot O\Lambda.$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΒ έχουμε:

$$O\Lambda^2 = OB^2 - \Lambda B^2 = 18^2 - 7^2 = 324 - 49 = 275 \text{ άρα:}$$

$$O\Lambda = \sqrt{275} \cong 16{,}58 \text{ cm και}$$

$$E_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 16{,}58 \cong 116 \text{ cm}^2$$

Άρα $E_\pi = 6 \cdot E_{AOB} = 6 \cdot 116 = 696$ cm².

β) Έχουμε $E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta$. Για να βρούμε το E_β αρκεί να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΒ.

$$E_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot K\Lambda = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot K\Lambda$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΚ:

$$K\Lambda^2 = O\Lambda^2 - OK^2 = 275 - 225 \text{ ή}$$

$$K\Lambda^2 = 50 \text{ ή}$$

$$K\Lambda = \sqrt{50} \cong 7{,}07 \text{ cm και}$$

$$E_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7{,}07 \cong 49{,}5 \text{ cm}^2$$

Επομένως:

$E_\beta = 6 \cdot E_{AKB} = 6 \cdot 49{,}5 = 297$ cm² και

$E_{o\lambda} = 696 + 297 = 993$ cm².

B. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Μια κανονική πενταγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 3,4 cm και το ύψος μιας παράπλευρης έδρας είναι h = 52 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

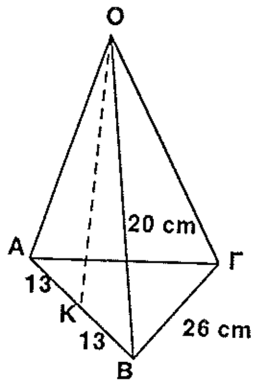
Λύση

$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\text{Περιμ. βάσης})$$

άρα $E_\pi = \ldots..$

2. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής πυραμίδας που έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 26 cm, αν η παράπλευρη ακμή της είναι 20 cm.

Λύση



Βρίσκουμε με το Πυθαγόρειο θεώρημα το ΟΚ άρα

$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot (\text{Περιμ. βάσης}) \ldots.$$

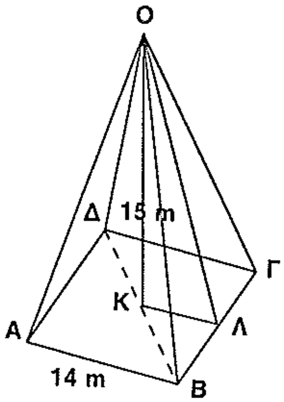
3. Μια κανονική τετραπλευρική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 14 m και ύψος 15 m. Να βρείτε:

α) την παράπλευρη ακμή,

β) το ύψος της μιας παράπλευρης έδρας,

γ) το E_π (εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας).

Λύση



β) Υπολογίζουμε το ΟΛ με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΚΛ όπου ΟΚ = 15 m και ΚΛ = 14/2 = 7 m .....

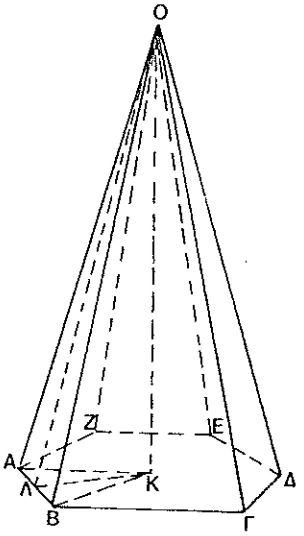
α) Κατόπιν στο τρίγωνο ΟΛΒ με πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε το ΔΒ.

γ) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot O\Lambda \cdot (\text{Περιμ. βάσης}) \ldots.$$

4. Η παράπλευρη ακμή μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας είναι 8,2 cm και η πλευρά της βάσης είναι 3,5 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

Λύση



Στο ΟΛΒ υπολογίζουμε με πυθαγόρειο θεώρημα την ΟΛ.

$O\Lambda^2 = OB^2 - \Lambda B^2$ .....

Έτσι:

$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot O\Lambda \cdot (6 \cdot AB) = \ldots.$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε την περίμετρο της βάσης μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το ύψος της είναι 10 cm και το παράπλευρο ύψος της είναι τα $\frac{29}{20}$ του ύψους της.

2. Η περίμετρος της βάσης μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 128 cm και η παράπλευρη ακμή της είναι 30 cm. Να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας.

3. Να βρείτε την παράπλευρη ακμή μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το απόστημα της βάσης είναι 15 cm και το ύψος της πυραμίδας είναι 20 cm.

4. Να βρείτε το παράπλευρο ύψος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της βάσης είναι 5.184 cm^2 και το ύψος είναι $\frac{5}{24}$ της πλευράς της βάσης.

5. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της βάσης είναι 45 cm^2 και το ύψος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από την πλευρά της βάσης.

6. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι η περίμετρος της βάσης είναι 168 cm και η παράπλευρη ακμή είναι 35 cm.

7. Να βρείτε την παράπλευρη ακμή μιας κανονικής τριγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 1.620 cm^2 και η περίμετρος της βάσης είναι 90 cm.

8. Να υπολογίσετε το ύψος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι 600 cm^2 και το εμβαδόν της βάσης είναι τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας.

9. Να υπολογίσετε το ύψος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 777,60 cm^2 και το εμβαδόν της βάσης είναι 466,56 cm^2.

9.8 Όγκος πυραμίδας

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Από ποιον τύπο υπολογίζεται ο όγκος μιας κανονικής πυραμίδας;

Απαντήσεις

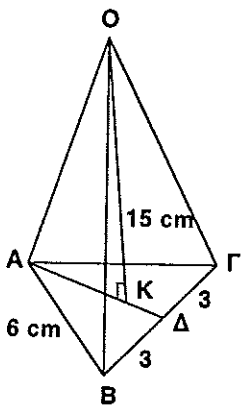
1. Ο όγκος V μιας κανονικής πυραμίδας με εμβαδόν βάσης E_β και ύψος υ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τον όγκο μιας κανονικής τριγωνικής πυραμίδας που έχει ύψος υ = 15 cm και πλευρά βάσης 6 cm.

Λύση



Έχουμε ότι: $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το εμβαδόν της βάσης στο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΔΒ και έχουμε:

$Α\Delta^2 = ΑΒ^2 - Β\Delta^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

$Α\Delta = \sqrt{27} \approx 5,19$ cm.

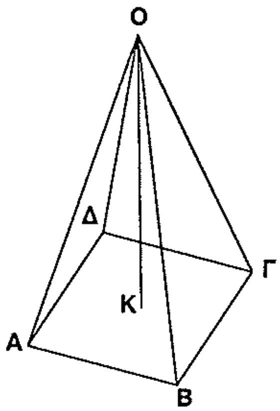
Επομένως

$E_\beta = \frac{1}{2} \cdot Α\Delta \cdot Β\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 5,19 \cdot 6 = 15,57 \text{ cm}^2$.

Άρα: $V = \frac{1}{3} \cdot 15,57 \cdot 15 = 77,85 \text{ cm}^3$.

2. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο της βάσης 128 cm και ύψος 30 cm. Να βρείτε τον όγκο της.

Λύση



Η πλευρά της βάσης είναι: 128/4 = 32 cm. Άρα $E_\beta = 32^2 = 1024$ cm². Επομένως ο όγκος είναι:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 1024 \cdot 30 = 10.240 \text{ cm}^3.$$

3. Ποιο είναι το εμβαδόν της βάσης κανονικής πυραμίδας, της οποίας ο όγκος είναι 7,56 cm³ και το ύψος 2,73 m;

Λύση

Από τον τύπο $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ$ έχουμε

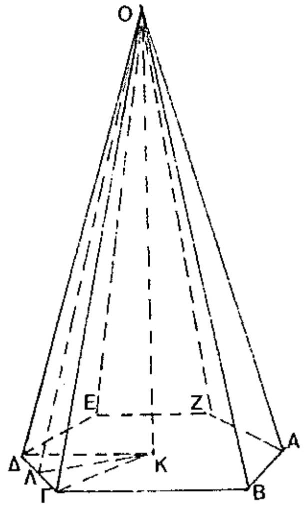
$$E_\beta = \frac{3V}{υ} \quad ή \quad E_\beta = \frac{3 \cdot 7,55}{2,73} \approx 8,29 \text{ m}^2.$$

4. Να υπολογίσετε τον όγκο κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, που έχει πλευρά βάσης 2,5 cm και ύψος 7,5 cm.

Λύση

Είναι $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ$

Αρκεί να βρούμε το E_β το οποίο είναι το άθροισμα των εμβαδών των έξι ισο-



πλεύρων τριγώνων πλευράς 2,5 m από τα οποία αποτελείται το κανονικό εξάγωνο και είναι:

$$KΛ^2 = KΓ^2 - ΛΓ^2 = (2,5)^2 - (1,25)^2 =$$
$$= 6,25 - 1,5625 = 4,6875$$

$$KΛ = \sqrt{4,6875} \approx 2,16 \text{ m}.$$

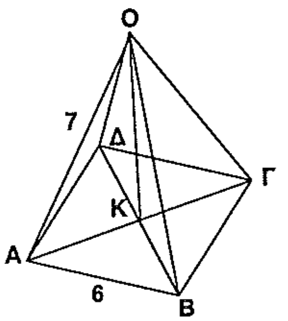
$$E_{EKΓ} = \frac{1}{2} \cdot KΛ \cdot ΓΔ = \frac{1}{2} \cdot 2,16 \cdot 2,5 = 2,7 \text{ cm}^2.$$

και $E_\beta = 6 \cdot 2,7 = 16,2$ cm². Άρα:

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 16,2 \cdot 7,5 = 40,5 \text{ cm}^3.$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

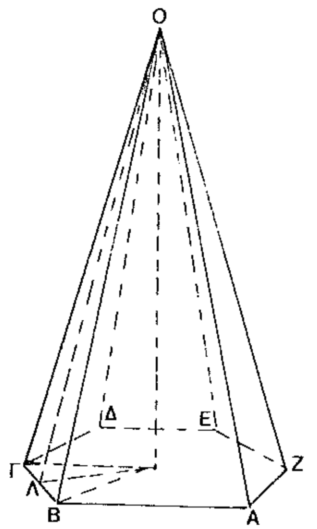
1. Να βρείτε τον όγκο της παρακάτω κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με ΑΒ = 6 cm και ΟΑ = 7 cm.



Λύση

Υπολογίζουμε το εμβαδόν της βάσης, βρίσκουμε την ΑΚ και μετά με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ βρίσκουμε το ύψος ΟΚ ......

2. Να υπολογίσετε τον όγκο της παρακάτω κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας. Δίνονται: ΑΒ = 8,5 cm και ΟΒ = 15 cm.



Λύση

Υπολογίζουμε το εμβαδόν του εξαγώνου που αποτελείται από έξι ισόπλευρα τρίγωνα πλευρας ΑΒ = 8,5 cm.
Με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΒ βρίσκουμε το ύψος ΟΚ της πυραμίδας, οπότε:

$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon$ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 441 cm². Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της.

2. Υπολογίστε τον όγκο μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, αν γνωρίζετε ότι η διαγώνιος της βάσης της είναι 30 cm και το ύψος της 24 cm.

3. Το άθροισμα των ακμών μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 660 cm και η παράπλευρη ακμή της είναι τα 5/6 της ακμής της βάσης. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας καθώς και τον όγκο της.

4. Να υπολογίσετε τον όγκο μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας αν η περίμετρος της βάσης της είναι 57,6 cm και το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας είναι 648 cm².

5. Να υπολογίσετε το ύψος μιας κανονικής πυραμίδας με βάση ρόμβο, αν γνωρίζετε ότι έχει όγκο 4032 cm³ και η διαφορά των διαγωνίων της βάσης είναι 34 cm και η μία είναι τα 24/7 της άλλης.

6. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τριγωνικής πυραμίδας που έχει όγκο 207 cm³ και το ύψος της βάσης είναι 12 cm.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, που έχει όγκο 34,992 cm³ και το εμβαδόν της βάσης της είναι 29,16 cm².

9.9 Κώνος

Θεωρία

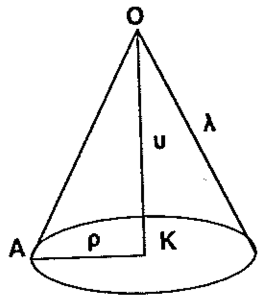
Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται κώνος και ποια είναι τα στοιχεία του;

Απαντήσεις

1. Κώνος λέγεται το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.

Κατά την περιστροφή η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου δημιουργεί μια επιφάνεια που λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου, ενώ η άλλη κάθετη πλευρά δημιουργεί έναν κυκλικό δίσκο που λέγεται **βάση** του κώνου.
Η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που παράγει την κυρτή επιφάνεια λέγεται **γενέτειρα** του κώνου. Ο κυκλικός δίσκος λέγεται **βάση** του κώνου, ενώ η κάθετη πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται **ύψος** του κώνου. Η ακτίνα ρ του κυκλικού δίσκου λέγεται **ακτίνα** του κώνου.
Τα στοιχεία του φαίνονται στο σχήμα.



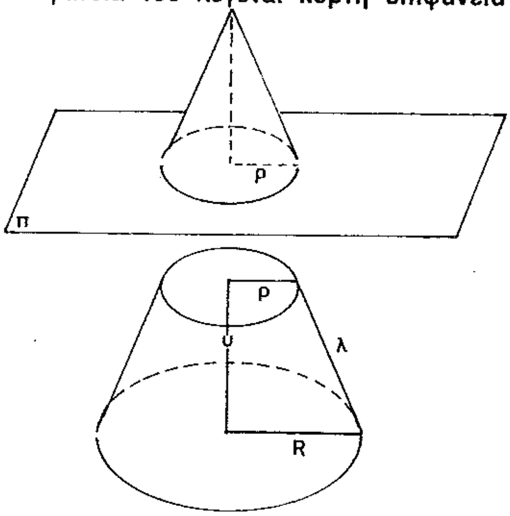
2. Με τι ισούται το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου;

2. Το εμβαδόν $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα που έχει ακτίνα ίση με τη γενέτειρα λ και μήκος τόξου 2πρ, δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου της βάσης του κώνου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $E_κ = \frac{1}{2} \cdot (2πρ) \cdot λ$ ή

$$\boxed{E_κ = πρλ}$$

3. Τι λέγεται κόλουρος κώνος και ποια είναι τα στοιχεία του;

3. Κόλουρος κώνος λέγεται το στερεό που προκύπτει, αν από έναν κώνο αποκόψουμε το αιχμηρό τμήμα του με ένα επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του. Ο κόλουρος κώνος έχει ως βάσεις δύο άνισους κυκλικούς δίσκους. Η απόσταση υ των βάσεων λέγεται **ύψος** του κόλουρου κώνου. Η παράπλευρη επιφάνεια του λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κόλουρου κώνου.



4. Πώς υπολογίζεται το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου;

4. Αν R, ρ οι ακτίνες των βάσεων και λ η γενέτειρα ενός κόλουρου κώνου, τότε το εμβαδόν $E_κ$ της κυρτής επιφάνειας του δίνεται από τον τύπο:

$$E_κ = π \cdot (R + ρ) \cdot λ$$

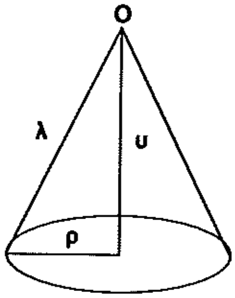
Το εμβαδόν $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας του είναι: $E_{ολ} = E_1 + E_2 + E_κ$, όπου E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των βάσεων. Έτσι έχουμε:

$$E_{ολ} = πρ^2 + πR^2 + π \cdot (R + ρ) \cdot λ$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κώνου, που έχει γενέτειρα λ = 15 cm και ακτίνα βάσης ρ = 3 cm.

Λύση

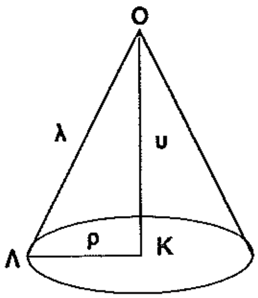


Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου δίνεται από τον τύπο: $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$. Άρα αντικαθιστούμε και έχουμε:

$E_\kappa = 3,14 \cdot 3 \cdot 15 = 141,3$ cm².

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου που έχει ακτίνα βάσης ρ = 5 cm και ύψος υ = 7 cm.

Λύση



Στο τρίγωνο ΟΚΛ εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2$ ή $\lambda^2 = 7^2 + 5^2$ ή

$\lambda^2 = 49 + 25$ ή $\lambda^2 = 74$ ή

$\lambda = \sqrt{74} = 8,6$ cm

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι:

$E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda = 3,14 \cdot 5 \cdot 8,6 = 135,02$ cm².

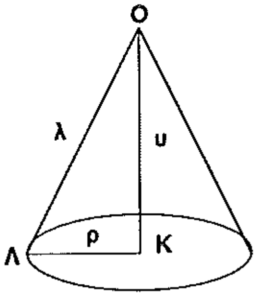
Το εμβαδόν της βάσης είναι:

$E_\beta = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 5^2 = 78,5$ cm².

Άρα το εμβαδόν ολικής επιφάνειας είναι: $E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta = 135,02 + 78,5 =$
$= 213,52$ cm².

3. Να υπολογίσετε το ύψος ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδό της βάσης του είναι 4069,44 cm² και η γενέτειρά του 85 cm.

Λύση



Υπολογίζουμε πρώτα την ακτίνα του κώνου από τον τύπο: $E_\beta = \pi\rho^2$, άρα

$4069,44 = 3,14 \cdot \rho^2$ ή

$$\rho^2 = \frac{4069,44}{3,14} = 1296 \text{ άρα}$$

$\rho = \sqrt{1296} = 36$ cm.

Με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ έχουμε:

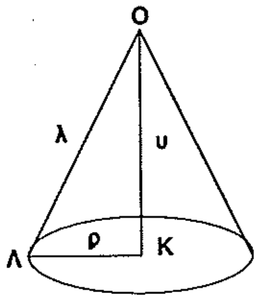
$\upsilon^2 = \lambda^2 - \rho^2$ ή $\upsilon^2 = 85^2 - 36^2$ ή

$\upsilon^2 = 7225 - 1296 = 5929$ ή

$\upsilon = \sqrt{5929} = 77$ cm.

4. Υπολογίστε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κώνου, που έχει εμβαδόν βάσης 113,04 cm² και ύψος 8 cm.

Λύση



Βρίσκουμε πρώτα την ακτίνα της βάσης από τον τύπο:

$E_\beta = \pi\rho^2$ ή $113,04 = 3,14 \cdot \rho^2$ ή

$$\rho^2 = \frac{113{,}04}{3{,}14} = 36 \text{ ή } \rho = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}.$$

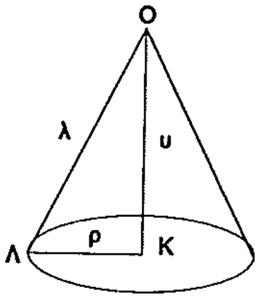
Άρα η γενέτειρά του είναι:

$$\lambda = \sqrt{\upsilon^2 + \rho^2} \text{ ή } \lambda = \sqrt{8^2 + 6^2} =$$
$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}.$$

Επομένως το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι:
$E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 10 = 188{,}4 \text{cm}^2$.

5. Να υπολογίσετε τη γενέτειρα και το ύψος ενός κώνου που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 106,76 cm² και ακτίνα βάσης 4 cm.

Λύση



Έχουμε ότι $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$, άρα

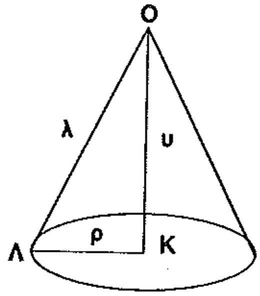
$$\lambda = \frac{E_\kappa}{\pi \cdot \rho} = \frac{106{,}76}{3{,}14 \cdot 4} = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Επομένως το ύψος του κώνου είναι:
$\upsilon^2 = \lambda^2 - \rho^2$ ή

$$\upsilon = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{(8{,}5)^2 - 4^2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

6. Να υπολογίσετε τη γενέτειρα και το ύψος ενός κώνου, που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 175,84 cm² και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ίσο με τα 25/32 της ολικής επιφάνειας.

Λύση



Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι:

$$E_\kappa = \frac{25}{32} \cdot E_{o\lambda} = \frac{25}{32} \cdot 175{,}84 = 137{,}375 \text{ cm}^2.$$

Δηλαδή το $E_\beta = E_{o\lambda} - E_\kappa =$
$= 175{,}84 - 137{,}375 = 38{,}465 \text{ cm}^2$.
Άρα η ακτίνα της βάσης βρίσκεται ως εξής:
$E_\beta = \pi\rho^2$ ή $38{,}465 = 3{,}14 \cdot \rho^2$ ή

$$\rho^2 = \frac{38{,}465}{3{,}14} = 12{,}25 \text{ ή}$$
$$\rho = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5 \text{ cm}.$$

Επίσης βρίσκουμε τη γενέτειρα από τον τύπο: $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$ ή

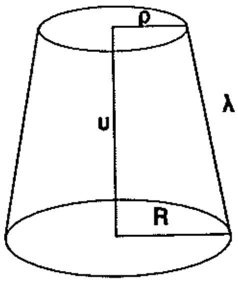
$$\lambda = \frac{E_\kappa}{\pi \cdot \rho} = \frac{137{,}375}{3{,}14 \cdot 3{,}5} = 12{,}5 \text{ cm}.$$

Άρα το ύψος είναι: $\upsilon^2 = \lambda^2 - \rho^2$ ή
$\upsilon^2 = (12{,}5)^2 - (3{,}5)^2$ ή $\upsilon^2 = 144$ ή

$$\upsilon = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας καθώς και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου, που έχει γενέτειρα λ = 21 cm και ακτίνες βάσεων R = 20 cm και ρ = 15 cm.

Λύση



Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κόλουρου κώνου υπολογίζεται από τον τύπο: $E_\kappa = \pi \cdot (R + \rho) \cdot \lambda$ ή

$E_\kappa = 3{,}14 \cdot (20 + 16) \cdot 21 =$

$= 3{,}14 \cdot 36 \cdot 21 = 2373{,}84 \text{ cm}^2$.

Το εμβαδόν των βάσεων είναι:

$E_1 = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256 \text{ cm}^2$ και

$E_2 = \pi \rho^2 = 3{,}14 \cdot 15^2 = 706{,}5 \text{ cm}^2$.

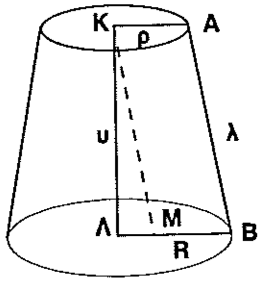
Άρα το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι: $E_{o\lambda} = E_1 + E_2 + E_\kappa =$

$= 1256 + 706{,}5 + 2373{,}84 =$

$= 4336{,}34 \text{ cm}^2$.

8. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου με $\upsilon = 12$ cm και ακτίνες βάσεων $\rho = 6$ cm και $R = 11$ cm αντίστοιχα.

Λύση



Αρκεί να υπολογίσουμε τη γενέτειρα λ. Φέρνουμε την ΚΜ παράλληλη στην ΑΒ (ΚΜ//ΑΒ). Έτσι έχουμε: ΚΜ = λ και ΚΑ = ΜΒ = ρ. Άρα: ΛΜ = ΛΒ - ΜΒ = $= R - \rho = 11 - 6 = 5$ cm.

Με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε:

$KM^2 = K\Lambda^2 + \Lambda M^2$ ή $\lambda^2 = 12^2 + 5^2$ ή

$\lambda^2 = 169$ ή $\lambda = 13$ cm.

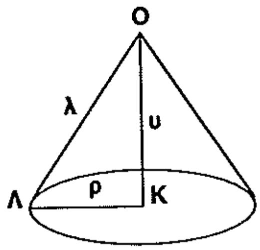
Άρα: $E_\kappa = \pi \cdot (R + \rho) \cdot \lambda =$

$= 3{,}14 \cdot (11 + 6) \cdot 13 = 693{,}94 \text{ cm}^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το ύψος ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι η γενέτειρά του είναι 20,5 cm και η διάμετρος της βάσης είναι τα 8/5 της γενέτειρας.

Λύση

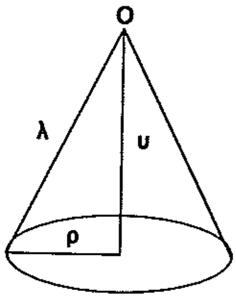


Έχουμε: λ = 20,5 cm. Άρα η διάμετρος της βάσης είναι $\delta = 8/5 \cdot \lambda =$ ..... και η ακτίνα $\rho = \delta/2 =$ ....

Άρα με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ υπολογίζουμε το ύψος .....

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της βάσης είναι $530{,}66 \text{ cm}^2$ και η γενέτειρα είναι $\lambda = 14{,}5$ cm.

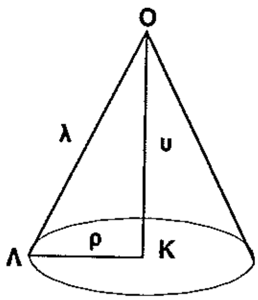
Λύση



Γνωρίζουμε ότι $E_κ = πρ \cdot λ$, άρα αρκεί να βρούμε την ακτίνα ρ από τον τύπο: $E_β = πρ^2$ .....

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου, αν ξέρετε ότι η περίμετρος της βάσης είναι 188,4 cm και το ύψος 50 cm.

Λύση

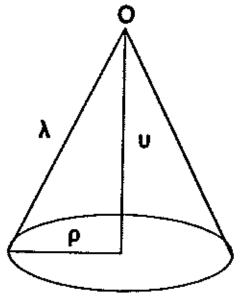


Από τον τύπο της περιμέτρου της βάσης έχουμε: $Γ = 2πρ$ ή $ρ = \frac{Γ}{2π} = ...$

Οπότε υπολογίζουμε το εμβαδόν της βάσης $E_β = πρ^2 =$ ..... και με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ βρίσκουμε τη $λ =$ .....
Κατόπιν βρίσκουμε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας $E_κ = πρ \cdot λ =$ .....

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και το ύψος ενός κώνου, που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 72,848 cm² και γενέτειρα λ = 5,8 cm.

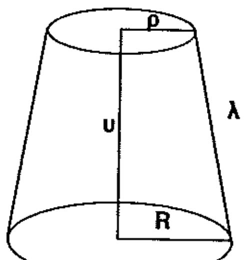
Λύση



Από τον τύπο $E_κ = πρ \cdot λ$ βρίσκουμε την ακτίνα ρ, οπότε βρίσκουμε το $E_β$ και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας είναι: $E_{ολ} = E_β + E_κ =$ .....

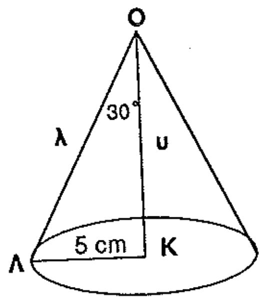
5. Να υπολογίσετε την ακτίνα της μεγαλύτερης βάσης ενός κόλουρου κώνου, του οποίου το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 4710 cm² και η γενέτειρα 25 cm, η δε ακτίνα της μικρότερης βάσης είναι 20 cm.

Λύση



Έχουμε: $E_κ = π \cdot (R + ρ) \cdot λ$.
Αντικαθιστούμε και λύνουμε ως προς R .....

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παρακάτω κώνου.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΛ έχουμε:

$$ημ30° = \frac{ΚΛ}{ΟΛ} \text{ ή } ΟΛ = \frac{ΚΛ}{ημ30°} \text{ ή } λ = \frac{5}{\frac{1}{2}} =$$

$= 10$ cm.

Οπότε $E_κ = ...$ και $E_β = ...$

Άρα $E_{ολ} = E_κ + E_β = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τη γενέτειρα ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι έχει ύψος 15,6 cm και διάμετρο βάσης 41,6 cm.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου, που έχει ακτίνα βάσης $ρ = 7$ cm και ύψος $υ = 15$ cm.

3. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι έχει ύψος $υ = 18$ cm και γενέτειρα $λ = 22,5$ cm.

4. Να υπολογίσετε το ύψος ενός κώνου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν της βάσης του είναι 3846,5 cm^2 και η γενέτειρά του είναι 75 cm.

5. Να υπολογίσετε τη γενέτειρα και το ύψος ενός κώνου που έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 376,8 cm^2 και εμβαδόν βάσης 200,96 cm^2.

6. Να υπολογίσετε τη γενέτειρα και το ύψος ενός κώνου, που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 769,30 cm^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ίσο με τα $\frac{29}{20}$ του εμβαδού της βάσης.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου, που έχει ύψος 15 cm και ακτίνες βάσης $R = 20$ cm και $ρ = 13$ cm.

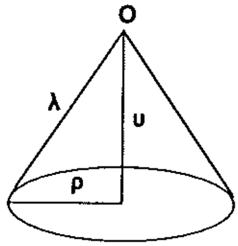
8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κόλουρου κώνου που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 2512 cm^2 και η ακτίνα της μεγάλης βάσης είναι 23 cm και η γενέτειρά του είναι 20 cm.

9.10 Όγκος κώνου

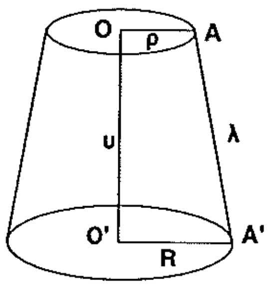
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς βρίσκεται ο όγκος V ενός κώνου;



2. Πώς βρίσκεται ο όγκος V ενός κόλουρου κώνου;



Απαντήσεις

1. Ο όγκος V ενός κώνου υπολογίζεται με τον παρακάτω τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot υ$$

όπου ρ η ακτίνα του κώνου και υ το ύψος του.

2. Ο όγκος V ενός κόλουρου κώνου βρίσκεται με τον παρακάτω τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + R\rho + \rho^2) \cdot υ$$

όπου R, ρ οι ακτίνες των βάσεων του κόλουρου κώνου και υ το ύψος του.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, που έχει ακτίνα βάσης ρ = 17 cm και ύψος υ = 29 cm.

Λύση

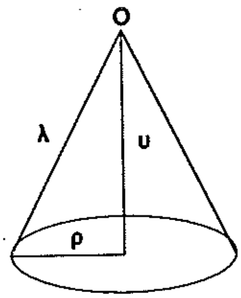
Ο όγκος κώνου υπολογίζεται με τον τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 17^2 \cdot 29 =$$

$= 8772{,}11\ cm^3$.

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου η ακτίνα της βάσης είναι ρ = 3 cm και η γενέτειρα είναι λ = 5 cm.

Λύση



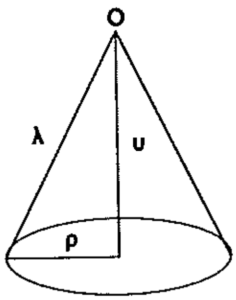
Με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε το ύψος του κώνου:
$υ^2 = λ^2 - ρ^2$ ή $υ^2 = 5^2 - 3^2$ ή
$υ^2 = 16$ ή $υ = 4$ cm.

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4 =$

$= 37{,}68$ cm³.

3. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το ύψος είναι υ = 18,5 cm και η γενέτειρα είναι λ = 23,5 cm.

Λύση



Βρίσκουμε την ακτίνα ρ με το πυθαγόρειο θεώρημα:
$ρ^2 = λ^2 - υ^2$ ή $ρ^2 = (23{,}5)^2 - (18{,}5)^2$
ή $ρ^2 = 210$ ή

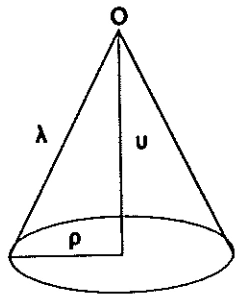
$ρ = \sqrt{210} \approx 14{,}49$ cm.

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 210 \cdot 18{,}5 =$

$= 4066{,}3$ cm³.

4. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου η γενέτειρα είναι λ = 16,5 cm και το εμβαδόν της βάσης του είναι $E_β = 415{,}265$ cm².

Λύση



Υπολογίζουμε πρώτα την ακτίνα της βάσης του από τον τύπο: $E_β = πρ^2$ ή

$ρ^2 = \frac{E_β}{π}$ ή $ρ^2 = \frac{415{,}265}{3{,}14}$ ή

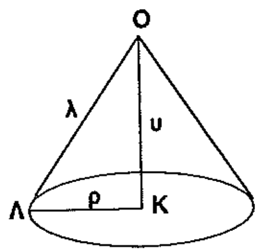
$ρ^2 = 132{,}25$ ή $ρ = \sqrt{132{,}25} = 11{,}5$ cm.

Κατόπιν με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε το ύψος του, δηλαδή:
$υ^2 = λ^2 - ρ^2$ ή $υ^2 = (16{,}5)^2 - (11{,}5)^2$
ή $υ^2 = 140$ ή $υ = 11{,}83$ cm.
Άρα ο όγκος του κώνου είναι:

$V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 415{,}265 \cdot 11{,}83 =$
$= 1637{,}52$ cm³.

5. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, ο οποίος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_κ = 333{,}625$ cm² και ακτίνα βάσης ρ = 8,5 cm.

Λύση



Υπολογίζουμε τη γενέτειρα με τον τύπο: $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$ ή

$$\lambda = \frac{E_\kappa}{\pi \cdot \rho} \quad ή \quad \lambda^2 = \frac{333{,}625}{3{,}14 \cdot 8{,}5} = 12{,}5 \text{ cm}$$

και με το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε το ύψος, δηλαδή:

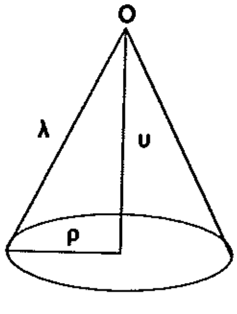
$$\upsilon^2 = \lambda^2 - \rho^2 = (12{,}5)^2 - (8{,}5)^2 = 84 \quad ή$$

$$\upsilon = \sqrt{84} \approx 9{,}16 \text{ cm.}$$

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (8{,}5)^2 \cdot 9{,}16 = $
$= 692{,}69 \text{ cm}^3$.

6. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{o\lambda} = 2543{,}40$ cm² και εμβαδόν κυρτής επιφανείας $E_\kappa = 1836{,}90$ cm².

Λύση



Βρίσκουμε το $E_\beta = E_{o\lambda} - E_\kappa =$
$= 2543{,}40 - 1836{,}90 = 706{,}5$ cm², οπότε υπολογίζουμε την ακτίνα της βάσης με τον τύπο: $E_\beta = \pi\rho^2$ ή

$$\rho^2 = \frac{E_\beta}{\pi} \quad ή \quad \rho^2 = \frac{706{,}5}{3{,}14} = 225 \quad ή$$

$$\rho = \sqrt{225} = 15 \text{ cm.}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τη γενέτειρα λ με τον τύπο: $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$ ή

$$\lambda = \frac{E_\kappa}{\pi \cdot \rho} \quad ή \quad \lambda = \frac{1836{,}90}{3{,}14 \cdot 15} = 39 \text{ cm.}$$

Οπότε με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε το ύψος του κώνου:

$$\upsilon^2 = \lambda^2 - \rho^2 \quad ή \quad \upsilon^2 = 39^2 - 15^2 \quad ή$$
$$\upsilon^2 = 1296 \quad ή$$

$$\upsilon = \sqrt{1296} = 36 \text{ cm.}$$

Άρα ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 36 =$$
$$= 8478 \text{ cm}^3.$$

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου, ο οποίος έχει όγκο 27,46872 cm³ και ύψος υ = 3,6 cm.

Λύση

Από τον τύπο $V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot \upsilon$ έχουμε:

$$\rho^2 = \frac{3V}{\pi \cdot \upsilon} \quad ή \quad \rho^2 = \frac{3 \cdot 27{,}46872}{3{,}14 \cdot 3{,}6} = 7{,}29$$

$$ή \quad \rho = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7 \text{ cm.}$$

Βρίσκουμε τη γενέτειρα του κώνου:

$$\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2 = 3{,}6^2 + 2{,}7^2 = 20{,}25 \quad ή$$

$$\lambda = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5 \text{ cm.}$$

Οπότε: $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda = 3{,}14 \cdot 2{,}7 \cdot 4{,}5 =$
$= 38{,}151$ cm² και
$E_\beta = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 2{,}7^2 = 22{,}8906$ cm².
Άρα: $E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta =$
$= 38{,}151 + 22{,}8906 = 61{,}0416$ cm².

8. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κόλουρου κώνου, του οποίου το ύψος είναι υ = 20 cm και R = 27 cm, ρ = 18 cm.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος V του κόλουρου κώνου υπολογίζεται με τον τύπο:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + R\rho + \rho^2) \cdot u$

στον οποίο αντικαθστούμε και έχουμε

$V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (27^2 + 27 \cdot 18 + 18^2) \cdot 20 =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (729 + 486 + 324) \cdot 20 =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1539 \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot 96649,2 =$

$= 32216,4\ cm^3$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι E_κ = 164,065 m² και το εμβαδόν της βάσης του E_β = 94,985 m².

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα την ακτίνα της βάσης με τον τύπο: $E_\beta = \pi\rho^2$ ή $\rho = ...$
Κατόπιν τη γενέτειρα με τον τύπο:
$E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$ ή $\lambda = ...$ και μετά με το πυθαγόρειο θεώρημα το ύψος u.
Οπότε: V = ...

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας E_κ = 467,075 cm² και το μήκος της περιφέρειας της βάσης είναι Γ = 53,38 cm.

Λύση

Ισχύει: $\Gamma = 2\pi\rho$ ή $\rho = ...$
Επίσης $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda$ ή $\lambda = ...$
Με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε το u = ... οπότε V = ...

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου, του οποίου ο όγκος είναι V = 3140 cm³ και το ύψος είναι u = 30 cm.

Λύση

Από τον τύπο $V = \frac{1}{3} \cdot \pi\rho^2 \cdot u$ υπολογίζουμε

το ρ = ... οπότε $E_\beta = \pi\rho^2 = ...$
Επίσης με το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε τη γενέτειρα λ = ...
Επομένως $E_\kappa = \pi\rho \cdot \lambda = ...$
Άρα $E_{o\lambda} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, που έχει ύψος u = 22,5 cm και ακτίνα βάσης ρ = 12 cm.

2. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου, που έχει ακτίνα βάσης ρ = 8,2 cm και γενέτειρα λ = 16 m.

3. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου, που έχει ύψος u = 50 m και γενέτειρα λ = 70 cm.

4. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, που έχει εμβαδόν βάσης E_β = 2826 cm² και γενέτειρα λ = 40 cm.

5. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι $E_\kappa=3454$ cm^2 και η ακτίνα της βάσης $\rho=27,5$ cm.

6. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι $E_\kappa=879,2$ cm^2 και το εμβαδόν της βάσης του $E_\beta=615,44$ cm^2.

7. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι E_κ = 193,895 cm^2 και το μήκος της περιφέρειας της βάσης είναι $\Gamma=40,82$ cm.

8. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου, του οποίου το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι $E_{o\lambda}$ = 7536 cm^2 και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας είναι E_κ = 4710 cm^2.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου, του οποίου ο όγκος είναι V = 37680 cm^3 και το εμβαδόν βάσης είναι E_β = 2826 cm^2.

10. Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κόλουρου κώνου, του οποίου το ύψος είναι υ = 17 cm και οι ακτίνες των βάσεων είναι αντίστοιχα R = 23 cm και ρ = 12 cm.

9.11 Σφαίρα

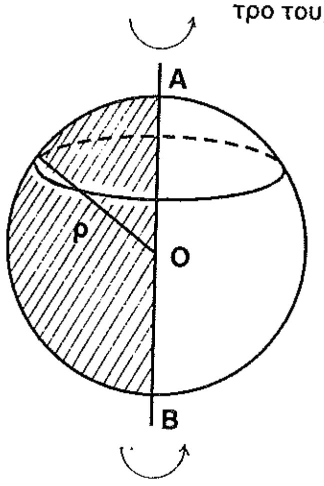
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται σφαίρα;

Απαντήσεις

1. **Σφαίρα** λέγεται το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή ενός ημικυκλικού δίσκου γύρω από τη διάμετρο του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



2. Πώς βρίσκεται το εμβαδόν επιφάνειας της σφαίρας και πώς ο όγκος της;

2. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με ακτίνα ρ βρίσκεται με τον τύπο:

$$E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$$

Δηλαδή ισούται με το τετραπλάσιο του εμβαδού ενός κύκλου, που έχει ακτίνα την ακτίνα ρ της σφαίρας και ο όγκος της υπολογίζεται με τον τύπο:

$$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας καθώς και τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας ρ = 17,5 cm.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2 =$
$= 4 \cdot 3,14 \cdot (17,5)^2 = 3846,5$ cm² και

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 17,5^3 =$$
$$= 22437,917 \text{ cm}^3.$$

2. Να βρείτε την ακτίνα μιας σφαίρας η οποία έχει εμβαδόν 71304 cm².

Λύση

Από τον τύπο $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$ έχουμε:

$$\rho^2 = \frac{E_{\sigma\varphi}}{4\pi} \text{ ή } \rho^2 = \frac{11304}{4 \cdot 3,14} \text{ ή } \rho^2 = 900$$

ή $\rho = \sqrt{900} = 30$ cm.

3. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι 803,84 cm². Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση

Έχουμε ότι $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$ ή
$803,84 = 4 \cdot 3,14 \cdot \rho^2$ ή
$803,84 = 12,56 \cdot \rho^2$ ή

$$\rho^2 = \frac{803,84}{12,56} = 64 \text{ ή } \rho = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}.$$

Οπότε ο όγκος της σφαίρας είναι:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 8^3 = 2143,57 \text{ cm}^3.$$

4. Μια μπάλα δερμάτινη έχει διάμετρο 18 cm. Να υπολογίσετε πόσο δέρμα χρειάστηκε για την κατασκευή της και τον όγκο του αέρα που περιέχει σε λίτρα.

Λύση

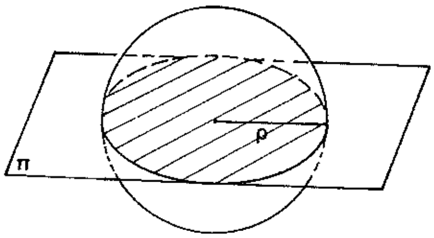
Η μπάλα έχει ακτίνα ρ = 18/2 = 9 cm.
Άρα η επιφάνεια της μπάλας είναι:
$E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2 = 4 \cdot 3,14 \ 9^2 = 1017,36$ cm².
Χρειάστηκαν λοιπόν 1017,36 cm² δέρμα.
Ο δε όγκος της είναι:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 9^3 = 3052,08 \text{ cm}^3.$$

Άρα ο όγκος του αέρα σε λίτρα είναι:
3052,08 : 1000 = 3,052 λίτρα.

5. Η τομή μιας σφαίρας και ενός επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας είναι ένας κυκλικός δίσκος εμβαδού 9,42 cm². Να βρεθεί η επιφάνεια της σφαίρας καθώς και ο όγκος της.

Λύση



Η ακτίνα του κυκλικού αυτού δίσκου είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας $E_{κδ} = πρ^2$ ή $9{,}42 = 3{,}14 \cdot ρ^2$ ή

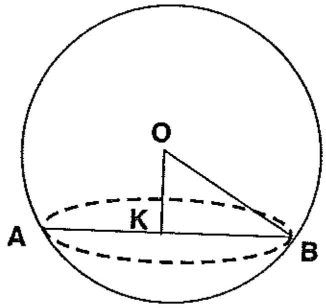
$$ρ^2 = \frac{9{,}42}{3{,}14} = 3 \text{ ή } ρ = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Άρα $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 9{,}42 = 37{,}68$ cm²
και ο όγκος της είναι:

$$V = \frac{4}{3} \cdot πρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (\sqrt{3})^3 = 21{,}75 \text{ cm}^3.$$

6. Η τομή μιας σφαίρας από ένα επίπεδο, που δε διέρχεται από το κέντρο της είναι ένας κύκλος διαμέτρου 8 cm και απέχει από το κέντρο της 3 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδον της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

Λύση



Έχουμε ΟΚ = 3 cm και ΚΒ = 8/2 =4cm. Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ βρίσκουμε:
$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 7^2 + 4^2 = 25$

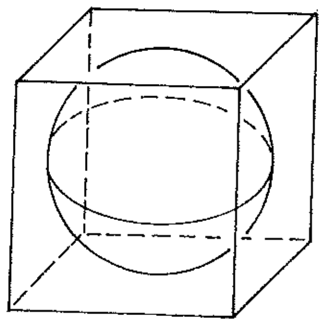
δηλαδή: $OB = \sqrt{25} = 5$ cm.

Άρα η ακτίνα της σφαίρας είναι ρ = 5 cm και $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 =$ 314 cm², ο δε όγκος της είναι:

$$V = \frac{4}{3} \cdot πρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^3 = 523{,}33 \text{ cm}^3.$$

7. Μια σφαίρα είναι τοποθετημένη σε ένα κιβώτιο σχήματος κύβου ώστε να τη χωράει ακριβώς. Αν το κιβώτιο είναι πλευράς α = 8 cm, να βρεθεί ο όγκος του κιβωτίου που μένει άδειος.

Λύση



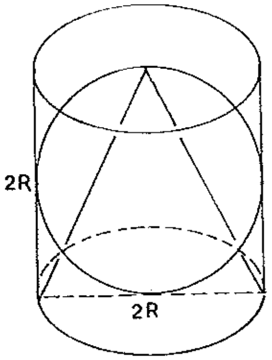
Ο όγκος του κιβωτίου είναι:
$V_\kappa = \alpha^3 = 8^3 = 512 \text{ cm}^3$.
Η ακτίνα της σφαίρας είναι:
$\rho = \alpha/2 = 8/2 = 4 \text{ cm}$.
Άρα ο όγκος της σφαίρας είναι:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^3 = 267{,}95 \text{ cm}^3.$$

Άρα ο όγκος του κιβωτίου που μένει άδειος είναι:
$V = V_\kappa - V_{\sigma\varphi} = 512 - 267{,}95 = 244{,}05 \text{ cm}^3$.

9. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου $E_{\pi\kappa\upsilon\lambda.}$ και της σφαίρας $E_{\sigma\varphi}$ και να συγκριθούν, καθώς και οι όγκοι του κυλίνδρου $V_{\kappa\upsilon\lambda}$, της σφαίρας $V_{\sigma\varphi}$ και του κώνου $V_{\kappa\omega\nu}$ και να δειχθεί ότι:
$V_{\sigma\varphi} + V_{\kappa\omega\nu} = V_{\kappa\upsilon\lambda}$.

Λύση



α) Έχουμε:
$E_{\pi\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ και
$E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2$. Άρα $E_{\pi\kappa\upsilon\lambda.} = E_{\sigma\varphi}$.
β) $V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$,

$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \pi\rho^3$ και

$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ και $V_{\kappa\omega\nu} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot 2R = \frac{2\pi R^3}{3}$

Άρα $V_{\sigma\varphi} + V_{\kappa\omega\nu} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 + \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 =$

$= \frac{6}{3} \pi R^3 = 2\pi R^3 = V_{\kappa\upsilon\lambda}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την ακτίνα και τον όγκο μιας σφαίρας που έχει εμβαδόν επιφανείας $E_{\sigma\varphi} = 615{,}44 \text{ cm}^2$.

Λύση

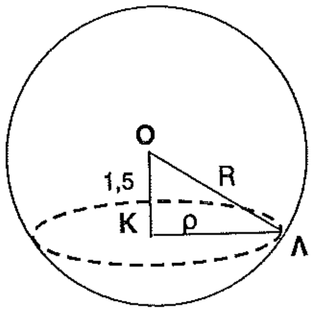
Γνωρίζουμε ότι: $E_{\sigma\varphi} = 4\pi\rho^2$ ή

$\rho^2 = \frac{E_{\sigma\varphi}}{4\pi} = ...$ οπότε $\rho = ...$

και $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho^3 = ...$

2. Να βρείτε τον όγκο μιας σφαίρας, η οποία τέμνεται από ένα επίπεδο κατά έναν κύκλο εμβαδού $12{,}56 \text{ cm}^2$ και που απέχει από το κέντρο της 1,5 cm.

Λύση



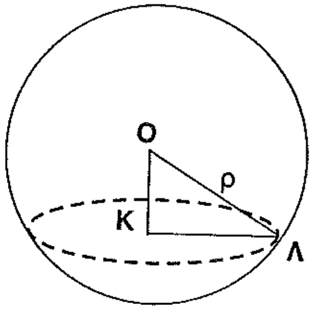
Με τον τύπο $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.} = \pi\rho^2$ βρίσκουμε την ακτίνα ρ του κύκλου $\rho^2 = E/\pi = ...$ και με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ βρίσκουμε την ακτίνα R

= ΟΛ της σφαίρας. Οπότε:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = ...$

3. Μια σφαίρα έχει εμβαδόν 4069,44 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της τομής της από ένα επίπεδο που απέχει από το κέντρο 14,4 cm.

Λύση



Βρίσκουμε την ακτίνα ρ της σφαίρας από τον τύπο $E_{σφ} = 4πρ^2$ ή $ρ^2 = ...$ και κατόπιν με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΛ την ακτίνα ΚΛ του κύκλου που είναι η τομή του επιπέδου με τη σφαίρα, ΟΚ = 14,4 cm.

4. Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια και τον όγκο της γης, αν είναι γνωστό ότι η ακτίνα της είναι 6370 km περίπου (θεωρούμε τη γη τέλεια σφαίρα).

Λύση

$E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6370^2 = ...$

$V_{σφ} = \frac{4}{3} \cdot π \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6370^3 = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφανείας και τον όγκο μιας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ = 8,5 cm.

2. Να βρείτε τον όγκο μιας σφαίρας που έχει διάμετρο 15 cm.

3. Να βρείτε τον όγκο μιας σφαίρας που έχει εμβαδόν επιφανείας 1017,36 cm^2.

4. Να υπολογίσετε τη διάμετρο μιας σφαίρας που έχει όγκο V = 57876,480 cm^3.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφανείας και τον όγκο μιας σφαίρας, αν ξέρετε ότι ένα επίπεδο την τέμνει σε απόσταση 4,8 cm από το κέντρο της κατά ένα κύκλο ακτίνας 6,4 cm.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας, αν ξέρετε ότι ένα επίπεδο την τέμνει σε απόσταση 7,2 cm από το κέντρο κατά ένα κύκλο που έχει εμβαδόν 91,5624 cm^2.

7. Σε μια σφαίρα η τομή της μ' ένα επίπεδο είναι ένας κύκλος περιφέρειας 45,216 cm και σε απόσταση από το κέντρο της 9,6 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της και τον όγκο της.

8. Μια σφαίρα έχει εμβαδόν επιφανείας 59798,16 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν της τομής της από ένα επίπε-

δο που απέχει από το κέντρο της απόσταση 40 cm.

9. Μια σφαίρα έχει όγκο 14130 cm^3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της και σε ποια απόσταση από το κέντρο της πρέπει να φέρουμε ένα επίπεδο, του οποίου η τομή με τη σφαίρα είναι ένας κύκλος μήκους 75,36 cm.

10. Ο όγκος ενός κώνου είναι το 1/24 του όγκου μιας σφαίρας διαμέτρου 108 cm. Υπολογίστε το ολικό εμβαδόν του κώνου, αν ξέρετε ότι η ακτίνα της βάσης του είναι το μισό της ακτίνας της σφαίρας.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Το μήκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι τριπλάσιο από το ύψος του ενώ το πλάτος του είναι διπλάσιο από το ύψος του. Αν η διαγώνιος του είναι 56 cm, να υπολογίσετε τον όγκο του.

2. Σ' έναν κύλινδρο με ακτίνα βάσης ρ = 6 cm ρίχνουμε μία πέτρα που ανεβάζει τη στάθμη της επιφάνειας του νερού που έχει ο κύλινδρος κατά 2,5 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της πέτρας.

3. Να βρείτε τη χωρητικότητα μιας δεξαμενής σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου η οποία είναι κατασκευασμένη από μπετό πάχους 15 cm και οι εξωτερικές διαστάσεις είναι μήκος 8,2 m, πλάτος 6,3 m και βάθος 3,8 m. Η δεξαμενή είναι σκεπασμένη με λαμαρίνα πάχους 3 cm.

4. Ένα στερεό αποτελείται από έναν κύβο και από μία τετραγωνική πυραμίδα, η οποία έχει βάση μία έδρα κύβου. Αν η διαγώνιος του κύβου είναι 43,3 cm και το ύψος του στερεού είναι 55 cm, να υπολογισθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

5. Η ολική επιφάνεια ενός κώνου είναι 7290π cm^2 και είναι ισοδύναμη με τα 18/5 της βάσης. Να υπολογισθεί ο όγκος του κώνου.

6. Η ολική επιφάνεια ενός κύβου έχει εμβαδόν σε cm^2 ίσο με τη λύση της εξίσωσης:

$$[(\frac{3}{7}x - 26) : \frac{10}{3} - 20] \cdot \frac{7}{2} + x = \frac{6}{7} + 77$$

Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός άλλου κύβου του οποίου η ακμή είναι ίση με τη διαγώνιο του προηγούμενου κύβου.

7. Μία σφαίρα έχει ακτίνα 18 cm είναι ισοδύναμη με κύλινδρο που έχει ύψος τριπλάσιο από την ακτίνα της σφαίρας. Να υπολογισθεί το πηλίκο της ολικής επιφάνειας της σφαίρας προς την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.

8. Μία δεξαμενή σχήματος κύβου έχει πλευρά α = 3,45 m και είναι γεμάτη με νερό που χρησιμοποιείται για το πότισμα ενός κήπου. Το νερό αντλείται με κυλινδρικό κουβά που έχει ακτίνα βάσης ρ = 0,21 m και

ύψος 0,75 m. Αν ο ρυθμός άντλησης είναι ένας κουβάς ανά μισό λεπτό, πόσος χρόνος χρειάζεται για να αδειάσει η δεξαμενή;

9. Κορμός δένδρου έχει όγκο V = 30 dm^3 και ύψος 5 m. Θέλουμε από αυτόν να φτιάξουμε ένα παραλληλεπίπεδο δοκάρι. Στο κόψιμο ο κορμός χάνει το 1/3 του όγκου του. Να βρεθεί το εμβαδόν της βάσης του δοκαριού όταν το ύψος παραμένει το ίδιο.

10. Κύλινδρος και κώνος έχουν βάσεις ίσους κύκλους με ακτίνα ρ = 3 cm. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 2,5 cm και τα δύο στερεά έχουν ισοδύναμες κυρτές επιφάνειες (δηλαδή τα εμβαδά τους είναι ίσα), να υπολογίσετε το ύψος υ και τον όγκο V του κώνου.

11. Να συγκριθεί ο όγκος α) ενός κύβου, β) ενός κυλίνδρου και γ) ενός κώνου με τον όγκο μίας σφαίρας με το ίδιο εμβαδόν ολικής επιφάνειας με καθένα από τα στερεά. Τί συμπεραίνετε; (υπόθεση ότι οι ακτίνες της βάσης του κυλίνδρου και του κώνου είναι ίσες με αυτή της σφαίρας). Εφαρμογή για $E_{ολ}$ = 100 m^2.

12. Η ακτίνα μιας σφαίρας είναι διπλάσια της ακτίνας μιας άλλης σφαίρας. Να βρείτε το λόγο των όγκων τους καθώς και το λόγο των εμβαδών των επιφανειών τους.

13. Για μια σφαίρα από χρυσάφι υπάρχουν υπόνοιες ότι δεν είναι συμπαγής (δηλαδή ότι υπάρχει κάποια κοιλότητα στο εσωτερικό της). Ρίχνουμε τη σφαίρα μέσα σ' ένα ογκομετρικό δοχείο κυλινδρικού σχήματος που έχει μέσα νερό και βρίσκουμε ότι η στάθμη του νερού ανεβαίνει κατά 1 cm. Στη συνέχεια βγάζουμε τη σφαίρα έξω και τη ζυγίζουμε και βρίσκουμε ότι το βάρος της είναι Β = 300 p. Μπορείτε να βρείτε αν πράγματι υπάρχει κοιλότητα στο εσωτερικό της σφαίρας; Πόση είναι η ακτίνα της σφαίρας;
Δίνονται ακτίνα βάσης κυλινδρικού δοχείου ρ = 3 cm, ειδικό βάρος χρυσού 19,3 p/cm^3 και τύπος ειδικού βάρους ε = B/V, όπου Β το βάρος του σώματος και V ο όγκος του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

BASIC 14

Άσκηση

Φτιάξτε πρόγραμμα που να υπολογίζει:

α) Το εμβαδόν και τον όγκο ενός κυλίνδρου όταν θα είναι γνωστή η ακτίνα της βάσης R και το ύψος υ.

β) Το εμβαδόν και τον όγκο ενός κώνου όταν θα είναι γνωστή η ακτίνα της βάσης R, το ύψος του υ και τη γενέτειρα λ.

γ) Το εμβαδόν και τον όγκο μιας σφαίρας όταν θα είναι γνωστή η ακτίνα της R.

Το «BASIC 14» ήταν το τελευταίο του βιβλίου. Σίγουρα δε μάθατε τα πάντα γύρω από τη Basic. Άλλωστε δεν ήταν αυτός ο σκοπός μας. Αν όμως σας κεντρίσαμε έστω και λίγο ώστε να αγοράσετε κάποιο βιβλίο ειδικό για Basic τότε αισθανόμαστε πλουσιότεροι σαν άνθρωποι και σαν δάσκαλοι.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β = Μισολυμένες ασκήσεις
Γ = Προτεινόμενες ασκήσεις
Δ = Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Γ. 6) x = ± 3, y = ± 0,1, z = 0, ω = ± 1/2

1.2 - 1.3 Β. 1. α) 42, β) - 76, γ) - 37, δ) - 19,47, ε) 1/3, στ) - 17/3, **2.** α) 7,4, β) - 2/3, γ) 10 1/6, δ) - 5,37, **3.** α) 13/24, β) - 1/3, γ) - 133, δ) 1/5, **5.** α) - 7,91, β) - 3,2, γ) 19/24, δ) - 59/24, **6.** A = 9, B = - 18, Γ = 1

Γ. 4. α) 1, β) - 2,52, γ) 0, δ) 26,03, **5.** α) 23, β) - 77, γ) - 5, δ) - 43,7, **6.** α) - 3,41, β) 0, γ) 13,88, δ) 0, ε) - 15,8, στ) 0, **7.** α) - 32, β) 20, γ) - 1,8, δ) 1/24, ε) - 11/15, **8.** α) - 73/24, β) -11, γ) - 51, δ) - 2,2, ε) - 37, **9.** α) - 49, β) 12, γ) 11, δ) 1,7, ε) - 15,37, στ) - 5/8

1.4 Β. 1. α) - 35, β) 35, γ) - 47/15, δ) - 125, ε) 20,2 στ) - 0,9, **4.** α) - 1, β) - 11/15, γ) - 1/20, δ) 0, **5.** y = 14, x = - 18, ω = 11/15, φ = 10,2, **6.** α) 14, β) - 6,8, γ) 1/2

Γ. 1. α) 4, β) - 23, γ) 23/12, δ) - 19/3, ε) -12,19, στ) - 2,15, **2.** α) 35, β) 23/4, γ) 4 7/12, ε) - 8 11/15, στ) - 3,95, **4.** α) - 1, β) - 9, γ) 5, δ) 37/12, ε) - 5/6, στ) 5,4, **6.** x = 9, y = - 9, φ = 11/2, ω = - 9,1, α = - 18,2, β = - 38/7, **7.** x = 29, y = - 1/3, ω = 11,2, φ = 11/3, α = 8,2, β = 23/6, **8.** α) - 91, β) - 56, γ) 16/21

1.5 Β. 1. A = - 12, B = 24, **2.** A = - 21/4, B = 37/20, Γ = - 13/5, **3.** A = - 2, B = - 1/4, Γ = - 5, **4.** A = - 7, B = - 16, Γ = - 4, **6.** A = 8, B = - 7, Γ = - 27, **7.** A = 11/3, B = 0, Γ = - 4/3

Γ. 2. A = 0, B = 2, Γ = - 5, Δ = 0, **3.** 7, **4.** α) 4, β) 38/7, γ) - 6, δ) - 1, **5.** A = - 22, B = - 19, Γ = 7, Δ = 0, **6.** A = - 10, B = 0, Γ = - 45, Δ = 127, **7.** A = 25/6, B = - 3, Γ = 4

1.6 Β. 3. A = 12, B = - 5/2, Γ = - 12, Δ = 15, E = - 3/20, **4.** A = 26, B = 27, **6.** α) 12, β) - 4, γ) 12, **7.** α) 20, β) 46, γ) - 160, **8.** α) 5/6, β) - 2, γ) - 4, **9.** α) 32/15, β) - 77/4, γ) - 29/5

Γ. 3. A = - 4x, B = - 2x, Γ = 5/2 x, Δ = 0, **4.** A = - 2, B = 6, Γ = - 15, **5.** 16, **6.** - 77/6, **7.** α) - 1, β) 1, γ) - 1/3, **8.** α) 27, β) 72, γ) - 7, **9.** α) 3, β) - 17/72, **10.** α) - 181, β) - 129/2, γ) 2

1.7 Β. 3. α) 5, β) 17/3, **4.** α) 16, β) 10, **5.** α) - 120, β) - 15.120

Γ. 3. α) - 5, β) - 4, γ) 3, **4.** α) 30, β) 1, γ) - 1, **5.** A = 1, B = - 5, Γ = - 23, **6.** A = 13, B = -2, Γ = - 21, **7.** A = 2, B = 12, Γ = 0, **8.** A = - 16, B = 48, Γ = 96, Δ = 0, E = 0

1.8 Β. 4. α) 3/2, β) - 20/12, γ) - 6/5, **5.** α) - 17/10, β) 3/11, γ) 19/13, δ) 40/21, **6.** α) 7, β) - 23/7, γ) - 28, **7.** α) - 20/3, β) - 19/5, γ) - 29/63, δ) - 9/4, **8.** α) 4/3, β) - 28/30, γ) - 8/3, δ) 14/5, ε) - 15/8, στ) - 24/7, **9.** α) - 3/7, β) 8/21, γ) - 1, δ) 9/4, ε) 25/2, στ) - 7/5

Γ. 4. α) - 21/320, β) - 14/3, γ) 5/142, δ) - 5/2, 5. α) - 2, β) 5/2, γ) - 5, 6. α) - 1/4, β) 1/4, γ) 5/7, δ) 5/12, 7. α) 17/28, β) 128/15, γ) 45/4, δ) - 4, 8. α) - 9/8, β) - 5/3, γ) - 23/5, δ) - 14/24, 9. α) 1, β) 8/3, γ) - 6, δ) - 1/14, ε) - 4/21, στ) - 3/5, 10. α) - 2/3, β) 5/24, γ) 3, δ) - 5/4

1.9 Β. 8. α) 9, β) $(1/2)^{10}$, γ) - 2^7, 9. Α = Β, 10. Α = 16, Β = 64, 11. α) - 65, β) - 65, 12. α) 49, β) - 31, γ) - 56, 13. α) - 64/27, β) 25/9, γ) 1/81, δ) 49, 14. α) $(1/2)^5$, β) 4^4, γ) 2^4, δ) $(3/2)^4$, 15. α) 4/15, β) - 27/13, 16. α) - 3, β) 4, γ) 4^8

Γ. 9. α) 3^{14}, β) 2^{12}, γ) 4^{14}, δ) $(-1/4)^9$, 10. α) 125, β) 1, γ) - 5/6, 11. 0, 12. - 80, 13. Α = - 8, Β = 31, Γ = - 2, 14. Α = - 20, Β = - 248, 15. α) 64, β) 16, 17. 8, 16, 10, 18. α) 64, β) - 8, γ) -1/27, δ) 4/9, 19. α) 3^8, β) 4^4, γ) $(1/4)^4$, δ) - 3^7, 20. Α = 9, Β = 9

1.10 Β. 3. α) 1/25, β) 1/16, γ) - 1/2, δ) - 2/5, ε) 16/9, 4. α) 1/9, β) - 2/3, γ) 16, δ) 36/25, ε) 4/9, 5. α) 1/128, β) - 2, γ) - 1/3, 6. α) 20, β) - 1/80, 7. α) 1, β) - 1, γ) 1/16, δ) 25/16, 8. -2/9, 9. 1, 10. -5/27, 11. α) 19/4, β) 9/8, 12. α)9/4, β) 4/25, γ) -64, δ) 1

Γ. 2. α) -5/2, β) 9/4, γ) 25/64, δ) 1/64, ε) 25, στ) - 27, 3. α) 125, β) 1/5, γ) 4, δ) - 1/8, ε) - 1/8, στ) - 27, 4. α) 1/2, β) 1/16, γ) - 8, 5. α) 125/81, β) - 1/20, 6. α) - 1000/27, β) 49/16, γ) 64/27, 7. α) 1/81, β) 25/9, γ) 9/16, 8. α) -675, β) -1/2, 9. α) 3/10, β) 7, γ) 49/12, δ) 301/6, ε) 9/2

1.12 Β. 1. α) 5/9, β) 43/99, γ) 587/999, δ) 31/99, 2. α) 16/9, β) 837/999, γ) 1161/99, δ) 4526/999, 3. α) 17168/990, β) 1831/90, γ) 13411/9900, δ) 66112/9000, 4. α) 122889/9900, β) 33439/9900, γ) 78164/44725, 5. β) 0,475, δ) 0,03125

Γ. 2. α) 728/99, β) 76/9, γ) 7529/999, δ) 1924/99, ε) 5370/999, στ) 194/9, 3. α) 43/99, β) 78/99, γ) 596/999, 4. α) 4491/990, β) 178415/9990, γ)57593/9900, 5. α) 3934/99, β) - 102/99, γ) 1916/2018, 6. α) 4532/90, β) 126/9

Δ. 1. α) - 57/4, β) 10/27, γ) - 53/60, 2. α) 61/30, β) - 11/2, 3. α) 2, β) 2, 4. α) 0, β) - 10/7, 5. α) 196, β) 4, 6. - 64, 8. α) -2, β) 4, 9. α) - 13, β) - 13, 12. α) 544, β) 77, 13. α) 0, β) 1, 14. α) 39/99, β) - 64/99, γ) 4492/990

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Β. 1. 4α, 2. 1250 · t km, 3. 7x = 280.000, 4. 5x - 4, 5. 3/5 · 1/2 x

Γ. 1. - 2, 0, 2, 4, 6, 2. 2, 4. x, 6. α) 6α, β) 20β

2.2 Β. 1. α) 2, β) 10, γ) 11/2, 2. β) 87/32, γ) 47/5, δ) 14/31, ε) 34/15, 3. α) 4/3, β) 2, γ) - 1,2, δ) - 79/2

Γ. 1. α) 4, β) - 3, γ) 9, δ) αόριστη, ε) αδύνατη, στ) - 2, 2. α) - 6, β) - 5, γ) 1, δ) 2, ε) - 66, 3. α) 2, β) - 11, γ) 2,7, δ) 4/27, ε) - 3/2, στ) 5, 4. α) 34/77, β) 0, γ) 35/37, δ) - 2, ε) 1146/137, στ) - 17/4, ζ) 265/12, η) 6/7, θ) - 27/28, ι) 1/6, 5. α = 2, β = - 2

2.3 Β. 1. I = υ/R, R = υ /I, 2. 50 sec, 3. $T_1 = T_2$/ 1-n, 4. 10,5

Γ. 1. α) S = F/P, β) n = T/N, γ) H = 2F/ε · S, 2. α) $x = -F/m\omega^2$, β) $m = DT^2/4\pi^2$, γ) $\kappa = Fr^2/Q_1Q_2$, δ) $V_2 = P_1V_1T_2 / T_1P_2$, 3. 6

2.4 Β. 1. 13,5, 2. 5.000 l, 3. 4,8, 4. αόριστο, 5. 60, 6. x = 6

Γ. 1. 54.000, 28.000, 18.000, 2. 1.600, 3. 30 ημέρες, 4. 108.500, 5. 22 πρόβατα, 15 κοτόπουλα, 6. α) x = 30, β) x = 10, 7. 3/8

2.5 **Β.** **1.** $x < -4$, **2.** $-5 < x \leq 0$, **3.** $-1 < x < 2/3$, **4.** 323, **5.** 0,737 m^3

Γ. **1.** α) $x \leq 11$, β) $y \leq 170/45$, **2.** α) $x \geq 0$, β) αδύνατη, γ) $x > 0$, **3.** α) $x \leq 12$, β) $x \geq 1$, γ) $x \geq 3$, δ) $x > 1$, **4.** $x < 113/26$, **5.** α) αδύνατη, β) αδύνατη, γ) αόριστη, **6.** α) $x < 3/5$, β) $x < -8/11$, γ) $x \leq -8/3$, δ) $x \geq 15/8$, **7.** 470, **8.** 3 ώρες, **9.** $75 \leq υ \leq 80$, **10.** α) $-3 < x < 2$, β) $x \leq -6$, γ) $x < 1$, δ) δεν συναληθεύουν

Δ. **1.** $x = 3$, **2.** $x = 4$, **3.** $x = 2$, **4.** αδύνατη, **5.** $x = 5$, $y = 1$, $ω = 1/3$, **6.** $x = 3$, **7.** $x = 7$, **8.** 200 των 0,7 και 120 των 0,8, **9.** 48 - 12, **10.** 8 - 312, **11.** $15^6 - 75^0$, **12.** 5 - 10, **13.** $x < 12$, **14.** 1, 2, **15.** αόριστη, **16.** - 156, **17.** όλοι οι αριθμοί εκτός του 2, **18.** 11 νίκες, **19.** 59, **20.** 3 άτομα

Κεφάλαιο 3ο

3.1 **Β.** **1.** α) $Ε = 51$ cm², β) $Ε = 22$ cm², **2.** α) $Ε = 30$ cm², β) $x = 13$ cm, γ) $y = 60/13$ cm, **4.** $ΑΒ = 12$

Γ. **2.** α) ορθογώνιο, β) οξυγώνιο, γ) οξυγώνιο, **3.** α) 52, 48, β) 480 cm², **4.** 8 cm, 24 cm², 4,8 cm, **5.** 3, 4, 5

3.2 **Β.** **1.** 14, 12/13, 5/7, 11/5, 0,6, **2.** - 113/4, **3.** $x \geq 27/5$, $y \geq -3$, **4.** ΑΜ = 8 cm, Ε=48cm²

Γ. **1.** 7, 7, 0,06, 81, 4, 5/2, 26, 16, **2.** $x \leq -4$, **3.** α) 13, β) 5, γ) 4, δ) 1

3.3 **Β.** **1.** 2,23, **2.** α) 20,52, β) 11,18, γ) 5,54, δ) 10,44, **3.** Ε = 53,665 cm², **4.** 70,178 cm

Γ. **1.** 2,44, 2,64, 2,82, **3.** 7,324 km, **4.** υ = 8,06 dm, Ε = 112,84 dm², **5.** Ε = 11 cm², 18,385 cm

3.4 **Β.** **2.** 1,414, 3,146, 2,236, **3.** 8,167, **4.** α) $\sqrt{7} > \sqrt{2}$, β) $\sqrt{3} < 3$, γ) $1 > \sqrt{0,6}$, δ) $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{3}{4}}$, ε) $\sqrt{3} > -\sqrt{7}$, στ) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, **5.** β) $x = \frac{6 + \sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{2}$

Γ. **3.** α) 2, 2, 2,828, 2, β) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, 3, **4.** α) $20\sqrt{7}$, β) 88,984, **5.** α) $\sqrt{5} > \sqrt{2}$, β) $\sqrt{2} < 2$, γ) $1 < \sqrt{3}$, δ) $\sqrt{5} < \sqrt{10}$, ε) $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$, στ) $3 > \sqrt{3}$, ζ) $\sqrt{6+5} = \sqrt{9+2}$

3.5 **Β.** **3.** $ΟΒ = \sqrt{13}$, $ΑΒ = \sqrt{37}$, **4.** Ε = 50

Γ. **2.** $ΑΒ = 4\sqrt{2}$, ΒΓ = 8,246, **3.** $x = 2$, $y = -1$, **4.** 22, 54, **5.** $y = 5$

Δ. **1.** 16, 27,7, **2.** $x = 1$, **4.** α) - 4, β) $4\sqrt{2} - 10$, **5.** 12, 3, 4, 8, **6.** 2 ή - 2, **7.** α) (4, 4), (3, 3), (75, 32), β) (4, 10), (3, 9), (75, 38)

Κεφάλαιο 4ο

4.1 **Β.** **1.** ΑΓ = 6 cm, ΑΒ = 14 cm, **2.** 3, **3.** 3, **4.** ΑΒ/ΑΔ = 3/2, **5.** 11,8 cm

Γ. **2.** $4{,}532 \cdot 10^7$, **3.** 1,44, **4.** 1, **5.** ΑΓ = 7,5 cm, ΓΒ = 4,5 cm

4.2 **Β.** **1.** 0,39, **3.** 0,44, **4.** 2

Γ. **1.** 0,75, **2.** 0,43, **3.** υ = 1,8 m, **4.** 0,5, **5.** 0,75

4.3 **Β.** **1.** ημω = 0,496, συνω = 0,875, **3.** ΑΔ = 108 m

Γ. **1.** 0,6, 0,8, 0,75, **2.** 9/41, 9/40, **4.** 5/13, 12/13, **5.** ημΒ = 0,6, ημΓ = 0,3

4.4. **Β.** **1.** υ = 164,7 m/sec, **2.** ΒΔ = 230,76 m, 80 όροφοι, **3.** β = 9,192, Β = 50°

Γ. **1.** α = 500 dm, β = 334,55 dm, Γ = 48°, **2.** 30°, 45°, **3.** Ε = 108,22 cm², **4.** Γ = 35°, **5.** 58°, 32°

Κεφάλαιο 5ο

5.1 **Β.** **1.** $\alpha \neq \beta$, **2.** $\beta = -5$, **3.** 4.968.945 δρχ. **4.** $\beta = -15$, $\Gamma = 1$
Γ. **1.** $\alpha = -2$, $\beta = 7$, **2.** $-5/4$, $-1/2$, $-5/4$, $-7/2$, $-25/2$, $-77/4$, **3.** $\alpha \neq \beta$, **4.** **α)** -6, $-11/2$,
-5, $-13/3$, $-25/4$, $\frac{\sqrt{3}-11}{2}$, **β)** 637/240, **5.** $S = 80t + 215$, $S = 775$ km

5.2 **Β.** **1.** **β)** $x = 13$, $x = -3$, **γ)** $y - 4$, $y = 11$, **δ)** $10 < x < 15$
Γ. **1.** **α)** όχι, **β)** ναι, **γ)** ναι, **2.** $x = 1$, **3.** $\alpha = -2$, $x = 0$, **4.** $\beta = -3$

5.3 **Β.** **1.** **β)** 8/3, **2.** **β)** $\alpha = -15/8$, **γ)** $\alpha = 5/38$, **3.** $y = -5x$, **4.** **α)** $y = 2/3\,x$, **β)** εφθ = 5/2, $y = 5/2\,x$
Γ. **2.** $x = 12$, $y = -24$, $z = -42$, **3.** **γ)** 13,5, **δ)** 10^5, **4.** **α)** $y = 1/2\,x$, εφω = 1/2

5.4 **Β.** **1.** $\alpha = 5$, $\beta = 7{,}5$, $\gamma = 20$, $\delta = 15$, **2.** $x = 19.047.700$, $y = 25.396.800$, $z = 35.555.500$, **3.** **α)** 600 m², **β)** 4 cm, 3 cm, **γ)** 525 m², **4.** $x = -10/7$
Γ. **1.** 3, 9, **2.** 40, 16, **3.** $x = 19/13$, **4.** **α)** 75 km, **β)** 13 cm, **5.** $x = 2$, $y = -3$, $z = -10$, **6.** 40°, 60°, 80°, **7.** 3.200 φορές

5.5 **Β.** **1.** $\beta = -5$, $\alpha = 1/2$, **2.** Η κάθε μία είναι παράλληλη στην $y = 5/2\,x$, **3.** Θα αδειάσει σε 300 km
Γ. **3.** Είναι παράλληλες με την $y = 2/3\,x$, **4.** $\lambda = 2/3$, **5.** $\lambda = 2$, **6.** 2 ώρες

5.6 **Β.** **2.** 10 ώρες
Γ. **2.** $\alpha = 12$, **3.** (- 1, - 3), (1, 3), **4.** 30, **5.** 21, **6.** **α)** αντιστρόφως ανάλογα, **β)** ανάλογα, **γ)** ανάλογα

Δ. **1.** Το Α ναι, το Β όχι, **2.** $A = -1$, $B = 26/3$, **3.** 26, 8, **4.** Όχι, **5.** Ανάλογα είναι τα α, β, δ, αντιστρόφως ανάλογα είναι το γ, **6.** Όχι

Κεφάλαιο 6ο

6.1 **Β.** **1.** **α)** 200, 250, **β)** 10 %, 4 %, **2.** **β)** 25 %, **γ)** 40 %
Γ. **1.** **β)** 38,46 %, 15,38 %, 39,38 %, 6,77 %

6.2 **Γ.** **2.** **α)** 126°, 9°, 21,6°, 14,4°, 73,8°, 115,2°, **β)** 700.000, 50.000, 120.000, 80.000, 410.000, 640.000, **3.** **α)** 1986, **β)** 1989

6.4 **Β.** **1.** **β)** 20 %, **γ)** 28 %, **2.** **α)** 50, **β)** 9, **γ)** 22 χώρες
Γ. **1.** **β)** Τετάρτη, **4.** **α)** 5, 14, **β)** 22,22, **γ)** 10

6.5 **Β** **1.** **α)** 6,5, 9,5, 12,5, 15,5, 18,5, **2.** **α)** 5, **β)** [31 - 36]

6.6 **Β.** **1.** 1, 1,725
Γ. **1.** 20, **2.** 7, 8, 9, 10, 11, **3.** 2, 3, 4, 5, 6, 7, **5.** 1,74, 1, **6.** **α)** 13,82, **β)** 15,82

Κεφάλαιο 8ο

8.1 **Β.** **1.** τόξο ΑΒ = τόξο ΑΓ = 60°, τόξο ΑΔ = τόξο ΒΓ = 120°, **2.** $x = 60°$
Γ. **1.** 80°, 100°, **2.** ΑΟΒ = 35°, ΒΟΓ = 48°, ΓΟΔ = 85°, ΑΟΔ = 168°, **3.** $x = 40°$, **4.** 40°, 80°, 160°, **5.** ΚΟΛ= 90°, **6.** τόξοΜΚ = τόξοΚΝ = τόξοΝΛ = τόξοΛΜ = 60°

8.2 **Β.** **1.** $x = 50°$, $y = \rho = 45°$, $\omega = 40°$, **2.** ΚΟΜ = 60°

Γ. 1. 20°, 26°, 46°, 2. 60°, 3. Α = 120°, Β = Γ = 30°, 4. Α = 97,5, Β = 109°, Γ = 82,5°, Δ = 71°, 5. Α = 37,5° Β = 67,5°, Γ = 75°, 6. x = 65°, y = 42,5°, ω = 115°

8.3 Β. 1. α) 40, β) 20, γ) 18, δ) 10, 2. ω = 45°, Σ = 12 L, 3. 108°, 120°, 135°, 150°, 4. R = 3

Γ. 1. α) 5, β) 18, γ) 12, δ) 16, 2. α) 10, β) 20, γ) 12, δ) 9, 3. y = 160°, 18, Σ = 32 L, 4. 36°

8.4 Β. 1. 523 cm^2, 2. 916,25 cm^2

Γ. 1. 20,5 cm, 420,5 cm^2, 2. 77,94 cm, 292,25 cm^2, 3. 36,37 cm, 63,65 cm^2, 4. 150 cm, 1.623,6 cm^2, 5. 3,10 cm, 107,69 cm^2, 6. 9,27 cm, 220 cm^2, 7. 4 cm, 2 cm, 24 cm^2

8.5 Β. 1. α) 18,84 cm, β) 37,68 cm, γ) 75,36 cm, δ) 150,72 cm, 2. α) 5 cm, β) 27 cm, γ) 54 cm

Γ. 1. α) 45,216 cm, β) 51,81 cm, γ) 202,84 cm, δ) 35,79 cm, 2. α) 84,78 cm, β) 109,9 cm, γ) 131,88 cm, δ) 182,12 cm, 3. α) 42 cm, β) 33 cm, γ) 58 cm, δ) 95 cm, 4. α) 44.713,6 km, β) 46.986,96 km, 5. α) 80,57 h, β) 80,59 h, 6. α) 1,91, β) 3,82, 7. $\rho_1/\rho_2 = \delta_1/\delta_2 = 3/2$

8.6 Β. 1. α) 113,04 cm^2, β) 1.384,74 cm^2, γ) 615,44 cm^2, δ) 1.808,64 cm^2, 2. 113,04 cm^2, 3. α) 14 cm, β) 11 cm, γ) 22 cm, 4. 19,625 cm^2

Γ. 1. α) 153,86 cm^2, β) 706,5 cm^2, γ) 3.629,84 cm^2, δ) 216,31 cm^2, ε) 109,30 cm^2, 2. α) 660,185 cm^2, β) 2.374,625 cm^2, γ) 1.133,54 cm^2, 3. α) 204,26 cm, β) 399,65 cm, 4. α) 21.113,3 cm^2, β) 27.745,04 cm^2, 5. 10.318,471 cm^2, 6. 75,36, 7. 94,2, 8. 29.228,357 cm^2, 9. α) 200,96 cm^2, β) 21,07 cm^2, γ) 32,25 cm^2

8.7 Β. 1. α) 2π/15, β) 2π/5, γ) 2π/3, δ) π, 2. α) 90°, β) 180°, γ) 540°, δ) 135°, 3. α) 3,14 cm, β) 4,71 cm, γ) 7,85 cm, δ) 10,46 cm, ε) 18,84 cm, 4. 6,76 cm, 5. α) 28,26 cm^2, β) 21,98 cm^2, γ) 37,68 cm^2, δ) 47,1 cm^2, 6. 27,28 cm, 61,72 cm^2, 7. 4,56 cm^2

Γ. 1. α) 72°, β) 77,14°, γ) 720°, δ) 1.440°, 2. α) 2π/5, β) 2π/3, γ) 3π/4, δ) 5π/6, ε) 3π/2, 3. α) 4,18, β) 16,74, γ) 18,84, 4. 6°, 5. 40,5°, 6. 8, 7. 30 km, 8. 15,072, 22,608, 9. 40,192, 10. 162°, 11. α) 33,49 cm^2, β) 30,144 cm^2, γ) 40,192 cm^2, δ) 60,288 cm^2, 12. 33,912 cm^2, 13. 189 cm^2, 14. 154,28 cm^2, 15. 90,432, 16. 125°, 17. 69,08, 18. α) 328,25 cm^2, β) 14,25 cm^2, γ) 5,375 cm^2, δ) 14,25 cm^2, ε) 19,625 cm^2, 19. α) 36,48, β) 36,48, γ) 13,76, δ) 36,48, ε) 50,24

Δ. 1. Γωνία ΑΒΓ = γωνία ΑΒΔ = 90°, 2. 1582,5 cm^2, 3. Τόξο ΑΒ = τόξο ΑΓ = 5,66 cm, 4. Ε = 5,82 cm^2, 5. α) 0,66 m^2, β) 0,09 m^2, γ) 0,6 m^2, 6. 0,54 cm^2, 7. Ε = 2 cm^2, 8. Ε = 0,0487 m^2, 9. Ε = 0,56 cm^2, 11. 3,76 cm^2

Κεφάλαιο 9ο

9.1 Β. 1. (ΕΖΗΘ) // (ΑΒΓΔ), (ΕΘΑΒ) // (ΖΗΔΓ), (ΕΒΓΖ) // (ΑΔΗΘ), 2. ΑΘ, ΗΔ, ΔΓ,ΑΒ, 3. α) ΓΔ, β) ΕΗ, γ) ΒΔ, δ) ΖΘ, 4. α) ΚΛ, β) ΕΚ

Γ. 1. παράλληλα τα ΑΒΓΔ, ΕΘΖΗ, τεμνόμενα με το ΒΓΗΖ, 2. Παράλληλα: ΕΘΗΖ // ΑΒΓΔ, ΑΔΘΕ // ΖΗΓΒ, ΑΒΖΕ // ΔΓΗΘ, τεμνόμενα: ΑΔΘΕ με ΕΖΒΑ, ΖΗΓΒ με ΕΖΑΒ, ΕΘΗΖ με ΑΒΖΕ, 3. α) ΑΒ // ΓΔ, ΕΘ // ΗΖ, β) ΑΒ, ΒΓ και ΑΒ, ΑΔ, γ) ΑΒ, ΓΖ και ΑΒ, ΗΔ, δ) ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΗΔ, ΕΒ, **4.** παραλληλόγραμμο, **5.** α) ΕΘ, ΕΖ, ΕΒ, ΔΗ, ΔΑ, ΔΓ, β) ΗΘ, ΗΖ, ΑΘ, ΖΓ, ΑΒ, ΒΓ

9.2 Β. 1. α), δ), ε), **2.** 21,65 cm, **3.** 69°

Γ. 1. 7,8 cm, **2.** 22,51 cm, **3.** α) 31,7°, β) 54,7°, **4.** 24°, 13,45, 12,04, **5.** 50,6°, **6.** 40,9°, 12,2

9.3 Β. 1. 1.008 cm², **2.** 180,4 cm², **3.** α) 675 cm², β) 4:219

Γ. 1. 1.350 cm², **2.** 763 cm², **3.** 6.480 cm², **4.** 12,5 cm, **5.** 3.804 cm², **6.** 1.080 cm², 2.241 cm², **7.** 990 cm²

9.4 Β. 1. 59,22 cm³, **2.** 15 cm, **3.** 45 cm³

Γ. 1. 4.913 cm³, **2.** 5.214 cm³, **3.** 16.763,6 cm³, **4.** 200 cm², **5.** 7.409,3 cm³, **6.** α) 43,3125 m³, β) 13,125 km³, **7.** 7.014,8 cm³

9.5 Β. 1. α) 703,36 cm², β) 1.011,08 cm², **2.** 6,5 cm, **3.** α) 4 cm, β) 6 cm

Γ. 1. α) 556,1, β) 881,6, **2.** 1.570 cm², **3.** 320,28 cm², **4.** α) 4.396 cm², β) 6.908 cm², **5.** 1.507,2 cm², 2.135,2 cm², 1.507,2 cm², **6.** 6 cm, 13,5 cm, **7.** ρ = 20, υ = 30, Ε = 3.768 cm²

9.6 Β. 1. 7 cm, **2.** 24.492 cm², **3.** 2.624,4 cm², 365,25 cm³

Γ. 1. 42.754,5 cm³, 68.110,3 cm², **2.** 384.650 cm³, **3.** 3.402,9 cm³, **4.** 1.295,25 cm², **5.** 7.065, **6.** 386,40 m³, 11.592.252 δρχ. **7.** α) 226,6 cm³, β) 1.318,8 cm³

9.7 Β. 1. 442 cm², **2.** 592,7 cm³, **3.** α) 17,97 cm, β) 16,55, γ) 463,4 cm³, **4.** 84,11 cm²

Γ. 1. 72,72 cm, **2.** 19,69 cm, **3.** 26,45 cm, **4.** 39 cm, **5.** 175 cm², **6.** 2.352 cm², **7.** 37,71 cm, **8.** 10 cm, **9.** 14,4 cm

9.8 Β. 1. 66,81 cm³, **2.** 773,31 cm³

Γ. 1. α) 2.016 cm², β) 5.292 cm³, **2.** 10.800 cm³, **3.** α) 91.476, β) 1.140.964,4 cm³, **4.** 933,12 m³, **5.** 36 cm, **6.** α) 7,5 cm, β) 175,95 cm², **7.** 77,76 cm²

9.9 Β. 1. 12,3 cm, **2.** 591,89 cm², **3.** 8.317,86 cm², **4.** α) 123,088 cm², β) 4,2 cm, **4.** 40 cm, **5.** 235,5 cm²

Γ. 1. 26 cm, **2.** 517,629 cm², **3.** 13,5 cm, **4.** 66,33 cm, **5.** α) 15 cm, β) 12,68 cm, **6.** α) 14,5 cm, β) 10,5 cm, **7.** 3.501,571 cm², **8.** 5.080,52 cm²

9.10 Β. 1. 347,55 m³, **2.** 1.156,25 cm³, **3.** 1.306,95 cm²

Γ. 1. 3.391,2 cm³, **2.** 966,28 cm³, **3.** 125.600 cm³, **4.** 24.922,97 cm³, **5.** 68.976,62cm³, **6.** 2.930 cm³, **7.** 306 cm³, **8.** 37.680 cm³, **9.** 7.536 cm³

9.11 Β. 1. 1.436 cm³, **2.** 65,41 cm³, **3.** 366,24 cm², **4.** α) $5{,}096 \cdot 10^{8}$ km², β) $1{,}082 \cdot 10^{12}$ km³

Γ. 1. α) 907,46 cm², β) 2.571,11 cm³, **2.** 1.766,25 cm³, **3.** 3.052,08 cm³, **4.** 48 cm, **5.** α) 803,84 cm², β) 2.143,573 cm³, **6.** α) 981,5 cm², β) 2.892,712 cm³, **7.** α) 1.808,64 cm², β) 7.236 cm³, **8.** 9.925,50 cm²

Δ. 1. 20250 cm³, **2.** 331,66 cm³, **3.** 171,5 cm³, **4.** 5375 cm³, **5.** 41191 cm³, **6.** 362,4 cm³, **7.** 9/11, **8.** 197 min, **9.** 2/5 dm², **10.** υ = 4 cm, V = 37,68 cm³, **11.** $V_{κύβου}$ = 68 m³, $V_{κυλ.}$ = 70,67 m³, $V_{κων.}$ = 66,56 m³, $V_{σφ.}$ = 94,02 m³, **12.** V_1/V_2 = 1/8, E_1/E_2 = 1/4, **13.** Ναι, ρ = 1,88 cm

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,036
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,072
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,111
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,150
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,192
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,280
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,376
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,428
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,483
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,540
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,600
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,664
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,732
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,881
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,963
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,050
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,145
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,356
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,475
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,605
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,747
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,904
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,078
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,271
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,487
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2586	3,732
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,011
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,332
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,705
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,145
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,671
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,314
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,115
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,514
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,43
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,30
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,08
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,64
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1,000				

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΗΚΟΥΣ - ΕΜΒΑΔΟΥ - ΟΓΚΟΥ

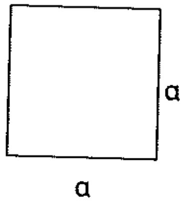
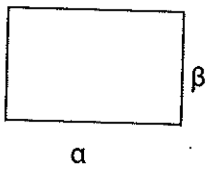
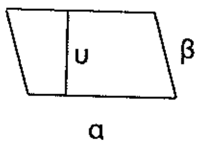
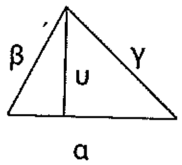
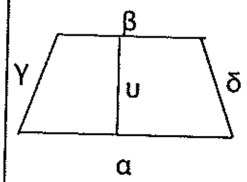
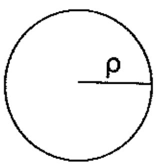
Μονάδες μήκους	Συμβολισμός	Σχέση με το μέτρο
Χιλιόμετρο	km	1 km = 1000 m = 10^3 m
Εκατόμετρο	hm	1 hm = 100 m = 10^2 m
Δεκάμετρο	dam	1 dam = 10 m
Μέτρο	m	
Δεκατόμετρο ή Παλάμη	dm	1 dm = 0,1 m = 10^{-1} m
Εκατοστόμετρο ή Πόντος	cm	1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m
Χιλιοστόμετρο ή Χιλιοστό	mm	1 mm = 0,001 m = 10^{-3} m
Υάρδα ή Γιάρδα	yrd	1 yrd = 0,9144 m
Πόδι	ft	1 ft = 0,3048 m
Ίντσα	in	1 in = 0,0254 m
Μίλι		1 μίλι = 1609 m
Ναυτικό μίλι		1 ναυτικό μίλι = 1852 m
Κόμβος		1 κόμβος = 15,43 m

Επίσης πρέπει να γνωρίζουμε: 1 yrd = 3 ft = 36 in και
1 ναυτικό μίλι = 120 κόμβοι.

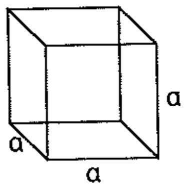
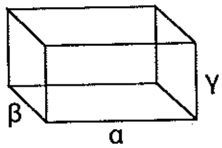
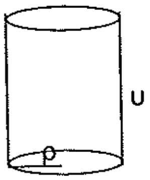
Μονάδες εμβαδού	Συμβολισμός	Σχέση με το τετρ. μέτρο
Τετρ. Χιλιόμετρο	km^2	1 km^2 = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2
Τετρ. Εκατόμετρο	hm^2	1 hm^2 = 10.000 m^2 = 10^4 m^2
Τετρ. Δεκάμετρο	dam^2	1 dam^2 = 100 m^2 = 10^2 m^2
Τετρ. Μέτρο	m^2	
Τετρ. Δεκατόμετρο	dm^2	1 dm^2 = 0,01 m^2 = 10^{-2} m^2
Τετρ. Εκατοστόμετρο	cm^2	1 cm^2 = 0,0001 m^2 = 10^{-4} m^2
Τετρ. Χιλιοστόμετρο	mm^2	1 mm^2 = 0,000001 m^2 = 10^{-6} m^2
Στρέμμα		1 στρέμμα = 1000 m^2

Μονάδες όγκου	Συμβολισμός	Σχέση με το κυβ. μέτρο
Κυβικό Μέτρο	m^3	
Κυβικό Δεκατόμετρο ή Λίτρο	dm^3 ή l	1 dm^3 = 0,001 m^3 = 10^{-3} m^3 = = 1 l
Κυβικό Εκατοστόμετρο	cm^3	1 cm^3 = 0,000001 m^3 = 10^{-6} m^3
Κυβικό Χιλιοστόμετρο	mm^3	1 mm^3 = 0,000000001 m^3 = 10^{-9} m^3

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ - ΕΜΒΑΔΩΝ - ΟΓΚΩΝ

Ονομασία	Σχήμα	Περίμετρος	Εμβαδόν	Όγκος
Τετράγωνο		4α	$α^2$	
Ορθογώνιο		2α + 2β	$α \cdot β$	
Παραλληλόγραμμο		2α + 2β	$α \cdot υ$	
Τρίγωνο		α + β + γ	$\frac{α \cdot υ}{2}$	
Τραπέζιο		α + β + γ + δ	$\frac{(α + β) \cdot υ}{2}$	
Κύκλος		2πρ	$πρ^2$	

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ - ΕΜΒΑΔΩΝ - ΟΓΚΩΝ

Ονομασία	Σχήμα	Περίμετρος	Εμβαδόν	Όγκος
Κύβος		–	$6\alpha^2$	α^3
Ορθογώνιο Παραλλη-λεπίπεδο		–	$2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$	$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$
Κύλινδρος		–	$2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon$	$\pi\rho^2 \cdot \upsilon$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

x	x^2	$\sqrt{x}$	x	x^2	$\sqrt{x}$	x	x^2	$\sqrt{x}$
1	1	1,000	41	1681	6,403	81	6561	9,000
2	4	1,414	42	1764	6,481	82	6724	9,055
3	9	1,732	43	1849	6,557	83	6889	9,110
4	16	2,000	44	1936	6,633	84	7056	9,165
5	25	2,236	45	2025	6,708	85	7225	9,220
6	36	2,449	46	2116	6,782	86	7396	9,274
7	49	2,646	47	2209	6,856	87	7569	9,327
8	64	2,828	48	2304	6,928	88	7744	9,381
9	81	3,000	49	2401	7,000	89	7921	9,434
10	100	3,162	50	2500	7,071	90	8100	9,487
11	121	3,317	51	2601	7,141	91	8281	9,540
12	144	3,464	52	2704	7,211	92	8464	9,592
13	169	3,606	53	2809	7,280	93	8649	9,644
14	196	3,742	54	2916	7,348	94	8836	9,695
15	225	3,873	55	3025	7,416	95	9025	9,747
16	256	4,000	56	3136	7,483	96	9216	9,798
17	289	4,123	57	3249	7,550	97	9409	9,849
18	324	4,243	58	3364	7,616	98	9604	9,899
19	361	4,359	59	3481	7,681	99	9801	9,950
20	400	4,472	60	3600	7,746	100	10000	10,000
21	441	4,583	61	3721	7,810	101	10201	10,050
22	484	4,690	62	3844	7,874	102	10404	10,100
23	529	4,796	63	3969	7,937	103	10609	10,149
24	576	4,899	64	4096	8,000	104	10816	10,198
25	625	5,000	65	4225	8,062	105	11025	10,247
26	676	5,099	66	4356	8,124	106	11236	10,296
27	729	5,196	67	4489	8,185	107	11449	10,344
28	784	5,292	68	4624	8,246	108	11664	10,392
29	841	5,385	69	4761	8,307	109	11881	10,440
30	900	5,477	70	4900	8,367	110	12100	10,488
31	961	5,568	71	5041	8,426	111	12321	10,536
32	1024	5,657	72	5184	8,485	112	12544	10,583
33	1089	5,745	73	5329	8,544	113	12769	10,630
34	1156	5,831	74	5476	8,602	114	12996	10,677
35	1225	5,916	75	5625	8,660	115	13225	10,724
36	1296	6,000	76	5776	8,718	116	13456	10,770
37	1369	6,083	77	5929	8,775	117	13689	10,816
38	1444	6,164	78	6084	8,832	118	13924	10,863
39	1521	6,245	79	6241	8,888	119	14161	10,909
40	1600	6,325	80	6400	8,944	120	14400	10,954

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο
Οι ρητοί αριθμοί

Κεφάλαιο 2ο
Εξισώσεις - Ανισώσεις

Κεφάλαιο 3ο
Οι πραγματικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 4ο
Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 5ο
Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 6ο
Στατιστική

Κεφάλαιο 7ο

Συμμετρικά σχήματα

Κεφάλαιο 8ο

Μέτρηση κύκλου

Κεφάλαιο 9ο

Μέτρηση στερεών

1. Π. Σ Δαμιανός: Ειρήνης 17 Πεύκη , Τηλ. 8069067
2. Κ. Ι. Κοτσώνης: Ομηρίδου 13 Πειραιάς, Τηλ. 4523568
3. Β. Ν. Κωστόπουλος: Σκόκου 11 Πατήσια, Τηλ. 2232801
4. Α. Α. Μανθογιάννης: Κορινθίας 48 - 50 Αμπελόκηποι, Τηλ. 7715238
5. Π. Σ. Μουρελάτος: Ικτίνου 27 Νίκαια, Τηλ. 4901022

Σχολικά βοηθήματα από τις εκδόσεις «Αθηνά»

Νηπιαγωγείο

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 4 - 5 χρονών
2. Για παιδιά 5 - 6 χρονών

Δημοτικό

Γ. Μαυρογιάννη - Ν. Στυλιανού

Σκέπτομαι και γράφω Έκθεση

1. α Δημοτικού
2. β Δημοτικού
3. γ - δ Δημοτικού
4. ε - στ Δημοτικού

Θ. Κωστόπουλου - Δ. Κελέκη
Α. Σκούφου - Μ. Μαυρογιάννη

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 6 - 7 χρονών
2. Για παιδιά 7 - 8 χρονών
3. Για παιδιά 8 - 9 χρονών
4. Για παιδιά 9 - 10 χρονών
5. Για παιδιά 10 - 11 χρονών
6. Για παιδιά 11 - 12 χρονών

Ν. Στυλιανού

Γραμματική β - στ Δημοτικού (5 βιβλία)

Μαθηματικά β-στ Δημοτικού (5 βιβλία)

Ν. Στυλιανού - Η. Πετώνη κ.λπ.

Πολυβιβλία

1. α' Δημοτικού
2. β' Δημοτικού
3. γ' Δημοτικού
4. δ' Δημοτικού
5. ε' Δημοτικού
6. στ' Δημοτικού

Γυμνάσιο

Γ. Μαυρογιάννη

Μέθοδος διδασκαλίας και αυτοδιδασκαλίας για την Έκθεση

Α - Β - Γ Γυμνασίου (3 βιβλία)

Π. Δ. Δαμιανού κ.λπ.

1. Φυσική Β' Γυμνασίου
2. Φυσική Γ' Γυμνασίου
3. Χημεία Β' Γυμνασίου
4. Χημεία Γ' Γυμνασίου

Π. Σ.Δαμιανού
Κ. Κοτσώνη - Β. Κωστόπουλου
Α. Μανθογιάννη- Π. Μουρελάτου

Μαθηματικά

1. Α Γυμνασίου
2. Β Γυμνασίου
3. Γ Γυμνασίου

Λύκειο - Δέσμες

Γ. Μαυρογιάννη

1. Η διδασκαλία της Έκθεσης
2. Η Εννοιολογία της Έκθεσης
3. Δοκίμια

Γ. Μαυρογιάννη - Δ. Λάππα
Μ. Κωνσταντάρα - Μ. Τάκη

Έκθεση - Έκφραση

Α - Β - Γ Λυκείου (3 βιβλία)

Μ. Κωνσταντάρα - Ευαγ. Θεοδώρου
Ε. Κοκμοτού - Η. Πετώνη
Γ. Μαυρογιάννη - Β. Πρέντζα
Γ. Σ. Δαμιανού

Οι Αρχαίοι κλασικοί

1. Λυσία: Υπέρ αδυνάτου
2. Σοφοκλή: Αντιγόνη
3. Θουκυδίδη: Επιτάφιος
4. Πλάτωνος: Πρωταγόρας
5. Σοφοκλή: Οιδίπους Τύραννος
6. Θεματογραφία Αρχαίων Ελλήνων Συγγραφέων

Δίγλωσσες Εκδόσεις

(Ελληνικά-Αγγλικά)

Ειρ. Καμαράτου/Γιαλλούση

1. Το πέτρινο πουλί
2. Το αγόρι και η Ελπίδα
3. Η χρυσή φυλακή
4. Οι αόρατοι με το Σωκράτη
5. Οι αόρατοι με τον Αριστοτέλη
6. Οι αόρατοι με το Διογένη
7. Οι αόρατοι με τον Καζαντζάκη
8. Οι αόρατοι με το Θεόφιλο
9. Οι αόρατοι με το Μητρόπουλο

Ιστορία

Γ. Σ. Δαμιανού κ.λπ.

Ιστορία (γ και δ Δέσμες)
Ιστορία Α' - Γ' Γυμνασίου (3 βιβλία)

Κοινωνιολογία - Πολιτική Οικονομία

Δ.Χ.Λάππα

Λεξικό εννοιών και όρων

ISBN 960-7319-31-1