Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Π.Σ. ΔΑΜΙΑΝΟΣ
Κ. ΚΟΤΣΩΝΗΣ • Β. ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Α. ΜΑΝΘΟΓΙΑΝΝΗΣ • Π. ΜΟΥΡΕΛΑΤΟΣ

- προτεινόμενες ασκήσεις
- επαναληπτικές ασκήσεις (κατά κεφάλαιο)
- εφαρμογή στην basic (κατά κεφάλαιο)

- θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- λυμένες ασκήσεις
- μισο... λυμένες ασκήσεις

εφαρμογή στη Basic

1400 ασκήσεις και προβλήματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘΗΝΑ
Μ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗ

€11,00

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου

- Θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- Λυμένες ασκήσεις
- Μισο ... λυμένες ασκήσεις
- Προτεινόμενες ασκήσεις
- Επαναληπτικές ασκήσεις

Εφαρμογές στην BASIC

1400 ασκήσεις

και προβλήματα

Εκδόσεις
Μαυρογιάννη

Ερμ. Μπενάκη 37 & Σόλωνος
106 81 Αθήνα
38.21.308 - 33.04.628
Fax 38.38.228

Τα γνήσια αντίτυπα έχουν τη σφραγίδα του εκδοτικού οίκου.

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου -
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου: Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου
α΄ Εκδοση: Ιούνιος — Νοέμβριος 1992
β΄ Εκδοση: Ιούλιος 1995
γ΄ Εκδοση: Σεπτέμβριος 1997
δ΄ Εκδοση: Σεπτέμβριος 1998

Γεώργιος Κ. Μαυρογιάννης
Εμμ. Μπενάκη 37 10681 Αθήνα
τηλ. 3304628 —3821308 Fax: 3838228
Μακέτα εξωφύλλου: Δημήτρης Μουστάκης
Υπεύθυνος Μαθηματικών Εκδόσεων:
Πέτρος Σ. Δαμιανός Λ. Ειρήνης 17 Πεύκη 8069067 - 8065351

ISBN 960-7319-32 - X

Η Φωτοστοιχειοθεσία, η σελιδοποίηση και το μοντάζ έγινε στο εργαστήριο γραφικών τεχνών των εκδόσεών μας με το εκδοτικό πρόγραμμα ready, set, go της Apple και με εκτύπωση χαρτοφίλμς σε Laser Master 1000 της Unibrain.

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Α' Γυμνασίου. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας και αποτελεί το πρώτο της σειράς του Γυμνασίου.

Στόχος του βιβλίου είναι η ενεργοποίηση του μαθητή της τελευταίας δεκαετίας του αιώνα μας, απέναντι στην πρόκληση του 2000.

Σκοπός του να βοηθήσει:

α) το μαθητή στην καλύτερη κατανόηση της ύλης της τάξης του και στη σωστή αντιμετώπιση των θεμάτων στα διαγωνίσματα του Ιανουαρίου και Ιουνίου, καθώς και

β) τους κ.κ. συναδέλφους στην προετοιμασία της διδασκαλίας του μαθήματος.

Η **Δομή** του βιβλίου:

1. Αποτελείται από 8 αυτόνομα κεφάλαια.
2. Κάθε παράγραφος κεφαλαίου αποτελείται από:
   α) Θεωρία (ερωτήσεις - απαντήσεις)
   β) Λυμένες ασκήσεις
   γ) Μισο...λυμένες ασκήσεις
   δ) Προτεινόμενες ασκήσεις
3. Επαναληπτικές ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου.
4. Εφαρμογή στην BASIC.

Αντιμετωπίσαμε με μεγάλο προβληματισμό τη **θεωρία** του παρόντος βιβλίου μέχρι να καταλήξουμε στη συγκεκριμένη μορφή (Ερωτήσεις - Απαντήσεις). Σ' αυτό μας βοήθησε κυρίως μια πανεθνική διαπίστωση: οι νέοι σήμερα έχουν μεγάλη αντιληπτική ικανότητα στην κατανόηση των εννοιών όχι όμως και στη διατύπωσή τους με απλά Ελληνικά. Έχουν δηλαδή δυσκολία στη χρήση της γλώσσας τους. Επομένως δεν μπορούν εύκολα να διατυπώσουν τις έννοιες με σαφήνεια και πληρότητα. Τα αποτελέσματα άλλωστε των γραπτών εξετάσεων που διενεργήθηκαν - σύμφωνα με τις νέες αλλαγές που ίσχυσαν στο πρόγραμμα των γυμνασίων - αποδεικνύουν την παραπάνω διαπίστωση. Φυσικά η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι κυρίως ευθύνη των φιλολόγων, όμως συμβολή στο πρόβλημα μπορεί να έχει - κατά τη γνώμη μας - οποιοσδήποτε χώρος επικοινωνεί με το μαθητή (βιβλία, εφημερίδες, ραδιόφωνο, τηλεόραση κ.ά.).

Οι **λυμένες** ασκήσεις έχουν γραφεί με απλή και κατανοητή γλώσσα, ώστε ο μαθητής να έχει αρκετά παραδείγματα για να αναπτύξει τη δική του κριτική ικανότητα.

Οι **μισο...λυμένες** ασκήσεις έχουν σκοπό να κεντρίσουν το ενδιαφέρον του μαθητή ώστε να συνεχίσει μόνος του τη λύση τους, μαζί δε με τις **προτεινόμενες** άλυτες ασκήσεις ολοκληρώνουν το αντικείμενο κάθε παραγράφου προσφέροντας μια αρκετά μεγάλη ποικιλία και για τους μαθητές που επιμένουν αλλά και για τους κ.κ. συναδέλφους που θέλουν η τάξη τους να ασχοληθεί περισσότερο.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου και μετά από τις **επαναληπτικές** ασκήσεις βρίσκονται οι σελίδες της **πληροφορικής**. Οι εφαρμογές έγιναν στη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC.**

Σκοπός μας **δεν** ήταν η εκμάθηση της γλώσσας μέσα από τις σελίδες αυτού του βιβλίου. Θέλαμε όμως να συνδέσουμε την πληροφορική με το σχολείο και να πείσουμε το μαθητή να δει το μηχάνημα που έχει στο γραφείο του, όχι μόνο ως μέσο διασκέδασης αλλά και ως εργαλείο για τη δουλειά του. Για το λόγο αυτό ξεκινήσαμε την περιήγηση στην πληροφορική, θεωρώντας ότι ο μαθητής **δεν** έχει άλλη σχετική γνώση. Έτσι, αν ακολουθήσει σωστά τις οδηγίες μας, θα μπορέσει να αποκτήσει μια κάποια αρχική εμπειρία.

Τα παραδείγματα που αναπτύσσονται φροντίσαμε να τα αντλήσουμε - όσο ήταν δυνατόν - από την ύλη του κάθε κεφαλαίου ώστε να γίνει αντιληπτό ότι η πληροφορική δεν είναι «αλλοιώτικη» αλλά έρχεται να βοηθήσει μεταξύ των άλλων και τα μαθήματα του σύγχρονου νέου.

Αν καταφέραμε να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των αναγνωστών μας, τότε θα πρέπει να καταφύγουν σε κάποιο εξειδικευμένο βιβλίο για την εκμάθηση της γλώσσας BASIC ή οποιασδήποτε άλλης επιθυμούν.

Πιστεύουμε ότι με το βιβλίο αυτό συμβάλλουμε αναλογικά στην ανύψωση της εκπαιδευτικής στάθμης των μαθητών. Θα ήταν τιμή μας αν οι αναγνώστες επικοινωνούσαν μαζί μας για οποιαδήποτε παρατήρηση που τυχόν έχουν, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη παρουσίαση στις επόμενες εκδόσεις.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Φυσικοί και δεκαδικοί αριθμοί

1.1 Οι φυσικοί αριθμοί
1.2 Οι δεκαδικοί αριθμοί
1.3 Σύγκριση δύο αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πώς σημειώνεται το σύνολο των φυσικών αριθμών και ποια στοιχεία περιέχει;

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών σημειώνεται με το γράμμα ℕ και περιέχει τα στοιχεία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 κ.λπ.

2. Ποιοι λέγονται περιττοί και ποιοι άρτιοι αριθμοί;

2. Από το σύνολο των φυσικών αριθμών ξεχωρίζουμε τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9, 11 κ.λπ. που λέγονται **περιττοί** (μονοί) αριθμοί και τους 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 κ.λπ. που λέγονται **άρτιοι** (ζυγοί) αριθμοί.

3. Ποια η βασική διαφορά των περιττών αριθμών από τους αρτίους;

3. Η βασική διαφορά των αρτίων από τους περιττούς είναι το ότι οι άρτιοι διαιρούνται με το **2** (είναι πολλαπλάσια του 2) ενώ οι περιττοί όχι.

4. Πότε χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς; Ποιο είναι το ακέραιο μέρος τους και ποιο το δεκαδικό;

4. Όταν θέλουμε να μετρήσουμε μία ποσότητα μεταξύ δύο φυσικών αριθμών χρησιμοποιούμε τους δεκαδικούς αριθμούς. Το ύψος ενός ανθρώπου, για παράδειγμα είναι 1 μέτρο και 83 εκατοστά. Γράφουμε 1,83 μέτρα. Μια φρατζόλα ψωμί είναι 850 γραμμάρια. Γράφουμε 0,850 κιλά. Το τμήμα αριστερά της υποδιαστολής **(,)** είναι το **ακέραιο μέρος** ενώ το αντίστοιχο, στα δεξιά της υποδιαστολής, είναι το **δεκαδικό**.

<u>Σημείωση:</u> Στα Μαθηματικά βιβλία που

προέρχονται από τις Αγγλοσαξωνικές χώρες, θα δούμε το σύμβολο της υποδιαστολής όχι με κόμμα αλλά με τελεία (.), π.χ. 34.77 αντί για 34,77.

5. Πώς συμβολίζονται οι μαθηματικές εκφράσεις: α μεγαλύτερο του β και γ μικρότερο του δ;

5. Η έκφραση **α** μεγαλύτερο του **β** συμβολίζεται: **α > β.**
Ενώ η **γ** μικρότερο του **δ** συμβολίζεται: **γ < δ.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Πώς θα διαβάσουμε τους παρακάτω αριθμούς: 66,37 , 3,435 , 2,043 , 0,045 , 0,009 , 5,6

Λύση

66,37 → εξήντα έξι και τριάντα επτά εκατοστά
3,435 → τρία και τετρακόσια τριαντα-πέντε χιλιοστά
2,043 → δύο και σαράντα τρία χιλιοστά
0,045 → σαράντα πέντε χιλιοστά
0,009 → εννέα χιλιοστά
5,6 → πέντε και έξι δέκατα

2. Να γράψετε δέκα άρτιους και δέκα περιττούς αριθμούς μεταξύ του 90 και του 200.

Λύση

Άρτιοι: 92, 98, 106, 114, 120, 136, 158, 160, 172, 184.
Περιττοί: 91, 99, 103, 117, 131, 135, 145, 157, 169, 193.

<u>Παρατήρηση:</u> Εάν το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι 0, 2, 4, 6, ή 8 τότε ο αριθμός είναι **άρτιος**, ενώ εάν το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι 1, 3, 5, 7 ή 9 ο αριθμός είναι **περιττός**.

3. Αν σήμερα είναι Κυριακή, ποια μέρα θα είναι μετά από α) 7 μέρες, β) 16 μέρες, γ) 25 μέρες;

Λύση

Επειδή μια εβδομάδα έχει 7 ημέρες τότε:
α) μετά 7 ημέρες θα είναι πάλι Κυριακή
β) επειδή 16 = 7 + 7 + 2 τότε μετά από 16 ημέρες θα είναι Τρίτη
γ) επειδή 25 = 3·7 + 4 τότε μετά από 25 ημέρες θα είναι Πέμπτη.

4. Να συγκρίνετε τα ζεύγη των παρακάτω αριθμών:
α) 35 και 141 , β) 537 και 535 ,
γ) 1197 και 1186 , δ) 5,7 και 6,75 ,
ε) 10,75 και 10,76 , στ) 81 και 80,746.

Λύση

α) 35 και 141: μεγαλύτερος είναι ο 141, γιατί έχει περισσότερα ψηφία.
β) 537 και 535: μεγαλύτερος είναι ο 537, γιατί, ενώ έχουν τον ίδιο αριθμό ψηφίων, ο 537 έχει μεγαλυτερο το ψηφίο των μονάδων.
γ) 1197 και 1186: μεγαλύτερος είναι ο 1197, γιατί, ενώ έχουν τον ίδιο αριθμό ψηφίων, έχει μεγαλύτερο το ψηφίο των δεκάδων.
δ) 5,7 και 6,75: μεγαλύτερος είναι ο 6,75, γιατί έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.
ε) 10,75 και 10,76: μεγαλύτερος είναι ο 10,76, γιατί, ενώ έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος, ο 10,76 έχει μεγαλύτερο ψηφίο εκατοστών.
στ) 81 και 80,746: μεγαλύτερος είναι το 81, γιατί έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: 35,5 , 1,002 , 2,47, 1,02 , 0,35 , 0,035.

Λύση

Μεγαλύτερος είναι ο 35,5 , γιατί έχει τα περισσότερα ψηφία στο ακέραιο μέρος του, ενώ αμέσως μικρότερος είναι ο 2,47, γιατί έχει το μεγαλύτερο ψηφίο μονάδων από τους υπόλοιπους. Μεταξύ του 1,002 και του 1,02, μεγαλύτερος είναι ο 1,02 , γιατί έχει μεγαλύτερο ψηφίο εκατοστών, ενώ μεταξύ των 0,35 και 0,035, μεγαλύτερος είναι ο 0,35 γιατί έχει μεγαλύτερο ψηφίο δεκάτων. Η σειρά είναι:
35,5 > 2,47 > 1,02 > 1,002 > 0,35 > 0,035.

6. Στον παρακάτω πίνακα να αντικαταστήσετε το σύμβολο * με ένα από τα σύμβολα = , < , > με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε αληθή έκφραση.

12,5	*	12,06
183,1	*	182,9
0,04	*	0,5
23,1	*	23,10
19,9	*	20,1
5,445	*	5,447

Λύση

12,5	>	12,06
183,1	>	182,9
0,04	<	0,5
23,1	=	23,10
19,9	<	20,1
5,445	<	5,447

7. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1991, 199,1, 19,91, 1,991. Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;

Λύση

Η σειρά είναι:
1991 > 199,1 > 19,91 >1,991.
Ο 1991 είναι δέκα φορές μεγαλύτερος από τον 199,1. Ο 199,1 είναι δέκα φορές μεγαλύτερος από τον 19,91. Ο 19,91 είναι δέκα φορές μεγαλύτερος από τον 1,991.

<u>Παρατήρηση:</u> Εάν μεταφέρουμε την υποδιαστολή του δεκαδικού αριθμού ένα ψηφίο προς τα **δεξιά**, προκύπτει αριθμός **μεγαλύτερος** κατά δέκα φορές.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Πώς θα διαβάσουμε τους παρακάτω αριθμούς: α) 57,45 β) 574,5 γ) 37,456 δ) 0,46 ;

Λύση

α) 57,45 πενήντα επτά και σαράντα πέντε εκατοστά
β) 574,5 ....
γ) 37,456 ....
δ) 0,46 ....

2. Πόσοι άρτιοι και πόσοι περιττοί υπάρχουν μεταξύ του 21 και του 50;

Λύση

Οι άρτιοι είναι: 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46 48. Άρα οι άρτιοι μεταξύ του 21 και του 50 είναι 14.
Οι περιττοί είναι οι...

3. Η 29η Σεπτεμβρίου 1992 είναι ημέρα Τρίτη.
α) Πότε είναι η επόμενη Τρίτη;
β) Τι μέρα είναι η 23η Οκτωβρίου;

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι ο Σεπτέμβριος έχει τριάντα ημέρες. Την ημερομηνία μιας ημέρας θα τη βρούμε αν προσθέσουμε το 7 στην ημερομηνία της ίδιας μέρας

την προηγούμενη εβδομάδα.
Άρα: 29 + 7 = 36, δηλαδή η επόμενη Τρίτη είναι η 6η (30 + 6) Οκτωβρίου.
β) 6 + 7 = 13, 13 + 7 = ...

4. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς: α) 23,7 και 23,75 β) 401,65 και 411,65 γ) 0,38 και 0,395 δ) 1,305 και 2,003 ε) 50 και 49,99 στ) 1835 και 1798.

Λύση

α) 23,7 < 23,75 γιατί ο 23,75 έχει μεγαλύτερο το ψηφίο των εκατοστών, αν λάβουμε υπόψη μας ότι ο 23,7 γράφεται και 23,70.
β) 401,65 < 411,65 γιατί ...

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: 47,58 , 39,698 , 0,9 , 0,09 , 591,01 , 592, 1,111 , 11,11.

Λύση

Είναι: 592 > 591,01 > ....

6. Να συμπληρωθούν τα κενά στον παρακάτω πίνακα:

Λύση

0,47	σαράντα επτά εκατοστά
	τριάντα οκτώ και έξι δέκατα
	εκατόν είκοσι έξι και τρία εκατοστά
1,75	
	δύο και επτά δέκατα
10,655	
	σαράντα και εκατόν είκοσι έξι χιλιοστά

7. Να τοποθετηθούν τα κατάλληλα σύμβολα ανισότητας στα παρακάτω ζεύγη:
α) 20 και 20,01 β) 59, 95 και 59,92
γ) 7 και 6,5 δ) 375 και 385
ε) 0,47 και 0,74 στ) 0,1 και 1 .

Λύση

α) 20 < 20, 01
β) ...

8. Να γράψετε όλους τους αριθμούς που υπάρχουν με ψηφία 1, 7, 0, 4, 5 (διατηρώντας τη σειρά) και να τους ονομάσετε.

Λύση

17045 δέκα επτά χιλιάδες σαράντα πέντε
1704,5 ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Πόσες ημέρες υπάρχουν μεταξύ της 3ης Ιουλίου και 17ης Ιουλίου;

2. Πόσες νύκτες μεσολαβούν από την 3η Ιουλίου το πρωί μέχρι τη 17η Ιουλίου το μεσημέρι;

3. Η 19η Ιανουαρίου είναι Παρασκευή. Ποιες είναι οι ημερομηνίες των υπόλοιπων Παρασκευών του Ιανουαρίου;

4. Να βρείτε από τους παρακάτω φυσικούς αριθμούς ποιοι είναι μονοψήφιοι, ποιοι διψήφιοι, ποιοι τριψήφιοι, ποιοι άρτιοι και ποιοι περιττοί: 48, 735, 9, 89, 91, 106, 987, 458, 191, 76, 6, 3, 555.

5. Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων και των εκατοστών στους παρακάτω αριθμούς: 45,76 , 0,986 , 1145 , 19,1 , 59,22 1,5 , 0,76 , 100 .

6. Γράψτε όλους τους αριθμούς, φυσικούς και δεκαδικούς, που υπάρχουν με ψηφία τους αριθμούς 5, 6, 7. Πώς διαβάζονται;

7. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους

αριθμούς: 43,7 , 5,76 , 0,1 , 1,02 44,4 101,7 , 10,7 , 101,6.

8) Γράψτε τους αριθμούς που είναι δέκα φορές μεγαλύτεροι από τους: 43 75,7 910 1,02 13,476 0,01 1,475 5 6,3 19,81 .

9) Βάλτε το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας μεταξύ των αριθμών: 76 και 75 , 0,3 και 3 , 11,1 και 111 , 22 και 21,96 37,06 και 37,07 ; 7,3 και 7,321.

10. Για ποια στοιχεία x του συνόλου των φυσικών αριθμών ισχύει: x < 13 ;

11. Για ποιους φυσικούς αριθμούς x ισχύει: 23 < x < 35,7 ;

12. Για ποιους άρτιους αριθμούς x ισχύει: 7,1 < x < 19,3 και για ποιους περιττούς αριθμούς x ισχύει: 10 < x < 29,6 ;

13. Ποιοι είναι οι διψήφιοι αριθμοί που τουλάχιστον ένα ψηφίο τους είναι το 7; Πόσοι είναι αυτοί;

1. 4 Στρογγυλοποίηση αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι κάνουμε όταν θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό σε μια τάξη του;

<u>Στρογγυλοποίηση</u>

13,75 → 14,00
13,25 → 13,00
13,24 → 13,20
13,27 → 13,30

Απαντήσεις

1. Όταν θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό σε μια τάξη του, κάνουμε τις εξής ενέργειες:

α) Εξετάζουμε, αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 0, 1, 2, 3 ή 4. Σε αυτή την περίπτωση αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι μέχρι και την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία του.

β) Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 5, 6, 7, 8 ή 9 αυξάνουμε κατά μια μονάδα τον αριθμό της τάξης που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία του αριθμού.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 17.534 και 983 στην πλησιέστερη δεκάδα και εκατοντάδα.

Λύση

α) 17.534: το ψηφίο των δεκάδων είναι το τρία. Το επόμενο ψηφίο, δηλαδή το ψηφίο των μονάδων είναι το 4. Άρα η στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη δεκάδα είναι το 17.530.
Το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 5. Το επόμενο ψηφίο είναι το 3. Άρα η στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη εκατοντάδα είναι 17.500.

β) 983: με παρόμοιο τρόπο η στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη δεκάδα είναι 980, ενώ στην πλησιέστερη εκατοντάδα είναι 1.000.

2. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 3,999 και 4,598 στο πλησιέστερο εκατοστό.

Λύση

3,999: στο πλησιέστερο εκατοστό η στρογγυλοποίηση δίνει 4,00 δηλαδή 4.
4,598: στο πλησιέστερο εκατοστό η στρογγυλοποίηση δίνει 4,600 δηλαδή 4,6.

3. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 57,126 και 7,585 στο πλησιέστερο δέκατο και εκατοστό.

Λύση

α) 57,126: στο πλησιέστερο δέκατο είναι57,1 , ενώ στο πλησιέστερο εκατοστό είναι 57,13.
β) 7,585: στο πλησιέστερο δέκατο είναι 7,6 ενώ στο πλησιέστερο εκατοστό είναι 7,59.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα:
57389 6343 1551 639 94
19345 20014 5677 555 1001

Λύση

57389 → 57390 , 6343 → 6340
1551 → 639 →
94 → 19345 →
20014 → 5677 →
555 → 1001 →

2. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη εκατοντάδα:
43859 96735 987 1003576
89 456 543 3457

Λύση

43859 → 43900 96735 → 96700
987 → 1003576 →
89 → 456 →
543 → 3457 →

3. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη χιλιάδα:
1743 6358 103678
44555 76500 20358

Λύση

1743 → 2000 6358 → 6000
103678 → 44555 →
76500 → 20358 →

4. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο πλησιέστερο εκατοστό:
7,539 4,744 15,983 10,488
101,301 0,043 6,439 7,597

Λύση

7,539 → 7,54 4,744 → 4,74
15,983 → 10,488 →
101,301 → 0,043 →
6,439 → 7,597 →

5. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη μονάδα:
8,459 77,643 1,2 0,843
0,01 107,4 38,49 50,784

Λύση

8,459 → 8 77,643 → 78
1,2 → 0,843 →
0,01 → 107,4 →
38,49 → 50,784 →

6. Στις 27 Σεπτεμβρίου 1992 έγιναν τα παρακάτω παιγνίδια ποδοσφαίρου για

το πρωτάθλημα Α' εθνικής κατηγορίας. Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι θεατές και οι εισπράξεις κάθε παιγνιδιού. Κάντε στρογγυλοποίηση στην εκατοντάδα στους θεατές, και στην χιλιάδα στις εισπράξεις.

	θεατές	στρογγυλοποίηση στην εκατοντάδα	εισπράξεις	στρογγυλοποίηση στην χιλιάδα
1	12880	12900	9.140.300	9.140.000
2	3550		2.180.500	
3	5387		3.469.700	
4	2967		2.025.050	
5	6006		5.583.200	
6	2817		2.029.500	
7	3044		1.921.500	
8	30086		27.810.400	

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη εκατοντάδα:
1.087 33.457 947 10.166
4.506 103.463 4.796 3.986

2. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα:
783 1.444 3.784 99
147 10.381 99.999 803

3. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στην πλησιέστερη μονάδα:
17,6 0,453 1871,5 44,78
1,35 2,1 53,96 19,67

4 . Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο πλησιέστερο δέκατο:
0,47 83,35 19,434 10,387
9,34 39,75 109,56 99,96

5. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο πλησιέστερο εκατοστό:
17,459 35,873 3,469 0,043
0,976 0,996 10,784 1,357

6. Πέντε εφημερίδες έχουν την παρακάτω ημερήσια κυκλοφορία αντίστοιχα
Α: 165.863 , Β: 128.390
Γ: 104.993 , Δ: 78.111
Ε: 70.848
Να κάνετε ένα πίνακα στον οποίο να γράψετε τις εφημερίδες, τις ημερήσιες κυκλοφορίες τους αντίστοιχα και τις στρογγυλοποιήσεις αυτών των αριθμών στην πλησιέστερη χιλιάδα και στην πλησιέστερη εκατοντάδα.

1.5 Η έννοια της μεταβλητής

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι είναι μεταβλητή; Πώς συμβολίζεται; Δώστε ένα παράδειγμα.

Απαντήσεις

1. Μεταβλητή είναι μια μαθηματική έννοια που μπορεί να πάρει μια οποιαδήποτε αριθμητική τιμή από κάποιο συγκεκριμένο σύνολο. Μπορεί δηλαδή να μεταβάλλεται (μεταβλητή). Συμβολίζεται με ένα γράμμα (συνήθως x, y κ.λπ.) της Ελληνικής ή Αγγλικής Αλφαβήτου. Αν δηλαδή διαλέξουμε το σύνολο αριθμών $\{1,2,3,4\}$ και τη μεταβλητή x τότε μπορεί: $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$ ή $x = 4$.

2. Σε τι χρησιμεύει η μεταβλητή;

2. Η μεταβλητή χρησιμοποιείται για να παριστάνουμε τις εκφράσεις του λόγου με μαθηματικές παραστάσεις.
π.χ. αριθμός αυξημένος κατά τρία: $x + 3$
το διπλάσιο ενός αριθμού: $2x$.
Όταν ανάμεσα στη μεταβλητή και στον αριθμό δεν υπάρχει μαθηματικό σύμβολο (+, -, :, ·) τότε θεωρούμε ότι υπάρχει το σύμβολο του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή: $2x = 2 \cdot x$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε τις εκφράσεις που ακολουθούν με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:
α) το τριπλάσιο ενός αριθμού
β) στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέτω 6 και βρίσκω 11
γ) οι αριθμοί μικρότεροι του 10
δ) τα τέσσερα πέμπτα ενός αριθμού
ε) το πενταπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο του 15.

Λύση

α) Συμβολίζουμε με α τον αριθμό. Άρα το τριπλάσιό του είναι $3α$.
β) Έστω x ο αριθμός, τότε η έκφραση γράφεται: $2x + 6 = 11$.
γ) Έστω y οι αριθμοί, τότε $y < 10$.
δ) Αν είναι β ο αριθμός, τότε τα τέσσερα πέμπτα του είναι $\frac{4}{5}β$
ε) Παριστάνουμε τον αριθμό με x. Η έκφραση που μας ενδιαφέρει γράφεται:
$5x > 15$.

2. Διατυπώστε με λόγια τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις:

α) $4x$, β) $4x - 1 = 3$, γ) $\frac{1}{2}x < 3$

δ) $x - 3 > 5$ ε) $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x = 1$

Λύση

α) το τετραπλάσιο ενός αριθμού.

β) το τετραπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 ισούται με 3.

γ) το μισό ενός αριθμού είναι μικρότερο του 3.

δ) ένας αριθμός μειωμένος κατά 3 είναι μεγαλύτερος του 5.

ε) τα τρία τέταρτα ενός αριθμού αν προστεθούν στα δύο τρίτα του ίδιου αριθμού ισούνται με ένα.

3. Ποια είναι η περίμετρος του τετραγώνου;

Λύση

Όπως είναι γνωστό, το τετράγωνο είναι γεωμετρικό σχήμα με 4 ίσες πλευρές. Ας συμβολίσουμε με x το μήκος της πλευράς του τετραγώνου. Τότε η περίμετρος θα είναι 4x.

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς ΒΓ και η ΑΓ είναι το μισό της ΒΓ. Να βρεθεί η περίμετρός του.

Λύση

Έστω x η πλευρά ΒΓ, τότε η ΑΒ είναι 2x

και η ΑΓ είναι $\frac{1}{2}x$

Άρα η περίμετρός του είναι:

$$2x + x + \frac{1}{2}x.$$

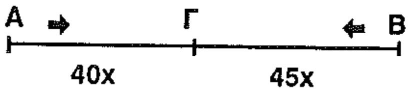
5. Δίνεται η μαθηματική έκφραση: $8{,}3 < x < 15{,}7$. Να βρείτε για ποιους φυσικούς αριθμούς x, αυτή αληθεύει.

Λύση

Η έκφραση $8{,}3 < x < 15{,}7$, όπου x φυσικός αριθμός, σημαίνει: οι φυσικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι μικρότεροι του 15,7 και μεγαλύτεροι του 8,3. Άρα αυτοί οι αριθμοί είναι οι:
9, 10, 11, 12, 13, 14 και 15.

6. Δύο ποδηλάτες ξεκινούν από δύο πόλεις Α και Β. Ο ένας από την Α προς τη Β και ο άλλος από τη Β προς την Α. Αν η ταχύτητα του ποδηλάτη που ξεκινά από την πόλη Α είναι 40 χιλ. την ώρα και η ταχύτητα του ποδηλάτη που ξεκινά από την πόλη Β είναι 45 χιλ. την ώρα, αυτοί συναντιούνται μετά από x ώρες σε ένα σημείο Γ. Να εκφράσετε την απόσταση των δύο πόλεων με τη βοήθεια της μεταβλητής x.

Λύση



Η απόσταση που θα διανύσει ο πρώτος ποδηλάτης θα είναι 40x χιλιόμετρα. Η απόσταση που θα διανύσει ο δεύτερος ποδηλάτης θα είναι 45x χιλιόμετρα. Άρα η απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων είναι: $40x + 45x$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να γράψετε τις ακόλουθες εκφράσεις:
α) το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1,
β) ένας άρτιος αριθμός,
γ) ένας περιττός αριθμός.

Λύση

α) Είναι 2x - 1, αν με x παριστάνουμε τον αριθμό.

β) Γνωρίζουμε ότι κάθε άρτιος αριθμός διαιρείται με το 2. Άρα παίρνουμε άρτιο αριθμό κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε το 2 με ένα φυσικό αριθμό. Επομένως ...

γ) Γνωρίζουμε ότι παίρνουμε περιττό αριθμό κάθε φορά που προσθέτουμε το 1 σε ένα άρτιο. Επομένως ...

2. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να

γράψετε τις ακόλουθες εκφράσεις:
α) το γινόμενο ενός αριθμού επί το διπλάσιό του,
β) το άθροισμα ενός αριθμού με το 10,
γ) το άθροισμα ενός άρτιου αριθμού με το 8,
δ) το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Λύση

α) Αν x ο αριθμός, το διπλάσιό του είναι $2x$. Άρα το ζητούμενο γινόμενο είναι ...
β) Έστω x ο αριθμός. Άρα η ζητούμενη έκφραση είναι ...
γ) Ένας άρτιος αριθμός συμβολίζεται με το $2x$. Άρα ...
δ) Όταν έχουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Επομένως...

3. Να διατυπώσετε με λόγια τις παρακάτω εκφράσεις:
α) $3x > 2$, β) $x + 1 = 10$, γ) $2x+ 2 = 15$, δ) $3 \cdot (x + 1)$, ε) $2x > x + 1$

Λύση

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο του 2.
β) ....
γ) ....
δ)..
ε)..

4. Να βρεθεί η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου.

Λύση

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις ίσες πλευρές. Επομένως ...

5. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η βάση είναι 10 cm. Να βρείτε την περίμετρο.

Λύση

Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες. Ας συμβολίσουμε με x το μήκος κάθε μιας από τις ίσες πλευρές. Τότε η περίμετρος είναι .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γράψετε τις μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφουν οι ακόλουθες λεκτικές παραστάσεις:
α) το διπλάσιο ενός αριθμού,
β) ένας αριθμός αυξημένος κατά 2,
γ) το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 4,
δ) το διπλάσιο ενός αριθμού στον οποίο έχει προστεθεί το 8.

2. Να γράψετε τις μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφουν οι ακόλουθες λεκτικές παραστάσεις:
α) ένας αριθμός μεγαλύτερος του 5,
β) το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μικρότερο του 6,
γ) ένας αριθμός μειωμένος κατά 6 είναι μικρότερος του 10,
δ) ένας αριθμός μικρότερος του 17 και μεγαλύτερος του 3.

3. Να διατυπωθούν με λόγια οι ακόλουθες εκφράσεις:
α) $x - 2$, β) $6 \cdot x + 1$, γ) $2 \cdot x + 6$, δ) $2 \cdot (x - 1)$, ε) $3 \cdot (x + 3)$

4. Να διατυπωθούν με λόγια οι ακόλουθες εκφράσεις:
α) $3x = 2$, β) $x - 4 = 5$, γ) $x > 1$
δ) $4x - 2 < 20$, ε) $3 < x < 20$.

5. Να βρεθεί μαθηματική έκφραση που να δηλώνει το εμβαδό ενός τετραγώνου.

6. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει πλευρά βάσης 2 εκατοστά. Να γραφεί ο τύπος που δίνει την περίμετρό του.

7. Σε ένα κινηματογράφο υπάρχουν 580 άτομα. Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής που συμβολίζει την τιμή του εισιτηρίου, να βρείτε την είσπραξη του ταμείου.

8. Σε ένα ορθογώνιο η πλευρά της βάσης του είναι κατά 5 εκατοστά μικρότερη από το ύψος του. Να βρείτε τη μαθηματική έκφραση που δηλώνει το εμβαδόν του.

9. Πενήντα πέντε λαμπαδηδρόμοι μεταφέρουν την Ολυμπιακή φλόγα από μία πόλη Α σε μία πόλη Β, διανύοντας ίσες αποστάσεις ο καθένας. Να βρείτε ένα τύπο που δείχνει την απόσταση μεταξύ των πόλεων Α και Β.

1.6 Η έννοια της εξίσωσης

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι λέγεται εξίσωση;	**1. Εξίσωση** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή. π.χ. $x + 3 = 9$. Η μεταβλητή ονομάζεται **άγνωστος** της εξίσωσης.
2. Τι λέγεται πρώτο μέλος, τι δεύτερο, τι λύση ή ρίζα της εξίσωσης;	**2.** Στην εξίσωση $x + 3 = 9$, η παράσταση $x + 3$ λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ ο αριθμός 9 λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης. Ο αριθμός 6 που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης. $(6 + 3 = 9)$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 7 είναι λύση της εξίσωσης $x + 5 = 12$.

Λύση

Στην παραπάνω εξίσωση αντικαθιστούμε στη θέση του x τον αριθμό 7. Και προκύπτει η ισότητα: $7 + 5 = 12$ η οποία είναι αληθής. Άρα ο αριθμός 7 είναι η λύση της εξίσωσης.

2. Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 5, 9, 10 είναι λύσεις της εξίσωσης: $x + 2 = 11$.

Λύση

Δοκιμάζουμε διαδοχικά τους αριθμούς 1, 2, 5, 9, 10 στη θέση του x στην εξίσωση:
$x + 2 = 11$ και έχουμε:

$1 + 2 = 11$ ψευδής
$2 + 2 = 11$ ψευδής
$5 + 2 = 11$ ψευδής
$9 + 2 = 11$ αληθής
$10 + 2 = 11$ ψευδής

Επομένως ο μόνος αριθμός που είναι λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 9.

3. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στον αριθμό 11 για να βρούμε άθροισμα 32;

Λύση

Έστω x ο αριθμός που ζητάμε τότε δημιουργείται η εξίσωση: $x + 11 = 32$. Αναζητούμε διάφορους αριθμούς που είναι πιθανή λύση της εξίσωσης και με διαδοχικές δοκιμές, όπως στο παραπάνω πρόβλημα, βρίσκουμε ότι η λύση είναι ο αριθμός 21. Πράγματι:
$21 + 11 = 32$.

4. Δύο εισιτήρια λεωφορείου στοιχίζουν 100 δρχ. Πόσο στοιχίζει το καθένα;

Λύση

Έστω y η τιμή καθενός από τα εισιτήρια. Τότε: $2y = 100$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκω ότι η λύση της εξίσωσης: $2y = 100$ είναι $y = 50$. Άρα η τιμή κάθε εισιτηρίου είναι 50 δρχ.

5. Βρείτε ποιος απο τους αριθμούς 5, 2, 3, 7 είναι λύση της εξίσωσης:
$x + 2 + x = 2x + 2$

Λύση

Δοκιμάζουμε διαδοχικά τους αριθμούς 5, 2, 3, 7 στην εξίσωση και έχουμε:
$5 + 2 + 5 = 2 \cdot 5 + 2$ αληθής, άρα ο 5 είναι λύση της εξίσωσης.
$2 + 2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2$ αληθής, άρα ο 2 είναι λύση της εξίσωσης.
$3 + 2 + 3 = 2 \cdot 3 + 2$ αληθής, άρα ο 3 είναι λύση τηςεξίσωσης.
$7 + 2 + 7 = 2 \cdot 7 + 2$ αληθής, άρα ο 7 είναι λύση της εξίσωσης.

6. Αν από το διπλάσιο ενός αριθμού αφαιρέσουμε το 3 προκύπτει ο αριθμός 7. Ποιος είναι ο αριθμός που ικανοποιεί την παραπάνω πρόταση;

Λύση

Συμβολίζουμε με το ω τον αριθμό που ικανοποιεί την παραπάνω πρόταση. Τότε η εξίσωση που σχηματίζουμε είναι η: $2\omega - 3 = 7$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\omega = 5$.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί αν ο αριθμός 4 είναι λύση της εξίσωσης $x - 4 = 2$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή αντικαθιστούμε στη θέση του x τον αριθμό 4 και έχουμε: $4 - 4 = 2$ που είναι ψευδής έκφραση άρα ...

2. Να βρεθεί αν ο αριθμός 7 είναι λύση της εξίσωσης $3 + x = 10$.

Λύση

Αντικαθιστούμε στη θέση του x τον αριθμό 7 και έχουμε ...

3. Ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 4, 8 είναι λύσεις της εξίσωσης $2x = 8$;

Λύση

Δοκιμάζουμε διαδοχικά τους αριθμούς 1, 2, 4, 8, και έχουμε: $2 \cdot 1 = 8$ ψευδής ...

4. Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 10 είναι 8. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;

Λύση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός, τότε σχηματίζουμε την εξίσωση: $2x - 10 = 8$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε ότι ...

5. Κάποιος μαθητής διαθέτει 1.200 δρχ. και θέλει να αγοράσει δύο βιβλία που έχουν την ίδια τιμή. Του λείπουν όμως 100 δρχ. Ποια είναι η τιμή κάθε βιβλίου;

Λύση

Έστω x η τιμή κάθε βιβλίου. Τότε και τα δύο μαζί κοστίζουν 2x δρχ. Αλλά τα χρήματα που έχει είναι κατά 100 δρχ. λιγότερα δηλαδή έχει 2x - 100 δρχ. Σχηματίζεται έτσι η εξίσωση: $2x - 100 = 1.200$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε ότι ...

6. Δίνονται οι εξισώσεις:
α) $x + 3 = 7$ β) $2x = 6$ γ) $3x - 6 = 3$ δ) $2 \cdot (x + 1) = 10$ ε) $4x + 3 = 23$ στ) $2x + 1 = x + 1 + x$. Να βρείτε ποιοι

από τους αριθμούς 4, 2, 5, 3, 6 είναι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων, να κατασκευάσετε και να συμπληρώσετε έναν πίνακα με τρείς στήλες. Στην πρώτη στήλη να γράφονται οι εξισώσεις. Στη δεύτερη οι αριθμοί που επαληθεύουν κάθε εξίσωση και στην τρίτη οι αριθμοί που δεν την επαληθεύουν.

Λύση

Βλέπε τον παρακάτω πίνακα:

Εξίσωση	αριθμοί που την επαληθεύουν	αριθμοί που δεν την επαληθεύουν
$x + 3 = 7$	4	2, 5, 3, 6
$2x = 6$		
$3x - 6 = 3$		
$2 \cdot (x + 1) = 10$		
$4x + 3 = 23$		
$2x + 1 = x + 1 + x$		

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να εξακριβώσετε αν οι αριθμοί 4, 6, 8, 10 είναι λύσεις της εξίσωσης:
$x + 3 = 11$

2. Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς 1, 9, 13, 8, 17 είναι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:
α) $x + 3 = 20$ β) $2x - 1 = 17$
γ) $x - 2 = 22 - x$ δ) $3x + 1 = 53 - x$

3. Να εκφράσετε το παρακάτω πρόβλημα με μια εξίσωση και να βρείτε τη λύση του με διαδοχικές δοκιμές. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 30.

4. Να βρεθούν με διαδοχικές δοκιμές οι λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:
α) $\psi - 3 = 8$ β) $\varphi + 3 = 2\varphi - 5$
γ) $80 - \varphi = 75$ δ) $\omega - 13 = 2$
ε) $22 = 2 \cdot x$

5. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα δοκιμάζοντας τους αριθμούς 7, 9, 5, 3, 2.

Εξίσωση	αριθμοί που την επαληθεύουν	αριθμοί που δεν την επαληθεύουν
$x + 2 = 11$		
$2x = 14$		
$x + 3 = 3 + x$		
$3x + 1 = 7$		

1.7 Πρόσθεση φυσικών και δεκαδικών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πότε χρησιμοποιούμε ως αριθμητική πράξη την πρόσθεση;	**1.** Όταν μας δίνεται ένας αριθμός **α** και ζητείται να βρεθεί πόσος θα γίνει αυτός, αν αυξηθεί κατά ένα αριθμό **β**, τότε κάνουμε **πρόσθεση**, π.χ. μας δίνεται ο αριθμός 8 και ζητείται να βρούμε πόσος θα γίνει αυτός, αν αυξηθεί κατά 5. Θα κάνουμε πρόσθεση. Έτσι έχουμε: $8 + 5 = 13$.
2. Πώς λέγονται δύο αριθμοί που τους προσθέτουμε; Πώς λέγεται το αποτέλεσμα της πρόσθεσης;	**2.** Δύο αριθμοί που τους προσθέτουμε λέγονται **προσθετέοι**. Ο αριθμός που βρίσκουμε από την πρόσθεση λέγεται **άθροισμα**.
3. Μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερους από δύο αριθμούς, και με ποιο τρόπο;	**3.** Η πρόσθεση μπορεί να γίνει και με περισσότερους από δύο αριθμούς και μάλιστα χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των προσθετέων.
4. Με ποιο τρόπο είναι πιο εύκολο να προσθέσουμε περισσότερους από δύο αριθμούς;	**4.** Όταν πρέπει να προσθέσουμε περισσότερους από δύο αριθμούς, μπορούμε να τους κατατάξουμε κατακόρυφα, βάζοντας τις μονάδες κάτω από τις μονάδες και τις δεκάδες κάτω από τις δεκάδες, τα δέκατα κάτω από τα δέκατα κ.ο.κ. και να προσθέσουμε μετά τα ομοτάξια ψηφία.
5. Ποια είναι η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης;	**5.** **Αντιμεταθετική ιδιότητα** της πρόσθεσης είναι η ιδιότητα που προκύπτει αν αντιμεταθέσουμε (εναλλάξουμε) τους δύο προσθετέους. Η μαθηματική της διατύπωση είναι: $\mathbf{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$ π.χ. $3 + 4 = 4 + 3 = 7$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το άθροισμα:
37 + 63 + 41 .

Λύση

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα:
37 + 63 + 41, υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα: 37 + 63 και μετά σε αυτό προσθέτουμε το 41.
Επομένως: 37 + 63 = 100.
Οπότε: 100 + 41 = 141.
Άρα: 37 + 63 + 41 = 141 .

2. Κάποιος αγόρασε 5 είδη από ένα κατάστημα και πλήρωσε για καθένα από αυτά αντίστοιχα: 45 δρχ. , 137 δρχ., 431 δρχ., 67 δρχ. και 953 δρχ. Να βρείτε πόσα χρήματα ξόδεψε συνολικά.

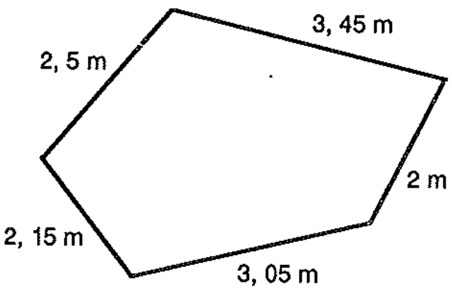
Λύση

Αρκεί να προσθέσουμε τα χρήματα που ξόδεψε για κάθε είδος. Δηλαδή πρέπει να βρούμε πόσο είναι το άθροισμα:
45 + 137 + 431 + 67 + 953.
Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{r} 45 \\ 137 \\ 431 \\ 67 \\ +\ 953 \\ \hline 1.633 \end{array}$$

Άρα ξόδεψε συνολικά 1.633 δρχ.

3. Να υπολογιστεί το άθροισμα των πλευρών του παρακάτω σχήματος:



Λύση

Πρέπει να κάνουμε την παρακάτω πρόσθεση:

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ 3,45 \\ 2 \\ 2,15 \\ +\ 3,05 \\ \hline 13,15 \end{array}$$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι 13,15 m.

4. Αν x + y = 7 και x + ω = 6 και y + ω = 5 να βρεθούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) 3 + x + 6 + y =
β) 3 + x + ω + y + 5 + ω =
γ) 4 + 3 + x + 6 + ω =
δ) 9 + y + ω + 6 + y + x =

Λύση

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε αριθμούς μ' όποια σειρά θέλουμε, οπότε έχουμε:

α) 3 + x + 6 + y = 3 + 6 + x + y =
9 + 7 = 16
β) 3 + x + ω + y + 5 + ω =
3 + 5 + x + ω + y + ω =
8 + 6 + 5= 19
γ) 4 + 3 + x + 6 + ω =
4 + 3 + 6 + x + ω = 13 + 6 = 19
δ) 9 + y+ ω + 6 + y + x =
9 + 6 + y + ω + y + x =
15 + 5 + 7 = 27.

5. Να αντικατασταθούν με κατάλληλα ψηφία τα * στις παρακάτω προσθέσεις:

α) $\begin{array}{r} 5*8 \\ *43 \\ +\ 15* \\ \hline 845 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} 3,4* \\ 10,*3 \\ +\ 5,24 \\ \hline *8,68 \end{array}$ γ) $\begin{array}{r} 36,**7 \\ +\ 2,63* \\ \hline **,760 \end{array}$

Λύση

α) Τα ψηφία των μονάδων έχουν άθροισμα με τελευταίο ψηφίο το 5. Το άθροισμα των δύο μονάδων των προσθετέων έχουν άθροισμα 11. Άρα το άγνωστο ψηφίο πρέπει να είναι το 4, γιατί: 11 + 4 = 15 οπότε έχουμε 1 δεκάδα κρατούμενο. Τα ψηφία των δεκάδων των δύο προσθετέων έχουν άθροισμα 9 συν το κρατούμενο 10, οπότε για να βρούμε άθροισμα και των τριών προσθετέων με τελευταίο ψηφίο 4, πρέπει το άγνωστο ψηφίο να είναι το 4, γιατί 10 + 4 = 14, και έχουμε και εδώ 1 εκατοντάδα κρατούμενο. Τα ψηφία των εκατοντάδων των δύο προσθετέων έχουν άθροισμα 6 συν το κρατούμενο 7. Οπότε το ζητούμενο ψηφίο είναι το 1, γιατί 7 + 1 = 8. Έχουμε επομένως την πρόσθεση:

$$\begin{array}{r} 548 \\ 143 \\ +\ 154 \\ \hline 845 \end{array}$$

Με το ίδιο τρόπο οι υπόλοιπες προσθέσεις είναι:

β) $$\begin{array}{r} 3{,}41 \\ 10{,}03 \\ +\ 5{,}24 \\ \hline 18{,}68 \end{array}$$

γ) $$\begin{array}{r} 36{,}127 \\ +\ 2{,}633 \\ \hline 38{,}760 \end{array}$$

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω προσθέσεις:
α) 3 + 7,65 + 13,5 + 4,463 =
β) 1548 + 7 + 365 + 48,3 =
γ) 133 + 10,37 + 9,63 + 7 =

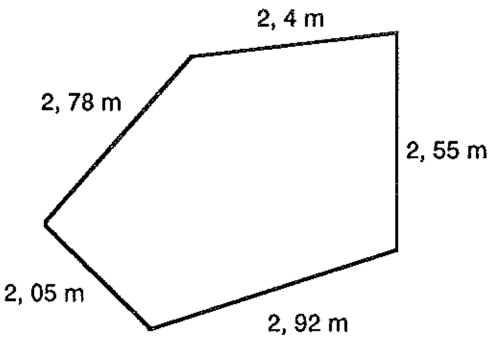
Λύση

α) $$\begin{array}{r} 3 \\ 7{,}65 \\ 13{,}5 \\ +\ 4{,}463 \\ \hline 28{,}613 \end{array}$$

β) $$\begin{array}{r} 1548 \\ 7 \\ 365 \\ +\ 48{,}3 \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

γ) $$\begin{array}{r} 133 \\ 10{,}37 \\ 9{,}63 \\ +\ 7 \\ \hline \ldots\ldots \end{array}$$

2. Να βρεθεί η περίμετρος του παρακάτω οικοπέδου:



Λύση

Για να βρούμε την περίμετρο του οικοπέδου αρκεί να προσθέσουμε τα μήκη των πλευρών του. Δηλαδή:
2,4 + 2,55 + 2,92 + 2,05 + 2,78 = ...

3. Αν κ + λ = 7 , λ + μ = 36, κ + λ + μ = 40. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:
α) 38 + κ + λ + 43 =
β) 21 + κ + 30 + μ + 6 + λ =
γ) λ + 21 + 105 + μ =
δ) 77 + λ + 43 + μ + κ =

Λύση

α) 38 + κ + λ + 43 = 38 + 43 + κ + λ= = 81 + 7 = 88
β) 21 + κ + 30 + μ + 6 + λ = 21 + 30 + 6 + κ + μ + λ = ...
γ) λ + 21 + 105 + μ = ...
δ) 77 + λ + 43 + μ + κ = ...

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο τελευταίων στηλών.

α	β	α + β	β + α
77	38	115	115
143	44		
365	178		
531	49		
56	478		

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ένα βιβλίο κοστίζει 450 δρχ. Ένα άλλο βιβλίο κοστίζει 230 δρχ. περισσότερες από το πρώτο. Πόσες δρχ. κοστίζει το δεύτερο βιβλίο;

2. Πόσο πλήρωσε μια νοικοκυρά στο παντοπωλείο, όταν αγόρασε είδη που το καθένα από αυτά κόστισε 38,60 δρχ. 107 δρχ., 895,90 δρχ., 200 δρχ., και 1.750 δρχ.;

3. 4 πόλεις βρίσκονται στον ίδιο άξονα της Εθνικής οδού διαδοχικά με τη σειρά Α, Β, Γ, Δ. Η απόσταση από την πόλη Α στην πόλη Β είναι 88 Km. Η απόσταση από τη Β στην πόλη Γ είναι 143 Km και η απόσταση από τη Γ στη Δ είναι 122 Km. Να βρείτε τις αποστάσεις:
α) Από την πόλη Α στην πόλη Γ.
β) Από την πόλη Β στην πόλη Δ.
γ) Από την πόλη Α στην πόλη Δ.

4. Αν ισχύει: $x + y = 37$, $y + \omega = 41$ και $x + y + \omega = 70$ βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $44 + x + 35 + y =$
β) $y + 101 + 32 + \omega =$
γ) $\omega + 47 + x + 65 + y =$

5. Αν ισχύει: $x + y = 21{,}7$, $y + \omega = 28{,}5$ και $x + \omega = 37{,}2$, να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $11{,}7 + x + 43{,}1 + y =$
β) $y + 6{,}7 + \omega =$
γ) $\omega + 31{,}3 + x + 40 =$
δ) $x + 4 + y + 8{,}7 + y + \omega + 61 =$

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	γ	α + β	α + γ	α + β + γ	α + γ + β
43	71	38				
1,5	2,7	4,3				
1544	788	35				
10,3	7,8	3,5				
1,45	3,78	12				

1. 8 Αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι είναι η αφαίρεση;

Απαντήσεις

1. Η αφαίρεση είναι μία πράξη με την οποία όταν δίνονται δύο αριθμοί, Μ (μειωτέος), Α (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν

προστεθεί στον Α δίνει άθροισμα το Μ. Δηλαδή: Μ - Α = Δ , γιατί: Δ + Α = Μ.

2. Με ποιο τρόπο μπορούμε να αφαιρέσουμε δυο αριθμούς;

2. Για να αφαιρέσουμε δυο αριθμούς πρέπει να τοποθετήσουμε το μικρότερο κάτω από το μεγαλύτερο, έτσι ώστε οι μονάδες να είναι κάτω από τις μονάδες, οι δεκάδες κάτω από τις δεκάδες, τα δέκατα κάτω από τα δέκατα, κ.ο.κ, προσέχοντας τις υποδιαστολές ώστε να είναι πάντα στην ίδια στήλη. Αν οι αριθμοί δεν έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, συμπληρώνουμε μηδενικά μετά το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο, μέχρι που να αποκτήσουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

3. Μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς με όποια σειρά θέλουμε;

3. Δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς με όποια σειρά θέλουμε. Πρέπει πάντα να αφαιρούμε από το μεγαλύτερο το μικρότερο, διότι δεν ισχύει η **αντιμεταθετική ιδιότητα** στην αφαίρεση φυσικών αριθμών.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:
α) 57 - 45 β) 33 - 17
γ) 101 - 55 δ) 43,7 - 36,55

Λύση

α) $\begin{array}{r} 57 \\ -\ 45 \\ \hline 12 \end{array}$ Δοκιμή $\begin{array}{r} 12 \\ +\ 45 \\ \hline 57 \end{array}$

β) $\begin{array}{r} 33 \\ -\ 17 \\ \hline 16 \end{array}$ Δοκιμή $\begin{array}{r} 16 \\ +\ 17 \\ \hline 33 \end{array}$

γ) $\begin{array}{r} 101 \\ -\ 55 \\ \hline 46 \end{array}$ Δοκιμή $\begin{array}{r} 46 \\ +\ 55 \\ \hline 101 \end{array}$

δ) $\begin{array}{r} 43{,}7 \\ -\ 36{,}55 \\ \hline 7{,}15 \end{array}$ Δοκιμή $\begin{array}{r} 7{,}15 \\ +\ 36{,}55 \\ \hline 43{,}70 \end{array}$

2. Σχηματίστε μια εξίσωση με το παρακάτω πρόβλημα και λύστε την. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στο 8 για να βρούμε 22;

Λύση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε: x + 8 = 22. Για να βρούμε το x πρέπει να κάνουμε την αφαίρεση 22 - 8. Βρίσκουμε ότι: x = 14.

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) (71 - 45) - 3
β) (68,5 - 19,3) - 4,75
γ) (251 - 38) - 99

Λύση

α) (71 - 45) - 3 = 26 - 3 = 23

Παρατήρηση:
Όταν υπάρχουν παρενθέσεις σε μια σειρά πράξεων, προσέχουμε ώστε να κάνουμε πρώτα την πράξη μέσα στην παρένθεση και μετά τις υπόλοιπες.

β) (68,5 - 19,3) - 4,75 = 49,2 - 4,75 =
= 44,45
γ) (251 - 38) - 99 = 213 - 99 = 114

4 Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις με την σειρά που σημειώνονται:
α) 1031 - 45 + 67 - 583 -135 + 6 =
β) 993 - 783 + 455 - 231 - 377 + 95 =
γ) 10755 - 5633 - 2849 + 843 - 345 =

Λύση

α) 1031 - 45 + 67 - 583 - 135 + 6 =
986 + 67 - 583 - 135 + 6 =
1053 - 583 - 135 + 6 =
470 - 135 + 6 = 335 + 6 = 341
β) 993 - 783 + 455 - 231 - 377 + 95 =
210 + 455 - 231 - 377 + 95 =
665 - 231 - 377 + 95 =
434 - 377 + 95 = 57 + 95 = 152
γ) 10755 - 5633 - 2849 + 843 - 345 =
5122 - 2849 + 843 - 345 =
3116 - 345 = 2771

5. Αν είναι: x = 0, 75 , y = 17,2, ω = 4,88, z = 5,67, να γίνουν οι παρακάτω πράξεις με τη σειρά που σημειώνονται:
α) ω + z + y - x =
β) y - ω - z - x =

Λύση

α) Έχουμε: ω + z + y - x =
= 4,88 + 5,67 + 17,2 - 0,75 =
=10,55 + 17,2 - 0,75 = 27,75 - 0,75 = 27
β) Έχουμε: y - ω - z - x =
= 17,2 - 4,88 - 5,67 - 0,75 =
= 12,32 - 5,67 - 0,75 = 6,65 - 0,75 = 5,9

6. Να βρεθούν οι μεταβλητές στον παρακάτω πίνακα.

7,3	+	x	= 14,2
–		–	
ω	+	3,5	= z
= 3		= y	

Λύση

Για να βρούμε τη x πρέπει να αφαιρέσουμε από το 14,2 το 7,7. Έτσι έχουμε:
x = 14,2 - 7,7. Άρα: x = 6,5.
Για να βρούμε την ω πρέπει να αφαιρέσουμε από το 7,3 το 3. Έτσι έχουμε:
ω = 7,3 - 3. Άρα: ω = 4,3.
Η z είναι το άθροισμα της ω και του 3,5.
Έτσι έχουμε: z = ω + 3,5 = 4,3 + 3,5.
Άρα: z = 7,8.
Η y είναι η διαφορά της x από τον 3,5.
Έτσι έχουμε: y = x - 3,5 = 6,5 - 3,5.
Άρα: y = 3.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Ένας ορειβάτης, προσπαθώντας να ανέβη σε μια κορυφή ύψους 3.455 μέτρων, έχει φτάσει στο καταφύγιο των ορειβατών, που βρίσκεται σε ύψος 2.890 μέτρα. Πόσα μέτρα μένουν ακόμη για να φτάσει στην κορυφή; Σχηματίστε εξίσωση γι' αυτό το πρόβλημα.

Λύση

Έστω ότι μένουν να κάνει x μέτρα ακόμη για να φτάσει στην κορυφή. Τότε:
x + 2.890 = 3.455. Οπότε: x = ...

2. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:
α) 1755,3 - 847,65 β) 9,378 - 4,45
γ) 0, 738 - 0,056 δ) 37,5 - 24,96

Λύση

α) 1755,30 − 847,65 = 907,65
β) 9,378 − 4,45 = ...
γ) 0,738 − 0,056 = ...
δ) 37,50 − 24,96 = ...

3. Να γίνουν οι πράξεις:
α) 7 + (11 - 4) β) 49 - (35 + 6)
γ) (79 - 35) - 22 δ) 105 - (205 - 151)

Λύση

α) 7 + (11 - 4) = 7 + 7 = 14
β) 49 - (35 + 6) = ...
γ) (79 - 35) - 22 = ...
δ) 105 - (205 - 151) = ...

4. Να γίνουν οι πράξεις με τη σειρά που είναι σημειωμένες:
α) 10531 - 10240 + 7835 - 5640 =
β) 78,3 - 45,63 + 55,78 - 33,22 - 19,6 =
γ) 63,45 - 57,87 + 39,7 - 18,673 =

Λύση

α) Έχουμε: 10531 - 10240 + 7835 - 5640
= 291 + 7835 - 5640 = 8126 - 5640 =...
β) Έχουμε:
78,3 - 45,63 + 55,78 - 33,22 - 19,6 =
= 32,67 + 55,78 - 33,22 - 19,6 = ...
γ) Έχουμε: 63,45 - 57,87 + 39,7 - 18,873
= 5,58 + 39,7 - 18,673 = ...

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
α) x + 15 = 32
β) 24 + x = 29
γ) x + 6,27 = 35,9
δ) x + 7,38 = 51,6

Λύση

α) Έχουμε: x + 15 = 32 ή x = 32 - 15 ή
x = 17
β) Έχουμε: 24 + x = 29 ή ....
γ) Έχουμε: x + 6,27 = 35,9 ή ...
δ) Έχουμε: x + 7,38 = 51,6 ή ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Κάποιος πλήρωσε για δυο ζευγάρια παπούτσια 19.500 δρχ. Το ένα ζευγάρι κόστισε 8.750 δρχ. Πόσο κόστισε το άλλο;

2. Ένας αγώνας καλαθοσφαίρισης έληξε με διαφορά 18 πόντων. Η νικήτρια ομάδα πέτυχε 106 πόντους. Πόσους πόντους πέτυχε η χαμένη;

3. Ένα μοντέλο αυτοκινήτου στοιχίζει 2.650.700 δρχ. Το ίδιο μοντέλο αλλά με καταλύτη στοιχίζει 2.140.300 δρχ. Πόσες δρχ. κερδίζει ένας αγοραστής που προτιμά το μοντέλο με καταλύτη;

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) (103 - 47) - 33 β) (196 - 151) - 35
γ) (583- 491) - 56 δ) 1065 - (1064 - 1)

5. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) 76,3 - (47,3 - 22,43)
β) (88,3 - 19,6) - 50,25
γ) (1,65 - 0,32) - 0,98
δ) 112,5 - (71,35 - 12,6)

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
α) x + 35,7 = 40,3
β) φ + 21,9 = 28,37
γ) ω + 19,35 = 51,4
δ) z + 3,25 = 4,6

7. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις με τη σειρά που είναι σημειωμένες:
α) 123 - 37 + 65 - 31,8
β) 1073 - 951 + 19,6 + 35,7 - 59,3
γ) 88,45 - 37,6 + 6,73 - 13,64 - 14,78
δ) 31,47 + 100 - 50,72 - 59,29

1.9 Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πότε κάνουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού;

1. Στις περιπτώσεις, που ξέρουμε την τιμή της μιας μονάδας και ψάχνουμε να βρούμε την τιμή πολλών ομοίων μονάδων, κάνουμε την πράξη του **πολλαπλασιασμού.**

2. Πώς λέγεται το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού;

2. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού λέγεται **γινόμενο**, ενώ οι αριθμοί που πολλαπλασιάζουμε για να βρούμε το γινόμενο, λέγονται **παράγοντες** του γινομένου.

3. Πώς πολλαπλασιάζουμε σύντομα έναν φυσικό αριθμό με μια μεταβλητή;

3. Όταν πολλαπλασιάζεται ένας αριθμός με μια μεταβλητή, η μεταβλητή προστίθεται τόσες φορές, όσες ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται.

π.χ. $3\alpha = \alpha + \alpha + \alpha$,

$5x = x + x + x + x + x$.

4. Πώς πολλαπλασιάζουμε σύντομα έναν φυσικό αριθμό με το 10, το 100 ή το 1000;

4. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν φυσικό αριθμό σύντομα με το 10, το 100, ή το 1000, αν βάλουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει το 10, το 100, ή το 1000.

π.χ. $45 \cdot 1000 = 45.000$,

$83 \cdot 100 = 8300$, $7 \cdot 10 = 70$

5. Πώς πολλαπλασιάζουμε σύντομα ένα δεκαδικό αριθμό με το 10, το 100 ή το 1000;

5. Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα δεκαδικό αριθμό με το 10, το 100 ή το 1000 μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσα μηδενικά έχει το 10, το 100, ή το 1000.

π.χ. $7{,}28 \cdot 10 = 72{,}8$, $3{,}5 \cdot 100 = 350$,

$19{,}28 \cdot 1000 = 19280$

6. Πώς πολλαπλασιάζουμε σύντομα έναν αριθμό με το 0,1 , το 0,01 ή το 0,001;

6. Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 0,1 , το 0,01 ή το 0,001 τότε μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα δεκαδικά ψηφία έχει το 0,1 , το 0,01 ή το 0,001.

π.χ. $10{,}25 \cdot 0{,}1 = 1{,}025$,
$10{,}25 \cdot 0{,}01 = 0{,}1025$,
$10{,}25 \cdot 0{,}001 = 0{,}01025$

7. Ποιο είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού α με το 1 ή το 0;

7. Όταν πολλαπλασιάζεται ένας αριθμός α με το 1, τότε ο αριθμός παραμένει ο ίδιος π.χ. $\mathbf{1 \cdot a = a}$.
Όταν πολλαπλασιάζεται ένας αριθμός α με το 0 τότε το αποτέλεσμα είναι 0.
π.χ. $\mathbf{0 \cdot a = 0}$

8. Ποια πράξη κάνουμε πρώτα όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια παράσταση, που περιλαμβάνει προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς;

8. Όταν πρέπει να υπολογίσουμε μια παράσταση η οποία περιλαμβάνει προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς, κάνουμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς, εκτός αν κάποια πράξη δηλώνεται με παρένθεση.
π.χ. $7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1$
ενώ $(7 - 3) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

9. Ποια είναι η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού;

9. Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού είναι η ιδιότητα που προκύπτει αν αντιμεταθέσουμε (εναλλάξουμε) τους δύο παράγοντες. Η μαθηματική της διατύπωση είναι:

$$\mathbf{a \cdot \beta = \beta \cdot a}$$

π.χ. $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα:
α) 4,2 + 4,2 + 4,2 + 4,2
β) 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7
γ) 3 + 4 + 4 + 3 + 3

Λύση

α) $4{,}2 + 4{,}2 + 4{,}2 + 4{,}2 = 4 \cdot 4{,}2$
β) $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 6 \cdot 7$
γ) $3 + 4 + 4 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) (8 + 3) · 2 β) 8 + 3 · 2
γ) 55 - 6 · 7 δ) (55 - 6) · 7

Λύση

α) $(8 + 3) \cdot 2 = 11 \cdot 2 = 22$
β) $8 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14$
γ) $55 - 6 \cdot 7 = 55 - 42 = 13$
δ) $(55 - 6) \cdot 7 = 49 \cdot 7 = 343$

3. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 15 μέτρα. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

Λύση

Επειδή όλες οι πλευρές του τετραγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε η περίμετρός του είναι:
$15 + 15 + 15 + 15 = 4 \cdot 15 = 60$ μέτρα.
Το δε εμβαδόν του είναι: $15 \cdot 15 = 225$ τετραγωνικά μέτρα.

4. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:
α) 3 · 4 · 7,2 · 6,5 · 9
β) 8 · 3,2 · 4,7 · 6

Λύση

α) 3 · 4 · 7,2 · 6,5 · 9 =
(3 · 4) · (7,2 · 6,5) · 9 =
(12 · 46,8) · 9 = 561,6 · 9 = 5054,4
β) 8 · 3,2 · 4,7 · 6 = (8 · 3,2) · (4,7 · 6) =
25,6 · 28,2 = 721,92

5. Να γίνουν οι πράξεις:
α) 3 · (8 + 3) - (7 - 4) · 2 + 4 · 6 - 7
β) 6,7 · (2,3 + 4) - (2,3 + 4,7) · 2 +
+ (8,3 - 4,1) · 3,1

Λύση

α) 3 · (8 + 3) - (7 - 4) · 2 + 4 · 6 - 7 =
3 · 11 - 3 · 2 + 4 · 6 - 7 =
33 - 6 + 24 - 7 = 27 + 24 - 7 =
51 - 7 = 44
β) 6,7 · (2,3 + 4) - (2,3 + 4 7) · 2 +
+ (8,3 - 4,1) · 3,1 =
6,7 · 6,3 - 7 · 2 + 4,2 · 3,1 =
42,21 - 14 + 13,02 = 41,23

6. Να πολλαπλασιαστούν οι αριθμοί 6,7 και 8,24 με το 10, το 100 και το 1000.

Λύση

6,7 · 10 = 67 8,24 ·10 = 82,4
6,7 · 100 = 670 8,24 · 100 = 824
6,7 · 1000 = 6700 8,24 ·1000 = 8240

7. Να πολλαπλασιαστούν οι αριθμοί 6,7 και 82,4 με το 0,1 , το 0,01 και το 0,001.

Λύση

6,7 · 0.1 = 0,67
6,7 · 0,01 = 0,067
6,7 · 0,001 = 0,0067
82,4 · 0,1 = 8,24
82,4 · 0,01 = 0,824
82,4 · 0,001 = 0,0824

8. Βρείτε τους αγνώστους στις παρακάτω εξισώσεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με το 10, το 100 και 1000 , το 0,1 , το 0,01 και το 0,001.
α) 37 · x = 370 γ) 37 · x = 0,037
β) 37 · x = 0,37 δ) 37 · x = 37.000

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι το 370 προέρχεται από το 37 με την προσθήκη ενός μηδενικού στο τέλος. Άρα το 37 πολλαπλασιάστηκε με το 10. Επομένως: x = 10.
β) Με τον ίδιο τρόπο 37 · x = 0,37. Άρα: x = 0,01
γ) Έχουμε: 37 · x = 0,037.
Άρα: x = 0,001
δ) Έχουμε: 37 · x = 37.000 .
Άρα: x = 1000

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 6,25 εκατοστά. Να βρείτε την περίμετρό του.

Λύση

Όλες οι πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα η περίμετρος είναι ....

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) (7 + 3) · 5 β) (18 - 9) · 6
γ) (7,3 - 2,9) · 6 δ) (17,8 - 11,25) · 3,1

Λύση

α) (7 + 3) · 5= 10 · 5 = 50
β) (18 - 9) · 6 = 9 · 6 = ...
γ) (7,3 - 2,9) · 6 = ...
δ) (17,8 - 11,25) · 3,1 = ...

3. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:
α) 3 · 4 · 8 · 10 · 11
β) 2,9 · 6,5 · 3,2 · 4
γ) 6,7 · 5,1 · 0,1 · 3 · 7,2

Λύση

α) 3 · 4 · 8 · 10 · 11 = (3 · 4) · (8 ·10) · 11
= 12 · 80 · 11 = ...

β) $2{,}9 \cdot 6{,}5 \cdot 3{,}2 \cdot 4 = (2{,}9 \cdot 6{,}5) \cdot (3{,}2 \cdot 4)$
$= ....$

γ) $6{,}7 \cdot 5{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 3 \cdot 7{,}2 = ...$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $4 \cdot (7 + 5) - 3 \cdot (2 + 7) + (15 - 6) \cdot 2$

β) $8 + 5 \cdot (33 - 29) - 2 \cdot (10 - 4) + 13$

γ) $8 \cdot (7{,}2 - 6{,}8) - 2 \cdot (1{,}98 - 0{,}9) + 7{,}6$

Λύση

α) $4 \cdot (7 + 5) - 3 \cdot (2 + 7) + (15 - 6) \cdot 2 =$
$4 \cdot 12 - 3 \cdot 9 + 9 \cdot 2 = 48 - 27 + 18 =$
$21 + 18 = 39$

β) $8 + 5 \cdot (33 - 29) - 2 \cdot (10 - 4) + 13 =$
$8 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 13 = ...$

γ) $8 \cdot (7{,}2 - 6{,}8) - 2 \cdot (1{,}98 - 0{,}9) + 7{,}6 =$
$8 \cdot 0{,}4 - 2 \cdot 1{,}08 + 7{,}6 = ...$

5. Να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με το 10, το 100, το 1000, το 0,1, το 0,01 , το 0,001.

α) $1123 \cdot x = 1{,}123$ γ) $528{,}3 \cdot x = 52{,}83$

β) $728 \cdot x = 7280$ δ) $74{,}32 \cdot x = 743{,}2$

Λύση

α) Επειδή ο αριθμός 1,123 έχει τρία δεκαδικά ψηφία, ενώ ο 1123 δεν έχει κανένα, τότε ο x πρέπει να είναι ο 0,001.

β) Επειδή ο 7.280 έχει ένα μηδενικό στο τέλος, που δεν έχει ο 728 τότε ο x θα πρέπει να είναι ο ...

γ) Ο 52,83 έχει δύο δεκαδικά, ενώ ο 528,3 έχει ένα , άρα x = ...

δ) Ο 743,2 έχει ένα δεκαδικό, ενώ ο 74,32 έχει δύο , άρα x = ...

6. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας και να συγκριθούν οι δύο τελευταίες στήλες:

α	β	α · β	β · α
8	7	8 · 7 = 56	7 · 8 = 56
147	6		
3,2	6,5		
1,05	7,8		

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε πόσο κοστίζουν:

α) 5 κιλά πορτοκάλια, αν το κιλό κάνει 83,5 δρχ.

β) 7 μπουκάλια κρασί, αν το μπουκάλι κάνει 571 δρχ.

γ) 6 κιλά ζάχαρι, αν το κιλό κάνει 99 δρχ.

δ) 28 λίτρα βενζίνη, αν το λίτρο κάνει 135 δρχ.

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:

α) $7{,}8 \cdot 10$ $7{,}8 \cdot 100$ $7{,}8 \cdot 1000$

β) $35{,}65 \cdot 10$ $35{,}65 \cdot 100$ $35{,}65 \cdot 1000$

γ) $421{,}3 \cdot 10$ $421{,}3 \cdot 100$ $421{,}3 \cdot 1000$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $6{,}3 \cdot 0{,}1$ $6{,}3 \cdot 0{,}01$ $6{,}3 \cdot 0{,}001$

β) $76{,}43 \cdot 0{,}1$ $76{,}43 \cdot 0{,}01$ $76{,}43 \cdot 0{,}001$

γ) $859{,}7 \cdot 0{,}1$ $859{,}7 \cdot 0{,}01$ $859{,}7 \cdot 0{,}001$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(28 - 6) \cdot 3$

β) $1587 \cdot (1 - 0{,}99)$

γ) $(15{,}7 - 8{,}6) \cdot 7{,}3$

δ) $(158{,}9 + 76) \cdot 19{,}1$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $8 \cdot (76 - 52) - 3 \cdot (27 - 6) - 3 \cdot 4 \cdot 5$

**β) $7 \cdot (88 - 49) + 2 \cdot (56 - 46) +$
$+ 13 \cdot (52 - 20)$**

γ) $3 \cdot (24 - 5) + 37 - 2 \cdot (81 - 64)$

δ) $5 \cdot (27 - 27) + 60 - 5 \cdot (19 - 7)$

**ε) $9{,}1 \cdot (12 - 11) + 7{,}8 \cdot 1 -$
$- 0 \cdot (38{,}5 + 4{,}7)$**

στ) $38 \cdot 4 + 7{,}83 \cdot 2 - 5{,}98 \cdot 11$

6. Αν $x = 5$, $y = 7$, $\omega = 3$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις
α) $(x + y + \omega) \cdot x$
β) $x \cdot x + y \cdot y + \omega \cdot \omega$
γ) $(y - \omega) \cdot x + (x - \omega) \cdot y$
δ) $(y + x - \omega) \cdot 2 + (y + \omega - x) \cdot 2$
ε) $(x + y) \cdot 3 - (y - x) \cdot 4 + (x + \omega) \cdot 3$

7. Μια νοικοκυρά αγόρασε τα εξής είδη:
α) 7 κιλά πατάτες προς 51 δρχ. το κιλό
β) 6 κιλά λεμόνια προς 230 δρχ. το κιλό
γ) 15 αυγά προς 22 δρχ. το ένα
δ) 0,5 κιλά τυρί προς 680 δρχ. το κιλό
ε) 1,5 κιλό κρέας προς 1150 δρχ. το κιλό.
Πόσα ρέστα πήρε από πεντοχίλιαρο;

8. Αν $x = 13$, $y = 20$, $z = 9$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
α) $(x + y) \cdot 2 - (x + z) \cdot 3$
β) $x + y \cdot 2 - 2 \cdot x + y$
γ) $(z + x) \cdot 3 + y \cdot 2 - x \cdot 3$
δ) $(y - x) \cdot 2 + (x - z) \cdot 3 + (y - z) \cdot 1$

1.10 Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Ποιοι ονομάζονται πολλαπλάσια του φυσικού αριθμού α;	1. Οι φυσικοί αριθμοί 0, α, 2α, 3α, 4α,... ονομάζονται **πολλαπλάσια** του αριθμού **α**. Το σύνολο των πολλαπλασίων του αριθμού α το συμβολίζουμε με Π_α και είναι: $\Pi_\alpha = \{ 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, ... \}$
2. Τι ονομάζεται τομή δύο συνόλων Α και Β;	2. **Τομή** δύο συνόλων Α και Β, **(Α ∩ Β)** είναι ένα σύνολο το οποίο περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων Α και Β. Η τομή συνόλων μπορεί να επεκταθεί με ανάλογο τρόπο και για περισσότερα από δυο σύνολα.
3. Τι ονομάζονται κοινά πολλαπλάσια δύο αριθμών α και β;	3. **Κοινά πολλαπλάσια** δύο αριθμών α και β ονομάζονται οι αριθμοί που είναι **συγχρόνως** πολλαπλάσια του α και του β.
4. Πώς βρίσκεται το σύνολο των κοινών πολλαπλασίων δύο αριθμών α και β;	4. **Το σύνολο των κοινών πολλαπλασίων** δύο αριθμών α και β βρίσκεται αν κατασκευάσουμε τα σύνολα Π_α και Π_β των πολλαπλασίων τους και σχηματίσουμε την τομή $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$.
5. Τι ονομάζεται ελάχιστο κοινό παλλαπλάσιο (Ε.Κ.Π) δύο αριθμών α και β;	5. **Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π)** δύο αριθμών α και β ονομάζεται το μικρότερο στοιχείο μέσα από το σύνολο των κοινών πολλαπλασίων τους, εκτός από το **0**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 56 και 28.

Λύση

Τα πολλαπλάσια του 56 είναι το σύνολο:
$Π_{56} = \{0, 56, 112, 224, ...\}$
Τα πολλαπλάσια του 28 είναι το σύνολο:
$Π_{28} = \{0, 28, 56, 84, 112 ...\}$
Τα κοινά πολλαπλάσια είναι το σύνολο
$Π_{56} \cap Π_{28} = \{0, 56, 112...\}$
Άρα το Ε.Κ.Π. είναι το 56.

2. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών 8, 12, 18.

Λύση

Έχουμε:
$Π_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...\}$
$Π_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...\}$
$Π_{18} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, ...\}$
Άρα : $Π_8 \cap Π_{12} \cap Π_{18} = \{0, 72, ...\}$
οπότε Ε.Κ.Π (8, 12, 18) = 72.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών 4, 8, 12.

Λύση

Έχουμε:
$Π_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...\}$
$Π_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, ...\}$
$Π_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, ...\}$
Άρα $Π_4 \cap Π_8 \cap Π_{12} = \{0, 24, 48, ...\}$
οπότε Ε.Κ.Π (4, 8,12) = ...

2. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών 3, 6, 9.

Λύση

Έχουμε:
$Π_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$
$Π_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, ...\}$
$Π_9 = \{0, 9, 18, 27, ...\}$
Άρα $Π_3 \cap Π_6 \cap Π_9 = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 5 και 6.

2. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 2, 3 και 4.

3. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 4, 6 και 8.

4. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 7, 8 και 56.

5. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 2, 9 και 8.

6. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών: 28, 32 και 56.

7. Τρεις δρομείς μεγάλων αποστάσεων ξεκινούν μαζί και κάνουν γύρους σε ένα στάδιο. Ο Α' χρειάζεται 4 λεπτά για κάθε γύρο, ο Β' 5 λεπτά για κάθε γύρο και ο Γ' χρειάζεται 8 λεπτά. Σε πόσα λεπτά θα συναντηθούν και πόσους γύρους θα έχει συμπληρώσει ο καθένας;

1.11 Δυνάμεις αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι σημαίνει το σύμβολο 3^4 και πώς διαβάζεται;	**1.** Το σύμβολο 3^4 σημαίνει το γινόμενο $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Διαβάζεται, **δύναμη με βάση 3 και εκθέτη το 4** ή απλουστέρα «τρία στην τετάρτη».
2. Τι σημαίνει α^{ν}, όπου α είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός, και ν ένας φυσικός αριθμός, μεγαλύτερος του 1;	**2.** Το σύμβολο α^{ν} σημαίνει $\alpha \cdot \alpha \cdot ... \cdot \alpha$ (ν - φορές), και διαβάζουμε **άλφα στη νιοστή.**
3. Τι ονομάζουμε «άλφα στο τετράγωνο» και γιατί;	**3.** Η δύναμη α^2 ονομάζεται **άλφα στο τετράγωνο,** γιατί παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου που έχει πλευρά α.
4. Τι ονομάζουμε «άλφα στον κύβο» και γιατί;	**4.** Η δύναμη α^3 ονομάζεται **άλφα στον κύβο,** γιατί παριστάνει τον όγκο ενός κύβου που έχει πλευρά α.
5. Με πόσο ισούνται οι παρακάτω δυνάμεις του 10: 10^2, 10^3, 10^4, 10^5. Δώστε έναν κανόνα για τον υπολογισμό των δυνάμεων του 10.	**5.** Έχουμε: $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$ Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε τον παρακάτω κανόνα: <u>Η νιοστή δύναμη του 10 είναι ίση με τον αριθμό που προκύπτει, όταν δεξιά του 1 γράψουμε ν μηδενικά.</u> Δηλαδή: $10^{\nu} = 100...0$, (ν μηδενικά).
6. Ποια είναι η διαφορά των 4^5 και $5 \cdot 4$;	**6.** Το 4^5 και το $5 \cdot 4$ είναι τελείως διαφορετικοί αριθμοί μεταξύ τους, γιατί: $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ ενώ $5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα τετράγωνα και τους κύβους των παρακάτω αριθμών:
2, 3, 6, 8, 11.

Λύση

Έχουμε για τα τετράγωνα:
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$,
$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$,
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$.

Έχουμε επίσης για τους κύβους:
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$,
$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$,
$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$,
$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$,
$11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$.

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:
α) 5^3, 3^5, β) 4^3, 3^4

Λύση

α) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ και
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
β) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ και
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

3. Να υπολογίσετε τη διαφορά του διπλάσιου του 6,8 από το τετράγωνο του 6,8 καθώς και τη διαφορά του τριπλάσιου του 7 από τον κύβο του 7.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα το τετράγωνο του 6,8 μετά το διπλάσιο του 6,8 και τέλος τη διαφορά τους.
$6{,}8^2 = 6{,}8 \cdot 6{,}8 = 46{,}24$ και
$2 \cdot 6{,}8 = 13{,}6$
$6{,}8^2 - 2 \cdot 6{,}8 = 46{,}24 - 13{,}6 = 32{,}64$

Όμοια:
$7^3 - 3 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 343 - 21 =$
$= 322$

4. Να γραφούν με σύντομο τρόπο:
α) $8 + 8 + 8 + 8$ β) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$
γ) $x + x + x$ δ) $x \cdot x \cdot x$

Λύση

α) $8 + 8 + 8 + 8 = 4 \cdot 8$
β) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4$
γ) $x + x + x = 3x$
δ) $x \cdot x \cdot x = x^3$

5. Να εκτελεστούν οι πράξεις:
α) $(3 + 4)^2$ β) $(3 \cdot 4)^2$ γ) $3^2 + 4^2$
δ) $(2^3)^4$ ε) $(2^4)^3$

Λύση

α) $(3 + 4)^2 = 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
β) $(3 \cdot 4)^2 = 12^2 = 12 \cdot 12 = 144$
γ) $3^2 + 4^2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 =$
$= 9 + 16 = 25$
δ) $(2^3)^4 = 8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$
ε) $(2^4)^3 = 16^3 = 16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$

6. Να εκτελεστούν οι πράξεις:
α) $3{,}153^2 - (3{,}153 \cdot 3{,}153)$,
β) $111^2 - 11^2$

Λύση

α) $3{,}153^2 - (3{,}153 \cdot 3{,}153) =$
$= 3{,}153 \cdot 3{,}153 - (3{,}153 \cdot 3{,}153) = 0$
β) $111^2 - 11^2 = 111 \cdot 111 - 11 \cdot 11 =$
$= 12321 - 121 = 12200$

7. Να υπολογιστεί το άθροισμα:
$\alpha + \beta + \gamma$, όταν $\alpha = 2^3 + 3^2 - 1^2$,
$\beta = 3^4 + 4^3 - 2$, $\gamma = 3^1 + 1^3 - 3$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τις τιμές των α, β, γ. Έχουμε:
$\alpha = 2^3 + 3^2 - 1^2 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 =$
$= 8 + 9 - 1 = 16$
$\beta = 3^4 + 4^3 - 2 =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 =$
$= 81 + 64 - 2 = 143$
$\gamma = 3^1 + 1^3 - 3 = 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 =$
$= 3 + 1 - 3 = 1$
Άρα: $\alpha + \beta + \gamma = 16 + 143 + 1 = 160$

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $(3+1)^5$, β) $(3-1)^5$, γ) $(183-181)^5$

Λύση

Σε κάθε περίπτωση θα εκτελέσουμε πρώτα την πράξη στην παρένθεση και μετά θα υπολογίσουμε τη δύναμη.

α) $(3+1)^5 = 4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$

β) $(3-1)^5 = 2^5 = \ldots$.

2. Αν $x = 3^5$, $y = 2^4$, $\omega = 1^5$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x + y + \omega$ β) $x + y - \omega$.

Λύση

Σε κάθε περίπτωση θα υπολογίσουμε πρώτα τις τιμές των x, y, ω και μετά θα αντικαταστήσουμε αυτές στις παραστάσεις α) και β). Έχουμε:

$x = 3^5 = 243$, $y = 2^4 = 16$, $\omega = 1^5 = 1$

Άρα: α) $x + y + \omega = 243 + 16 + 1 = \ldots$

β) $x + y - \omega = \ldots$

3. Να υπολογιστεί η διαφορά του διπλάσιου του 5 από το τετράγωνο του 5.

Λύση

Βρίσκουμε την τιμή του 5^2 και του $2 \cdot 5$ και αφαιρούμε ....

4. Να εκτελεστούν οι πράξεις: $(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 + (2+3+4)^3$, αφού πρώτα εκτελέσετε τις πράξεις στις παρενθέσεις.

Λύση

$(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 + (2+3+4)^3 =$

$= 24^2 + 9^3 = 576 + \ldots$

5. Να γράψετε τους αριθμούς 3.180, 5.120, 2.110 ως αθροίσματα με δυνάμεις του 10.

Λύση

$3.180 = 3.000 + 100 + 80 =$

$= 3 \cdot 1.000 + 100 + 8 \cdot 10 =$

$= 3 \cdot 10^3 + 10^2 + 8 \cdot 10$

$5.120 = 5.000 + 100 + 20 =$

$= 5 \cdot 1.000 + 100 + 2 \cdot 10 = \ldots$

6. Να γράψετε με μορφή δυνάμεων τους αριθμούς 64, 25, 4, 3.

Λύση

$64 = 8 \cdot 8 = 8^2$

$25 = 5 \cdot 5 = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^8 β) 8^2 γ) 1^5

2. Να κάνετε τις πράξεις με την εξής σειρά: α) πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, β) υπολογισμός των δυνάμεων και γ) προσθέσεις - αφαιρέσεις.

α) $(2+3)^2 + (1+2)^3 - (5-4)^8$

β) $(6-2)^3 + (3{,}1 - 2{,}1)^3 + 5^2$

3. Να γραφούν με μορφή δυνάμεων οι αριθμοί: 36, 64, 144, 1.000, 10.000.

4. Ο κύβος ενός φυσικού αριθμού ισούται με τον ίδιο αριθμό. Ποιος μπορεί να είναι αυτός;

5. Αν $\alpha = 7^2 + 5^2$, $\beta = 2^3 + 3^2$ και $\gamma = 1^4 + 2^2$, να υπολογίσετε την τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\alpha + \beta + \gamma$ β) $\alpha - \beta + \gamma$

γ) $\alpha - \beta - \gamma$ δ) $2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$

6. Αφού υπολογίσετε πρώτα τις δυνάμεις να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:
α) $10^3 + 10^2 + 10$
β) $2 \cdot 10^4 - 10^4 + 10$

7. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών ισούται με 2. Να βρείτε τους δύο αυτούς φυσικούς αριθμούς.

1.12 Επιμεριστική ιδιότητα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση;

2. Ποια είναι η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση;

3. Οι εκφράσεις: $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ και $(\beta + \gamma) \cdot \alpha$ είναι ίδιες ή διαφορετικές μεταξύ τους και γιατί;

Απαντήσεις

1. **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση είναι η ισότητα:

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$$

όπου α, β, γ είναι φυσικοί ή δεκαδικοί αριθμοί.

2. **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση είναι η ισότητα:

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$$

όπου α, β, γ είναι φυσικοί ή δεκαδικοί αριθμοί.

3. Οι εκφράσεις $\alpha \cdot (\beta+\gamma)$ και $(\beta+\gamma) \cdot \alpha$ είναι ίδιες, δηλαδή μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, γιατί στον πολλαπλασιασμό ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $3 \cdot 4 = 12$ και $4 \cdot 3 = 12$.
Έτσι έχουμε:
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ και
$(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
Ακόμα μπορούμε να γράφουμε:
$(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους: χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και κάνοντας την πράξη στην παρένθεση και κατόπιν πολλαπλασιασμό.

α) $3 \cdot (5 + 2)$ β) $3 \cdot (5 - 2)$
γ) $6,2 \cdot (7,3 + 4,3)$

Λύση

α) $3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 =$
$= 15 + 6 = 21$
και $3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 7 = 21$
β) $3 \cdot (5 - 2) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 15 - 6 = 9$
και $3 \cdot (5 - 2) = 3 \cdot 3 = 9$
γ) $6,2 \cdot (7,3 + 4,3) =$
$= 6,2 \cdot 7,3 + 6,2 \cdot 4,3 =$
$= 45,26 + 26,66 = 71,92$
και $6,2 \cdot (7,3 + 4,3) = 6,2 \cdot 11,6 = 71,92$

2. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους:
α) $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3$ β) $7 \cdot 3 + 7 \cdot 4$
γ) $5 \cdot 10 - 5 \cdot 8$ δ) $9 \cdot 1,6 - 8 \cdot 1,6$
ε) $3,25 \cdot 4 - 3,25 \cdot 3$ ζ) $7,1 \cdot 2 + 7,1 \cdot 6$

Λύση

α) $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25$ και
$5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 5 = 25$
β) $7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 21 + 28 = 49$ και
$7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (3 + 4) = 7 \cdot 7 = 49$
γ) $5 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 50 - 40 = 10$ και
$5 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 5 \cdot (10 - 8) = 5 \cdot 2 = 10$
δ) $9 \cdot 1,6 - 8 \cdot 1,6 = 14,4 - 12,8 = 1,6$
και $9 \cdot 1,6 - 8 \cdot 1,6 = (9 - 8) \cdot 1,6 =$
$= 1 \cdot 1,6 = 1,6$
ε) $3,25 \cdot 4 - 3,25 \cdot 3 = 13 - 9,75 = 3,25$
και $3,25 \cdot 4 - 3,25 \cdot 3 = 3,25 \cdot (4 - 3) =$
$= 3,25 \cdot 1 = 3,25$
ζ) $7,1 \cdot 2 + 7,1 \cdot 6 = 14,2 + 42,6 = 56,8$
και $7,1 \cdot 2 + 7,1 \cdot 6 = 7,1 \cdot (2 + 6) =$
$= 7,1 \cdot 8 = 56,8$

3. Να γράψετε με απλούστερη μορφή τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $5x + 3x$ β) $7x - 3x$
γ) $13x - 2x$ δ) $5x + 6x + 3x$

Λύση

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα σε κάθε περίπτωση.
α) $5x + 3x = (5 + 3)x = 8x$
β) $7x - 3x = (7 - 3)x = 4x$
γ) $13x - 2x = (13 - 2)x = 11x$
δ) $5x + 6x + 3x = (5 + 6)x + 3x =$
$= 11x + 3x = (11 + 3)x = 14x$

<u>Παρατήρηση:</u> Στην περίπτωση (δ) μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:
$5x + 6x + 3x = (5 + 6 + 3)x = 14x$
<u>Γενικότερα:</u>
$αβ + αγ + αδ + αε = α(β + γ + δ + ε)$

4. Να γίνει η πράξη $(3 + 4) \cdot (2 + 5)$ με τρεις τρόπους.

Λύση

α τρόπος: $(3 + 4) \cdot (2 + 5) = 7 \cdot 7 = 49$
β τρόπος: $(3+4) \cdot (2+5) = 7 \cdot (2 + 5) =$
$= 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 = 14 + 35 = 49$
γ τρόπος: $(3+4) \cdot (2+5) = (3 + 4) \cdot 7 =$
$= 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 21 + 28 = 49$

<u>Παρατήρηση:</u> Το $(3 + 4) \cdot (2 + 5)$ μπορούμε να το υπολογίσουμε και ως εξής:
$(3 + 4) \cdot (2 + 5) =$
$(3 + 4) \cdot 2 + (3 + 4) \cdot 5 =$
$3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =$
$6 + 8 + 15 + 20 = 49$
<u>Γενικότερα ισχύει η ιδιότητα:</u>
<u>$(α + β) \cdot (γ + δ) = αγ + αδ + βγ + βδ$ που λέγεται διπλή επιμεριστική ιδιότητα.</u>

5. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με δύο τρόπους:
α) $(3 + 2) \cdot (5 + 3)$, β) $(3 + 1) \cdot (4 + 2)$

Λύση

α) $(3 + 2) \cdot (5 + 3) = 5 \cdot 8 = 40$ και
$(3 + 2) \cdot (5 + 3) =$
$= 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 =$
$= 15 + 9 + 10 + 6 = 40$
β) $(3 + 1) \cdot (4 + 2) = 4 \cdot 6 = 24$ και
$(3 + 1) \cdot (4 + 2) =$
$= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 =$
$= 12 + 6 + 4 + 2 = 24$

Β. Μισο... λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους:
α) $18 \cdot (6,2 - 3,2)$ β) $9 \cdot (5 + 4)$

Λύση

α) $18 \cdot (6,2 - 3,2) = 18 \cdot 6,2 - 18 \cdot 3,2 =$
$= 111,6 - 57,6 = 54$ και
$18 \cdot (6,2 - 3,2) = 18 \cdot 3 = ...$
β) $9 \cdot (5 + 4) = ...$

2. Να γράψετε με απλούστερη μορφή τις παρακάτω παραστάσεις:
α) $a + a + a + a$ β) $3x + 2x + 5x$

Λύση

α) $a + a + a + a =$
$= 1 \cdot a + 1 \cdot a + 1 \cdot a + 1 \cdot a =$
$= (1 + 1 + 1 + 1)\, a = 4a$
β) $3x + 2x + 5x = (3 + 2 + 5)x = ...$

3. Να γράψετε με απλούστερη μορφή τις παραστάσεις και να βρείτε μετά την τιμή τους:
α) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6$
β) $3,6 \cdot 2 - 2,6 \cdot 2 + 7 \cdot 46,2 - 7 \cdot 45,2$

Λύση

α) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 6 =$
$= 2 \cdot (3 + 4) + (5 + 4) \cdot 6 =$
$= 2 \cdot 7 + 9 \cdot 6 = 14 + 54 = 68$
β) $3,6 \cdot 2 - 2,6 \cdot 2 + 7 \cdot 46,2 - 7 \cdot 45,2 =$
$= (3,6 - 2,6) \cdot 2 + 7 \cdot (46,2 - 45,2) = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους, πρώτα με επιμεριστική ιδιότητα και μετά με την εξής σειρά: πράξη στην παρένθεση και πολλαπλασιασμό μετά.
α) $7,15 \cdot (2,1 + 3,2)$
β) $3,2 \cdot (6 - 3)$
γ) $10,1 \cdot (8 - 1)$

2. Να γίνουν οι πράξεις με δύο τρόπους:
α) $11 \cdot 8 + 11 \cdot 3$
β) $3 \cdot 4 - 3 \cdot 3$
γ) $2 \cdot 5 - 2 \cdot 2$

3. Να γράψετε με απλούστερη μορφή τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $3x - 1x$
β) $6,9x + 5,9x - 11,9x$
γ) $7,8x - 7,8x$

4. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με τρεις τρόπους:
α) $(5 + 2) \cdot (9 + 4)$
β) $(6,1 + 5,1) \cdot (0 + 1)$

5. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα με δύο τρόπους: Ένας έμπορος αγόρασε 25 κουτιά με σοκολάτες που το καθένα είχε 30 σοκολάτες γάλακτος και 20 σοκολάτες αμυγδάλου. Πόσες συνολικά σοκολάτες αγόρασε;

6. Σε ένα θέατρο οι τιμές εισιτηρίων είναι 1.200 δρχ. για τους μεγάλους και 800 δρχ. για τα παιδιά. Πόσο θα κόστιζε σε μια οικογένεια πενταμελή (δύο μεγάλοι, τρία παιδιά) η παρακολούθηση του έργου σ' αυτό το θέατρο;
Να λύσετε το πρόβλημα με δύο τρόπους.

1.13 Η τέλεια διαίρεση

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι ονομάζουμε τέλεια διαίρεση δύο αριθμών Δ και δ;	**1. Τέλεια διαίρεση δύο αριθμών Δ και δ** λέγεται η πράξη εκείνη με την οποία από τους Δ και δ βρίσκουμε τον αριθμό π ώστε δ · π = Δ. Ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο **Δ διαιρετέος** και ο **π πηλίκο.** Πρέπει πάντοτε ο διαιρέτης δ να μην είναι 0.
2. Να γράψετε τα πηλίκα στις παρακάτω διαιρέσεις: α : α, α : 1, 0 : α, α : 0.	**2.** α : α = 1 γιατί α · 1 = α, α : 1 = α γιατί 1 · α = α, 0 : α = 0 γιατί α · 0 = 0 α : 0 δε γίνεται, γιατί είπαμε ότι ο διαιρέτης δεν πρέπει να είναι 0.
3. Πώς αλλιώς μπορούμε να παραστήσουμε τη διαίρεση α : β = γ;	**3.** Με τη βοήθεια των κλασμάτων η διαίρεση α : β = γ γράφεται: $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$
4. Τι ονομάζουμε δοκιμή της διαίρεσης Δ : δ = π;	**4.** Δοκιμή της διαίρεσης ονομάζεται ο έλεγχος της ορθότητας της διαίρεσης, δηλαδή αν έχουμε τη διαίρεση **Δ : δ = π,** τότε δοκιμή της είναι η ισότητα: **δ · π = Δ.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:
α) 114 : 6 β) 114 : 19
γ) 4624 : 34 δ) 4624 : 136

Λύση

α)
$$\begin{array}{r|l} 114 & 6 \\ \cline{2-2} -\ 6 & 19 \\ \cline{1-1} 54 & \\ -54 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

β)
$$\begin{array}{r|l} 114 & 19 \\ \cline{2-2} -114 & 6 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

γ)
$$\begin{array}{r|l} 4624 & 34 \\ \cline{2-2} -34 & 136 \\ \cline{1-1} 122 & \\ -102 & \\ \cline{1-1} =204 & \\ -\ 204 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

δ)
$$\begin{array}{r|l} 4624 & 136 \\ \cline{2-2} -408 & 34 \\ \cline{1-1} 544 & \\ -544 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Δοκιμή:

α) $\begin{array}{r} 19 \\ \times 6 \\ \hline 114 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} 19 \\ \times 6 \\ \hline 114 \end{array}$ γ) $\begin{array}{r} 136 \\ \times 34 \\ \hline 544 \\ +408 \\ \hline 4624 \end{array}$ δ) $\begin{array}{r} 136 \\ \times 34 \\ \hline 544 \\ +408 \\ \hline 4624 \end{array}$

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και ποιες λάθος:

α) 7 : 1 = 7 β) 6 : 6 = 1 γ) 5 : 1 = 1
δ) 4 : 0 = 4 ε) 3 : 0 = 0 ζ) 0 : 2 = 0
η) 9 : 9 = 1 θ) 1 : 1 = 1 ι) 0 : 0 = 0
ια) 5 : 1 = 5 ιβ) 8 : 8 = 8 ιγ) 1 : 6 = 6

Λύση

α) 7 : 1 = 7 σωστή γιατί: 7 · 1 = 7
β) 6 : 6 = 1 σωστή γιατί: 6 · 1 = 6
γ) 5 : 1 = 1 λάθος γιατί: 1 · 1 = 1 και όχι 5
δ) 4 : 0 = 4 λάθος γιατί: ο διαιρέτης δεν πρέπει να είναι 0
ε) 3 : 0 = 0 λάθος γιατί: ο διαιρέτης δεν πρέπει να είναι 0
ζ) 0 : 2 = 0 σωστή γιατί: 2 · 0 = 0
η) 9 : 9 = 1 σωστή γιατί: 9 · 1 = 9
θ) 1 : 1 = 1 σωστή γιατί: 1 · 1 = 1
ι) 0 : 0 = 0 λάθος γιατί: ο διαιρέτης δεν πρέπει να είναι 0
ια) 5 : 1 = 5 σωστή γιατί: 5 · 1 = 5
ιβ) 8 : 8 = 8 λάθος γιατί: 8 · 8 = 64 και όχι 8
ιγ) 1 : 6 = 6 λάθος γιατί: 6 · 6 = 36 και όχι 1.

3. Να γραφούν οι διαιρέσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες:

α) 7 · 9 = 63 β) 5 · 8 = 40
γ) 29 · 37 = 1073 δ) 156 · 21 = 3276

Λύση

α) Από την 7 · 9 = 63 προκύπτουν οι διαιρέσεις 63 : 7 = 9 και 63 : 9 = 7
β) Από την 5 · 8 = 40 προκύπτουν οι διαιρέσεις 40 : 5 = 8 και 40 : 8 = 5
γ) Όμοια από την 29 · 37 = 1073 οι 1073 : 29 = 37 και 1073 : 37 = 29
δ) Από την 156 · 21 = 3276 προκύπτουν 3276 : 156 = 21 και 3276 : 21 = 156

4. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 63 μέτρα. Να βρείτε το μήκος κάθε μιας από τις πλευρές του.

Λύση

Αφού οι πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου είναι μεταξύ τους ίσες έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ \cline{2-2} -6 & 21 \\ \cline{1-1} 03 & \\ 0 & \end{array}$$

Δηλαδή κάθε πλευρά του είναι 21 μέτρα.

5. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 187 εκατοστά και βάση 41 εκατοστά. Να υπολογίσετε κάθε μια από τις ίσες πλευρές του.

Λύση

Αν από την περίμετρο αφαιρέσουμε το μήκος της βάσης, θα βρούμε το άθροισμα του μήκους των δύο ίσων πλευρών του τριγώνου. Μετά θα διαιρέσουμε διά του 2 και έτσι θα βρούμε το μήκος της κάθε μιας.
Έχουμε λοιπόν: 187 - 41 = 146 εκατοστά. Άρα 146 : 2 = 73 εκατοστά είναι η κάθε μια από τις ίσες πλευρές του.

6. Δύο φυσικοί αριθμοί, όταν προστεθούν, δίνουν άθροισμα 102 και όταν αφαιρεθούν, δίνουν διαφορά 18. Μπορείτε να τους βρείτε;

Λύση

Αφού η διαφορά τους είναι 18, σημαίνει ότι δεν είναι ίσοι αλλά ότι ο ένας είναι μικρότερος από τον άλλο κατά 18. Οπότε, αν από το άθροισμα τους αφαιρέσουμε 18, θα βρούμε το άθροισμα των αριθμών, αν και δυο ήταν ίσοι με το μικρότερο.
Δηλαδή: 102 - 18 = 84. Διαιρούμε τώρα με το 2 για να βρούμε πόσο θα ήταν ο

καθένας, αν ήταν ίσοι. Δηλαδή 84 : 2 = 42. Άρα ο ένας είναι 42 και ο άλλος κατά 18 μεγαλύτερος.
Δηλαδή: 42 + 18 = 60.

7. Ένας έμπορος ηλεκτρικών ειδών πλήρωσε 2.160.000 δρχ. για τις τηλεοράσεις που αγόρασε. Αν αγόραζε 8 τηλεοράσεις περισσότερες θα πλήρωνε 3.120.000 δρχ. Πόσες τηλεοράσεις αγόρασε; (κάθε τηλεόραση στοιχίζει το ίδιο ποσό).

Λύση

Αν αφαιρέσουμε από τα 3.120.000 δρχ. τις 2.160.000 δρχ. θα βρούμε πόσο στοιχίζουν οι οκτώ τηλεοράσεις:
3.120.000 - 2.160.000 = 960.000 δρχ.
Διαιρούμε το 960.000 διά 8, για να βρούμε την τιμή της μιας τηλεόρασης:
960.000 : 8 = 120.000 δρχ. στοιχίζει η κάθε τηλεόραση.
Διαιρούμε τώρα τα χρήματα που έδωσε διά την τιμή της κάθε τηλεόρασης, για να βρούμε πόσες τηλεοράσεις αγόρασε.
Δηλαδή 2.160.000 : 120.000 = 18.
Άρα αγόρασε 18 τηλεοράσεις.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν οι διαιρέσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω ισότητες:
α) 7 · 63 = 441 β) 15 · 26 = 390
γ) 130 · 8 = 1040 δ) 183 · 1214 = = 222162

Λύση

α) 7 · 63 = 441 άρα 441 : 63 = 7 και 441 : 7 = 63
β) 15 · 26 = 390 άρα 390 : 15 = 26 και 390 : 26 = 15
γ) ...

2. Μια τάξη έχει 30 μαθητές και κάθονται ανά 3 σε κάθε θρανίο. Πόσα θρανία θα χρειάζονταν ακόμα για να καθήσουν οι μαθητές ανά δύο;

Λύση

Αφού κάθονται ανά τρεις σε ένα θρανίο θα είναι 30 : 3 = 10 θρανία.
Αν κάθονταν ανά δύο θα χρειάζονταν 30 : 2 = 15 θρανία. Άρα...

3. 9 πλαστικές καρέκλες βεράντας στοιχίζουν 14.850 δρχ., 4 μεταλλικές καρέκλες βεράντας στοιχίζουν 8.480 δρχ. Ποια από τις δύο ποιότητες είναι η ακριβότερη και κατά πόσες δραχμές;

Λύση

14.850 : 9 = 1.650 δρχ. κοστίζει κάθε πλαστική καρέκλα ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και ποιες λάθος:
α) 3 : 0 = 0 β) 0 : 4 = 0
γ) 3 : 3 = 1 δ) 3 : 1 = 3
ε) 5 : 5 = 0 ζ) 6 : 6 = 1
η) 7 : 1 = 7 θ) 8 : 8 = 1

2. Η μια πλευρά ενός φράχτη έχει δεκατρείς κολόνες που είναι σε ίσες αποστάσεις. Το μήκος της πλευράς είναι 48 μέτρα. Να βρείτε την απόσταση που χωρίζει δύο διαδοχικές κολόνες.

3. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 152 εκατοστά. Να βρείτε το μήκος της κάθε πλευράς του.

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

έχει τη μια πλευρά του διπλάσια από την άλλη και περίμετρο 18 εκατοστά. Να βρείτε το μήκος της κάθε πλευράς.

5. Ένα οικόπεδο με σχήμα πενταγώνου έχει όλες τις πλευρές του ίσες και κάθε μία από αυτές είναι ίση με την πλευρά ενός άλλου οικοπέδου, που έχει σχήμα τετραγώνου, με περίμετρο 60 μέτρα. Να βρείτε την περίμετρο του πρώτου οικοπέδου.

6. Ένας έμπορος αγόρασε ένα τόπι ύφασμα και έδωσε 130.000 δρχ. Το ύφασμα αυτό το πούλησε 160.000 δρχ. και κέρδισε 1.500 δρχ. σε κάθε μέτρο. Πόσα μέτρα ύφασμα αγόρασε και πόσα χρήματα έδωσε για κάθε μέτρο;

1.14 Διαιρέτες φυσικού αριθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι;	1. **Πρώτοι** ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν μοναδικούς διαιρέτες τον εαυτό τους και τη μονάδα. π.χ. οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, ... είναι πρώτοι.
2. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται σύνθετοι;	2. **Σύνθετοι** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι πρώτοι. Δηλαδή σύνθετοι είναι οι αριθμοί που έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και τη μονάδα. π.χ. ο αριθμός $14 = 2 \cdot 7$, έχει διαιρέτες (παράγοντες) και τους αριθμούς 2, 7 εκτός από τους 14, 1 άρα είναι σύνθετος.
3. Τι ονομάζουμε κοινό διαιρέτη δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών;	3. **Κοινό διαιρέτη** δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών ονομάζουμε τον αριθμό που διαιρεί όλους αυτούς.
4. Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ. Κ. Δ.) δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών;	4. **Μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών ονομάζουμε το μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες τους.
5. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους;	5. **Πρώτοι μεταξύ τους** ονομάζονται δύο αριθμοί που έχουν Μ.Κ.Δ το 1.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε τους 10 φυσικούς αριθμούς που συναντάμε μετά το 0 και είναι πρώτοι.

Λύση

Οι 10 φυσικοί αριθμοί που συναντάμε από το 0 και μετά και είναι πρώτοι είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

2. Γιατί όλοι οι άρτιοι εκτός του 2 είναι σύνθετοι αριθμοί;

Λύση

Όπως είναι γνωστό ο άρτιος αριθμός 2 έχει διαιρέτες μόνο τους αριθμούς 2 και 1. Άρα είναι πρώτος αριθμός. Όλοι οι άλλοι άρτιοι έχουν διαιρέτη εκτός από τον εαυτό τους και το 1 και το 2 τουλάχιστον. Άρα δεν είναι πρώτοι. Οπότε είναι σύνθετοι αριθμοί.

3. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ των αριθμών:
α) 18, 22, β) 12, 20, γ) 6, 8, 14.

Λύση

α) Το σύνολο των διαιρετών του 18 είναι: $Δ_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ενώ του 22 είναι: $Δ_{22} = \{1, 2, 11, 22\}$. Οι κοινοί διαιρέτες του 18 και του 22 είναι η τομή των δύο συνόλων, δηλαδή:

$Δ_{18} \cap Δ_{22} = \{1, 2\}$. Άρα:

Μ.Κ.Δ (18, 22) = 2.

β) Όμοια έχουμε:

$Δ_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ και

$Δ_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ και

$Δ_{12} \cap Δ_{20} = \{1, 2, 4\}$. Άρα:

Μ.Κ.Δ (12, 20) = 4.

γ) $Δ_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $Δ_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ και

$Δ_{14} = \{1, 2, 7, 14\}$ και

$Δ_6 \cap Δ_8 \cap Δ_{14} = \{1, 2\}$.

Άρα: Μ.Κ.Δ (6, 8, 14) = 2.

<u>Παρατήρηση:</u> Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση καθένας από τους αριθμούς είναι πολλαπλάσιο του Μ.Κ.Δ τους, αλλά και πολλαπλάσιο κάθε διαιρέτη του.

4. Αν ο x είναι φυσικός αριθμός και ισχύει Μ.Κ.Δ (30, x, 90) = 15, να βρείτε τον x αν γνωρίζετε ότι είναι μεγαλύτερος από 37 και μικρότερος από 47.

Λύση

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση ο φυσικός x θα είναι πολλαπλάσιο του Μ.Κ.Δ (30, x, 90) = 15. Τα πολλαπλάσια του 15 είναι 15, 30, 45, 60 κ.λπ. Αφού όμως είναι μεγαλύτερος από 37 και μικρότερος από 47, θα είναι ο x = 45.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε όλους τους περιττούς αριθμούς από το 1 ως το 100 και να τους χωρίσετε σε δυο ομάδες. Η πρώτη να περιέχει τους πρώτους αριθμούς και η δεύτερη τους σύνθετους αριθμούς.

Λύση

Οι πρώτοι περιττοί αριθμοί από το 1 ως το 100 είναι οι: 1, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Οι σύνθετοι περιττοί αριθμοί από το 1 ως το 100 είναι οι: 9, 15, 21, 25, ...

2. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ των αριθμών: 16, 32, 24, 48.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τα σύνολα των διαιρετών των αριθμών που μας δίνονται.

$\Delta_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$,

$\Delta_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$,

$\Delta_{24} = ...$

3. Αν ο α είναι φυσικός αριθμός μικρότερος του 113 και μεγαλύτερος του 100 και ακόμα, Μ.Κ.Δ (70, 84, α) = 14, να βρείτε τον α.

Λύση

Ο α θα είναι πολλαπλάσιο του 14, γιατί γνωρίζουμε, ότι κάθε αριθμός είναι πολλαπλάσιο του διαιρέτη του. Βρίσκουμε λοιπόν τα πολλαπλάσια του 14 ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ των αριθμών 24, 38, 48.

2. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ των αριθμών 15, 36.

3. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ των αριθμών 18, 24, 108.

4. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ των αριθμών 15, 26. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι αριθμοί 15 και 26;

1.15 Ιδιότητες διαιρετότητας

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διαιρετότητας;

1. Οι ιδιότητες της διαιρετότητας είναι οι εξής:

α) Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

β) Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από κάποιον άλλο είναι πολλαπλάσιό του.

γ) Αν ο φυσικός αριθμός α διαιρεί τον φυσικό αριθμό β τότε διαιρεί και τα πολλαπλάσια του β.

δ) Αν ο φυσικός αριθμός α διαιρεί δύο άλλους φυσικούς αριθμούς β και γ (β > γ) τότε διαιρεί το άθροισμά τους (β + γ) και τη διαφορά τους (β - γ).

2. Τι είναι τα κριτήρια διαιρετότητας και ποια είναι αυτά;

2. Κριτήρια διαιρετότητας είναι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεράνουμε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, 3, 5 ή το 9 χωρίς να γίνει η διαίρεση.

Τα κριτήρια διαιρετότητας είναι τα εξής:

α) Με το 2 διαιρούνται οι άρτιοι φυσικοί αριθμοί. Δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί που έχουν τελευταίο ψηφίο 0, 2, 4, 6, ή 8.

β) Με το 5 διαιρούνται όλοι οι φυσικοί αριθμοί που έχουν τελευταίο ψηφίο το 0 ή το 5.
γ) Με το 3 διαιρούνται όλοι οι φυσικοί αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους είναι πολλαπλάσιο του 3.
δ) Με το 9 διαιρούνται όλοι οι φυσικοί αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους είναι πολλαπλάσιο του 9.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Βρείτε ποιοι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί διαιρούνται με το 6.

Λύση

Οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 6 είναι πολλαπλάσιά του. Επομένως οι διψήφιοι που διαιρούνται με το 6 είναι οι: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90 και 96.

2. Εξηγήστε γιατί ο αριθμός 251 · 72 διαιρείται από τον 36.

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 251 · 72 έχει σαν παράγοντα τον αριθμό 72 ο οποίος όμως διαιρείται με το 36. Άρα αφού ο 36 διαιρεί τον 72 θα διαιρεί και το πολλαπλάσιό του δηλαδή το 251 · 72.

3. Εξηγήστε γιατί ο αριθμός 72α + 45 διαιρείται με το 9.

Λύση

α) τρόπος: Ο αριθμός 9 διαιρεί τον αριθμό 72 = 8 · 9, επομένως διαιρεί και τον 72α, καθώς και τον αριθμό 45 = 5 · 9. Άρα διαιρεί και το άθροισμά τους δηλαδή τον αριθμό 72α + 45.
β) τρόπος: Ο αριθμός 72α + 45 γράφεται με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας 9 · (8α + 5). Επομένως το 9 είναι παράγοντας του 72α + 45, άρα τον διαιρεί.

4. Χωρίς να εκτελέσετε τις πράξεις να δικαιολογήσετε ότι τα παρακάτω γινόμενα διαιρούνται με το 5.

α) 15 · 13 · 27 , β) 9 · 30 · 47

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι το γινόμενο 15 · 13 · 27 έχει παράγοντα τον αριθμό 15 ο οποίος διαιρείται με το 5, άρα αφού το γινόμενο 15 · 13 · 27 είναι πολλαπλάσιο του 15 θα διαιρείται με το 5.
β) Ομοίως το γινόμενο 9 · 30 · 47 έχει παράγοντα τον αριθμό 30 που διαιρείται με το 5, άρα και το γινόμενο 9 · 30 · 47 διαιρείται με το 5.

5. Δίνονται οι αριθμοί 276, 3140, 762, 3915. Να βρείτε ποιοι από αυτούς διαιρούνται με το α) 2, β) 3, γ) 5, δ) 9.

Λύση

α) Με το 2 διαιρούνται οι αριθμοί 276, 762 και 3140 γιατί το τελικό τους ψηφίο είναι άρτιος αριθμός.
β) Με το 3 διαιρούνται οι αριθμοί 276, 762 και 3915 γιατί:
για τον 276: 2 + 7 + 6 = 15 και
1 + 5 = 6. Άρα έχει άθροισμα ψηφίων 6 που διαιρείται με το 3.

Παρατήρηση: Όταν το άθροισμα των ψηφίων είναι διψήφιος ή τριψήφιος κ.λπ. προσθέτουμε ξανά τα ψηφία του αθροίσματος μέχρι να γίνει μονοψήφιος.

Για τον 762: 7 + 6 + 2 = 15 και
1 + 5 = 6.
Για τον 3915: 3 + 9 + 1 + 5 = 18 και
1 + 8 = 9.
γ) Με το 5 διαιρούνται οι αριθμοί 3140 και 3915 γιατί το τελευταίο τους ψηφίο

είναι οι αριθμοί 0 και 5 αντίστοιχα.

δ) Με το 9 διαρείται ο αριθμός 3915 γιατί: $3 + 9 + 1 + 5 = 18$ και $1 + 8 = 9$, άρα έχει άθροισμα ψηφίων 9.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Βρείτε τους διψήφιους αριθμούς μέχρι το 85 που διαιρούνται με το α) 7 και β) 8.

Λύση

α) Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 7 είναι τα πολλαπλάσιά του, δηλαδή οι: 14, 21, ...

β) Ομοίως οι αριθμοί που διαιρούνται με το 8 είναι τα πολλαπλάσιά του, δηλαδή ...

2. Από τα παρακάτω γινόμενα βρείτε ποια διαιρούνται με το 2 και ποια με το 3:

α) $14 \cdot 25 \cdot 31$, β) $43 \cdot 18 \cdot 29$,
γ) $21 \cdot 35 \cdot 27$, δ) $88 \cdot 35$

Λύση

α) Το γινόμενο $14 \cdot 25 \cdot 31$ έχει παράγοντα τον αριθμό 14 που διαιρείται με το 2, άρα ...

β) Το γινόμενο $43 \cdot 18 \cdot 29$ έχει παράγοντα το 18 που διαιρείται με το 2 και με το 3, άρα ...

γ) ...

3. Δικαιολογήστε ότι τα παρακάτω αθροίσματα διαιρούνται με το 5:
α) $45 + 60$, β) $95α + 100$, γ) $40β + 85α$

Λύση

α) Το άθροισμα $45 + 60$ έχει προσθετέους τους αριθμούς 45 και 60 που διαιρούνται με το 5, άρα διαιρείται με το 5.

β) Ομοίως το άθροισμα $95α + 100$ ...

4. Δικαιολογήστε γιατί οι παρακάτω διαφορές διαιρούνται με το 9:
α) $45α - 18$, β) $99β - 72α$

Λύση

α) Ο αριθμός $45α$ διαιρείται με το 9 γιατί ο 45 είναι πολλαπλάσιο του 9. Επίσης ο αριθμός 18 διαιρείται με το 9. Άρα και η διαφορά τους ...

β) ...

5. Από τους αριθμούς 4526, 369, 1530, 4056 βρείτε ποιοι διαιρούνται με το 2 ή το 3 ή το 5 ή το 9.

Λύση

Ο αριθμός 4526 έχει τελευταίο ψηφίο του το 6, άρα διαιρείται με το 2.

Ο αριθμός 369 έχει άθροισμα ψηφίων: $3 + 6 + 9 = 18$ και $1 + 8 = 9$, άρα διαιρείται με το 3 και το 9.

Ο αριθμός 1530 ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους διψήφιους διαιρέτες του 13.

2. Να δικαιολογήσετε γιατί τα αθροίσματα: $36α + 22$ και $18β + 36α$ διαιρούνται από τον αριθμό 2.

3. Να δικαιολογήσετε ότι οι διαφορές $21β - 36$ και $54α - 45β$ διαιρούνται με τον αριθμό 3.

4. Βρείτε ποιοι αριθμοί από τους παρακάτω διαιρούνται με το 2 ή με το 3 ή με το 5 ή με το 9:
α) 2735, β) 942, γ) 1821,
δ) 1992, ε) 1530.

5. Να βρείτε το Ε.Κ.Π των αριθμών 27 και 12.

1.16 Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Περιγράψτε τη διαδικασία που ακολουθούμε για να αναλύσουμε ένα σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Απαντήσεις

1. Η διαδικασία που ακολουθούμε για να αναλύσουμε ένα σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι η εξής:

α) Διαιρούμε τον αριθμό με το μικρότερο πρώτο αριθμό εκτός του 1 που τον διαιρεί ακριβώς.

β) Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για το πηλίκο που προκύπτει από τη διαίρεση τόσες φορές όσες χρειάζεται ώστε το πηλίκο να γίνει μονάδα.

γ) Το γινόμενο των διαιρετών που χρησιμοποιήσαμε είναι η ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

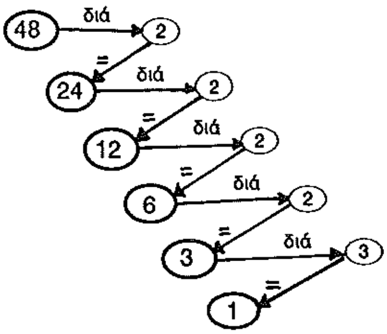
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Αναλύστε τον αριθμό 48 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

Η διαδικασία που περιγράψαμε στη θεωρία φαίνεται σχηματικά ως εξής:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$



Άρα: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

2. Αναλύστε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τον αριθμό 135.

Λύση

Σύμφωνα με την ίδια διαδικασία έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα: $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οι αριθμοί α) 96 και β) 108.

Λύση

α) $\begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & \end{array}$

β) $\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ & \end{array}$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οι αριθμοί 18, 25, 57, 81, 112, 196, 432.

1.17 Η ευκλείδεια διαίρεση

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Τι ονομάζουμε ευκλείδεια διαίρεση;

1. Ευκλείδεια διαίρεση δύο αριθμών Δ (διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) λέγεται η διαδικασία εκείνη κατά την οποία από τους αριθμούς Δ και δ βρίσκουμε δύο άλλους, π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο), έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:
$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ και $\upsilon < \delta$.

π.χ. Για τους αριθμούς $\Delta = 27$ και $\delta = 4$ έχουμε: $\pi = 6$ και $\upsilon = 3$,
διότι: $27 = 6 \cdot 4 + 3$
ή παραστατικά:

$$\begin{array}{rr|l} \Delta \rightarrow & 27 & 4 \leftarrow \delta \\ \cline{3-3} \upsilon \rightarrow & 3 & 6 \leftarrow \pi \end{array}$$

2. Πότε η ευκλείδεια διαίρεση είναι τέλεια και πότε ατελής;

2. Η ευκλείδεια διαίρεση είναι **τέλεια**, όταν το υπόλοιπο είναι 0. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ γίνεται $\Delta = \delta \cdot \pi$

Αν το $υ \neq 0$ τότε η ευκλείδεια διαίρεση είναι ατελής.

3. Πότε λέμε ότι ο αριθμός δ διαιρεί τον Δ;

3. Όταν η διαίρεση είναι τέλεια έχουμε δηλαδή $Δ = δ \cdot π$ λέμε ότι ο δ διαιρεί τον Δ ή ότι ο δ είναι διαιρέτης του Δ. Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης κάθε φυσικού αριθμού και ακόμα κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτη τον εαυτό του.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και τις δοκιμές τους:
α) 189 : 4 β) 328 : 7
γ) 5.186 : 23 δ) 1.985 : 17

Λύση

α)

189	4
29	47
1	

β)

328	7
48	46
6	

γ)

5.186	23
58	225
126	
11	

δ)

1.985	17
28	116
115	
13	

Δοκιμή

α) $\begin{array}{r} 47 \\ \times 4 \\ \hline 188 \\ +1 \\ \hline 189 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} 46 \\ \times 7 \\ \hline 322 \\ +6 \\ \hline 328 \end{array}$

γ) $\begin{array}{r} 225 \\ \times 23 \\ \hline 675 \\ +450 \\ \hline 5175 \\ +11 \\ \hline 5186 \end{array}$ δ) $\begin{array}{r} 116 \\ \times 17 \\ \hline 812 \\ +116 \\ \hline 1972 \\ +13 \\ \hline 1985 \end{array}$

2. Δίνονται οι παρακάτω ισότητες:
α) $544 = 12 \cdot 15 + 4$
β) $627 = 13 \cdot 48 + 3$
γ) $199 = 15 \cdot 11 + 34$
δ) $189 = 3 \cdot 15 + 144$
ε) $1.134 = 63 \cdot 18$
ζ) $229 = 18 \cdot 12 + 13$
Ποιες από αυτές προκύπτουν από ευκλείδειες διαιρέσεις;

Λύση

α) $544 = 12 \cdot 15 + 4$. Η ισότητα αυτή προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση, γιατί το υπόλοιπο 4 είναι μικρότερο και από το 12 και από το 15, όποιο από τα δύο κι αν θεωρήσουμε ως διαιρέτη.
β) $627 = 13 \cdot 48 + 3$, όμοια, γιατί το 3 είναι μικρότερο από το 13 και το 48.
γ) $199 = 15 \cdot 11 + 34$, η ισότητα αυτή δεν προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση, γιατί το 34 είναι μεγαλύτερο από το 15 και από το 11.
δ) $189 = 3 \cdot 15 + 144$, δεν προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση, γιατί το 144 είναι μεγαλύτερο από το 3 και το 15.
ε) $1.134 = 63 \cdot 18$, αυτή προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση και μάλιστα τέλεια γιατί το υπόλοιπο είναι 0.
ζ) $229 = 18 \cdot 12 + 13$, αυτή επίσης προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση αν ως διαιρέτη θεωρήσουμε τον 18, ενώ δεν προκύπτει από ευκλείδεια διαίρεση, αν ως διαιρέτη θεωρήσουμε το 12 (διότι τότε $υ > δ$).

3. Αν Δ είναι ένας φυσικός αριθμός:
α) να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων Δ : 5, β) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς Δ που διαιρούμενοι με το 5 δίνουν πηλίκο 11.

Λύση

α) Το 5 είναι ο διαιρέτης δ. Γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο υ πρέπει να είναι φυσικός αριθμός μικρότερος του δ. Άρα το υπόλοιπο μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4.

β) Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με το 5 δίνει πηλίκο 11 και υπόλοιπο υ, με υ < 5.

Δηλαδή : $\begin{array}{r|l} \Delta & 5 \\ \cline{2-2} υ & 11 \end{array}$

Άρα έχουμε: $\Delta = 5 \cdot 11 + υ$ με το υ να παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4.

Οπότε:

αν $υ = 0$ έχουμε $\Delta = 5 \cdot 11 + 0 = 55$

αν $υ = 1$ έχουμε $\Delta = 5 \cdot 11 + 1 = 55 + 1 = 56$

αν $υ = 2$ έχουμε $\Delta = 5 \cdot 11 + 2 = 55 + 2 = 57$

αν $υ = 3$ έχουμε $\Delta = 5 \cdot 11 + 3 = 55 + 3 = 58$

αν $υ = 4$ έχουμε $\Delta = 5 \cdot 11 + 4 = 55 + 4 = 59$

Άρα οι ζητούμενοι φυσικοί αριθμοί Δ είναι: 55, 56, 57, 58, 59.

4. Με τη βοήθεια της ευκλείδειας διαίρεσης να βρείτε ποια ημέρα θα έχουμε μετά από 158 ημέρες, αν σήμερα είναι Δευτέρα.

Λύση

Αν σήμερα είναι Δευτέρα, η επόμενη Δευτέρα θα είναι σε 7 ημέρες δηλαδή σε μία εβδομάδα. Διαιρούμε λοιπόν το 158 με το 7 για να δούμε πόσες εβδομάδες υπάρχουν μέσα στις 158 ημέρες.

$\begin{array}{r|l} 158 & 7 \\ \cline{2-2} 18 & 22 \\ 4 & \end{array}$

Άρα υπάρχουν 22 εβδομάδες και 4 ημέρες. Επομένως μετά από 158 ημέρες θα είναι Παρασκευή, δηλαδή 4 ημέρες μετά τη Δευτέρα.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις με τις δοκιμές τους:
α) 156 : 7 , β) 189 : 15 , γ) 19.832 : 176

Λύση

α) $\begin{array}{r|l} 156 & 7 \\ \cline{2-2} 16 & 22 \\ 2 & \end{array}$ β) $\begin{array}{r|l} 189 & 15 \\ \cline{2-2} 39 & 12 \\ 9 & \end{array}$ γ)...

<u>Δοκιμή</u>

$\begin{array}{r} 22 \\ \times 7 \\ \hline 154 \\ +2 \\ \hline 156 \end{array}$

<u>Δοκιμή</u>

...

2. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδειες διαιρέσεις:

α) $347 = 15 \cdot 23 + 2$

β) $189 = 36 \cdot 4 + 45$

γ) $1.084 = 15 \cdot 72 + 4$

δ) $134 = 7 \cdot 17 + 15$

Λύση

Στις ευκλείδειες διαιρέσεις το υπόλοιπο είναι μικρότερο, τουλάχιστον, από τον έναν από τους δύο αριθμούς, που υπάρχουν στο γινόμενο. Στην α) π.χ. έχουμε ότι το 2 είναι μικρότερο από το 15 και το 23. Άρα αυτή αποτελεί ευκλείδεια διαίρεση. Στην β) ...

3. Αν Δ είναι φυσικός αριθμός: α) Να υπολογιστούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του Δ διά του 6. β) Αν η διαίρεση Δ : 6 δίνει πηλίκο 8, ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο φυσικός Δ;

Λύση

α) Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων Δ : 6 θα είναι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 6. Άρα....

β) $\begin{array}{r|l} \Delta & 6 \\ \cline{2-2} υ & 8 \end{array}$ τότε $\Delta = 6 \cdot 8 + υ$ ή $\Delta = 48 + υ$, με $υ < 6$. Άρα ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια της ευκλείδειας διαίρεσης να βρείτε ποια ημέρα θα έχουμε μετά από 183 ημέρες, αν σήμερα είναι Πέμπτη.

2. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν ευκλείδειες διαιρέσεις:
α) $3.125 = 625 \cdot 5$,
β) $32 = 19 \cdot 29 + 2$,
γ) $290 = 15 \cdot 18 + 20$,
δ) $32 = 4 \cdot 5 + 12$

3. Αν Δ είναι φυσικός αριθμός να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του Δ διά το 3.

4. Αν ο α είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 3 και μικρότερος του 10 και επιπλέον αν ένας διαιρέτης του είναι το 2, να βρείτε τον α.

5. Αν η διαίρεση του Δ με τον 8 δίνει πηλίκο 11, να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο φυσικός αριθμός α.

6. Στη διαίρεση του φυσικού αριθμού Δ με το 6 προκύπτει πηλίκο 2 και υπόλοιπο ίσο με το μισό του διαιρέτη. Να βρείτε την τιμή του Δ.

7. Κατά τη διαίρεση του φυσικού αριθμού Δ με το 6 προκύπτει πηλίκο ίσο με το μισό του διαιρέτη και υπόλοιπο 2. Να βρείτε την τιμή του Δ.

1.18 Διαίρεση δεκαδικών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πώς κάνουμε διαίρεση δεκαδικού με φυσικό;	1. Για να κάνουμε διαίρεση δεκαδικού με φυσικό αριθμό, εργαζόμαστε όπως στην ευκλείδεια διαίρεση, έχοντας υπόψη ότι πριν κατεβάσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο, πρέπει να τοποθετήσουμε στο πηλίκο υποδιαστολή.
2. Πώς γίνεται η διαίρεση φυσικού με φυσικό όταν δεν είναι τέλεια;	2. Για να κάνουμε διαίρεση φυσικού αριθμού με φυσικό, όταν αυτή δεν είναι τέλεια, γράφουμε τον φυσικό ως δεκαδικό, με δεκαδικό μέρος μηδέν, και η διαίρεση μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να βρεθεί πηλίκο δεκαδικός.

π.χ.

$$\begin{array}{r|l} 159{,}00 & 4 \\ \cline{2-2} 39 & 39{,}75 \\ 30 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

3. Πώς διαιρούμε με 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ.;

3. Για να διαιρέσουμε ένα δεκαδικό αριθμό με το 10 ή 100 ή 1000 κ.λπ., αρκεί να μεταφέρουμε την υποδιαστολή του προς τα αριστερά κατά μία ή δύο ή τρεις κ.λπ. αντίστοιχα θέσεις.

4. Πώς γίνεται διαίρεση δεκαδικού με δεκαδικό;

4. Για να γίνει διαίρεση δεκαδικού με δεκαδικό πολλαπλασιάζουμε διαιρετέο και διαιρέτη με 10, 100, 1000 κ.λπ., ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός και έτσι εκτελούμε διαίρεση δεκαδικού με φυσικό ή φυσικού με φυσικό.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις:
α) 159 : 4 β) 1.758 : 5 γ) 85,2 : 4
δ) 89,25 : 5 ε) 897 : 15
στ) 974,13 : 19 ζ) 18,675 : 0,5
η) 97,865 : 0,25 θ) 202,5 : 9

Λύση

α)

159,00	4
39	39,75
30	
20	
0	

β)

1758,0	5
25	351,6
08	
30	
0	

γ)

85,2	4
05	21,3
1 2	
0	

δ)

89,25	5
39	17,85
4 2	
25	
0	

ε)

897	15
147	59,8
120	
0	

στ)

974,13	19
24	51,27
51	
133	
0	

ζ)

18,675	0,5
× 10	× 10
186,75	5
36	37,35
17	
25	
0	

η)

97,865	0,25
× 100	× 100
9.786,50	25
2 28	391,46
36	
115	
150	
0	

θ)

202,5	9
22	22,5
45	
0	

2. Να βρείτε τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων:
α) 75 : 10 β) 852 : 100
γ) 49 : 1000 δ) 25,62 : 100
ε) 2,75 : 1.000 στ) 0,25 : 100

Λύση

α) 75 : 10 = 7,5
β) 852 : 100 = 8,52
γ) 49 : 1.000 = 0,049
δ) 25,63 : 100 = 0,2563
ε) 2,75 : 1.000 = 0,00275
στ) 0,25 : 100 = 0,0025

3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με 2 τρόπους:
α) (100 + 75) : 25 β) (60 + 6) : 6
γ) (150 + 30) : 3,2 δ) (935 + 652) : 4
ε) (63,9 + 9,9) : 9

Λύση

<u>α' τρόπος:</u>
α) (100 + 75) : 25 = 175 : 25 = 7
β) (60 + 6) : 6 = 66 : 6 = 11
γ) (150 + 30) : 3,2 = 180 : 3,2 = 56,25
δ) (935 + 652) : 4 = 1587 : 4 = 396,75
ε) (63,9 + 9,9) : 9 = 73,8 : 9 = 8,2

β' τρόπος:

α) $(100 + 75) : 25 = (100 : 25) + (75 : 25)$
$= 4 + 3 = 7$

β) $(60 + 6) : 6 = (60 : 6) + (6 : 6) =$
$10 + 1 = 11$

γ) $(150 + 30) : 3,2 =$
$(150 : 3,2) + (30 : 3,2) =$
$46,875 + 9,375 = 56,25$

δ) $(935 + 652) : 4 = (935 : 4) + (652 : 4)$
$= 233,75 + 163 = 396,75$

ε) $(63,9 + 9,9) : 9 = (63,9 : 9) + (9,9 : 9)$
$= 7,1 + 1,1 = 8,2$

Παρατήρηση: Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει όπως ακριβώς μάθαμε στον πολλαπλασιασμό, δηλαδή:

$$(\alpha + \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) + (\beta : \gamma).$$

4. Αν x = 75,5 : y και y = 83,4 : 8,34, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: (x + y) : 100

Λύση

83,4	8,34
× 100	× 100
8.340	834
0	10

Άρα y = 10.
Επομένως x = 75,5 : 10 = 7,55 και
(x + y) : 1.000 = (7,55 + 10) : 1000 =
17,55 : 1000 = 0,01755

5. Αν x = (50,4 : 4,2) · 3,1 και y = [(28,4 + 3,4) : 0,3] : 0,25 και z = (7,9 - 2,3) : 1,4 να βρεθεί η τιμή της παράστασης Α = (x + y) : z.

Λύση

x = (50,4 : 4,2) · 3,1 = 12 · 3,1 = 37,2
y = [(28,4 + 3,4) : 0,3] : 0,25 =
(31,8 : 0,3) : 0,25 = 106 : 0,25 = 424
z = (7,9 - 2,3) : 1,4 = 5,6 : 1,4 = 4
Επομένως:
Α = (37,2 + 424) : 4 = 461,2 : 4 = 115,3

6. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο 93,6 μέτρα. Να βρεθεί η πλευρά του.

Λύση

Εφόσον οι πλευρές του είναι ίσες, τότε η κάθε μία είναι 93,6 : 3 = 31,2 μέτρα.

7. Ένας έμπορος αγόρασε 73,5 μέτρα ύφασμα και πλήρωσε 99.225 δρχ. Πόσο πρέπει να πουλήσει το μέτρο για να κερδίσει συνολικά 29.400 δρχ.;

Λύση

Ο έμπορος αγόρασε το μέτρο
99.225 : 73,5 = 1.350 δρχ.
Το κέρδος του σε κάθε μέτρο είναι
29.400 : 73,5 = 400 δρχ. Επομένως πρέπει να πουλήσει το ύφασμα
1.350 + 400 = 1.750 δρχ. το μέτρο.

8. Ένα βαρέλι περιέχει 850,5 κιλά κρασί. Πόσα μπουκάλια κρασί θα γεμίσουμε, αν το κάθε μπουκάλι χωράει 750 γραμμάρια κρασί;

Λύση

Τα 750 γραμμάρια είναι:
750 : 1000 = 0,75 κιλά διότι το 1 κιλό είναι 1000 γραμμάρια. Άρα θα πάρουμε
850,5 : 0,75 = 1134 μπουκάλια κρασί.

9. Μία μοτοσυκλέτα διήνυσε 585,5 χιλιόμετρα και κατανάλωσε βενζίνη αξίας 4.918,2 δρχ. Πόσο στοιχίζει το χιλιόμετρο και πόσα λίτρα βενζίνης κατανάλωσε, αν το κάθε λίτρο κοστίζει 140 δρχ.;

Λύση

Εφόσον τα 585,5 χιλιόμετρα για να καλυφθούν χρειάζονται βενζίνη αξίας 4918,2 δρχ., το 1 χιλιόμετρο χρειάζεται
4.918,2 : 585,2 = 8,4 δρχ. Επειδή το 1 λίτρο κοστίζει 140 δρχ. και χρειάζεται 4.918,2 δρχ., κατανάλωσε 4918,2 : 140 = 35,13 λίτρα.

10. Ένα οικόπεδο σχήματος τετραγώνου έχει περίμετρο 102 μέτρα. Πόσο θα στοιχίσει το τετραγωνικό μέτρο, αν το οικόπεδο κοστίζει 2.601.000 δρχ.;

Λύση

Η πλευρά του οικοπέδου είναι 102 : 4 = 25,5 μέτρα. Το εμβαδόν του οικοπέδου είναι: $Ε = (25,5)^2 = 650,25$ τετραγωνικά μέτρα.
Άρα το κάθε τετραγωνικό μέτρο κοστίζει: 2.601.000 : 650,25 = 4.000 δρχ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

Λύση

α) 25 : 10 = 2,5
β) 75 : 10 = ...
γ) 2,35 : 10 = ...
δ) 93,25 : 100 = ...
ε) 1005,3 : 1000 = ...

2. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

Λύση

α) 895,00 : 4

895,00	4
09	223,75
15	
30	
20	
0	

β) 22,4 : 2,5

22,4	2,5
× 10	× 10
....	....

γ) 79,8 : 14 .....

δ) 2.246,6 : 23,5 .....

3. Αν α = 12,93 και β = 23,7. Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων:

Α = (α + β) : 0,3
Β = (α + β) : 0,9
Γ = (β - α) : 30
Δ = (β - α) : 60

Λύση

Α = (α + β) : 0,3 = (12,75 + 23,7) : 0,3
= 36,63 : 0,3 = 122,1
Β = (α + β) : 0,9 = ...
Γ = (β - α) : 30 = ...
Δ = ...

4. Να κάνετε με 2 τρόπους τις παρακάτω πράξεις:
α) (0,48 + 1,44) : 1,2
β) (0,78 + 8,8) : 0,2

Λύση

<u>α' τρόπος:</u>
α) (0,48 + 1,44) : 1,2 = 1,92 : 1,2 = ...
β) (0,78 + 8,8) : 0,2 = ...

<u>β' τρόπος:</u>
α) (0,48 + 1,44) : 1,2 =
= (0,48 : 1,2) + (1,44 : 1,2) = ...
β) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:
α) 612,5 : 0,5 β) 39 : 0,25
γ) 75,956 : 3,4 δ) 101,25 : 4,5
ε) 1.529 : 8 στ) 974,13 : 19
ζ) 12,357 : 1,8

2. Βρείτε τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων:
α) 35 : 10 β) 28 : 1.000
γ) 850 : 100 δ) 7,5 : 100
ε) 9.500 : 1.000 στ) 25,5 : 10
ζ) 3,53 : 1.000 η) 88,5 : 1.000

3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με 2 τρόπους:
α) (124 + 38) : 5
β) (36 + 24) : 6
γ) (44 + 64 + 50) : 8
δ) (3,75 + 8,25) : 0,3
ε) (0,48 + 1,44) : 1,2
στ) (5,1 - 0,34) : 1,7
ζ) (18 + 12) : 1,5

4. Αν x = 93,2 : 9,32 και y = 87,5 : x, να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:
α) (x + y) : x β) (x + y) : 0,3
γ) (x - y) : x δ) (χ - ψ) : 0,25

5. Αν $\alpha = (2{,}25 + 3{,}35) : 10$
$\beta = (14{,}37 + 2{,}23) : 100$
$\gamma = (15{,}3 + 8{,}7) : 1.000$
Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $(\alpha + \beta + \gamma) : 100$
β) $(\alpha + \beta - \gamma) : 1.000$
γ) $(\alpha : 100) + (\beta : 100) + (\gamma : 100)$

6. Ένα δωμάτιο σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων 3,20 μέτρων × 4 μέτρων πρόκειται να στρωθεί με πλακάκια σχήματος τετραγώνου πλευράς 0,20 μέτρα. Πόσα πλακάκια θα χρειασθούν και πόσο θα κοστίσει το τετραγωνικό μέτρο, αν ο τεχνίτης θέλει 25.600 δρχ., για την εργασία του και τα πλακάκια στοιχίζουν 5.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο. (Η τιμή του τετραγωνικού μέτρου περιλαμβάνει εργασία και υλικά)

7. Ένας μαθητής αγόρασε 6 τετράδια και 4 στυλό και πλήρωσε συνολικά 2.294 δρχ. Αν το κάθε τετράδιο έχει 330 δρχ., πόσο στοιχίζει το κάθε στυλό;

8. Ένας μοτοσυκλετιστής διήνυσε 3.500 χιλιόμετρα και ξόδεψε βενζίνη αξίας 16.450 δρχ. Αν το κάθε λίτρο κοστίζει 140 δρχ., πόσα λίτρα ξόδεψε και πόσο στοιχίζει το χιλιόμετρο;

1.19 Πηλίκο με προσέγγιση

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι κάνουμε μία διαίρεση με προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κ.λπ.;	1. Όταν κάνουμε διαίρεση και δε βρίσκουμε υπόλοιπο μηδέν, όσο και αν τη συνεχίζουμε με δεκαδικά ψηφία, τότε «σταματάμε» τη διαίρεση στο δεύτερο ή τρίτο κ.λπ. δεκαδικό ψηφίο, οπότε λέμε ότι το πηλίκο που βρήκαμε είναι με προσέγγιση ή ακρίβεια εκατοστού ή χιλιοστού κ.λπ. αντιστοίχως. π.χ. $$\begin{array}{r\|l} 10 & 3 \\ \hline 10 & 3{,}33... \\ 10 & \\ ...... & \end{array}$$ 10 : 3 ≅ 3,33 Το σύμβολο ≅ διαβάζεται «περίπου ίσο με».
2. Σε ποιο δεκαδικό ψηφίο σταματάμε μια διαίρεση της οποίας το πηλίκο θέλουμε να υπολογίσουμε με προσέγγιση;	2. Σε μια διαίρεση της οποίας το πηλίκο βρίσκεται με προσέγιση, σταματάμε σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Δηλαδή αν πρόκειται για μήκος, αρκεί προσέγγιση χιλιοστού, γιατί τα μήκη τα μετράμε σε μέτρα, εκατοστά, χιλιοστά. Αν πρόκειται για βάρος είναι αρκετή η προσέγγιση χιλιοστού. Αν πρόκειται για μεγάλες αποστάσεις που μετριούνται σε χιλιόμετρα, αρκεί η προσέγγιση στη μονάδα.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης 3.796,6 : 135 με προσέγγιση α) δεκάτου, β) εκατοστού, γ) χιλιοστού.

Λύση

3.796,600	135
1096	28,122
166	
310	
400	
130	

α) 3.796,6 : 135 ≅ 28,1 (δεκάτου)

β) 3.796,6 : 135 ≅ 28,12 (εκατοστού)

γ) 3.796,6 : 135 ≅ 28,122 (χιλιοστού)

2. Να βρεθούν τα πηλίκα των διαιρέσεων: α) 395 : 3 β) 128 : 23 γ) 1796 : 45 με προσέγγιση δεκάτου, εκατοστού, χιλιοστού.

Λύση

α)

395,00	3
9	131,666
5	
20	
20	
20	

β)

128,0	23
130	5,565
150	
120	
5	

γ)

1.796	45
446	39,911
410	
50	
50	
5	

α)	β)	γ)
131,6	5,5	39,9
131,66	5,56	39,91
131,666	5,565	39,911

3. Ένα αυτοκίνητο διήνυσε 220 χιλιόμετρα και κατανάλωσε βενζίνη αξίας 4.000 δρχ. Πόσο περίπου κοστίζει το χιλιόμετρο;

Λύση

Εφόσον διήνυσε 220 χιλιόμετρα και πλήρωσε 4.000 δρχ. τότε το 1 χιλιόμετρο κόστισε 4.000 : 220. Δηλαδή:

4.000	220
1 800	18,181
400	
1800	
40	

Άρα 18,1 δρχ. το χιλιόμετρο.

4. Έμπορος αγόρασε 57 μέτρα ύφασμα με 1.200 δρχ. το μέτρο. Πόσο πρέπει να πουλήσει το μέτρο ώστε να έχει συνολικά 15.000 δρχ. κέρδος;

Λύση

Το ύφασμα στοίχισε 57 · 1.200 = 68.400 δρχ. Επειδή συνολικά θα κερδίσει 15.000 δρχ. πρέπει να πουλήσει όλο το ύφασμα 68.400 + 15.000 = 83.400.
Άρα η τιμή του μέτρου θα είναι:
83.400 : 57 = 1.463,1 με προσέγγιση δεκάτου και 1463 δρχ. με στρογγυλοποίηση στη μονάδα.

5. Ο ιδιοκτήτης μιας μοτοσυκλέτας έκανε σ' ένα χρόνο 22.000 χιλιόμετρα και πλήρωσε για βενζίνη 175.000 δρχ., για συντήρηση 27.000 δρχ., για ασφάλιστρα 11.000 δρχ. και για τέλη κυκλοφορίας 11.350 δρχ. α) Πόσες δρχ. κόστισε η βενζίνη ανά χιλιόμετρο και β) Πόση ήταν η συνολική μηνιαία δαπάνη;

Λύση

α) Το κόστος της βενζίνης ανά χιλιόμετρο ήταν: 175.000 : 22.000 ≈ 7,95 με προσέγγιση εκατοστού.

β) Συνολικά πλήρωσε: 175.000 + 27.000 + 11.000 + 11.350 = 224.350
Αρα η μηνιαία δαπάνη ήταν
224.350 : 12 = 18.695,83 και με στρογγυλοποίηση στην εκατοντάδα 18.700 δρχ.

6. Το δάπεδο ενός δωματίου έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 3,5 μέτρα και 2,7 μέτρα. Θέλουμε να το

στρώσουμε με πλάκες τετράγωνες πλευράς 0,45 μέτρων. Πόσες πλάκες τουλάχιστον θα χρειασθούν;

Λύση

Το εμβαδό του δαπέδου του δωματίου είναι: 3,5 · 2,7 = 9,45 τετραγωνικά μέτρα. Το εμβαδό κάθε πλάκας είναι 0,45 · 0,45 = 0,2025 τετραγωνικά μέτρα. Επομένως θα χρειασθούν 9,45 : 0,2025 = 46,66 πλάκες και με στρογγυλοποίηση 47 πλάκες τουλάχιστον.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης 159 : 23 με προσέγγιση δεκάτου, εκατοστού, χιλιοστού. Όμοια των διαιρέσεων: α) 278 : 32,5 β) 895,3 : 3,29

Λύση

159	23
210	6,913
= 30	
=70	
=1	

Άρα 6,9 (με προσέγγιση δεκάτου),
6,91 (με προσέγγιση εκατοστού)
και 6,913 (με προσέγγιση χιλιοστού).

α) 278 | 32

β) 895,3 | 3,29

2. Ένας έμπορος αγόρασε 350 κιλά πορτοκάλια με 82,5 δρχ. το κιλό. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό για να κερδίσει συνολικά 7.500 δρχ.;

Λύση

Ο έμπορος πλήρωσε συνολικά 350 · 82,5 = 28.875. Άρα θα πρέπει να τα πουλήσει 28.875 + 7.500 = ... και θα πουλήσει το κιλό ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων:
α) 350,2 : 7,3 β) 258,69 : 0,35
γ) 8.951 : 32 δ) 9.999 : 88 με προσέγγιση δεκάτου, εκατοστού, χιλιοστού

2. Όμοια των διαιρέσεων:
α) 65,23 : 3,15 β) 3,28 : 0,012
γ) 22,4 : 98 δ) 44,8 : 18

3. Ένα αυτοκίνητο διήνησε 535 χιλιόμετρα και κατανάλωσε βενζίνη αξίας 5.500 δρχ. Πόσες δρχ. κόστισε η βενζίνη ανά χιλιόμετρο;

4. Το δάπεδο ενός δωματίου έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς 4,2 μέτρων. Πόσα πλακάκια θα χρειασθούν τουλάχιστον για να στρωθεί, αν κάθε πλακάκι έχει σχήμα ορθογωνίου διαστάσεων 0,20 και 0,48 μέτρων;

5. Ένας οδηγός διήνησε με το αυτοκίνητό του σ' ένα χρόνο 28.000 χιλιόμετρα και πλήρωσε για βενζίνη 320.000 δρχ., για συντήρηση 45.000 δρχ., για ασφάλιστρα 25.000 δρχ. και για τέλη κυκλοφορίας 12.790 δρχ. Πόσες δρχ. κόστισε η βενζίνη ανά χιλιόμετρο και πόση ήταν η συνολική μηνιαία δαπάνη (στρογγυλοποίηση);

6. Ένας έμπορος αγόρασε 85 μέτρα ύφασμα με 2.350 δρχ το μέτρο. Πόσο πρέπει να πουλήσει το μέτρο, ώστε να έχει συνολικά κέρδος 18.000 δρχ. (στρογγυλοποίηση στην εκατοντάδα);

1. 20 Προτεραιότητα των πράξεων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με ποια σειρά εκτελούμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση που δεν έχει παρενθέσεις;

2. Με ποια σειρά εκτελούμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση που έχει παρενθέσεις;

Απαντήσεις

1. Όταν έχουμε να εκτελέσουμε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις, ακολουθούμε την εξής σειρά:

α) Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

β) Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις με τη σειρά που εμφανίζονται οι πράξεις αυτές.

γ) Κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

2. Για να εκτελέσουμε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση που έχει παρενθέσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

α) Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (κατά σειρά: δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί-διαιρέσεις, προσθέσεις-αφαιρέσεις) ώστε να προκύψει παράσταση χωρίς παρενθέσεις.

β) Στην παράσταση που προκύπτει εκτελούμε κατά σειρά: τις δυνάμεις, τους πολλαπλασιασμούς - διαιρέσεις (όπως εμφανίζονται), τις προσθέσεις-αφαιρέσεις.

1. **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ**
(σειρά πράξεων μέσα στις παρενθέσεις)

Δυνάμεις → πολ/σμοί και διαιρέσεις → προσθέσεις και αφαιρέσεις

προκύπτει

2. **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ**
(σειρά πράξεων)

Δυνάμεις → πολ/σμοί και διαιρέσεις → προσθέσεις και αφαιρέσεις

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$A = 15 : 5 - 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot (20 - 2^2) -$
$- 2 \cdot (3 - 2)^2$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:
$A = 15 : 5 - 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot (20 - 2^2) -$
$- 2 (3 - 2)^2 =$
$= 15 : 5 - 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot (20 - 4) - 2 \cdot 1^2$
$= 15 : 5 - 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 16 - 2 \cdot 1^2$
$= 15 : 5 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 16 - 2 \cdot 1 =$
$= 3 - 2 + 48 - 2 =$
$= 1 + 48 - 2 =$
$= 49 - 2 =$
$= 47$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$B = 2^3 \cdot 3 - 20 : 2^2 + 2 \cdot (2^3 - 2^2) - 5 \cdot 2$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:
$B = 2^3 \cdot 3 - 20 : 2^2 + 2 \cdot (2^3 - 2^2) - 5 \cdot 2 =$
$= 2^3 \cdot 3 - 20 : 2^2 + 2 \cdot (8 - 4) - 5 \cdot 2 =$
$= 8 \cdot 3 - 20 : 4 + 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 =$
$= 24 - 5 + 8 - 10 =$
$= 19 + 8 - 10 =$
$= 27 - 10 =$
$= 17.$

3. Αν $x = 3$, $y = 2$, $\omega = 1$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $A = x^2 + 2xy + y^2$
β) $B = x^2 + y^2 + \omega^2 + 2xy + 2x\omega + 2y\omega$

Λύση

α) $A = x^2 + 2xy + y^2 =$
$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 =$
$= 9 + 12 + 4 =$
$= 25$

β) $B = x^2 + y^2 + \omega^2 + 2xy + 2x\omega +$
$+ 2y\omega =$
$= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 +$
$+ 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 =$
$= 9 + 4 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 +$
$+ 2 \cdot 2 \cdot 1 =$
$= 9 + 4 + 1 + 12 + 6 + 4 =$
$= 36.$

4. Αν $x = 0{,}1$, $y = 3{,}2$, $\omega = 1{,}5$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $3x^2y + x + y^2\omega - 2y\omega$
β) $xy + y^3 - \omega^2 - 2 \cdot (x + y)^2$

Λύση

α) $3x^2 y + x + y^2 \omega - 2y\omega =$
$= 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 3{,}2 + 0{,}1 + 3{,}2^2 \cdot 1{,}5 -$
$- 2 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}5 =$
$= 3 \cdot 0{,}01 \cdot 3{,}2 + 0{,}1 + 10{,}24 \cdot 1{,}5 -$
$- 2 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}5 =$
$= 0{,}096 + 0{,}1 + 15{,}36 - 9{,}6 =$
$= 0{,}196 + 15{,}36 - 9{,}6 =$
$= 15{,}556 - 9{,}6 =$
$= 5{,}956.$

β) $xy + y^3 - \omega^2 - 2 \cdot (x + y)^2 =$
$= 0{,}1 \cdot 3{,}2 + 3{,}2^3 - 1{,}5^2 -$
$- 2 (0{,}1 + 3{,}2)^2 =$
$= 0{,}1 \cdot 3{,}2 + 3{,}2^3 - 1{,}5^2 - 2 \cdot 3{,}3^2 =$
$= 0{,}1 \cdot 3{,}2 + 32{,}768 - 2{,}25 - 2 \cdot 10{,}89 =$
$= 0{,}32 + 32{,}768 - 2{,}25 - 21{,}78 =$
$= 33{,}088 - 2{,}25 - 21{,}78 =$
$= 30{,}838 - 21{,}78 =$
$= 9{,}058.$

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:
α) $3^2 + 4^2 \cdot 2$ β) $4^2 \cdot 2 - 3^2$
γ) $(4 - 3)^2 \cdot 2$ δ) $(4 - 3) \cdot 2^2$
ε) $3^2 + 2^2 \cdot 4$

Λύση

α) $3^2 + 4^2 \cdot 2 = 9 + 16 \cdot 2 = 9 + 32 =$..
β) $4^2 \cdot 2 - 3^2 = 16 \cdot 2 - 9 =$ ...
γ) $(4 - 3)^2 \cdot 2 = 1^2 \cdot 2 =$ ...
δ) $(4 - 3) \cdot 2^2 = 1 \cdot 2^2 =$ ...
ε) $3^2 + 2^2 \cdot 4 = 9 + 4 \cdot 4 =$ ...

2. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:
α) $2,1^2 - 1,5^2$ β) $(2,1 - 1,5) \cdot (2,1 + 1,5)$
γ) $7,3^2 + 2 \cdot 0,1 - 5,5 \cdot 2^2$ δ) $3,3^2 - 2^3 : 4$

Λύση

α) $2,1^2 - 1,5^2 = 4,41 - 2,25 = ...$
β) $(2,1 - 1,5) \cdot (2,1 + 1,5) = 0,6 \cdot 3,6 = ...$
γ) $7,3^2 + 2 \cdot 0,1 - 5,5 \cdot 2^2 =$
$= 53,29 + 2 \cdot 0,1 - 5,5 \cdot 4 = ...$
δ) $3,3^2 - 2^3 : 4 = 10,89 - 8 : 4 = ...$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = 3^3 \cdot (0,2)^2 - 2^3 \cdot (0,3)^2 + 4 \cdot 7 : 2$

Λύση

$A = 3^3 \cdot (0,2)^2 - 2^3 \cdot (0,3)^2 + 4 \cdot 7 : 2 =$
$= 9 \cdot 0,04 - 8 \cdot 0,09 + 4 \cdot 7 : 2 = ...$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$B = 3 \cdot (7 - 2)^2 - 2 \cdot (2^3 - 5) + 4 \cdot (3^2 - 2^3)^2$

Λύση

$B = 3 \cdot (7 - 2)^2 - 2 \cdot (2^3 - 5) + 4 \cdot (3^2 - 2^3)^2$
$= 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot (8 - 5) + 4 \cdot (9 - 8)^2 = ...$

5. Αν $x = 5$, $y = 3$, $\omega = 2$, να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $(x + 2y - \omega)^2$ β) $(x - y + \omega^2)^2$

Λύση

α) $(x + 2y - \omega)^2 = (5 + 2 \cdot 3 - 2)^2 = ...$
β) $(x - y + \omega^2)^2 = (5 - 3 + 2^2)^2 = ...$

6. Αν $x = 6$, $y = 2$, $\omega = 1$, να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $(3x - 4y + \omega^2)^3$
β) $2(x - y)^2 - 2(y - \omega)^2$

Λύση

α) $(3x - 4y + \omega^2)^3 =$
$= (3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 + 1^2)^3 = ...$
β) $2(x - y)^2 - 2(y - \omega)^2 =$
$= 2(6 - 2)^2 - 2(2 - 1)^2 =$
$= 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 1^2 = ...$

7. Αν $x = 6$, $y = 3$, $z = 2$, να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $(8 \cdot x^2) : (x^2 - z^2) - x : z$
β) $(x : 3)^2 \cdot (y - z)^3$

Λύση

α) $(8 \cdot x^2) : (x^2 - z^2) - x : z =$
$= (8 \cdot 6^2) : (6^2 - 2^2) - 6 : 2 = ...$
β) $(x : 3)^2 \cdot (y - z)^3 = (6 : 3)^2 \cdot (3 - 2)^3 = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(7 - 5)^2$ β) $(7 + 5)^2$ γ) $7^2 - 5^2$
δ) $(4 + 2^2)^2$ ε) $4^2 - 2^2$ στ) $2 \cdot (3^2 - 6)$

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(0,32 - 0,16)^2$ β) $(0,32 + 0,68)^2$
γ) $(4,1 - 1,9)^2$ δ) $(4,1 + 1,9)^2$
ε) $(7,6 - 3,6)^2$ στ) $(7,6 + 3,4)^2$

3. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $8^2 : 2^4$ β) $3^4 : 3^3$ γ) $5^2 \cdot 5^3 : 125$
δ) $2^6 : 2^4 \cdot 2^3$ ε) $1^3 \cdot 1^2 \cdot 1^5$
στ) $16 : 2^3 \cdot 3$

4. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $3 : 2^2 - 0,1^2$ β) $4 \cdot (3^2 - 7)$
γ) $2^6 : (7^2 - 6^2)$ δ) $6 \cdot (9 - 5)^2 - 2^3 : 8$

5. Αν $x = 2$, $y = 3$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(x + y)^2$ β) $(y - x)^2$ γ) $y^2 + x^2 - 2xy$
δ) $x^2 + y^2 + 2xy$

6. Αν $x = 4$, $y = 2$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(x + y)^3$ β) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
γ) $(x - y)^3$ δ) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

7. Αν $x = 3$ $y = 5$ $\omega = 2$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(x + y + \omega)^2$
β) $x^2 + y^2 + \omega^2 + 2 \cdot (xy + x\omega + y\omega)$
γ) $(x + y - \omega)^2$
δ) $x^2 + 2xy - 2x\omega + y^2 + \omega^2 - 2y\omega$

8. Αν $x = 0{,}9$, $y = 0{,}1$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $x^3 + y^3$ β) $(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$
γ) $x^3 - y^3$ δ) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$

9. Αν $x = 4$ $y = 2{,}5$ $z = 1{,}5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $x^2 - y^2$ β) $(x - y) \cdot (x + y)$
γ) $(x + y)^2 - z^2$ δ) $(x + z)^2 - y^2$
ε) $(x + y - z) \cdot (x + y + z)$
στ) $x^2 - (y - z)^2$

10. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$A = 8{,}1 : (2 \cdot 1{,}35) - 1{,}5 \cdot (3^2 - 2^3)$
$B = 7{,}5 : (5 \cdot 0{,}25 \cdot 2) + (2^6 - 7 \cdot 8) : 2^3$
$\Gamma = 0{,}4^2 : 0{,}2^2 : 4 - 0{,}3^2 \cdot 0{,}2 \cdot (5^2 - 4^2)$

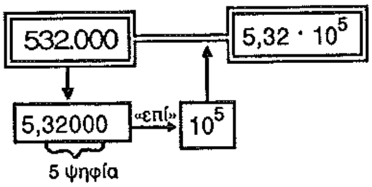
1.21 Τυποποιημένη ή εκθετική μορφή μεγάλων αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να αναφέρετε τα μειονεκτήματα που παρουσιάζονται όταν γράφουμε μεγάλους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

2. Πώς γράφεται ένας μεγάλος αριθμός στην τυποποιημένη μορφή;



3. Ποιες επιστήμες χρησιμοποιούν αριθμούς με τυποποιημένη μορφή και γιατί;

Απαντήσεις

1. Τα μειονεκτήματα που παρουσιάζονται όταν γράφουμε μεγάλους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι τα εξής:
α) Δεν είναι εύκολο να μετρηθεί σύντομα το πλήθος των ψηφίων τους.
β) Δεν είναι εύκολο να συγκριθούν μεταξύ τους.

2. Για να γράψουμε ένα μεγάλο αριθμό στην τυποποιημένη μορφή κάνουμε τα εξής:
α) Βάζουμε υποδιαστολή μετά το πρώτο ψηφίο του.
β) Τον αριθμό που προκύπτει τον πολ/με με δύναμη του 10 που έχει εκθέτη τον αριθμό που δηλώνει το πλήθος των ψηφίων του μεγάλου αριθμού εκτός του πρώτου.
<u>Παρατήρηση:</u> Αν ο δεκαδικός αριθμός έχει πολλά δεκαδικά ψηφία συνήθως γίνεται στρογγυλοποίηση.

3. Επιστήμες που χρησιμοποιούν αριθμούς με τυποποιημένη μορφή είναι η Αστρονομία, η Γεωγραφία, η Φυσική, η Χημεία και γενικά όσες κάνουν υπολογισμούς με μεγάλους αριθμούς.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή:
α) 759.000.000 β) 4.630.000.000
γ) 63.700 δ) 1.785.000.000

Λύση

8 ψηφία

α) $759.000.000 = 7{,}59 \cdot 10^8$

9 ψηφία

β) $4.630.000.000 = 4{,}63 \cdot 10^9$

γ) $63.700 = 6{,}37 \cdot 10^4$

δ) $1.785.000.000 = 1{,}785 \cdot 10^9$

2. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:
α) $7{,}36 \cdot 10^6$ β) $6{,}52 \cdot 10^7$
γ) $7{,}9 \cdot 10^3$ δ) $5{,}31 \cdot 10^3$

Λύση

α) $7{,}36 \cdot 10^6 = 7.360.000$

β) $6{,}52 \cdot 10^7 = 65.200.000$

γ) $7{,}9 \cdot 10^3 = 7.900$

δ) $5{,}31 \cdot 10^3 = 5.310$

3. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:
α) $3{,}375 \cdot 10^6$ β) $7{,}14 \cdot 10^7$
γ) $2{,}279 \cdot 10^{11}$ δ) $1{,}025 \cdot 10^{15}$

Λύση

α) $3{,}375 \cdot 10^6 = 3.375.000$

β) $7{,}14 \cdot 10^7 = 71.400.000$

γ) $2{,}279 \cdot 10^{11} = 227.900.000.000$

δ) $1{,}025 \cdot 10^{15} = 1.025.000.000.000.000$

4. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:
$A = 9{,}6 \cdot 10^6 + 17{,}2 \cdot 10^7 - 11 \cdot 10^5$ και
$B = 3{,}48 \cdot 10^4 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}31 \cdot 10^4$

Λύση

$A = 9{,}6 \cdot 10^6 + 17{,}2 \cdot 10^7 - 11 \cdot 10^5 =$
$9.600.000 + 172.000.000 - 1.100.000 =$
$181.600.000 - 1.100.000 = 180.500.000 =$
$1{,}805 \cdot 10^8$

$B = 3{,}48 \cdot 10^4 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 7{,}31 \cdot 10^4 =$
$34.800 + 2.300.000 - 73.100 =$
$2.334.800 - 73.100 = 2.261.700 =$
$2{,}2617 \cdot 10^6$

5. Ο επόμενος πίνακας περιέχει την ακτίνα R, την μάζα M και την απόσταση L από τον ήλιο τριών πλανητών: α) Να βρείτε τον πλανήτη που έχει τη μεγαλύτερη ακτίνα β) Να βρείτε τον πλανήτη με τη μικρότερη μάζα.

Λύση

Ο πλανήτης Δίας έχει τη μεγαλύτερη ακτίνα. Αυτό το καταλαβαίνουμε αμέσως από τη δύναμη του δέκα (10^7). Ο πλανήτης Ερμής έχει τη μικρότερη μάζα ($3{,}301 \cdot 10^{23}$).

Παρατήρηση: Μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ο Ερμής είναι πιο κοντά στον ήλιο, ενώ ο Δίας απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση. Από τον παρακάτω πίνακα καταλαβαίνουμε την χρησιμότητα της τυποποιημένης μορφής μεγάλων αριθμών.

	R (m)	M (kgr)	L (m)
ΕΡΜΗΣ	$2{,}42 \cdot 10^6$	$3{,}301 \cdot 10^{23}$	$5{,}791 \cdot 10^{10}$
ΑΡΗΣ	$3{,}375 \cdot 10^6$	$6{,}420 \cdot 10^{23}$	$2{,}279 \cdot 10^{11}$
ΔΙΑΣ	$7{,}14 \cdot 10^7$	$1{,}899 \cdot 10^{27}$	$7{,}783 \cdot 10^{11}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς, με τυποποιημένη μορφή:
α) 43.000.000
β) 31.730.000.000
γ) 314.000.000.000
δ) 91.500.000.000.000.000

Λύση

α) $43.000.000 = 4,3 \cdot 10^7$
β) 31.730.000.000 = ...
γ) ... δ) ...

2. Να γράψετε στη δεκαδική τους μορφή τους αριθμούς:
α) $4,869 \cdot 10^9$ β) $1,899 \cdot 10^5$
γ) $5,9 \cdot 10^4$ δ) $2,23 \cdot 10^7$

Λύση

α) $4,869 \cdot 10^9 = 4.869.000.000$
β) $1,899 \cdot 10^5 = ...$

3. Να υπολογιστούν οι τιμές των αριθμητικών παραστάσεων:
$A = 3,4 \cdot 10^3 + 75,9 \cdot 10^2 + 8,1 \cdot 10^4 -$
$- 0,6 \cdot 10^4$ και
$B = 6,28 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^9 - 6,121 \cdot 10^4$

Λύση

$A = 3,4 \cdot 10^3 + 75,9 \cdot 10^2 + 8,1 \cdot 10^4 -$
$- 0,6 \cdot 10^4 =$
$= 3.400 + 7590 + 81.100 - 6.000 = ...$
B = ...

4. Ο επόμενος πίνακας περιέχει την ακτίνα R, τη μάζα M και την απόσταση από τη Γη τεσσάρων αστέρων A_1, A_2, A_3, A_4.
α) Να κατατάξετε τους αστέρες ανάλογα με την ακτίνα τους αρχίζοντας από αυτόν που έχει τη μικρότερη ακτίνα.
β) Να κατατάξετε τους αστέρες ανάλογα με τη μάζα τους αρχίζοντας από αυτόν που έχει την περισσότερη μάζα.
γ) Ποιος αστέρας απέχει λιγότερο από τη γη;

Λύση

α) Η σειρά κατάταξης των αστέρων A_1, A_2, A_3, A_4 ανάλογα με την ακτίνα τους, αρχίζοντας από αυτόν που έχει τη μικρότερη ακτίνα, είναι:
A_3, A_2, A_1, A_4.

Αστέρες	ακτίνα σε μέτρα	μάζα σε kgr	απόσταση από Γη σε μέτρα
A_1	$5,7 \cdot 10^9$	$4,1 \cdot 10^{27}$	$1,7 \cdot 10^{13}$
A_2	$3,2 \cdot 10^7$	$2,943 \cdot 10^{24}$	$6,73 \cdot 10^{19}$
A_3	$9,2 \cdot 10^6$	$1,06 \cdot 10^{29}$	$1,05 \cdot 10^{12}$
A_4	$4,912 \cdot 10^{12}$	$0,6 \cdot 10^{23}$	$8,173 \cdot 10^{22}$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς στην τυποποιημένη μορφή:
α) 9.130.000.000.000 β) 63.710.000
γ) 10.000.000.000 δ) 167.000
ε) 3.100.000.000.000.000.000

2. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σαν γινόμενο α) ενός δεκαδικού και δύναμης του 10, β) ενός φυσικού και δύναμης του 10:
α) 1ς.130.000 β) 136.700.000
γ) 5.237.000 δ) 444.400.000.000

3. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:
α) $3,8 \cdot 10^7$ β) $6,13 \cdot 10^9$
γ) $0,01 \cdot 10^5$ δ) $0,102 \cdot 10^{11}$
ε) $0,0004 \cdot 10^{10}$

4. Χρησιμοποιώντας τη δύναμη 10^6 να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς:
α) 10.700.000 β) 970.000
γ) 43.210.000 δ) 8.760.000
ε) 1.070.000

5. Ένας παίκτης του ΠΡΟ-ΠΟ «έπιασε» δεκατριάρη και εισέπραξε $2,32 \cdot 10^8$ δραχμές. Από αυτά τα κέρδη η εφορία του κράτησε $2 \cdot 10^6$ δραχμές. Αγόρασε και ένα αυτοκίνητο αξίας $14 \cdot 10^6$ δραχμές. Πόσα χρήματα του έμειναν;

6. Η ηλικία ενός αστέρα Α είναι $6,23 \cdot 10^{29}$ έτη ενώ η ηλικία του αστέρα Β είναι $623 \cdot 10^{27}$ έτη. Ποιος αστέρας είναι νεότερος;

7. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:
$A = 5,23 \cdot 10^6 + 2,7 \cdot 10^5 - 9,41 \cdot 10^4$
$B = (5,6 \cdot 10^4 + 2,4 \cdot 10^3) \cdot 2$
$\Gamma = (9,31 \cdot 10^5 - 7,01 \cdot 10^4) \cdot \frac{1}{2}$

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να στρογγυλοποιηθούν οι παρακάτω αριθμοί:
α) 23.748 4.782 5.345,3 7.834,6 στην πλησιέστερη δεκάδα.
β) 26,47 35,61 45,58 1,06 στην πλησιέστερη μονάδα.
γ) 12,472 19,837 2,45 0,067 στο πλησιέστερο δέκατο.

2. Ένα παιδί έχει 653 δρχ. και θέλει να αγοράσει ένα παιχνίδι, που κοστίζει 930 δρχ. Πόσα χρήματα του χρειάζονται ακόμη; Να γραφεί μία εξίσωση για το παραπάνω πρόβλημα με τη βοήθεια μιας μεταβλητής και μετά να λυθεί.

3. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:
α) $17 + x = 19$ ε) $x - 4 = 6$
β) $15 + x = 30$ στ) $x - 3 = 0$
γ) $7 + x = 7$ ζ) $x - 10 = 5$
δ) $x + 32 = 35$ η) $2x = 26$

4. Να βρεθούν τα εξαγόμενα των πράξεων:
α) $(45 + 15) - 25$ β) $(60 + 3) - 59$
γ) $25 - (10 - 6)$ δ) $(71 + 21) - 60$
ε) $100 - (32 + 56)$ στ) $(7 + 6,5) - 3,2$
ζ) $12,55 - (7,63 + 2,3)$
η) $(19,45 - 7,1) - 2,35$

5. Να βρεθούν τα εξαγόμενα των πράξεων:
α) $(17 + 8 + 15) - (12 + 7 + 11)$
β) $(38 - 9) + (21 - 19) - (37 - 25)$
γ) $17 + (3 + 2) - (12 - 9) + 6$
δ) $(77 - 56) + (38 - 20) - (21 + 9)$
ε) $(76 + 31 - 57) - (40 - 36 + 11)$
στ) $(81 - 76) - 2 + (43 - 28)$

6. Να βρεθούν τα εξαγόμενα των πράξεων:
α) $(77 - 65) \cdot 2$ δ) $(7,38 - 2,45) \cdot 1,25$
β) $(80 - 71) \cdot 3$ ε) $(81 - 77,5) \cdot 2,2$
γ) $(9 + 6) \cdot 3,2$ στ) $3,1 \cdot (19,25 + 6,3)$

7. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των αριθμών:
α) 7, 14, 42 β) 3, 5, 6

8. Να βρεθούν τα εξαγόμενα των πράξεων:

α) 2^3 , 2^5 , 2^6 , 2^7
β) $3^2 + 9^2$, $(3 + 9)^2$, $7^2 + 5^2$, $7^2 - 5^2$, $(7 - 5)^2$

9. Να κάνετε τις επόμενες πράξεις σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα:

α) $7 \cdot (38 + 2)$	δ) $(6,3 - 4,9) \cdot 2,3$
β) $(28 - 14) \cdot 2$	ε) $(8,3 + 2,7) \cdot 3$
γ) $(7,9 + 2,1) \cdot 3,1$	στ) $(1,1 + 13,9) \cdot 4,8$

10. Να υπολογίσετε:
α) Πόσο στοιχίζει το κιλό το κρέας αν για 4 κιλά πληρώσαμε 4.600 δρχ.
β) Πόσο κάνει η μία σοκολάτα αν για 14 πληρώσαμε 1.190 δρχ.
γ) Πόσο κάνει ένα βιβλίο αν για 5 πληρώσαμε 5.915 δρχ.

11. Η διαίρεση ενός αριθμού με τον 247 δίνει πηλίκο 128 και υπόλοιπο 63. Να βρείτε τον αριθμό.

12. Το πηλίκο της διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού α με το 6 είναι 7. Να βρείτε το σύνολο που περιέχει τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης και μετά να βρείτε το σύνολο που περιέχει τις πιθανές τιμές του α.

13. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) $15 : 3 + 3^2 - (7 - 5)^2$
β) $3 \cdot (76 - 53) - 6^2 + 3 \cdot (25 - 19)^2$
γ) $5,5 \cdot (8^2 - 7^2) - 4 \cdot (32 - 28)^2$

14. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $x^2 + (3 - x)^2 - 2,1^2$ όταν $x = 1,95$
β) $3x^2 + (3x)^2$ όταν $x = 6,5$
γ) $(2,7 + x)^2 - 2,7^2 - x^2$ όταν $x = 3,4$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

BASIC 1

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα βρίσκονται αυτές οι ειδικές σελίδες **προγραμματισμού BASIC**.
Σκοπός τους είναι να φανερώσουν στο μαθητή μια μεγάλη αλήθεια. Ο υπολογιστής είναι «μέσον» βοήθειας του ανθρώπου. Άρα μπορεί -εκτός από το να μας διασκεδάζει- να μας χρησιμεύει ακόμα και στα μαθήματα του σχολείου. Στα μαθηματικά για αρχή.
Τα κείμενα αυτά θα ήταν σωστό να χρησιμοποιηθούν μαζί με έναν οποιοδήποτε ηλεκτρονικό υπολογιστή που να δέχεται τη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC**.

Η γλώσσα BASIC χρησιμοποιεί τα σύμβολα που ήδη γνωρίζουμε για να δηλώσουμε τις 4 γνωστές πράξεις.

+ , - για πρόσθεση και αφαίρεση
* , / για πολ/σμό και διαίρεση.

Επίσης χρησιμοποιεί τις παρενθέσεις με τον ίδιο τρόπο που τις χρησιμοποιούμε και στα Μαθηματικά.
Για τις δυνάμεις όμως χρησιμοποιεί το σύμβολο ↑, δηλαδή η έκφραση 3^2 γράφεται στη BASIC 3↑2. Σύμφωνα με τα παραπάνω η παράσταση $\frac{3 \cdot 5}{7}$ γράφεται στη BASIC 3 * 5 / 7

ενώ η $\frac{3+5}{7}$ γράφεται στη BASIC

(3 + 5) / 7.

Ας προσέξουμε ότι στη BASIC δεν υπάρχει αριθμητής και παρονομαστής κλάσματος όπως τουλάχιστον τους ξέραμε. Όλα γράφονται σε μια γραμμή. Πρέπει όμως να ξεχωρίζουμε με παρενθέσεις ποιος είναι ο αριθμητής και ποιος ο παρονομαστής. Π.χ.

η $\frac{3 \cdot 2 + 7}{2 + 4 - 3 \cdot 5}$ γράφεται ως

(3 * 2 + 7) / (2 + 4 - 3 * 5)

η $\frac{2^3 - 4}{5 + 7^2}$ ως (2↑3 - 4) / (5 + 7↑2)

και η $\frac{3^4 - 1}{2 . 3} - \frac{4 - 5^2}{1 + 5} + \frac{3 - 4 . 2 - 7^2}{5 . 3 + 1}$

ως

(3 ↑ 4 - 1) / (2 * 3) - (4 - 5 ↑ 2) / (1 + 5)
+ (3 - 4 * 2 - 7 ↑ 2) / (5 * 3 + 1)

Παρατήρηση:

Η σειρά των πράξεων που καταλαβαίνει ο υπολογιστής είναι ίδια με αυτή που μάθαμε στην παράγραφο 1.20.

Υπάρχουν πολλές μορφές της γλώσσας BASIC και συνεχώς δημιουργούνται άλλες. Στο βιβλίο αυτό φροντίσαμε να έχουμε προγράμματα συμβατά με τις περισσότερες απ' αυτές. Αν όμως κάτι δεν πάει καλά τη λύση θα την ανακαλύψετε εύκολα στο βιβλίο οδηγιών της έκδοσης που δουλεύεται στον υπολογιστή σας.

Ασκήσεις

Να μετατρέψετε σε γλώσσα BASIC τις παραστάσεις:

α) $2 - 4 \cdot 3^3 + (12 - 7) \cdot 3^2$

β) $3 + (2 - 1) : (4 - 3) - 3^5 - 1$

γ) $\dfrac{3^4 - 2^6 \cdot (3^2 - 4^3) - 5}{3 \cdot 4 \cdot (5^2 - 1)}$

δ) $1 + 3 \cdot 4^3 + \dfrac{5 \cdot 4^3 - 5 \cdot 7^6}{12 - 4^3 + 1}$

BASIC 2

Ας επιχειρήσουμε τώρα να γράψουμε στον υπολογιστή τα εξής:

```
10  PRINT (2 + 10)/3     (↵)
20  PRINT 3 ↑ 2 - 6      (↵)
30  END                  (↵)
```

[Κάθε φορά που τελειώνει μια γραμμή πατάμε RETURN (ή ENTER) (↵)]. Να προσέξουμε ότι:

- Κάθε γραμμή αποτελείται από μια εντολή και όλες μαζί φτιάχνουν ένα πρόγραμμα.
- Οι αριθμοί στην αρχή κάθε γραμμής είναι απαραίτητοι για να βάζει ο υπολογιστής σε μια σειρά τις δουλειές που έχει να κάνει.
- Η εντολή PRINT στο παραπάνω πρόγραμμα σημαίνει «υπολόγισε και τύπωσε το αποτέλεσμα».
- Η τελευταία εντολή END (τέλος προγράμματος) δεν είναι απαραίτητη σε πολλούς υπολογιστές.

Στη συνέχεια πληκτρολογούμε:

RUN (↵)

Η εντολή RUN (τρέξε το πρόγραμμα) δεν έχει μπροστά αριθμό γραμμής γι' αυτό τη λέμε «Διαταγή».
Τώρα η οθόνη δείχνει 4 (το αποτέλεσμα της γραμμής 10) και από κάτω 3 (το αποτέλεσμα της γραμμής 20).

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις που ετοιμάσατε στο κομμάτι BASIC 1.

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις:

α) $23 \cdot 19 - 4 \cdot 5$

β) $(13 - 4) \cdot 5 - 15$

γ) $(12 \cdot 3 - 4 \cdot 5)^2 - 2 \cdot 5$

δ) $\dfrac{(17 - 4) \cdot 12}{15 + 3 \cdot 7^3}$

ε) $12^7 - 3^5 + 5 \cdot 7^3 - 2 \cdot 8^{12}$

BASIC 3

Στη παράγραφο 1.5 γνωρίσαμε την έννοια της μεταβλητής. Έστω η παράσταση $2x^2 - 1$. Στη μεταβλητή x μπορούμε να δώσουμε όποια τιμή θέλουμε.
Έτσι για παράδειγμα, αν x = 3 τότε η παράσταση γίνεται:
$2 \cdot 3^2 - 1$
Θα μπορούσαμε δηλαδή να γράψουμε στον υπολογιστή:

```
10  PRINT 2*3↑2-1     (↵)
    RUN               (↵)
```

Και ο υπολογιστής θα δείχνει στην οθόνη 17.
Αν όμως θέλαμε να υπολογίσουμε τη τιμή για x = 5 έπρεπε να φτιάξουμε άλλο πρόγραμμα. Από το κόπο αυτό μας απαλάσσει η εντολή INPUT. Όποτε χρησιμοποιούμε αυτή την εντολή ο υπολογιστής -αφού τρέξουμε το πρόγραμμα- περιμένει να του ορίσουμε την τιμή του x και μετά κάνει τον υπολογισμό.
Δηλαδή:

```
10  INPUT x           (↵)
20  PRINT 2*x ↑2-1    (↵)
    RUN               (↵)
```

Μετά το RUN που δώσαμε ο υπολογιστής εκτελεί την πρώτη εντολή, δηλαδή τη γραμμή 10. Σύμφωνα με την εντολή αυτή ο υπολογιστής περιμένει να του δώσουμε μια τιμή για τη μεταβλητή x .Έτσι μέχρι να δώσουμε την τιμή του x δεν θα γίνει τίποτε. Αν δώσουμε x = 3 τότε θα εμφανιστεί το αποτέλεσμα (17). Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μια ακόμα γραμμή

```
30  GO TO 10          (↵)
και μετά  RUN         (↵)
```

Τώρα -όσοι γνωρίζουν αγγλικά, το κατάλαβαν- το πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Προσέξτε γιατί:
Ο υπολογιστής περιμένει μια τιμή στο x (λόγω της γραμμής 10), τη δίνουμε και αμέσως την υπολογίζει και την εμφανίζει στην οθόνη (λόγω της γραμμής 20). Μετά προχωράει στη γραμμή 30 η οποία του λέει να πάει ξανά στη 10 (GO TO σημαίνει πήγαινε στη), όποτε περιμένει πάλι μια άλλη τιμή στο x που θα δώσουμε.

Ασκήσεις

1. Μπορούμε τώρα για μεγαλύτερη εξάσκηση να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να δίνει τη τιμή των παραστάσεων:

α) $2x^3 + 5$
β) $x^3 - 2x + 1$
γ) $15x^2 - 12x + 7$
όταν το x παίρνει όποια τιμή θέλουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

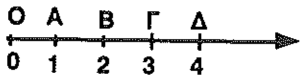
Μετρήσεις μεγεθών

2.1 Παράσταση αριθμών με σημεία ευθείας

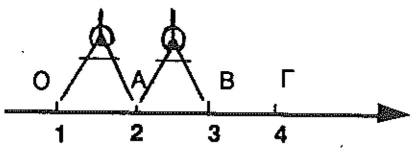
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε βαθμολογημένη ευθεία ή άξονα;



2. Πώς κατασκευάζουμε έναν άξονα;



Απαντήσεις

1. Βαθμολογημένη ευθεία ή άξονα ονομάζουμε μια ευθεία που έχει πάνω της τα σημεία Ο, Α, Β, Γ κ.λπ. σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, ώστε να παριστάνουν αντίστοιχα τους αριθμούς 0, 1, 2, 3 κ.λπ. Το Ο λέγεται **αρχή του άξονα.**

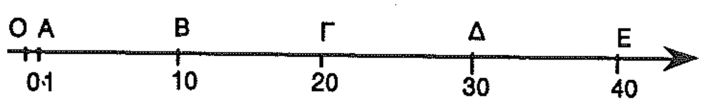
2. Παίρνουμε μια ευθεία και επιλέγουμε τυχαία τα σημεία Ο και Α πάνω σ' αυτήν. Μετράμε την απόσταση ΟΑ και παίρνουμε δεξιά του Α τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ κ.λπ. όλα ίσα με ΟΑ. Τα σημεία Ο, Α, Β, Γ κ.λπ. παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, 2, 3 κ.λπ.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παρασταθούν με σημεία ενός άξονα τα πολλαπλάσια του 10 από το 0 έως το 40.

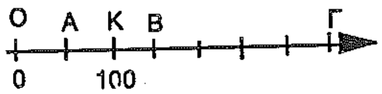
Λύση

Κατασκευάζουμε έναν άξονα με αρχή το Ο και παίρνουμε ένα σημείο Α που παριστάνει το 1 πολύ κοντά στο Ο. Έτσι έχουμε το σχήμα:



Το παραπάνω σχήμα προκύπτει ως εξής: Παίρνουμε πάνω στον άξονα, και δεξιά του Α ένα σημείο Β έτσι ώστε το μήκος ΟΒ να είναι δεκαπλάσιο από το μήκος ΟΑ. Μετά παίρνουμε δεξιά του Β τα διαδοχικά σημεία Γ, Δ, Ε πάνω στον άξονα έτσι ώστε τα μήκη ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ να είναι ίσα με το ΟΒ. Τότε τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε παριστάνουν τα ζητούμενα πολλαπλάσια δηλαδή τους αριθμούς 10, 20, 30, 40 αντίστοιχα.

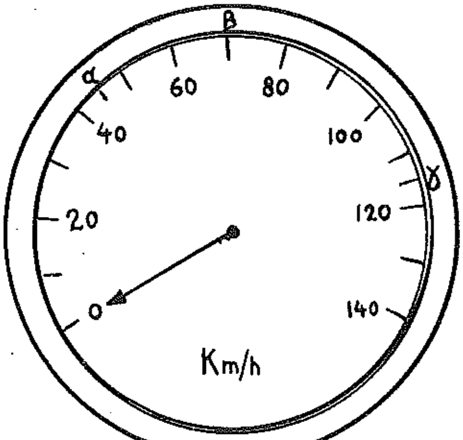
2. Να βρεθούν οι αριθμοί που παριστάνουν τα σημεία Α, Β, Γ στον παρακάτω άξονα:



Λύση

Παρατηρούμε στο σχήμα ότι τα σημεία που έχουν τοποθετηθεί στον άξονα δημιουργούν ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Στη θέση που είναι το 100 βάζουμε το σημείο Κ. Αφού λοιπόν το Κ παριστάνει το 100, το Α θα παριστάνει το 50, το Β το 150 και το Γ το 350.

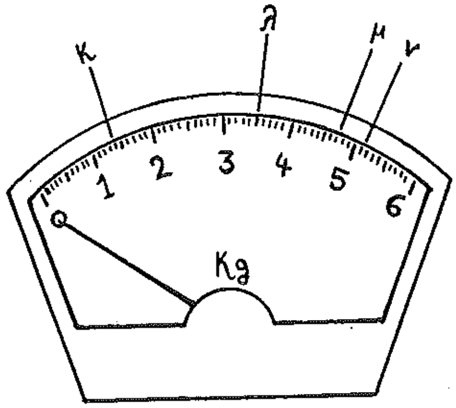
3. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει ένα ταχύμετρο (κοντέρ) αυτοκινήτου. Να βρεθούν οι αριθμοί που παριστάνουν τα σημεία α, β, γ.



Λύση

Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι οι υποδιαιρέσεις είναι ανά 10 χιλιόμετρα την ώρα (km/h). Άρα το α παριστάνει 45 km/h, το β παριστάνει 70 km/h και το γ 115 km/h.

4. Ένας κρεοπώλης ζύγισε τέσσερεις διαφορετικές ποσότητες κιμά. Ο δείκτης της ζυγαριάς παρουσιάσε τις ενδείξεις κ, λ, μ, ν όπως φαίνεται στο σχήμα κατά τις τέσσερεις αυτές ζυγίσεις. Να βρείτε το βάρος της κάθε ποσότητας.



Λύση

Οι αριθμοί που σημειώνονται στη ζυγαριά δείχνουν κιλά (kg). Η ένδειξη κ επομένως σημαίνει 1,4 kg, η ένδειξη λ 3,5 kg, η ένδειξη 4,7 kg και η ένδειξη ν σημαίνει 5,1 kg.

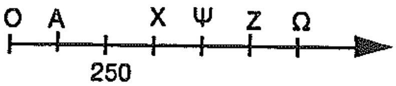
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε έναν άξονα και πάνω σ' αυτόν να πάρετε τα σημεία Β, Γ, Δ που να παριστάνουν τους αριθμούς 7, 13, 19.

Λύση

Ορίζουμε το σημείο Ο (όμικρον) σαν αρχή του άξονα. Το σημείο αυτό παριστάνει το 0 (μηδέν). Παίρνουμε δεξιά του το σημείο Α που παριστάνει το 1. Στη συνέχεια παίρνουμε προς τα δεξιά διαδοχικά ίσες αποστάσεις με το ΟΑ π.χ. 7 ίσες για τον αριθμό 7...

2. Στον παρακάτω άξονα να βρείτε ποιούς αριθμούς παριστάνουν τα σημεία Χ ,Ψ, Ζ, Ω.

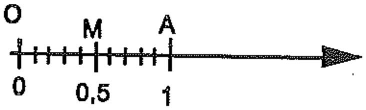


Λύση

Από το σχήμα φαίνεται ότι το σημείο Α αντιστοιχεί στον αριθμό 125 ...

3. Να φτιάξετε έναν άξονα και να τοποθετήσετε σ' αυτόν τους αριθμούς 1,8 2,3 3,7.

Λύση



Σχεδιάζουμε έναν άξονα με αρχή το Ο που παριστάνει τον αριθμό 0. Στη συνέχεια ορίζουμε το σημείο Μ που παριστάνει το 0,5 και το σημείο Α που παριστάνει το 1, έτσι ώστε το Μ να βρίσκεται στο μέσο της απόστασης ΟΑ. Χωρίζουμε μετά την απόσταση ΟΑ σε δέκα ίσα τμήματα ...

4. Δυο φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 16 και διαφορά 4. Να τους βρείτε και να τους παραστήσετε σε ένα άξονα.

Λύση

Αφού οι αριθμοί έχουν διαφορά 4 σημαίνει ότι δεν είναι ίσοι. Αφαιρούμε λοιπόν το 4 από 16 οπότε 16 - 4 = 12 θα ήταν το άθροισμα των αριθμών αν ήταν ίσοι. Διαιρούμε τώρα το 12 με το 2 οπότε 12 : 2 = 6. Δηλαδή ο 6 είναι ο μικρότερος. Άρα ο μεγαλύτερος θα ειναι ο ...

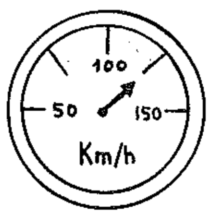
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να παρασταθούν με σημεία ενός άξονα οι αριθμοί:
α) 1, 3, 4, 5 β) 1,8 2,5 3,0

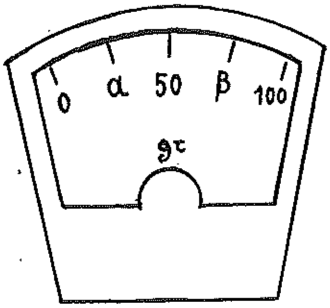
2. Να παρασταθούν σε έναν άξονα οι αριθμοί: 20, 35, 50, 120.

3. Να παρασταθούν σε έναν άξονα τα πολλαπλάσια του 10 από 0 έως το 100.

4. Το ταχύμετρο ενός αυτοκινήτου είναι όπως στο σχήμα. Με πόση ταχύτητα τρέχει το αυτοκίνητο;



5. Μια ζυγαριά μας δίνει τις ενδείξεις α και α σε γραμμάρια (g). Ποιους αριθμούς παριστάνουν οι ενδείξεις αυτές;



6. Δυο φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 10 και διαφορά 4. Να τους παραστήσετε πάνω σ' έναν άξονα.

7. Δυο φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 17 και διαφορά 7. Να τους παραστήσετε πάνω σ' έναν άξονα.

8. Δυο φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 9 και ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου. Να τους παραστήσετε πάνω σ' έναν άξονα.

9. Τρεις φυσικοί αριθμοί απέχουν δύο μονάδες ο καθένας από τον προηγούμενο. Αν το άθροισμα του τελευταίου και του πρώτου είναι 14, να τους βρείτε και να τους τοποθετήσετε πάνω σ' έναν άξονα.

2.2 Παράσταση σημείων στο επίπεδο

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι ονομάζεται διατεταγμένο ζεύγος αριθμών;	1. Διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ονομάζεται το ζεύγος των αριθμών του οποίου τα μέλη έχουν καθορισμένη σειρά. π.χ. Το ζεύγος (3, 8) των αριθμών 3 και 8 είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο το 3 και δεύτερο το 8. <u>Παρατήρηση:</u> Τα ζεύγη (3, 8) και (8, 3) είναι διαφορετικά. Αν δυο διατεταγμένα ζεύγη είναι ίσα τότε και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. π.χ. Αν $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.
2. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα σημείο στο επίπεδο;	2. Ένα σημείο στο επίπεδο μπορούμε να το προσδιορίσουμε με τη βοήθεια ενός διατεταγμένου ζεύγους αριθμών.

3. Τι ονομάζεται τετμημένη και τι τεταγμένη ενός σημείου Α;

3. Τετμημένη ενός σημείου Α ονομάζεται ο πρώτος αριθμός (από τα αριστερά) του διατεταγμένου ζεύγους, που ορίζει το σημείο Α, ενώ ο δεύτερος αριθμός του ζεύγους ονομάζεται **τεταγμένη του σημείου Α.**
π.χ. Το σημείο Α που ορίζει το ζεύγος (3, 8) έχει τετμημένη τον αριθμό 3 και τεταγμένη τον αριθμό 8.

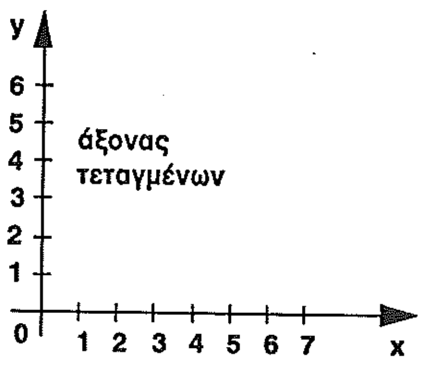
4. Τι ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου Α;

4. Συντεταγμένες ενός σημείου Α ονομάζονται οι αριθμοί που αποτελούν το διατεταγμένο ζεύγος του Α, δηλαδή η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου.
π.χ. Οι συντεταγμένες του σημείου Α που ορίζει το διατεταγμένο ζεύγος (3, 8) είναι οι αριθμοί 3 και 8.

5. Τι ονομάζεται σύστημα ορθογωνίων αξόνων με αρχή το Ο;

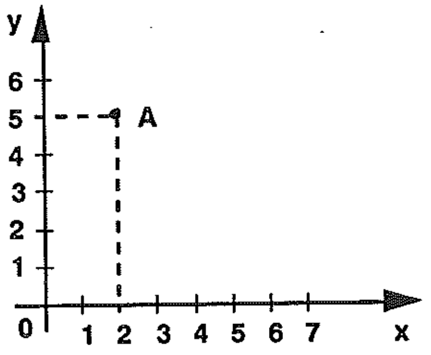
5. Σύστημα ορθογωνίων αξόνων με αρχή το Ο ονομάζεται το σύστημα δύο κάθετων αξόνων Οx και Οy με κοινή αρχή το Ο. Ο άξονας Οx λέγεται **άξονας τετμημένων** και ο άξονας Οy **άξονας τεταγμένων.**

Παρατήρηση: Οι συντεταγμένες του σημείου Ο είναι (0, 0).



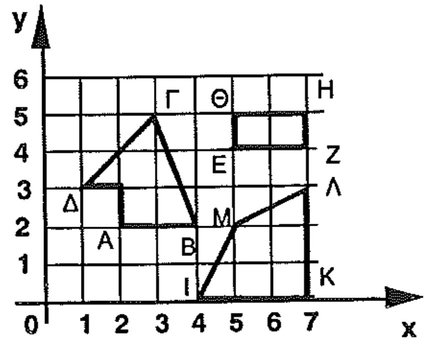
6. Πώς μπορούμε να παραστήσουμε ένα σημείο στο επίπεδο;

6. Ένα σημείο στο επίπεδο μπορούμε να το παραστήσουμε με τη βοήθεια ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων και των συντεταγμένων του.
π.χ. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το διατεταγμένο ζεύγος (2, 5) ορίζει το σημείο Α.
Παρατήρηση: Το σημείο Α μπορεί να γραφεί και ως εξής: Α(2, 5).



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε το όνομα και τις συντεταγμένες κάθε κορυφής από τα παρακάτω σχήματα.



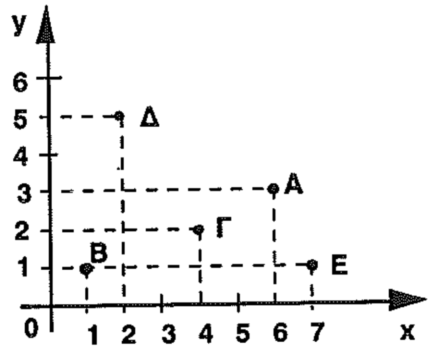
Λύση

Το σημείο Α ορίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος (2, 2). Άρα Α(2, 2). Το σημείο Β ορίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος (4, 2). Άρα Β(4, 2). Αν εργαστούμε όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι:

Γ(3, 5) Δ(1, 3) Ε(5, 4)
Ζ(7, 4) Η(7, 5) Θ(5, 5)
Ι(4, 0) Κ(7, 0) Λ(7, 3) και Μ(5, 2).

2. Να παραστήσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τα σημεία:
Α(6, 3) , Β(1, 1) , Γ(4, 2) , Δ(2, 5) και Ε(7, 1)

Λύση



Κατασκευάζουμε τους κάθετους άξονες Οx και Οy όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να προσδιορίσουμε το σημείο Α αρκεί από το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 6 του άξονα Οx των τετμημένων και από το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα Οy των τεταγμένων να φέρουμε κάθετες στους άξονες. Οι κάθετες αυτές τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο είναι και το ζητούμενο. Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζονται και τα υπόλοιπα σημεία Β, Γ, Δ, Ε.

3. Να βρεθούν οι αριθμοί μ και ν όταν:
α) (μ, 4) = (1, ν)
β) (μ + 1, 2ν) = (7, 8)

Λύση

α) Τα διατεταγμένα ζεύγη (μ, 4) και (1, ν) είναι ίσα, άρα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, δηλαδή: μ = 1 και ν = 4.

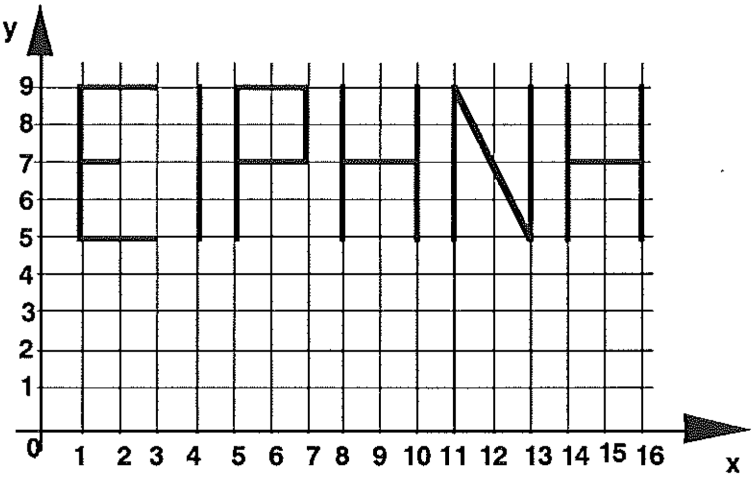
β) Για τον ίδιο λόγο:
$\mu + 1 = 7$ ή $\mu = 7 - 1 = 6$
και $2\nu = 8$ ή $\nu = 8 : 2 = 4$.

4. Να παραστήσετε γραφικά σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων κάθε ομάδα σημείων και ενώστε τα όπως δείχνουν τα βέλη:

α) (3, 5) → (1, 5) → (1, 9) → (3, 9)
β) (1, 7) → (2, 7)
γ) (4, 5) → (4, 9)
δ) (5, 5) → (5, 9) → (7, 9) → (7,7) → (5, 7)
ε) (8, 5) → (8, 9)
στ) (10, 5) → (10, 9)
ζ) (8, 7) → (10, 7)
η) (11, 5) → (11, 9) → (13, 5) → (13, 9)
θ) (14, 5) → (14, 9)
ι) (16, 5) → (16, 9)
κ) (14, 7) → (16, 7)

Λύση

α) Βρίσκουμε τα σημεία με συντεταγμένες (3, 5), (1, 5), (1, 9), (3, 9) και τα ενώνουμε όπως δείχνουν τα βέλη.
β) Βρίσκουμε τα σημεία με συντεταγμένες (1, 7), (2, 7) και τα ενώνουμε όπως δείχνουν τα βέλη. Παρατηρούμε ότι σχηματίστηκε το γράμμα Ε.
Αν συνεχίσουμε και για τις άλλες ομάδες σημείων θα παρατηρήσουμε ότι σχηματίζεται η λέξη ΕΙΡΗΝΗ.

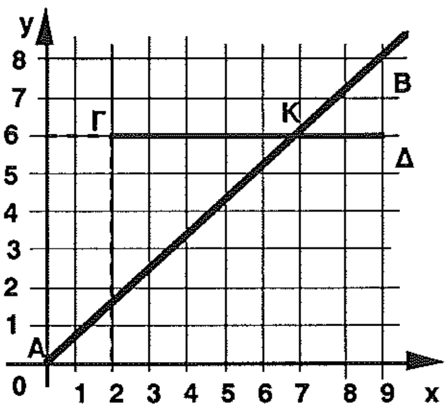


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ όταν Α(0, 0), Β(9, 8) και Γ(2, 6), Δ(9, 6).

Λύση

Κατασκευάζουμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων με άξονα τετμημένων τον Ox και άξονα τεταγμένων τον Oy. Βρίσκουμε τα σημεία Α και Β που ορίζονται από τα ζεύγη (0, 0) και (9, 8) αντίστοιχα. Ενώνουμε με τον χάρακα τα σημεία αυτά και σχηματίζουμε την ευθεία ΑΒ. Με τον ίδιο τρόπο σχηματίζουμε την ευθεία ΓΔ ...



2. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y όταν:
α) $(x, 10) = (3, y)$
β) $(x - 2, 4) = (7, y + 1)$

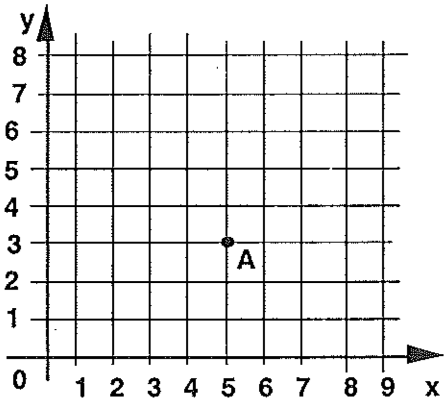
Λύση

α) Εφ' όσον τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, 10)$ και $(3, y)$ είναι ίσα θα ισχύει $x = 3$ και $y = \ldots$
β) ...

3. Να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ όταν Α(5, 3), Β(4, 8) και Γ(1, 2).

Λύση

Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο(0, 0) ορίζουμε το σημείο Α με συντεταγμένες (5, 3). Στη συνέχεια ορίζουμε το σημείο Β με συντεταγμένες ...



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

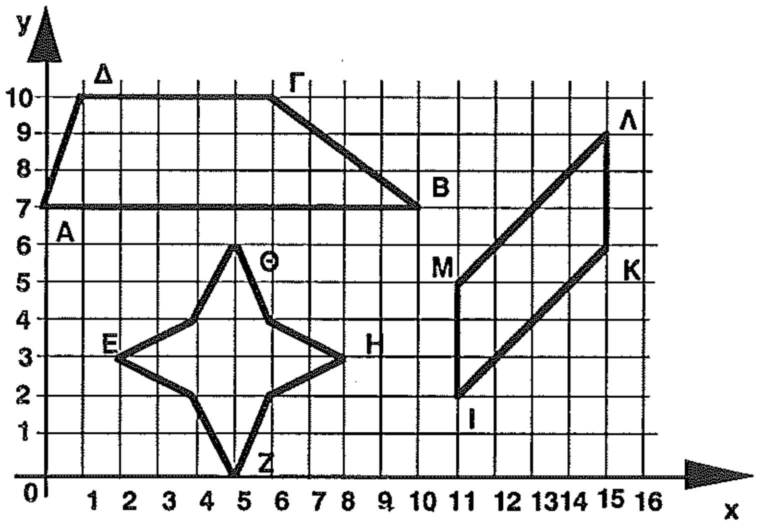
1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων: Α(1, 2), Β(5, 2), Γ(3, 7), Δ(0, 5), Ε(8, 5), Ζ(14, 8), Η(8, 11), Θ(11, 8), Ι(9, 4), Κ (13, 4), Λ(11, 1) και Μ(7, 1).
Στη συνέχεια να ενώσετε κάθε ομάδα σημείων όπως δείχνουν τα βέλη:
α) Α → Β → Γ → Δ → Α
β) Ε → Ζ → Η → Θ → Ε
γ) Ι → Κ → Λ → Μ → Ι

2. Να χαράξετε τις ευθείες ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ, όπου Α(2, 2), Β(12, 12), Γ(2, 6), Δ (9, 6), Ε(9, 0) και Ζ(9, 11). Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των ευθειών αυτών.

3. Να σχηματίσετε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη, με πρώτο μέλος ένα στοιχείο του συνόλου {0, 5, 7} και δεύτερο μέλος ένα στοιχείο του συνόλου {1, 3}.

4. Τι πρέπει να ισχύει ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) και $(5, 17)$ να είναι διαφορετικά;

5. Γράψτε το όνομα και τις συντεταγμένες κάθε κορυφής από τα σχήματα που φαίνονται παρακάτω.



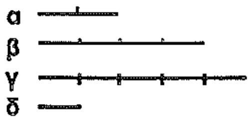
2.3 Μέτρηση μεγεθών
2.4 Μέτρηση μήκους τμήματος

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι είναι μέγεθος, μονάδα μέτρησης, μέτρηση; Να γράψετε μερικά παραδείγματα μεγεθών.	**1. Μέγεθος** είναι η φυσική έννοια που μπορούμε να τη μετρήσουμε, δηλαδή να τη συγκρίνουμε με μια άλλη ομοειδή της που τη λέμε **μονάδα μέτρησης. Μέτρηση** είναι η διαδικασία σύγκρισης του μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης. **Παραδείγματα μεγεθών:** το βάρος, η επιφάνεια, ο όγκος, η θερμοκρασία, το μήκος, η δύναμη, η πίεση, ο χρόνος κ.λπ.
2. Από τι εξαρτάται η τιμή μέτρησης ενός μεγέθους; Δώστε ένα παράδειγμα.	**2.** Ο αριθμός που θα πάρουμε σαν τιμή μέτρησης ενός μεγέθους εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουμε. Αν για παράδειγμα μετρήσουμε το ύψος ενός μαθητή με μονάδα μέτρησης το μέτρο βρίσκουμε π.χ. 1,50. Αν το μετρήσουμε τώρα με μονάδα μέτρησης τα εκατοστά θα το βρούμε 150.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα μήκη των παρακάτω τμημάτων β, γ και δ με μονάδα μέτρησης το α και έπειτα τα μήκη των α, γ και δ με μονάδα μέτρησης το β.



Λύση

Παρατηρούμε ότι το β είναι διπλάσιο από το α, άρα έχουμε $\beta = 2\alpha$. Επίσης το γ είναι 2,5 φορές μεγαλύτερο από το α,

άρα $\gamma = 2,5\,\alpha$ ή $\gamma = \frac{5}{2}\alpha$

Όμοια το δ είναι το μισό από το α, άρα

$\delta = 0,5\,\alpha$ ή $\delta = \frac{1}{2}\alpha$.

Αν πάρουμε τώρα σαν μονάδα μέτρησης

το β τότε έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, $\gamma = \frac{5}{4}\beta$, $\delta = \frac{1}{4}\beta$.

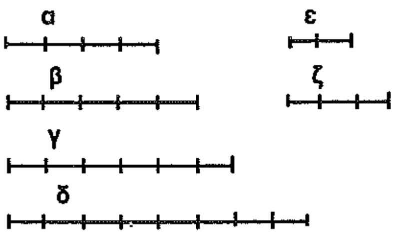
2. Το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος σ είναι 120 με μονάδα μέτρησης ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα λ. Αν χρησιμοποιήσουμε σαν μονάδα μέτρησης ένα ευθύγραμμο τμήμα κ δεκαπλάσιο του λ, πόσο θα είναι τότε το μήκος του σ;

Λύση

Εχουμε $\sigma = 120\,\lambda$ και $\kappa = 10\,\lambda$. Τότε $\lambda = $
$= \frac{1}{10}\kappa$, οπότε $\sigma = 120\,\lambda = 120 \cdot \frac{1}{10}\kappa = 12$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα μήκη των παρακάτω ευθυγράμμων τμημάτων β, γ, δ, ε, ζ χρησιμοποιώντας σαν μονάδα μέτρησης το α. Μετά να βρείτε τα μήκη των α, β, γ, δ, ζ χρησιμοποιώντας σαν μονάδα μέτρησης το ε.



Λύση

Παρατηρούμε ότι το α αποτελείται από 4 μικρότερα ευθύγραμμα τμήματα ίσα μεταξύ τους, ενώ το β από 5 τέτοια. Άρα:

$\beta = \frac{5}{4}\alpha$, όμοια $\gamma = \frac{6}{4}\alpha = \frac{3}{2}\alpha$...

2. Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι 8 με μονάδα μέτρησης ένα ευθύγραμμο τμήμα σ. Το μήκος του σ με μονάδα μέτρησης ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα τ, είναι 4. Πόσο είναι το μήκος του α με μονάδα μέτρησης το τ;

Λύση

Έχουμε $\sigma = 4\tau$, επίσης $\alpha = 8\,\sigma$.
Άρα...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ έχουν τα παρακάτω μήκη με μονάδα μέτρησης ένα ευθύγραμμο τμήμα δ.

$\alpha = 2\delta$, $\beta = \frac{1}{4}\delta$, $\gamma = \frac{4}{5}\delta$.

Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων β, γ, δ με μονάδα μέτρησης το α;

2. Μια δεξαμενή γεμίζει με 15 κουβάδες νερό. Αν χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο κουβά με χωρητικότητα $\frac{3}{5}$ του αρχικού, πόσους κουβάδες χρειαζόμαστε για να γεμίσουμε τη δεξαμενή αυτή;

2.5 Οι κυριότερες μονάδες μήκους
2.6 Όργανα μέτρησης μήκους
2.7 Το μέτρο ως μονάδα μήκους

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Ποια είναι η κυριότερη μονάδα μέτρησης των μηκών και ποια είναι τα πολλαπλάσιά της;	1. Η κυριότερη μονάδα μέτρησης των μηκών είναι το **μέτρο (m)**. Τα πολλαπλάσιά του είναι το **δεκάμετρο (dam)**, το **εκατόμετρο (hm)** και το **χιλιόμετρο (km)**. Η σχέση τους με το μέτρο είναι: **1 dam = 10 m** **1 hm = 100 m** **1 km = 1000 m**
2. Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις (υποπολλαπλάσια) του μέτρου;	2. Οι υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι το **δεκατόμετρο ή παλάμη (dm)**, το **εκατοστόμετρο ή πόντος (cm)**, και το **χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό (mm)**. Η σχέση τους με το μέτρο είναι: $1\ dm = \frac{1}{10}\ m = 0,1\ m$ $1\ cm = \frac{1}{100}\ m = 0,01\ m$ $1\ mm = \frac{1}{1000}\ m = 0,001\ m$

3. Τι είδους μονάδα είναι η γιάρδα και σε ποιες χώρες χρησιμοποιείται κυρίως;

3. Η **γιάρδα (yrd)** είναι μονάδα μήκους και χρησιμοποιείται κυρίως στις αγγλοσαξωνικές χώρες.

4. Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της yrd και ποια σχέση έχουν με τα cm;

4. Η μια γιάρδα διαιρείται σε **3 πόδια (ft)** και το 1 ft σε **12 ίντσες (in)**. Είναι

δηλαδή: **1 yrd = 3ft = 36 in**

επίσης **1 yrd = 91,44 cm**

1 ft = 30,48 cm

1 in = 2,54 cm

5. Ποιες άλλες μονάδες μήκους γνωρίζετε και ποια σχέση έχουν αυτές με το μέτρο;

5. Για τη μέτρηση μεγάλων αποστάσεων στην Αγγλία, την Αμερική και σε άλλες χώρες χρησιμοποιούν το **μίλι**. Είναι 1 μίλι = 1.609 m = 1,609 km. Στη ναυτιλία χρησιμοποιείται για μονάδα μήκους το **ναυτικό μίλι** και **ο κόμβος** όπου:

1 ναυτικό μίλι = 120 κόμβοι = 1.852 m

1 κόμβος = 15,43 m

6. Ποια όργανα μέτρησης του μήκους γνωρίζετε;

6. Για να μετρήσουμε μικρά μήκη χρησιμοποιούμε το **υποδεκάμετρο**. Για μεγαλύτερα μήκη χρησιμοποιούμε το **μέτρο** ή το **δίμετρο**. Για τη μέτρηση όμως πολύ μικρών μηκών π.χ. το πάχος ενός φύλλου χαρτιού ή τη διάμετρο μιας βίδας όπου μας ενδιαφέρει η ακρίβεια, χρησιμοποιούμε το **μικρόμετρο** και το **παχύμετρο** αντίστοιχα.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να τρέψετε: α) τα 10,8 km σε m, β) τα 8.126 m σε km, γ) τα 32,7 km σε dm και δ) τα 7,26 m σε cm.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι 1 km = 1.000m. Άρα 10,8 km = 10,8 · 1.000 m = 10.800 m.

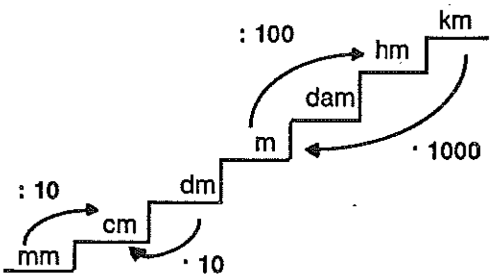
β) Τα 8.126 m για να μετατραπούν σε km πρέπει να διαιρεθούν με το 1.000. Άρα 8.126 m = 8.126 : 1.000 m = 8,126 km.

γ) Για να μετατρέψουμε τα km στα dm πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 10.000. Άρα 32,7 km = 32,7 · 10.000 dm = 327.000 dm.

δ) Για να μετατρέψουμε τα m σε cm πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 100. Άρα 7,26 m = 7,26 · 100 cm = 726 cm.

<u>Παρατήρηση:</u> Για τις μετατροπές στις μονάδες μήκους μπορούμε να χρησιμοποιούμε την παρακάτω σκάλα παίρνοντας υπ' όψιν μας ότι όταν ανεβαίνουμε ένα σκαλοπάτι διαιρούμε με το 10, ενώ όταν κατεβαίνουμε ένα σκαλοπάτι, πολ-

λαπλασιάζουμε με το 10. Αν ανεβούμε ή κατεβούμε δύο σκαλοπάτια τότε διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε αντίστοιχα με το 100, για τρία σκαλοπάτια με 1.000 κ.ο.κ.



2. Να τρέψετε: α) τα 15 hm σε cm, β) τα 8 km σε dam, γ) τα 3.026 mm σε km, δ) τα 728 dm σε m.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε:

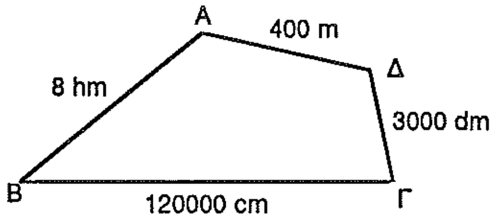
α) 15 hm = 15· 10.000 cm = 150.000cm

β) 8 km = 8 · 100 dam = 800 dam.

γ) 3.026 mm = 3.026 : 1.000.000 km = = 0,003026 km.

δ) 728 dm = 728 : 10 m = 72,8 m.

3. Να βρεθεί η περίμετρος του χωραφιού στο παρακάτω σχήμα σε km.



Λύση

Μετατρέπουμε τα μήκη όλων των πλευρών σε km. Έχουμε λοιπόν:

ΑΒ = 8 hm = 8 : 10 = 0,8 km.

ΒΓ = 120.000 cm = $12 \cdot 10^4 : 10^5$ km = 1,2 km

ΓΔ = 3.000 dm = $3 \cdot 10^3 : 10^4$ km = = 0,3 km

ΔΑ = 400 m = $4 \cdot 10^2 : 10^3$ km = = 0,4km.

<u>Η περίμετρος είναι το άθροισμα των τεσσάρων πλευρών,</u> δηλαδή:

0,8 km + 1,2 km + 0,3 km + 0,4 km = = 2,7 km

4. Να γράψετε με συμμιγείς αριθμούς τα παρακάτω μήκη:

α) 5,76 m β) 3,026 m

γ) 2,18 m δ) 0,001 m.

Λύση

α) $5,76 = 5\text{ m } \frac{7}{10}\text{ m } \frac{6}{100}\text{ m} =$

$= 5\text{ m } 7\text{ dm } 6\text{ cm}.$

β) $3,026\text{ m} = 3\text{ m } \frac{0}{10}\text{ m } \frac{2}{100}\text{ m } \frac{6}{1000}\text{ m}$

$= 3\text{ m } 2\text{ cm } 6\text{ mm}.$

γ) $2,18\text{ m} = 2\text{ m } \frac{1}{10}\text{ m } \frac{8}{100}\text{ m} =$

$= 2\text{ m } 1\text{ dm } 8\text{ cm}.$

δ) $0,001\text{ m} =$

$0\text{ m } \frac{0}{10}\text{ m } \frac{0}{100}\text{ m } \frac{1}{1000}\text{ m} = 1\text{ mm}$

5. Να τραπούν σε m τα παρακάτω μήκη: α) 72 m 5 dm 3 mm

β) 3 m 2 dm 10 cm 18 mm

Λύση

α) $72\text{m } 5\text{dm } 3\text{mm} = 72\text{ m } \frac{5}{10}\text{ m } \frac{3}{1000}\text{ m}$

$= 72\text{ m} + 0,5\text{ m} + 0,003\text{ m} = 72,503\text{ m}.$

β) $3\text{m } 2\text{ dm } 10\text{ cm } 18\text{ mm} =$

$= 3\text{ m } \frac{2}{10}\text{ m } \frac{10}{100}\text{ m } \frac{18}{1000}\text{ m} = 3\text{ m} +$

$+ 0,2\text{ m} + 0,1\text{ m} + 0,018\text{ m} = 3,318\text{m}.$

6. Να τραπούν σε m τα παρακάτω μήκη:

α) 4 km 3 hm 18 dam 4 cm 2 mm

β) 36 km 286 m

Λύση

α) 4 Km 3 hm 18 dam 4 cm 2mm =

$= 4 \cdot 1000$ m $3 \cdot 100$ m $18 \cdot 10$ m $\frac{4}{100}$ m

$\frac{2}{1000}$ m =

4000 m + 300 m + 180 m + 0, 04 m + +0, 002 m = 4480, 042 m.

β) 36 Km 286 m =

$= 36 \cdot 1000$ m 286 m =

= 36000 m + 286 m = 36286 m.

7. Το ανώτερο επιτρεπόμενο όριο ταχύτητας σε μια Βρετανική εθνική οδό είναι 80 μίλια ανά ώρα. Ένας Έλληνας οδηγός κινείται στην οδό αυτή με ταχύτητα 130 km ανά ώρα. Να ελέγξετε αν είναι παραβάτης ή όχι.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1 μίλι ξηράς = 1,609 km. Άρα τα 80 μίλια = 80 · 1,609 km = 128,7 km. Δηλαδή το ανώτερο όριο ταχύτητας σε km ανά ώρα σε αυτή την οδό είναι 128,7. Άρα ο οδηγός που κινείται με ταχύτητα 130 km ανά ώρα είναι παραβάτης.

8. Η εμβέλεια του ασύρματου ενός πλοίου που βρίσκεται σε απόσταση 280 ναυτικών μιλίων από το πλησιέστερο λιμάνι είναι 43.200 κόμβοι. Μπορεί το πλοίο αυτό να επικοινωνήσει απ' ευθείας μ' ένα άλλο πλοίο που βρίσκεται σε απόσταση από αυτό 800 km ή πρέπει να επικοινωνήσουν μεταξύ τους μέσω του λιμανιού;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

1 ναυτικό μίλι = 120 κόμβοι = 1,852 km.
Άρα 43.200 κόμβοι = 43200 : 120 μίλια = 360 μίλια είναι η εμβέλεια. Επίσης 800 km = 800 : 1,852 μίλια = 432 μίλια είναι η απόσταση των δύο πλοίων. Δηλαδή η εμβέλεια είναι μικρότερη από την απόσταση των δύο πλοίων, επομένως δε μπορούν να επικοινωνήσουν απ' ευθείας. Μπορεί όμως το πλοίο να επικοινωνήσει με το λιμάνι αφού απέχει από αυτό 280 μίλια ενώ η εμβέλεια του ασυρμάτου του είναι 360 μίλια.

9. Η απόσταση δύο σημείων μιας αρχιτεκτονικής μακέτας είναι 4 yrd 3 ft 4 in. Να βρείτε την απόσταση των σημείων αυτών σε m και σε cm.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1 yrd = 3 ft = 36 in και ακόμα ότι 1 yrd = 0,9144 m.
Μετατρέπουμε επομένως τα 3 ft και 4 in σε yrd. Έχουμε 3 ft = 1 yrd και
4 in = 4 : 36 yrd = 0,11 yrd.
Άρα 4 yrd 3ft 4in = 4 yrd +1 yrd + 0,11 yrd = 5,11 yrd.
Μετατρέπουμε τώρα τις 5,11 yrd σε m.
Έχουμε 5,11 yrd = 5,11 · 0,9144 m = 4,67 m. Τώρα μετατρέπουμε τα 4,67 m σε cm. Είναι 4,67 m = 4,67 · 100 cm = 467 cm.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να τρέψετε τα 20,02 km σε dam, m, cm και τα 580.603 mm σε cm, m, km.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη σκάλα της προηγούμενης παρατήρησης. Από τα km στα dam κατεβαίνουμε δύο σκαλοπάτια, άρα πολλαπλασιάζουμε επί το 100. Από τα km στα m κατεβαίνουμε 3 σκαλοπάτια άρα πολλαπλασιάζουμε επί 1.000. Από τα km στα cm κατεβαίνουμε 5 σκαλοπάτια άρα πολλαπλασιάζουμε επί 100.000.
Έτσι έχουμε:
20,02 km = 20,02 · 100 dam =2.002dam
20,02 km = 20,02 · 1.000 m = 20.020 m
κ.ο.κ.
Προσοχή από τα mm στα cm, m, km ανεβαίνουμε 1, 3, 6 σκαλοπάτια αντίστοιχα άρα κάνουμε διαιρέσεις με το 10, 1.000, 1.000.000. Έτσι:
580.603 mm = 580.603 : 10 cm = 58060,3 cm ...

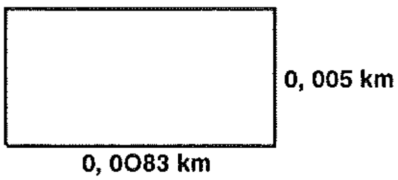
2. Να τρέψετε τα 130,805 m σε mm, dm, hm, και km.

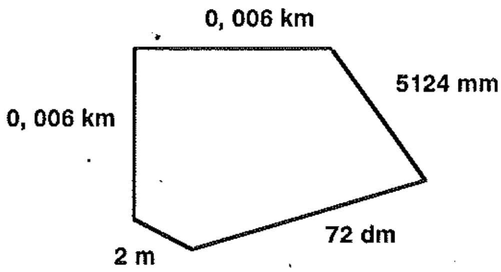
Λύση

Χρησιμοποιούμε τη σκάλα της προηγούμενης παρατήρησης. Για να τρέψουμε τα,m σε mm ή σε dm θα κατέβουμε 3 ή 1 σκαλοπάτι δηλαδή θα κάνουμε πολλαπλασιασμό. Όμως για να τρέψουμε τα m σε hm ή σε km θα ανέβουμε 2 ή 3 σκαλοπάτια, άρα θα κάνουμε διαίρεση.

130,205 m = 130,805 · 1.000 mm =
= 130.805 mm
130,805 m = 130,805 · 10 dm = ...
130,805 m = 130,805 : 100 hm = ...

3. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειαζόμαστε για να περιφράξουμε τα παρακάτω οικόπεδα;





Λύση

Πρέπει να μετατρέψουμε τα μήκη όλων των πλευρών σε μέτρα.
Έχουμε:
0,005 km = 0,005 · 1.000 m = 5 m
0,0083 km = 0,0083 · 1.000 m = 8,3 m
Έτσι για το πρώτο οικόπεδο χρειαζόμαστε: 2 · 5 m + 2 · 8,3 m = ...

4. Να γράψετε με συμμιγείς αριθμούς τα παρακάτω μήκη:
α) 147,2 cm β) 835 mm γ) 0,63905 km
δ) 70,801 m ε) 0,032 m

Λύση

Μετατρέπουμε πρώτα σε m τα μήκη που δίνονται:

α) 147,2 cm = 147,2 : 100 m = 1,472 m =

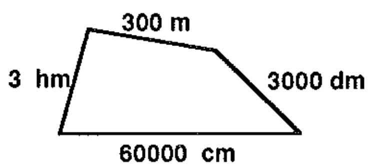
$= 1\text{ m } \frac{4}{10}\text{ m } \frac{7}{100}\text{ m } \frac{2}{1000}\text{ m} =$

= 1 m 4 cm 7 cm 2 mm...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να τρέψετε: α) τα 11,2 km σε m, β) τα 187 m σε km, γ) τα 90,8 km σε dam, δ) τα 7,18 m σε cm.

2. Να βρεθεί η περίμετρος του χωραφιού που παριστάνει το διπλανό σχήμα:



3. Να τραπούν σε m τα παρακάτω μήκη:
α) 68 m, 15 cm,
β) 4 m, 2 dm, 8 cm, 4 mm

4. Να γράψετε με συμμιγείς αριθμούς τα παρακάτω μήκη:
α) 6,28 m β)4,096 m γ)0,187 m

5. Ένα πλοίο αποπλέει από ένα λιμάνι στις 10 το πρωί με ταχύτητα 1.250 κόμβους ανά ώρα. Μπορεί το πλοίο αυτό να επικοινωνήσει μέσω του ασυρμάτου, με το ίδιο λιμάνι στις δύο το μεσημέρι της ίδιας μέρας όταν η εμβέλεια του ασυρμάτου είναι 50 μίλια;

6. Να συγκρίνετε τα μήκη 3,75 m και 3.750 mm.

7. Να γραφούν τα παρακάτω μήκη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
1,118 m 3.256 cm 71.869 mm.

2.8 Εμβαδόν επιπέδων επιφανειών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος;

Απαντήσεις

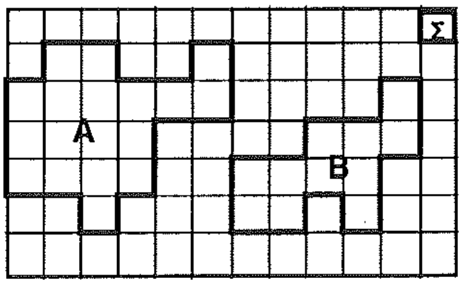
1. Εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος ονομάζουμε την επιφάνεια που καταλαμβάνει το σχήμα αυτό στο επίπεδο. Το εμβαδόν εκφράζεται με τον αριθμό που προκύπτει από τη σύγκριση της επιφάνειας που καταλαμβάνει το επίπεδο σχήμα με μια άλλη επιφάνεια που τη λέμε **μονάδα μετρήσεως.**

2. Από τι εξαρτάται ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος;

2. Ο αριθμός που εκφράζει το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος εξαρτάται από τη μονάδα μετρησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

Α. Λυμένες ασκήσεις

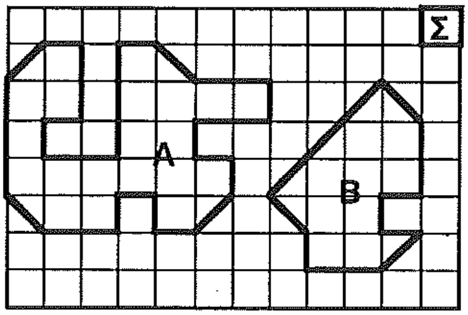
1. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το εμβαδόν των επιφανειών Α και Β χρησιμοποιώντας σαν μονάδα μέτρησης την επιφάνεια Σ.



Λύση

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια Α αποτελείται από 18 τετραγωνάκια ίδια με το Σ.
Άρα Α = 18 Σ. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε: Β = 11 Σ

2. Να κάνετε το ίδιο και στο παρακάτω σχήμα:



Λύση

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια Α αποτελείται από 20 τετραγωνάκια ίδια με το Σ και ακόμα από 4 τετραγωνάκια που το καθένα είναι το μισό του Σ. Έτσι έχουμε: Α = 20 ολόκληρα + 4 μισά = 20 ολόκληρα + 2 ολόκληρα = 22 ολόκληρα. Άρα: Α = 22Σ. Η Β αποτελείται από 9 ολόκληρα και 6 μισά τετραγωνάκια δηλαδή 9 ολόκληρα και 3 ολόκληρα.
Άρα Β = 9 + 3 = 12 Σ.

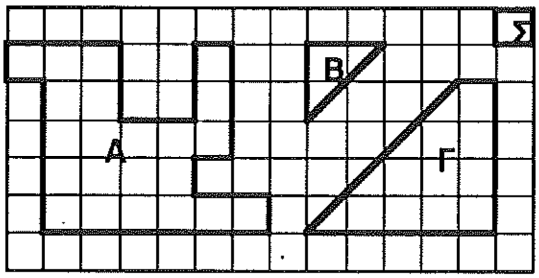
3. Αν στο προηγούμενο πρόβλημα πάρουμε σαν μονάδα μέτρησης το 2 Σ τότε πόσο είναι το εμβαδόν της επιφανείας Α και της Β;

Λύση

Βρήκαμε στο προηγούμενο ότι Α = 22Σ και Β = 12Σ. Άρα έχουμε Α = 11 · 2Σ = 11 · (2Σ) και Β = 6 · 2Σ = 6 · (2Σ). Δηλαδή με μονάδα μέτρησης το 2Σ, το Α έχει εμβαδόν 11 και το Β έχει εμβαδόν 6.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να πάρετε σαν μονάδα μέτρησης το Σ και να βρείτε τα εμβαδά των σχημάτων στο παρακάτω σχήμα.



Λύση

Το σχήμα Α αποτελείται από 22 τετραγωνάκια ίδια με το Σ. Άρα Α = 22 Σ...

2. Στο προηγούμενο σχήμα να βρείτε τα εμβαδά των επιφανειών Α, Β, Γ με μονάδα μέτρησης το 0,5 Σ.

Λύση

Βρήκαμε προηγουμένως ότι Α = 22Σ δηλαδή Α = 44 · 0,5Σ = ...

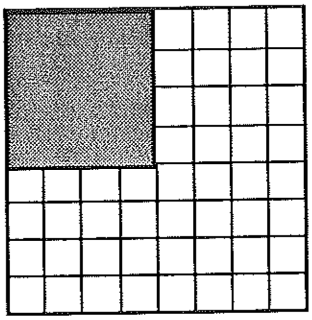
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μία επιφάνεια Α έχει εμβαδόν 28 με μονάδα μέτρησης μια άλλη επιφάνεια Σ. Η επιφάνεια Σ έχει εμβαδόν 4 με μονάδα μέτρησης την επιφάνεια Τ. Πόσο είναι το εμβαδόν της Α με μονάδα μέτρησης την Τ;

2. Μια επιφάνεια Α έχει εμβαδόν 8 με μονάδα μέτρησης μια άλλη επιφάνεια Β. Πόσο είναι το εμβαδόν της Β με μονάδα μέτρησης την Α;

3. Ένας πατέρας θέλησε να μοιράσει το κτήμα του, σχήματος τετραγώνου, στους τέσσερεις γιους του και τον εαυτό του ως εξής:

Κράτησε το ένα τέταρτο του κτήματος για τον ίδιο όπως δείχνει το σχήμα και το υπόλοιπο μοιράστηκε στα τέσσερα ώστε ο καθένας να πάρει ένα τμήμα ακριβώς ίδιο με των υπολοίπων τριών. Πώς έγινε η μοιρασιά;



2.9 Οι κυριότερες μονάδες εμβαδού
2.10 Σχέσεις τετραγωνικού μέτρου με υποδιαιρέσεις και πολλαπλάσιά του

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η κυριότερη μονάδα μέτρησης εμβαδού;

2. Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου;

Απαντήσεις

1. Η κυριότερη μονάδα μέτρησης εμβαδού είναι το **τετραγωνικό μέτρο (m^2)** που είναι η επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1m.

2. Οι υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου είναι:

α) **Το τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)** ή **τετραγωνική παλάμη** που είναι η επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1dm.

β) **Το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2)** ή **τετραγωνικός πόντος**, που είναι η επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1cm.

γ) **Το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2)** ή **τετραγωνικό χιλιοστό** που είναι η επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1mm.

3. Ποια είναι τα πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου;

3. Τα πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου είναι:

α) Το τετραγωνικό δεκάμετρο (dam^2) που είναι επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1dam.

β) Το τετραγωνικό εκατόμετρο (hm^2) που είναι επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1hm.

γ) Το τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) που είναι επιφάνεια τετραγώνου με πλευρά 1km.

Άλλη χρησιμοποιούμενη μονάδα μεγάλων επιφανειών είναι το **στρέμμα** που είναι **1 στρέμμα =1.000 m²**.

4. Ποιες είναι οι σχέσεις του m² με τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά του;

4. Οι σχέσεις του τετραγωνικού μέτρου με τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσιά του είναι οι εξής:

$1m^2 = 100dm^2$ και $1dm^2 = \frac{1}{100} m^2$

$1m^2 = 10.000cm^2$ και $1cm^2 = \frac{1}{10.000} m^2$

$1m^2 = 1.000.000 \ mm^2$ και $1mm^2 = \frac{1}{1.000.000} m^2$

Επίσης $1 m^2 = \frac{1}{100} dam^2$ και $1dam^2 = 100 m^2$

$1m^2 = \frac{1}{10.000} hm^2$ και $1 hm^2 = 10.000 m^2$

$1m^2 = \frac{1}{1.000.000} km^2$ και $1km^2 = 1.000.000 m^2$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να τραπούν: α) τα 8,72 km² σε m² β) τα 19.186 m² σε km² γ) τα 3.126.582 mm² σε cm² δ) τα 18.657 hm² σε dam².

Λύση

Παρατήρηση: Τη σκάλα μετατροπών των μονάδων που συναντήσαμε στη παράγραφο 2.5 μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε και εδώ έχοντας υπ' όψιν ότι όταν κατεβαίνουμε κατά 1 σκαλοπάτι πολλαπλασιάζουμε επί 100, όταν κατεβαίνουμε κατά 2 πολλαπλασιάζουμε επί 10.000 κ.ο.κ
Αντίστοιχα όταν ανεβαίνουμε κατά ένα σκαλοπάτι διαιρούμε διά του 100, κατά 2 σκαλοπάτια διά 10.000 κ.ο.κ.

Έχουμε λοιπόν:

α) Από τα km² για να πάμε στα m² κατεβαίνουμε τρία σκαλοπάτια άρα θα πολλαπλασιάσουμε επί
$100 \cdot 100 \cdot 100 = 1.000.000$, άρα
$8,72 \ km^2 = 8,72 \cdot 1.000.000 \ m^2 =$
$= 8.720.000 \ m^2$

β) $19.186 \ m^2 = 19.186 : 1.000.000 \ km^2$
$= 0,19186 \ km^2$

γ) $3.126.582 \ mm^2 = 3.126.582 : 100 cm^2$
$= 31.265,82 \ cm^2$

δ) $18.657 \ hm^2 = 18.657 \cdot 100 \ dam^2 =$
$= 1.865.700 \ dam^2$

2. Ένας κτηματίας πούλησε ένα οικόπεδο με 4.680 δρχ. το m² και πήρε 22.186.000 δρχ. Πόσα στρέμματα ήταν το οικόπεδο;

Λύση

Θα διαιρέσουμε τα χρήματα που πήρε

με την τιμή του ενός m^2 και θα βρούμε έτσι πόσα m^2 ήταν το οικόπεδο. Έχουμε: 22.186.000 : 4.680 = 4.740,6 m^2. Γνωρίζουμε ότι 1 στρέμμα = 1.000 m^2 άρα τα 4.740,6 m^2 είναι 4.740,6 : 1.000 = 4,7406 στρέμματα.

3. Να τραπούν σε στρέμματα τα παρακάτω εμβαδά: α) 3.186 m^2 β) 9.127 m^2 γ) 1,85 km^2.

Λύση

α) 3.186 m^2 : 1.000 = 3,186 στρέμματα
β) 9.127 : 1.000 = 9,127 στρέμματα
γ) 1,85 · 1.000.000 = 1.850.000 m^2 και 1.850.000 : 1.000 = 1.850 στρέμματα.

4. Η συνολική έκταση της Ελλάδας είναι 132.000 km^2. Να εκφράσετε την έκτασή της σε στρέμματα.

Λύση

Είναι 132.000 km^2 = $132 \cdot 10^3$ km^2.
Μετατρέπουμε πρώτα τα km^2 σε m^2 πολλαπλασιάζοντας με το 10^6 γιατί:
1 km^2 = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2.
Έχουμε:
$132 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 132.000 \cdot 1.000.000 =$
$= 132 \cdot 10^9$ m^2.
Διαιρούμε τώρα τα m^2 που βρήκαμε με το 10^3 γιατί:
1 στρέμμα = 1.000 m^2 = 10^3 m^2.
Άρα $132 \cdot 10^9 : 10^3 =$
$= 132.000.000.000 : 1.000 =$
= 132.000.000 στρέμματα.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να τραπούν σε m^2 τα παρακάτω εμβαδά:
α) 126.000 cm^2 β) 1.963.740 mm^2

Λύση

α) 126.000 : 10.000 m^2 = 12,6 m^2
β) ...

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές των α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
4,682	α	β	γ
δ	79,186	ε	ζ
η	θ	680.293	ι
κ	λ	μ	1.277.302

Λύση

Μετατρέπουμε τα 4,682 m^2 διαδοχικά σε dm^2, cm^2, mm^2. Έχουμε:
α = 4,682 · 100 = 468,2 dm^2
β = 4,682 · 10.000 = 46.820 cm^2
γ = 4,682 · 1.000.000 = 4.682.000 mm^2
Μετατρέπουμε τα 79,186 dm^2 διαδοχικά σε m^2 (διαίρεση με 100), cm^2 (πολλαπλασιασμός επί 100), mm^2 (πολλαπλασιασμός επί 10.000)...

3. Να τραπούν σε cm^2 τα παρακάτω εμβαδά: α) 0,186 m^2, β) 1,285 m^2, γ) 12.765 mm^2, δ) 127 dm^2.

Λύση

α) 0,186 · 10.000 = 1.860 cm^2
β) 1,285 · 10.000 = 12.850 cm^2
γ) ...
δ) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

m^2	dam^2	hm^2	km^2
862,13			
	73,9		
		6,14	
			0,01275

2. Η έκταση ενός οικοπέδου είναι 4,6 στρέμματα. Πόσα χρήματα θα πάρει ο ιδιοκτήτης όταν το πουλήσει προς 9.000 το τετραγωνικό μέτρο;

3. Η έκταση της Κεφαλονιάς είναι 781,49 km^2. Πόση είναι η έκτασή της σε στρέμματα;

4. Ένα δενδροφυτεμένο κτήμα περιέχει 1.500 δένδρα και υπολογίζεται ότι υπάρχουν 80 δένδρα ανά 500 τετραγωνικά μέτρα. Πόσα στρέμματα είναι το οικόπεδο;

2.11 Εμβαδά ορθογωνίου και τετραγώνου

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε μήκος, τι πλάτος, και τι διαστάσεις ενός ορθογωνίου;

1. Μήκος ενός ορθογωνίου ονομάζουμε το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του, ενώ **πλάτος** ονομάζουμε το μήκος της μικρότερης πλευράς του. Το μήκος και το πλάτος τα ονομάζουμε **διαστάσεις του ορθογωνίου.**

2. Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου;

2. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν **Ε** ορθογωνίου, πολλαπλασιάζουμε τις δύο διαστάσεις του. Αν οι διαστάσεις του είναι α και β τότε: **$Ε = α \cdot β$.**

Σημείωση: Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το μήκος και το πλάτος μεταξύ τους, μόνο αν είναι και τα δύο μετρημένα με την ίδια μονάδα μήκους.

3. Τι είναι το τετράγωνο και πώς βρίσκουμε το εμβαδόν του;

3. Τετράγωνο είναι το ορθογώνιο που έχει τις δύο διαστάσεις του ίσες. Για να βρούμε το εμβαδόν του πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους τις δύο ίσες διαστάσεις του. Αν η κάθε διάσταση (πλευρά) του είναι α τότε το εμβαδόν του Ε είναι: **$Ε = α^2$.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει διαστάσεις 10 m και 18 m. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι ίσες. Ονομάζουμε $\alpha = 10$ m, $\beta = 18$ m, Π την περίμετρο και Ε το εμβαδόν του. Έχουμε:
$\Pi = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 18 =$
$= 20 + 36 = 56$ m.
$E = \alpha \cdot \beta = 10 \cdot 18 = 180$ m^2

2. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 32 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση

Ονομάζουμε $\Pi = 32$ cm την περίμετρο, α την πλευρά του και Ε το εμβαδόν του. Έχουμε:
$\Pi = 4\alpha$ ή $32 = 4\alpha$. Άρα:
$\alpha = 32 : 4 = 8$ cm, τότε
$E = \alpha^2 = 8^2 = 64$ cm^2

3. Το εμβαδόν ενος ορθογωνίου είναι 345 m² και η μία διάστασή του είναι 15 m. Να βρεθεί η άλλη διάστασή του και η περίμετρός του.

Λύση

Στο πρόβλημα αυτό μας δίνεται το εμβαδόν $E = 345$ m^2 και η μία διάσταση του ορθογωνίου, έστω η $\alpha = 15$ m.
Αν αντικαταστήσουμε τα δεδομένα αυτά στον τύπο $E = \alpha \cdot \beta$ θα έχουμε:
$345 = 15\,\beta$. Οπότε $\beta = 345 : 15 = 23$ δηλαδή $\beta = 23$ m.
Η περίμετρος του Π θα είναι τώρα:
$\Pi = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 23 = 30 + 46 = 76$ m.

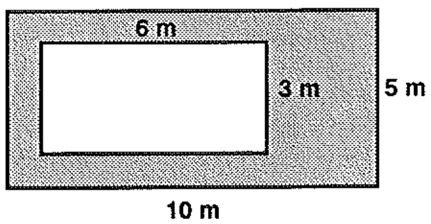
4. Μια αίθουσα έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 10 m και 12,5 m. Πρόκειται να στρωθεί με τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 20 cm. Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν και πόσα χρήματα θα στοιχίσει η πλακόστρωση αν το 1 m² κοστίζει 5.000 δρχ. και η εργασία κοστίζει 2.500 δρχ. το 1 m² ;

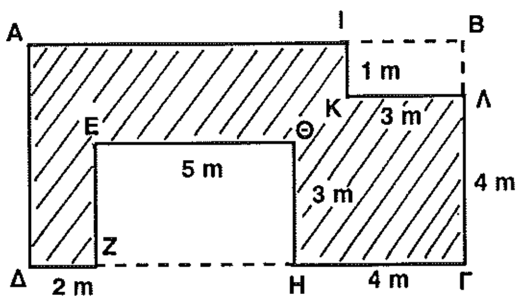
Λύση

Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν Ε του πατώματος της αίθουσας
$E = 10 \cdot 12{,}5 = 125$ m^2.
Βρίσκουμε και το εμβαδόν για κάθε πλακάκι, αφού πρώτα μετατρέψουμε τα 20 cm σε m. Είναι $20 : 100 = 0{,}2$ m. Άρα εμβαδόν πλακακιού $= (0{,}2)^2 = 0{,}04$ m^2.
Διαιρούμε τώρα το εμβαδόν του πατώματος με το εμβαδόν του κάθε πλακακιού για να βρούμε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν.
Είναι $125 : 0{,}04 = 3.125$ πλακάκια. Το 1 m^2 στοιχίζει συνολικά $5.000 + 2.500 = 7.500$ δρχ. Άρα τα 125 m^2 θα στοιχίζουν $125 \cdot 7.500 = 937.500$ δρχ.

5. Να βρεθούν τα εμβαδά των παρακάτω σκιασμένων σχημάτων.

Λύση





Για το εμβαδόν του πρώτου σχήματος εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκουμε τα εμβαδά των δύο ορθογωνίων, του εξωτερικού και του εσωτερικού και μετά τα αφαιρούμε. Η διαφορά τους είναι το ζητούμενο εμβαδόν του σχήματος. Ονομάζουμε E_1 το εμβαδόν του εξωτερικού ορθογωνίου και E_2 του εμβαδόν του εσωτερικού.

Έτσι έχουμε:

$E_1 = 10 \cdot 5 = 50\ m^2$ και

$E_2 = 6 \cdot 3 = 18\ m^2$. Άρα το εμβαδόν του σχήματος είναι $50 - 18 = 32\ m^2$.

Για το εμβαδόν του δευτέρου σχήματος θα υπολογίσουμε το εμβαδόν E_3 του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και από αυτό θα αφαιρέσουμε τα εμβαδά E_4 του ορθογωνίου ΕΖΗΘ και E_5 του ορθογωνίου ΙΒΛΚ.

Έτσι έχουμε:

$E_3 = 11 \cdot 5 = 55\ m^2$

$E_4 = 5 \cdot 3 = 15\ m^2$ και

$E_5 = 3 \cdot 1 = 3\ m^2$.

Άρα το εμβαδόν του σχήματος είναι:

$55 - 15 - 3 = 37\ m^2$.

6. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 44 m. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση

Ονομάζουμε α την πλευρά του τετραγώνου και Π την περίμετρό του. Αφού όλες οι πλευρές του είναι ίσες έχουμε: Π = 4α.

Αντικαθιστούμε το Π με το 44, οπότε:

44 = 4α δηλαδή α = 44 : 4 = 11 m.

Άρα το εμβαδόν είναι $E = 11^2 = 121\ m^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο Π = 42m και πλάτος α = 8m.

Λύση

Ονομάζουμε β το μήκος του οπότε η περίμετρός του δίνεται από τη σχέση:

Π = α + β + α + β ή **Π = 2α + 2β**.

Έτσι με αντικατάσταση έχουμε:

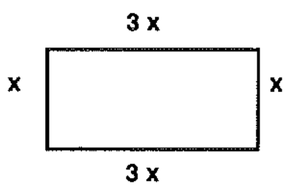
42 = 2 · 8 + 2β ή 42 = 16 + 2β ή

2β = 42 - 16 ή 2β = 26. Άρα

β = 26 : 2 = 13 m...

2. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο Π = 60 m και το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Λύση



Ονομάζουμε x το πλάτος του. Τότε το μήκος του θα είναι 3x. Έχουμε λοιπόν:

Π = 60 ή 2x + 2 · (3x) = 60 ή

2x + 6x = 60 ή 8x = 60 ή x = 60 : 8 ή

x = 7,5 m το πλάτος του.

Τότε το μήκος του θα είναι 3 · 7,5 = ...

3. Ένα δωμάτιο έχει μήκος 4 m, πλάτος 3 m και ύψος 2,8 m. Πρόκειται να βάψουμε τους τοίχους και το ταβάνι του με πλαστικό χρώμα. Πόσο θα στοιχίσει η βαφή του αν το βάψιμο του 1 m² στοιχίζει 1.200 δρχ. και ο τεχνίτης κατά την επιμέτρηση δεν αφαιρεί τα εμβαδά που αντιστοιχούν στις πόρτες και τα παράθυρα;

Λύση

Βρίσκουμε τα εμβαδά των τεσσάρων τοίχων και του ταβανιού του δωματίου και μετά τα προσθέτουμε...

4. Ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο έχουν ίσα εμβαδά. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι διπλάσια από το πλάτος του ορθογωνίου και η περίμετρος του τετραγώνου είναι 40 m, να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου, του τετραγώνου καθώς και τα εμβαδά τους.

Λύση

Ονομάζουμε x το πλάτος του ορθογωνίου οπότε η πλευρά του τετραγώνου θα είναι 2x.

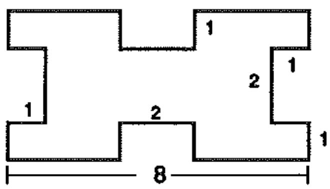
Επειδή τώρα οι πλευρές του τετραγώνου είναι ίσες, η περίμετρός του θα είναι $2x + 2x + 2x + 2x = 40$ ή $8x = 40$ ή $x = 40 : 8$ ή $x = 5$ m. Δηλαδή το πλάτος του ορθογωνίου είναι 5m ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν ορθογωνίου που έχει μήκος 6,7 dm και πλάτος 1,5 dm.

2. Να υπολογιστεί το εμβαδόν ορθογωνίου που έχει μήκος 8 m και πλάτος 72 dm.

3. Να υπολογιστεί το εμβαδό του παρακάτω σχήματος:



4. Ένα χωράφι σχήματος τετραγώνου έχει εμβαδόν 81 m² και πρόκειται να περιφραχθεί με συρματόπλεγμα. Πόσα m συρματόπλεγμα θα χρειαστούν;

5. Μέσα σε ορθογώνιο αγρόκτημα με διαστάσεις 10 m και 15 m χωρίζουμε ένα τετράγωνο για να οικοδομήσουμε. Αν η πλευρά του τετραγώνου που χωρίσαμε είναι 9 m, να βρείτε πόσα m² από το οικόπεδο θα παραμείνουν ακάλυπτα.

6. Ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο έχουν ίσα εμβαδά. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 30 m και το μήκος του διπλάσιο από το πλάτος του, ενώ η πλευρά του τετραγώνου είναι διπλάσια από το πλάτος αυτό. Να βρείτε τις πλευρές των δύο σχημάτων καθώς και τα εμβαδά τους.

2.12 Όγκος στερεών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται όγκος στερεού σώματος;

Απαντήσεις

1. **Όγκος στερεού σώματος** λέγεται ο χώρος που καταλαμβάνει το σώμα αυτό. Ο όγκος εκφράζεται με έναν αριθμό που παίρνουμε όταν συγκρίνουμε το χώρο που καταλαμβάνει το στερεό αυτό, με έναν άλλο χώρο που τον λέμε **μονάδα μετρήσεως**.

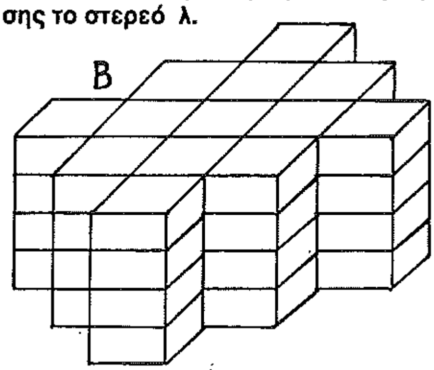
2. Από τι εξαρτάται ο αριθμός που εκφράζει τον όγκο ενός στερεού σώματος;

2. Ο αριθμός που εκφράζει τον όγκο ενός στερεού σώματος εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

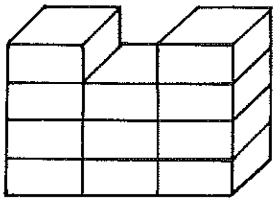
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι όγκοι των στερεών Α και Β με μονάδα μέτρησης το στερεό κ και μετά με μονάδα μέτρησης το στερεό λ.

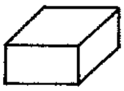
B



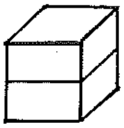
Α



κ



λ



Λύση

Παρατηρούμε ότι το στερεό Α αποτελείται από έντεκα ίδια μεταξύ τους στερεά που το καθένα είναι ίδιο με το κ. Άρα ο όγκος του Α είναι ίσος με 11κ. Το στερεό Β αποτελείται από ένα κεντρικό παραλληλεπίπεδο που φτιάχνεται από 36 στερεά ίδια με το κ και 4 ακόμα παραλληλεπίπεδα ίδια μεταξύ τους, που το καθένα αποτελείται από 4 στερεά ίδια με το κ. Έτσι ο όγκος του Β είναι ίσος με $36\,κ + 4 \cdot (4κ) = 36\,κ + 16\,κ = 52\,κ$. Ακόμα παρατηρούμε ότι το $κ = 0{,}5λ$, δηλαδή ο όγκος του είναι ο μισός από τον όγκο του λ. Έχουμε λοιπόν για τα στερεά Α και Β: $Α = 11\,κ = 11 \cdot (0{,}5λ) = 5{,}5λ$ και $Β = 52\,κ = 52 \cdot (0{,}5λ) = 26λ$.

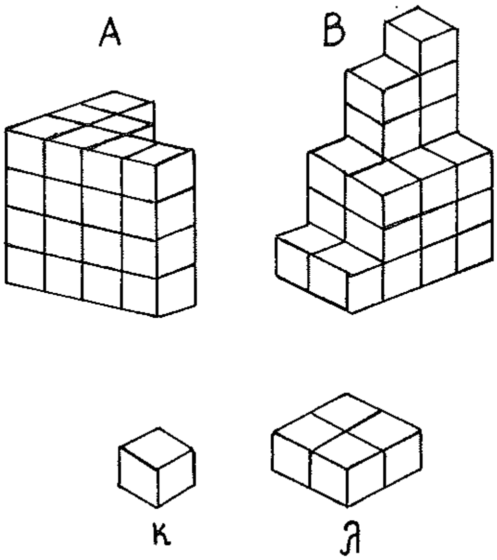
2. Ένα μπουκάλι με πορτοκαλάδα γεμίζει 12 όμοια ποτήρια. Αν χρησιμοποιήσουμε άλλα ποτήρια με τριπλάσια χωρητικότητα από τα προηγούμενα, πόσα μπορούμε να γεμίσουμε από αυτό το μπουκάλι;

Λύση

Η χωρητικότητα του μπουκαλιού, με μονάδα μέτρησης το αρχικό ποτήρι, είναι 12. Αφού λοιπόν τα άλλα ποτήρια έχουν τριπλάσια χωρητικότητα από τα αρχικά, η χωρητικότητα του μπουκαλιού, με την νέα μονάδα μέτρησης, είναι 4. Άρα μπορούμε να γεμίσουμε τώρα 4 ποτήρια.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους όγκους των παρακάτω στερεών με μονάδα όγκου α) τον κύβο κ και β) το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λ.



Λύση

Το στερεό Α αποτελείται από 28 κύβους όμοιους με τον κύβο κ. Άρα ο όγκος του είναι 28 κ. Όμοια ο όγκος του Β είναι 25 κ...

2. Πόσο θα γίνουν οι τιμές των όγκων των παραπάνω σχημάτων, αν σαν μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήσουμε ένα στερεό σ με όγκο διπλάσιο από τον όγκο του κ;

Λύση

Βρήκαμε στην προηγούμενη άσκηση ότι ο όγκος του Α είναι 28 κ και έχουμε ότι σ = 2κ. Άρα το κ = 0,5σ οπότε ο όγκος του Α θα είναι 28 · (0,5σ) = 14σ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μια δεξαμενή γεμίζει με νερό από ένα μεγάλο ντεπόζιτο, με τη βοήθεια ενός δοχείου. Αν το ντεπόζιτο περιέχει συνολικά τόσο νερό όσο χωράει σε 400 δοχεία και η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι 100 δοχεία, πόσος θα είναι ο όγκος του ντεπόζιτου με μονάδα μέτρησης τη δεξαμενή;

2. Ένα στερεό Α έχει όγκο 64, με μονάδα μέτρησης ένα άλλο στερεό σ. Πόσος είναι ο όγκος του στερεού Α αν σαν μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο στερεό τ, που ο όγκος του είναι 8 φορές μεγαλύτερος από τον όγκο του στερεού σ;

2.13 Οι κυριότερες μονάδες όγκου

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Ποια είναι η μονάδα μέτρησης του όγκου και ποιες οι υποδιαιρέσεις της;

1. Μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το **κυβικό μέτρο m^3**, που είναι ο όγκος ενός κύβου με ακμή 1 m. Οι υποδιαιρέσεις του είναι:

α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) ή κυβική παλάμη που είναι ο όγκος ενός κύβου με ακμή 1 dm.

β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) ή κυβικός πόντος που είναι ο όγκος ενός κύβου με ακμή 1 cm.

γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) ή κυβικό χιλιοστό που είναι ο όγκος ενός κύβου με ακμή 1 mm.

2. Ποιες σχέσεις συνδέουν το 1 m^3 με τις υποδιαιρέσεις του;

2. Οι σχέσεις του 1 m^3 με τις υποδιαιρέσεις του είναι:

$$1\ dm^3 = \frac{1}{1000}\ m^3 = 0,001\ m^3$$

$$1\ cm^3 = \frac{1}{1000000}\ m^3 = 0,000001\ m^3$$

$$1\ mm^3 = \frac{1}{1000000000}\ m^3 = 0,000000001\ m^3$$

3. Τι είναι το λίτρο;

3. Το **λίτρο (1l)** είναι μονάδα μέτρησης όγκου κυρίως των υγρών. Το 1l υποδιαιρείται σε 1.000 χιλιοστά του λίτρου ή **μιλλιτρ (ml)**. Η σχέση του λίτρου με το dm^3 είναι: 1 l = 1 dm^3 οπότε και 1 ml = 1.000 cm^3 .

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να τραπούν σε cm^3 οι παρακάτω όγκοι:

α) 0,23 m^3 β) 108 m^3

γ) 2,31 dm^3 δ) 726,35 mm^3

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1m^3 = 1.000 dm^3 = = 1.000.000 cm^3 = 1.000.000.000 mm^3

Άρα:

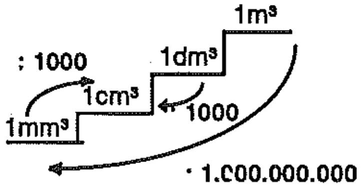
α) 0,23 m^3 = 0,23 · 1.000.000 = = 230.000 cm^3

β) 108 m^3 = 108 · 1.000.000 = = 108.000.000 cm^3

γ) 2,31 dm^3 = 2,31 · 1.000 = 2.310 cm^3

δ) 726,35 mm^3 = 726,35 : 1.000 = = 0,72635 cm^3

Παρατήρηση: Στις μετατροπές των όγκων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πάλι τη σκάλα της παραγράφου 2.5 έχοντας υπ' όψιν μας ότι για να πάμε από το ένα σκαλοπάτι στο επόμενο πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 1.000.



2. Να τραπούν σε dm³ οι παρακάτω όγκοι: α) 0,32m³ β) 65cm³ γ) 2,31m³ δ)786cm³

Λύση

Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη παρατήρηση.

α) 0,32 m³ = 0,32 · 1.000 = 320 dm³

β) 65 cm³ = 65 : 1.000 = 0,065 dm³

γ) 2,31 cm³ = 2,31 · 1.000 = 2.310 dm³

δ) 786 cm³ = 786 : 1.000 = 0,786 dm³

3. Οι δεξαμενές ενός ελαιουργικού συνεταιρισμού περιέχουν 22.599 l λάδι. Πόσα μπουκάλια χωρητικότητας 1,5 l πρέπει να προμηθευτεί ο συνεταιρισμός για να τα γεμίσει με το λάδι των δεξαμενών του;

Λύση

Θα διαιρέσουμε τον όγκο των 22.599 l με τον όγκο του κάθε μπουκαλιού για να βρούμε πόσα μπουκάλια θα χρειαστούν: Έχουμε 22.599 : 1,5 = 15.066 μπουκάλια.

4. Στην Αμερική για τη μέτρηση των υγρών καυσίμων χρησιμοποιείται το γαλόνι (gal) που είναι ίσο με 3,785 l. Ένα αυτοκίνητο που καταναλώνει 8 l βενζίνης ανά 100 χιλιόμετρα, πόσα γαλόνια θα χρειαστεί για να διανύσει 475 χιλιόμετρα;

Λύση

Αφού το αυτοκίνητο καταναλώνει 8 l ανά 100 χιλιόμετρα, θα καταναλώνει 8 : 100 = 0,08 l ανά 1 χιλιόμετρο. Άρα για τα 475 χιλιόμετρα θα χρειαστεί 475 · 0,08 = 38 l. Έχουμε 1 gal = 3,785 l άρα τα 38 l = 38 : 3,785 = 10,04 gal περίπου. Δηλαδή το αυτοκίνητο θα χρειαστεί 10,04 γαλόνια περίπου για να διανύσει τα 475 χιλιόμετρα.

5. 1 ft³ ξυλείας στοιχίζει 440 δρχ. Πόσο στοιχίζουν τα 12 m³ ξυλείας;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1 ft = 0,3048 m άρα το 1 ft³ = (0,3048)³ m³ = 0,0283 m³. Τότε τα 12 m³ = 12 : 0,0283 = 424 ft³ περίπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε ότι το 1 ft³ στοιχίζει 440 δρχ. Άρα τα 12 m³ δηλαδή τα 424 ft³ θα στοιχίζουν 424 · 440 = 186.560 δρχ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να τραπούν σε cm³ οι παρακάτω όγκοι:
α) 0,76 m³ β)126 m³ γ) 3.216 mm³

Λύση

α) 0,76 m³ = 0,76 · 1.000.000 cm³ =
= 760.000 cm³

β) 126 m³ = 126 · 1.000.000 cm³ =....

2. Οι δεξαμενές ενός οινοποιητικού συνεταιρισμού περιέχουν 3.000 l κρασί περίπου. Πόσα μπουκάλια χωρητικότητας 770 ml πρέπει να προμηθευτεί ο συνεταιρισμός για να εμφιαλώσει το κρασί του;

Λύση

Μετατρέπουμε τα 770 ml σε l. Είναι:
770 : 1.000 = 0,77 l. Τώρα θα διαιρέσουμε τον όγκο του κρασιού που έχουν οι δεξαμενές με τον όγκο 0,77 l που έχει το κάθε μπουκάλι ...

3. Πόσα gal πετρέλαιο χωράει μια δεξαμενή χωρητικότητας 1.000 l;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1 gal = 3,785 l . Άρα για να βρούμε πόσα gal χωράει η δεξαμενή θα διαιρέσουμε τα 1.000 l με τα 3,785 l...

4. Τα 22,4 l αμμωνίας ζυγίζουν 17 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζουν τα 100 cm^3 αυτής;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 1 l = 1.000 cm^3. Άρα τα 22,4 l = 22,4 · 1.000 = 22.400 cm^3 ...

5. Ένας ασθενής παίρνει κάθε ημέρα 3 κουταλιές από ένα σιρόπι που κάθε κουταλιά περιέχει 0,5 ml μιας αντιβιοτικής ουσίας. Η θεραπεία διαρκεί 8 ημέρες. Πόσα ml αντιβιοτικής ουσίας έλαβε ο ασθενής;

Λύση

Οι 3 κουταλιές περιέχουν 3 · 0,5 = 1,5 ml. Οπότε σε μια ημέρα ο ασθενής παίρνει 1,5 ml αντιβιοτικό...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να μετατρέψετε σε mm^3 τους παρακάτω όγκους:
α) 0,00186 m^3 β) 0,23 dm^3 γ) 12 cm^3

2. Να μετατρέψετε τα 1.920 l σε m^3 και σε cm^3.

3. Ένας γαλακτοκομικός συνεταιρισμός διαθέτει 1.820 l γάλα. Θέλει να γεμίσει με το γάλα αυτό κουτιά του μισού και του ενός λίτρου. Πόσα κουτιά κάθε τύπου θα χρειαστεί για όλο το γάλα αν τα κουτιά του μισού l είναι δυο φορές περισσότερα από αυτά του ενός l;

4. Ένα ποτήρι νερού χωράει περίπου 180 ml. Να βρείτε πόσα τέτοια ποτήρια περίπου περιέχει ένα μπουκάλι πορτοκαλάδας των 2 l.

2.14 Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πόσες έδρες έχει το παραλληλεπίπεδο; Ποια από αυτές ονομάζουμε βάση;

2. Τι σχήμα έχουν οι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και τι ονομάζουμε μήκος, πλάτος και ύψος του;

Απαντήσεις

1. Το παραλληλεπίπεδο έχει **6 έδρες**. **Βάση** ονομάζουμε την έδρα στήριξής του.

2. Οι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ειδικότερα το μήκος και το πλάτος του παραλληλογράμμου της βάσεως λέγονται **μήκος και πλάτος του παραλληλεπιπέδου**. Ύψος του παραλληλεπιπέδου ονομάζουμε κάθε μία από τις ακμές του που είναι κάθετες στη βάση του.

3. Ποιες λέγονται διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου;

3. Διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου λέγονται το μήκος, το πλάτος και το ύψος του.

4. Με τι ισούται ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

4. Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το γινόμενο των διαστάσεών του, οι οποίες πρέπει να είναι μετρημένες με την ίδια μονάδα μήκους. Δηλαδή αν α, β, γ είναι οι διαστάσεις και V ο όγκος, θα είναι:

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$$

5. Τι είναι ο κύβος και με τι ισούται ο όγκος κύβου;

5. Ο **κύβος** είναι ένα παραλληλεπίπεδο που έχει τις τρεις διαστάσεις του ίσες. Αν ονομάσουμε κάθε μια διάσταση του α, τότε ο όγκος του V θα είναι:

$$V = \alpha^3$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Οι διαστάσεις α, β, γ ενός παραλληλεπιπέδου είναι α = 1,6 m , β = 18 dm, γ = 1.836 mm. Να βρείτε τον όγκο του V.

Λύση

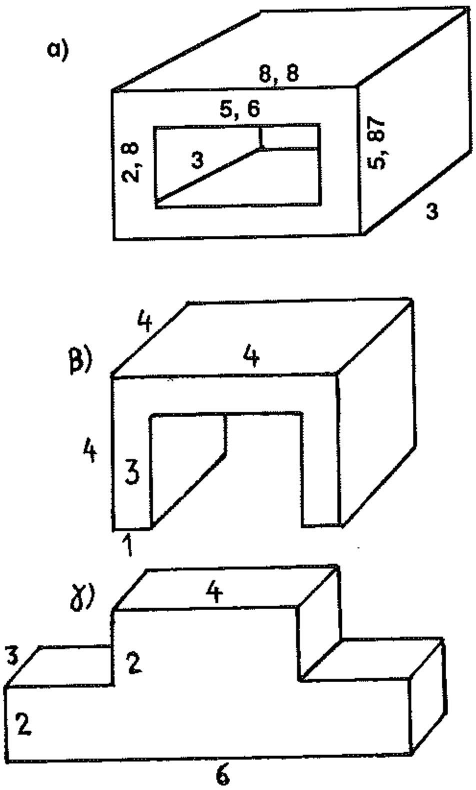
Πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τις διαστάσεις στην ίδια μονάδα. Μετατρέπουμε π.χ. τα β και γ σε m. Έχουμε:
β = 18 dm = 18 : 10 = 1,8 m.
γ = 1836 mm = 1836 : 1.000 = 1,836 m.
Άρα $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma =$
$= 1{,}6\text{ m} \cdot 1{,}8\text{ m} \cdot 1{,}836\text{ m} = 5{,}28768\text{ m}^3$

2. Να βρεθεί ο όγκος ενός κύβου με ακμή α = 6,8 m.

Λύση

Ο όγκος κύβου υπολογίζεται από τον τύπο: $V = \alpha^3$. Άρα $V = (6{,}8\text{ m})^3 = 314{,}432\text{ m}^3$.

3. Να υπολογιστούν οι όγκοι των παρακάτω στερεών:



Λύση

Για το στερεό του σχήματος **α)** παρατηρούμε ότι από τον όγκο του εξωτερικού παραλληλεπιπέδου V_1 πρέπει να αφαιρέσουμε τον όγκο του εσωτερικού κενού δηλ. του εσωτερικού παραλληλεπιπέδου V_2.

Έχουμε: $V_1 = 8{,}8 \cdot 3 \cdot 5{,}87 = 154{,}968$

$V_2 = 5{,}6 \cdot 3 \cdot 2{,}8 = 47{,}04$

Άρα ο όγκος του στερεού είναι:
$V_1 - V_2$ δηλαδή $154{,}968 - 47{,}04 =$
$= 107{,}928$.

Το στερεό του σχήματος **β)** αποτελείται από δυο κατακόρυφες ορθογώνιες πλάκες ίσες μεταξύ τους με διαστάσεις 1, 4, 3 και μια οριζόντια ορθογώνια πλάκα πάνω, με διαστάσεις 4, 4, 1.
Οι όγκοι των τριών πλακών είναι αντίστοιχα: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$,
$1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ και $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$. Άρα ο όγκος του στερεού είναι $12 + 12 + 16 = 40$.

Το στερεό του σχήματος **γ)** που παριστάνει ένα βάθρο νικητών αποτελείται από δύο ορθογώνια με διαστάσεις 6, 3, 2 και 4, 3, 2. Άρα οι όγκοι τους είναι αντίστοιχα $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ και $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Τότε ο όγκος του βάθρου είναι:
$36 + 24 = 60$.

4. Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 5,5 m, 3 m, 2,5 m. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει με νερό, αν τροφοδοτείται από μια σωλήνα που παρέχει 44,8 l νερού σε 1 λεπτό της ώρας;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα τον όγκο V της δεξαμενής και θα τον μετατρέψουμε σε l, για να μπορέσουμε να τον συγκρίνουμε με τον όγκο του νερού που παρέχει η σωλήνα και που μας δίνεται σε l.

Έχουμε: $V = 5{,}5\,m \cdot 3\,m \cdot 2{,}5\,m =$
$= 41{,}25 m^3$. Το $1 l = 0{,}001 m^3$ ή $1 m^3 =$
$= 1.000$ l, άρα τα
$41{,}25 m^3 = 41{,}25 \cdot 1.000\, l = 41.250\, l$.
Διαιρούμε τώρα τον όγκο της δεξαμενής με τον όγκο του νερού που παρέχει η σωλήνα, για να βρούμε σε πόσα λεπτά θα γεμίσει η δεξαμενή. $41.250 : 44{,}8 =$
$= 920{,}76$ λεπτά. Η μία ώρα όμως έχει 60 λεπτά, άρα τα 920,76 λεπτά είναι $920{,}76 : 60 = 15{,}35$ ώρες. Οπότε η δεξαμενή θα γεμίσει σε 15,35 ώρες περίπου.

5. Ένα ενυδρείο έχει διαστάσεις βάσεως 70 cm , 55 cm και ύψος 80 cm. α) Να βρείτε τον όγκο του. β) Αν αδειάσουμε μέσα σ' αυτό 60 l νερού, σε τι ύψος θα φτάσει αυτό;

Λύση

α) Βρίσκουμε πρώτα τον όγκο V του ενυδρείου. $V = 70\,cm \cdot 55\,cm \cdot 80\,cm =$
$= 308.000\, cm^3$.

β) Ο όγκος του νερού που ρίχνουμε είναι 60 l και επειδή $1\, l = 1.000\, cm^3$ τα
$60\, l = 60 \cdot 1.000\, cm^3 = 60.000\, cm^3$.
Το νερό δηλαδή που θα ρίξουμε στο ενυδρείο θα έχει το σχήμα ενός παραλληλεπιπέδου με όγκο $60.000\, cm^3$, βάση, τη βάση του ενυδρείου και πλαϊνές έδρες τα τοιχώματα του ενυδρείου, μέχρι το ύψος που φτάνει το νερό.
Αν λοιπόν ονομάσουμε V τον όγκο του νερού και α, β τις διαστάσεις της βάσης του και γ το ύψος του, τότε:
$V = αβγ$ ή $60.000 = 70 \cdot 55 \cdot γ$ ή
$60.000 = 3.850 \cdot γ$ ή
$γ = 60.000 : 3.850 = 15{,}58$ cm.
Άρα το ύψος του νερού θα είναι 15,58 cm.

6. Το εμβαδόν μιας έδρας ενός κύβου είναι 25 cm². Να υπολογίσετε τον όγκο ενός άλλου κύβου που έχει ακμή τριπλάσια από την ακμή του πρώτου.

Λύση

Το εμβαδόν Ε της κάθε έδρας του πρώτου κύβου είναι, σύμφωνα με το πρόβλημα, $25\, cm^2$. Αν ονομάσουμε α την κάθε ακμή του, τότε θα έχουμε:
$Ε = α^2$ ή $25 = α \cdot α$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε $α = 5$ cm. Ο δεύτερος κύβος έχει πλευρά, σύμφωνα με το πρόβλημα, τριπλάσια από την πλευρά του πρώτου. Άρα η πλευρά του θα είναι:
$3 \cdot 5 = 15$ cm.
Τότε ο όγκος του θα είναι:
$15^3 = 3.375\, cm^3$.

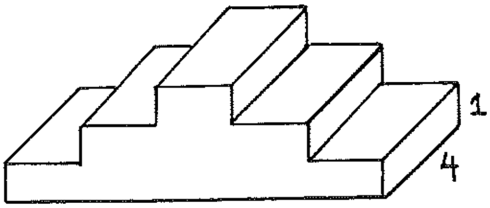
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου είναι 160 cm^3 και οι διαστάσεις της βάσης του είναι 7,2 cm και 4,3 cm. Να βρείτε το ύψος του.

Λύση

Ονομάζουμε V τον όγκο του παραλληλεπιπέδου, α και β τις διαστάσεις του και γ το ύψος που ζητάμε. Τότε έχουμε: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ή $160 = 7{,}2 \cdot 4{,}3 \cdot \gamma$ ή ...

2. Να βρείτε τον όγκο του παρακάτω στερεού σχήματος.



Λύση

Το σχήμα αυτό αποτελείται από 9 ίδια παραλληλεπίπεδα με διαστάσεις 4, 2, 1. Άρα...

3. Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου έχει διαστάσεις 8 dm, 2,6 dm, 2 dm και είναι γεμάτο κατά το μισό με βενζίνη. Αν το αυτοκίνητο καταναλώνει 1l βενζίνης ανά 10 χιλιόμετρα, να βρείτε αν μπορεί να φτάσει στο πλησιέστερο πρατήριο βενζίνης που απέχει από αυτό 200 χιλιόμετρα.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα τον όγκο του ρεζερβουάρ. Είναι: $8\ dm \cdot 2{,}6\ dm \cdot 2\ dm = 41{,}6\ dm^3$ ή 41,6 l γιατί $1\ dm^3 = 1\ l$. Αφού είναι γεμάτο κατά το μισό θα περιέχει...

4. Ο όγκος ενός κύβου είναι 27 cm^3. Οι διαστάσεις ενός παραλληλεπιπέδου είναι κ, λ, μ, όπου $\kappa = 2 \cdot \lambda$ και $\lambda = 2 \cdot \mu$. Να βρείτε τον όγκο του, αν η μικρότερη από τις διαστάσεις του είναι διπλάσια από την πλευρά του παραπάνω κύβου.

Λύση

Αν είναι V ο όγκος του κύβου και α η ακμή του, τότε $V = \alpha^3$ ή $27 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$. Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε $\alpha = 3$ cm. Η μικρότερη διάσταση του παραλληλεπιπέδου είναι η ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Οι διαστάσεις ενός παραλληλεπιπέδου είναι 3,6 dm, 22,7 cm, 316,5 mm. Πόσα l νερό θα χωρέσει;

2. Ο όγκος ενός κύβου είναι 64 dm^3. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ενός άλλου κύβου που έχει ακμή τη μισή από την ακμή του πρώτου.

3. Το μήκος ενός παραλληλεπιπέδου είναι διπλάσιο από το πλάτος του και αυτό διπλάσιο από το ύψος του. Αν το άθροισμα των διαστάσεών του είναι 12 cm, να βρείτε τον όγκο του.

4. Μια δεξαμενή έχει διαστάσεις 3,5 m, 4,2 m και 6,5 m και γεμίζει από μια βρύση που παρέχει 40 l νερό ανά λεπτό. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή;

5. Η δεξαμενή ενός υποβρυχίου αποθηκεύει αέρα υπό πίεση ώστε ο όγκος που τελικά αποθηκεύεται είναι δεκαπλάσιος από τον όγκο της δεξαμενής. Αν αυτή περιέχει 10.000 l αέρα και είναι πλήρης, πόσος είναι ό όγκος της; Αν το σχήμα της είναι κύβος, πόση είναι η ακμή της;

2.15 Μονάδες μέτρησης του χρόνου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου και ποιες άλλες μονάδες γνωρίζετε;

2. Ποιες σχέσεις συνδέουν τις μονάδες μέτρησης χρόνου;

Απαντήσεις

1. Η βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το **δευτερόλεπτο (s ή sec)**. Άλλες μονάδες μέτρησης του χρόνου είναι το **λεπτό (min)**, **η ώρα (h)** και για μεγαλύτερες χρονικές διάρκειες η **ημέρα (day)**.

2. Οι μονάδες μέτρησης χρόνου συνδέονται μεταξύ τους με τις παρακάτω σχέσεις:

1 min = 60 s ή sec
1 h = 60 min = 3.600 s
1 day = 24 h.

Α Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε ποια χρονική διάρκεια είναι μεγαλύτερη σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) 1,8 h ή 170 min β) 102 min ή 1 h 10 min 8 sec γ) 185 s ή 3 min
δ) ½ h ή 1800 s
ε) 300 s ή 0,4 min

Λύση

α) Μετατρέπουμε τις 1,8 h σε min. Γνωρίζουμε ότι 1 min = 60 s, άρα 1,8 · 60 min = 108 min. Άρα 1,8 h < 170 min.
β) Μετατρέπουμε τα 102 min, καθώς και την 1 h 10 min 8 s σε s. Γνωρίζουμε ότι 1 h = 3.600 s και 1 min = 60 s. Άρα 102 · 60 s = 6.120 s και 1 h 10 min 8 s = 1· 3.600 s + 10· 60 s + 8 s =
= (3.600 + 600 + 8) s = 7.208 s.
Άρα 102 min < 1 h 10 min 8 s.
γ) Μετατρέπουμε τα 3 min σε s. Είναι 3 · 60 s = 180 s. Άρα 185 s > 3 min.
δ) Μετατρέπουμε την ½ h σε s. Είναι:
½ · 3.600 s = 1.800 s,
άρα ½ h = 1.800 s.
ε) Μετατρέπουμε τα 0,4 min σε s. Είναι 0,4 · 60 s = 24 s. Άρα 300 s > 0,4 min.

2. Να υπολογιστεί η χρονική διάρκεια σε min, από 8.30 το πρωί της Δευτέρας μέχρι 10.25 το πρωί της Τετάρτης.

Λύση

Από τις 8.30 το πρωί της Δευτέρας έως τις 8.30 το πρωί της Τετάρτης είναι 2 ημέρες ή 2 · 24 h = 48 h ή 48 h · 60 min = 2.880 min. Για να βρούμε τώρα πόσος χρόνος είναι από τις 8.30 το πρωί της Τετάρτης έως τις 10.25 το πρωί της ίδιας ημέρας αφαιρούμε τους δύο συμμιγείς αριθμούς.

$$\begin{array}{r} 10\text{ h } 25\text{ min} \\ -\ 8\text{ h } 30\text{ min} \\ \hline \end{array} \; \text{ή} \; \begin{array}{r} 9\text{h} + 1\text{h} \quad 25\text{min} \\ -\ 8\text{h} \qquad\quad 30\text{min} \\ \hline \end{array} \; \text{ή}$$

$$\begin{array}{r} 9\text{h} \;\; 60\text{min} \;\; 25\text{min} \\ -\ 8\text{h} \qquad\qquad 30\text{min} \\ \hline \end{array} \; \text{ή} \; \begin{array}{r} 9\text{h} \quad 85\text{min} \\ -\ 8\text{h} \quad 30\text{min} \\ \hline 1\text{h} \quad 55\text{ min} \end{array}$$

Δηλαδή 1 h 55 min = 1 · 60 min + 55 min = 60 min + 55 min = 115 min
Άρα η συνολική χρονική διάρκεια είναι 2.880 min + 115 min = 2.995 min.

3. Να βρείτε πόσα λεπτά είναι ο ένας χρόνος.

Λύση

Ένας χρόνος γνωρίζουμε ότι είναι 365 ημέρες. Η κάθε ημέρα έχει 24 h ή 24 · 60 min = 1440 min. Άρα οι 365 ημέρες έχουν 365 · 1.440 min = 525.600 min.

4. Η διάρκεια μιας διδακτικής ώρας στο φροντιστήριο είναι 50 min και μετά ακολουθεί πεντάλεπτο διάλειμμα. Ένας μαθητής που έχει τρεις ώρες μάθημα και ξεκίνησε στις 8.10 την πρώτη ώρα, τι ώρα θα σχολάσει;

Λύση

Η πρώτη ώρα, μαζί με το διάλειμμα διαρκεί 55 min. Το ίδιο και η δεύτερη ώρα. Η τρίτη ώρα διαρκεί για το μαθητή 50 min, χωρίς το διάλειμμα, γιατί στο τέλος της θα σχολάσει. Συνολικά λοιπόν ο μαθητής θα βρίσκεται στο φροντιστήριο 55 min + 55 min + 50 min = 160 min. Θα βρούμε τώρα πόσες ώρες και πόσα λεπτά υπάρχουν μέσα στα 160 min. Για αυτό θα διαιρέσουμε (ευκλείδεια διαίρεση) το 160 με το 60. Το πηλίκο είναι οι ώρες και το υπόλοιπο τα λεπτά.

$$\begin{array}{r|l} 160 & 60 \\ \cline{2-2} 40 & 2 \end{array}$$ είναι δηλαδή 2 h 40 min.

Για να βρούμε τώρα τι ώρα θα σχολάσει, προσθέτουμε την ώρα που πήγε στο φροντιστήριο με τη χρονική διάρκεια που θα βρίσκεται εκεί.

$$\begin{array}{r} 8\text{ h } 10\text{ min} \\ +\ 2\text{ h } 40\text{ min} \\ \hline 10\text{ h } 50\text{ min} \end{array}$$

Θα σχολάσει λοιπόν στις 10.50 δηλαδή στις 11 παρά 10.

5. Η κάρτα παρουσίας ενός δημοσίου υπαλλήλου στην εργασία του κατά τη διάρκεια μιας εργάσιμης εβδομάδας ανάγραφε τις ενδείξεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη
Προσέλευση	8.03	7.50	7.55
Αποχώρηση	15.20	15.10	15.20

	Πέμπτη	Παρασκευή
Προσέλευση	8.30	8.00
Αναχώρηση	15.30	12.35

Να βρείτε πόσες ώρες εργάστηκε συνολικά την εβδομάδα αυτή.

Λύση

Αφαιρούμε τον χρόνο προσέλευσης από τον χρόνο αποχώρησης κάθε ημέρας.

$$\begin{array}{r} \\ 15.20 \\ -\ 8.03 \\ \hline 7.17 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14.70 \\ 15.10 \\ -\ 7.50 \\ \hline 7.20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14.80 \\ 15.20 \\ -\ 7.55 \\ \hline 7.25 \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ 15.30 \\ -\ 8.30 \\ \hline 7.00 \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ 12.35 \\ -\ 8.00 \\ \hline 4.35 \end{array}$$

Σημείωση: Στη δεύτερη και τρίτη αφαίρεση μετατρέψαμε τους συμμιγείς 15.10 και 15.20 σε 14.70 και 14.80 για να μπορέσουμε να κάνουμε τις αφαιρέσεις.

Οπότε: 7 h 17 min + 7 h 20 min + 7 h 25 min + 7 h 00 min + 4 h 35 min = (7 + 7 + 7 + 7 + 4) h + (17 + 20 + 25 + 00 + 35) min = 32 h 97 min.
Βρίσκουμε πόσες ώρες και λεπτά είναι τα 97 min.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 60 \\ \cline{2-2} 37 & 1 \end{array}$$ Δηλαδή 1 ώρα και 37 min.

Άρα ο υπάλληλος εργάστηκε:
32 h + 1 h 37 min = 33 h 37 min στη διάρκεια της εβδομάδας.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε ποια χρονική διάρκεια είναι μεγαλύτερη σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) 183 s 1 min 18 s

β) $\frac{3}{4}$ h 45 min

γ) 1.726 s 29 min

δ) 12 h 43.200 s

Λύση

α) Μετατρέπουμε το 1 min και 18 s σε s.
Έχουμε $1 \cdot 60$ s + 18 s = 60 s + 18 s = = 78 s. Άρα τα 183 s > 78 s.

β) Μετατρέπουμε τα $\frac{3}{4}$ h σε min

$$\frac{3}{4} \cdot 60 \text{ min} = \frac{180}{4} = 45 \text{ min} \ldots$$

2. Να γράψετε με συμμιγείς αριθμούς τις παρακάτω χρονικές μονάδες:

α) 259 sec β) 7.189 min

γ) 5.328 sec δ) 396 sec

ε) 6.352 min στ) 16.832 sec

Λύση

α) Επειδή 259 s είναι λιγότερα από 3.600 s που έχει η μια ώρα καταλαβαίνουμε ότι δεν περιέχονται ακέραιες ώρες στα 259 s. Διαιρούμε επομένως με το 60 για να τα τρέψουμε σε min. Το πηλίκο που θα βρούμε είναι min και το υπόλοιπο s.

$$\begin{array}{r|l} 259 & \underline{60} \\ 19 & 4 \end{array}$$

Άρα 259 s = 4 min 19 s

β) Τα 7.189 min είναι περισσότερα από τα 60 min που έχει η μία ώρα. Επομένως διαιρούμε με το 60. Το πηλίκο θα είναι ώρες και το υπόλοιπο min.

$$\begin{array}{r|l} 7.189 & \underline{60} \\ 1\,18 & 119 \\ 589 & \\ 49 & \end{array}$$

Άρα 7.189 min = 119 h 49 min

γ) Διαιρούμε το 5.328 s με το 3.600 για να βρούμε πόσες ώρες περιέχονται.

$$\begin{array}{r|l} 5.328 & \underline{3.600} \\ 1\,728 & 1 \end{array}$$

Άρα 5.328 s = 1 h 1.728 s.
Διαιρούμε τα 1.728 s μέ 60 min για να δούμε πόσα min περιέχονται σ' αυτά.

$$\begin{array}{r|l} 1.728 & \underline{60} \\ 528 & 28 \\ 48 & \end{array}$$

Άρα 1.728 s = 28 min 48 s.

Άρα 5.328 s = 1 h 28 min 4 s

3. Ένας μαθητής αρχίζει μάθημα στις 8.15 το πρωί στο σχολείο του. Αν το πρόγραμμα της ημέρας εκείνης είναι εξάωρο και κάθε διδακτική ώρα διαρκεί 45 λεπτά ενώ ακολουθεί δεκάλεπτο διάλειμμα, να βρείτε τι ώρα θα σχολάσει ο μαθητής αυτός.

Λύση

Οι 6 διδακτικές ώρες είναι $6 \cdot 45$ min = = 270 min. Υπάρχουν ακόμα πέντε δεκάλεπτα διαλείμματα δηλαδή $5 \cdot 10 = 50$ min. Άρα ο μαθητής παραμένει στο σχολείο του 270 min + 50 min = 320 min. Βρίσκουμε τώρα πόσες ώρες και πόσα λεπτά είναι τα 320 min.

$$\begin{array}{r|l} 320 & \underline{60} \\ 20 & 5 \end{array}$$

...

4. Ένα τρένο αναχωρεί από τη Λαμία στις 12.03 και φτάνει στη Θεσσαλονίκη αφού διήνυσε 365 χιλιόμετρα. Αν η μέση ταχύτητά του είναι 68 χιλιόμετρα την ώρα, πόση ώρα διήρκεσε το ταξίδι και τι ώρα έφτασε στη Θεσσαλονίκη;

Λύση

Αφού σε μια ώρα διανύει 68 χιλιόμετρα τα 365 χιλιόμετρα τα διήνυσε σε 365 : 68 = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Η Σελήνη συμπληρώνει μια περιστροφή γύρω από τη Γη σε 27,32 ημέρες. Σε πόσα min θα συμπληρώσει 2 περιστροφές γύρω από τη Γη;

2. Να βρείτε ποια χρονική διάρκεια είναι μεγαλύτερη σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) 15 h , 3.160 min β) 6.185 min , 5 h 3 min 2 sec γ) 4 day , 96 h δ) 7.126 sec , 4 h.

3. Ένας πατέρας το 1985 ήταν 32 ετών και ο γιος του κατά 29 χρόνια μικρότερος. Ποιο έτος η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιου του;

4. Ένας ποδοσφαιρικός αγώνας διαρκεί 90 λεπτά και η διακοπή του ημιχρόνου 15 λεπτά. Σε ένα τέτοιο αγώνα στο πρώτο ημίχρονο ο διαιτητής κράτησε καθυστέρηση 4 min και στο δεύτερο 3 min. Αν ο αγώνας άρχισε στις 5.30 το απόγευμα, τι ώρα τελείωσε;

5. Να βρείτε τη σημερινή ηλικία σας σε μήνες.

2.16 Μονάδες μάζας

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι είναι μάζα ενός σώματος;	1. **Μάζα** ενός σώματος είναι η ποσότητα της ύλης από την οποία αποτελείται αυτό.
2. Ποια είναι η μονάδα μέτρησης της μάζας;	2. Μονάδα μέτρησης της μάζας είναι το **χιλιόγραμμο ή κιλό (kg)**.
3. Πώς ορίζεται το 1 kg;	3. Το 1 kg είναι ίσο με τη μάζα του διεθνούς πρότυπου του χιλιόγραμμου. Το διεθνές πρότυπο χιλιόγραμμο είναι ίσο με τη μάζα 1 λίτρου απεσταγμένου νερού σε θερμοκρασία 4° Κελσίου.
4. Ποιο είναι το πολλαπλάσιο του κιλού και ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις του κιλού;	4. Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο **τόνος (t)**. Είναι 1 t = 1.000 kg. Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι το **γραμμάριο (g)** και το **χιλιοστόγραμμο (mg)**. Είναι:

$$1\text{ g} = \frac{1}{1000}\text{ Kg} \quad \text{και} \quad 1\text{ Kg} = 1000\text{ g}$$

$$1\text{ mg} = \frac{1}{1000}\text{ g} \quad \text{και} \quad 1\text{ g} = 1000\text{ mg}$$

5. Μπορούν να συγκριθούν η μάζα και το βάρος ενός σώματος;

5. Τον ορισμό της μάζας τον είδαμε στην πρώτη ερώτηση. **Βάρος** είναι η δύναμη με την οποία η γη έλκει κάθε σώμα προς το κέντρο της. Βλέπουμε λοιπόν ότι μάζα και βάρος είναι διαφορετικές έννοιες και επομένως δε μπορούν να συγκριθούν.

6. Στις διάφορες καθημερινές συναλλαγές χρησιμοποιούμε τον όρο «βάρος» αντί του όρου «μάζα». Λέμε π.χ. «βάρος 5 kg» αντί να πούμε «μάζα 5 kg». Είναι σωστό αυτό;

6. Η χρησιμοποίηση του όρου «βάρος» αντί του όρου «μάζα» στις καθημερινές μας συναλλαγές είναι λάθος, αφού είδαμε ότι βάρος και μάζα είναι διαφορετικές έννοιες. Ο αριθμός πάντως που εκφράζει τη μάζα ενός σώματος, όταν πάρουμε σαν μονάδα μάζας το 1 kg, είναι ίδιος με τον αριθμό που εκφράζει το βάρος του σώματος αυτού, όταν σαν μονάδα βάρους πάρουμε το **1 κιλοπόντ** (μονάδα μετρήσεως βάρους). Γι' αυτό συνηθίζεται η λανθασμένη έκφραση «βάρος» ενώ θέλουμε να εκφράσουμε την έννοια «μάζα» ενός σώματος.

7. 1 l γάλα είναι βαρύτερο από 1 kg γάλα;

7. Γνωρίζουμε ότι το l είναι μονάδα μετρήσεως όγκου, ενώ το kg είναι μονάδα μετρήσεως μάζας. Επομένως 1 l και 1 kg είναι μονάδες που δεν μπορούν να συγκριθούν γιατί είναι διαφορετικές, αφού μετρούν διαφορετικά μεγέθη. Σύγκριση θα μπορούσε να γίνει, αν υπολογίσουμε πόση μάζα γάλακτος αντιστοιχεί στο 1 l.

8. 1 kg σίδερο είναι βαρύτερο από 1 kg βαμβάκι;

8. 1 kg σίδερο και 1 kg βαμβάκι είναι ίσες μάζες, αφού και οι δύο ζυγίζουν από 1 kg. Η διαφορά βρίσκεται μόνο στους όγκους αφού 1 kg σίδερο έχει μικρότερο όγκο από 1 kg βαμβάκι.

Α. Λυμένες ασκήσεις

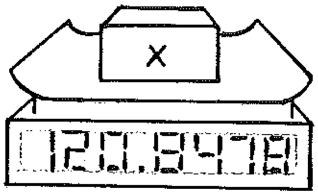
1. Να συγκρίνετε τις μάζες δύο σωμάτων που είναι 0,96 kg και 560 g αντίστοιχα.

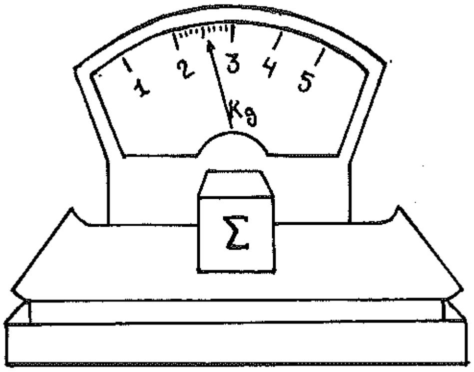
Λύση

Τα 0,96 kg τα μετατρέπουμε σε g πολλαπλασιάζοντας τα επί 1.000. Έχουμε:
0,96 · 1.000 g = 960 g.
Άρα η μάζα των 0,96 kg είναι μεγαλύτερη από τη μάζα των 560 g.

2. Από τις ενδείξεις των παρακάτω ζυγαριών να βρείτε το βάρος των σωμάτων Χ, Σ σε kg και σε g.

Λύση





Όπως φαίνεται στο σχήμα η πρώτη ζυγαριά είναι ηλεκτρονική και δείχνει το βάρος του σώματος Χ σε g με ψηφιακή ένδειξη. Δηλαδή είναι 120,847 g ή 120,847 : 1000 = = 0,120847 kg.
Η δεύτερη ζυγαριά υπολογίζει τα βάρη σε kg. Μεταξύ δύο αριθμημένων ενδείξεων υπάρχουν 9 μικρότερες γραμμές οι οποίες αντιστοιχούν σε 100 g η καθεμιά. Επομένως ο δείκτης της ζυγαριάς δείχνει 2 kg και 600g δηλ. το βάρος του Σ είναι 2,6 kg ενώ σε g το βάρος του είναι 2600g.

3. Ζυγίσαμε ένα κουτί που περιέχει 20 σοκολάτες. Η βελόνα της ζυγαριάς έδειξε 1.800 g. Το απόβαρο του κουτιού (δηλ. το βάρος του κουτιού όταν είναι άδειο) είναι 40 g. Να υπολογίσετε το βάρος της κάθε σοκολάτας.

Λύση

Το μικτό βάρος του κουτιού είναι 1.800 g ενώ το απόβαρο είναι 40 g. Άρα το καθαρό βάρος του περιεχομένου του κουτιού είναι 1.800 g - 40 g = 1.760 g.
Επομένως κάθε μια από τις 20 σοκολάτες θα ζυγίζει 1.760 : 20 = 88 g.

4. Ένα οπωροπωλείο πουλάει τα πορτοκάλια 250 δρχ. το κιλό και τα μήλα 175 δρχ. το κιλό. Αν η ηλεκτρονική ζυγαριά έδειξε 3.120 g για τα πορτοκάλια και 4.315 g για τα μήλα, πόσα χρήματα θα πληρώσουμε;

Λύση

Αφού το 1 kg πορτοκάλια στοιχίζει 250 δρχ. και το βάρος τους είναι 3120 g δηλαδή 3,120 kg, θα πληρώσουμε γι' αυτά 3,120 · 250 = 780 δρχ.
Επίσης το 1 kg μήλα στοιχίζει 175 δρχ. άρα τα 4.315 g δηλαδή τα 4,315 kg στοιχίζουν 4,315 · 175 = 755,125 δρχ.
Άρα θα πληρώσουμε συνολικά:
780 + 755,125 = 1.535,125 δρχ. δηλ. 1.535 δρχ. περίπου.

5. Ένας λεμονοπαραγωγός είχε παραγωγή από δύο κτήματα 33,6 τόνους λεμόνια. Το πρώτο κτήμα έδωσε 2,8 τόνους περισσότερα λεμόνια από το δεύτερο. Πόσους τόνους λεμόνια πήρε από κάθε κτήμα;

Λύση

Αφαιρούμε από τους 33,6 τόνους τους 2,8 τόνους που του δίνει επιπλέον το πρώτο κτήμα, δηλαδή 33,6 - 2,8 = 30,8 τόνους. Τόση ποσότητα θα έπαιρνε και από τα δύο κτήματα αν παρήγαγαν και τα δύο ίση ποσότητα και μάλιστα τόση όση παράγει το δεύτερο. Διαιρούμε λοιπόν τους 30,8 τόνους διά 2 για να βρούμε πόση ποσότητα παράγει το δεύτερο, δηλαδή 30,8 : 2 = 15,4 τόνους. Άρα το πρώτο παράγει 15,4 + 2,8 = 18,2 τόνους.

6. Ένα δοχείο γεμάτο νερό ζυγίζει 400 g περισσότερο από το ίδιο δοχείο όταν είναι γεμάτο οινόπνευμα. Αν τα 10 l οινόπνευμα ζυγίζουν 8 kg, να βρείτε τον όγκο του δοχείου.

Λύση

Αφού τα 10 l οινόπνευμα ζυγίζουν 8 kg, το 1 l θα ζυγίσει $\frac{8}{10}$ kg δηλ. 0, 8 kg ή 800 g.

Επίσης είναι γνωστό ότι το 1 l νερού ζυγίζει 1.000 g. Άρα στο 1 l η διαφορά βαρών, νερού και οινοπνεύματος είναι 1.000 g - 800 g = 200 g. Επομένως η χωρητικότητα του δοχείου είναι:
400 : 200 = 2 l.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να συγκρίνετε τις μάζες δύο σωμάτων που είναι 0,918 kg και 920 g αντίστοιχα.

Λύση

Μετατρέπουμε τα 0,918 kg σε gκαι μετά τα συγκρίνουμε με τα 920 g...

2. Ζυγίσαμε σε μια ηλεκτρονική ζυγαριά ένα κουτί που περιέχει 2 κονσέρβες, και στην οθόνη της εμφανίστηκε η ένδειξη 700 g. Αν το απόβαρο του κουτιού είναι 100 g και γνωρίζουμε ότι το βάρος της μιας κονσέρβας είναι διπλάσιο από το βάρος της άλλης, πόσο είναι το καθαρό βάρος της καθεμιάς;

Λύση

Αφαιρούμε από τα 700 g τα 100 g που είναι το απόβαρο για να βρούμε το βάρος των δύο κονσερβών μαζί, δηλαδή 700 g - 100 g = 600 g.
Αφού το βάρος της μιας είναι διπλάσιο από το βάρος της άλλης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις κονσέρβες με ίσα βάρη μεταξύ τους και μάλιστα ίσα με το βάρος της ελαφρύτερης. Διαιρούμε λοιπόν τα 600g διά 3 για να βρούμε το βάρος της ελαφρύτερης...

3. Σ' ένα κρεοπωλείο το μοσχάρι πουλιέται 980 δρχ. το κιλό και το αρνί 1.020 δρχ. το κιλό. Αγοράσαμε 3,6 kg μοσχάρι και μια ποσότητα αρνί. Δώσαμε συνολικά 8.118 δρχ. Πόσα kg αρνί αγοράσαμε;

Λύση

Αφού το 1 kg μοσχάρι πουλιέται 980 δρχ. και πήραμε 3,6 kg, πληρώσαμε γι' αυτό 980 · 3,6 = 3.528 δρχ. Αφαιρούμε τα χρήματα αυτά από τις 8.118 δρχ. που δώσαμε συνολικά, για να βρούμε πόσο στοιχίζει το αρνί που αγοράσαμε...

4. Μια ζυγαριά αεροδρομίου παρουσιάζει σφάλμα 100 g στα 10 kg. Αν το ανώτερο επιτρεπόμενο βάρος αποσκευών είναι 50 kg για κάθε επιβάτη, να βρείτε πόσα kg αποσκευών περισσότερα ή λιγότερα υπάρχουν σ' ένα αεροπλάνο 180 θέσεων όταν αυτό είναι γεμάτο με επιβάτες που έχουν μαζί τους το ανώτερο επιτρεπόμενο βάρος αποσκευών.

Λύση

Οι 180 επιβάτες επιτρέπεται να μεταφέρουν 180 · 50 = 9.000 kg αποσκευές. Αφού στα 10 kg έχουμε σφάλμα 100 g, στο 1 kg το σφάλμα θα είναι 100 : 10 = 10 g. Άρα....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε πόσα g είναι τα 17 kg και πόσα kg είναι τα 1.896 g.

2. Τρία σώματα Α, Β, Γ όταν ζυγιστούν μαζί έχουν βάρος 380 g. Όταν ζυγιστούν το Α και το Β μαζί έχουν βάρος 200 g. Αν τα βάρη του Α και του Γ είναι ίσα να βρείτε το βάρος του κάθε σώματος.

3. Δύο όμοια δοχεία με λάδι έχουν μικτό βάρος 36 kg και το πρώτο είναι βαρύτερο κατά 800 g από το δεύτερο. Πόση είναι η αξία του λαδιού σε κάθε δοχείο, αν κάθε κιλό λάδι στοιχίζει 480 δρχ. και το απόβαρο κάθε δοχείου είναι 1 kg;

4. 1 l πετρέλαιο ζυγίζει 900 g. Μια δεξαμενή γεμάτη περιέχει 585 kg πετρέλαιο. Πόσα kg νερό μπορεί να χωρέσει η δεξαμενή αυτή;

2.17 Νομισματικές μονάδες

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι είναι η νομισματική μονάδα;	**1. Νομισματική μονάδα** είναι η μονάδα μέτρησης του χρήματος.
2. Ποια είναι η νομισματική μονάδα της Ελλάδας;	**2.** Η νομισματική μονάδα της Ελλάδας είναι η **δραχμή**.
3. Ποια είναι η υποδιαίρεση της δραχμής;	**3.** Η 1 δραχμή υποδιαιρείται σε **100 λεπτά**.
4. Ποια κέρματα και χαρτονομίσματα κυκλοφορούν στη χώρα μας;	**4.** Στη χώρα μας κυκλοφορούν: **α)** κέρματα: 1 δρχ., 2 δρχ., 5 δρχ., 10 δρχ., 20 δρχ., 50 δρχ. και 100 δρχ. **β)** χαρτονομίσματα: 50 δρχ., 100 δρχ., 500 δρχ., 1.000 δρχ., 5.000 δρχ.
5. Αναφέρετε τις νομισματικές μονάδες μερικών χωρών.	**5.** Οι νομισματικές μονάδες μερικών χωρών είναι: Η.Π.Α: <u>Το αμερικανικό δολλάριο ($)</u> Ιαπωνία: <u>Το γιεν</u> Μεγάλη Βρετανία: <u>Η λίρα Αγγλίας (£)</u> Γερμανία: <u>Το μάρκο (DM)</u> Γαλλία: <u>Το γαλλικό φράγκο (FF)</u> Ρωσία: <u>Το ρούβλι.</u> Τα κράτη μέλη της Ε.Ο.Κ. έχουν καθιερώσει για τις μεταξύ τους συναλλαγές ένα κοινό νόμισμα την <u>Ευρωπαϊκή Νομισματική Μονάδα (ECU).</u>
6. Τι είναι το δελτίο ισοτιμιών της Τράπεζας Ελλάδος;	**6.** Η Τράπεζα Ελλάδος εκδίδει καθημερινά ένα δελτίο που αναφέρει την ισοτιμία (σχέση) της δραχμής με τα κυριότερα ξένα νομίσματα. Το δελτίο αυτό λέγεται **δελτίο ισοτιμιών.**
7. Τι σημαίνουν η τιμή αγοράς και η τιμή πώλησης στο δελτίο ισοτιμιών;	**7.** Στο δελτίο ισοτιμιών αναφέρονται δύο τιμές για κάθε νόμισμα. Η πρώτη λέγεται **τιμή αγοράς** και εκφράζει τις δραχμές που θα μας δώσει η τράπεζα αν εξαργυρώσουμε μια ξένη νομισματική μονάδα. Η δεύτερη τιμή λέγεται **τιμή πώλησης** και εκφράζει πόσες δρχ. πρέπει να πληρώσουμε στην τράπεζα για την αγορά μιας ξένης νομισματικής μονάδας. Παρακάτω παραθέτουμε

Συνάλλαγμα	Αγορά δρχ.	Πώληση δρχ.
Δολάριο Η.Π.Α	181,44	188,84
Φράγκο Γαλλίας	35,48	36,93
Μάρκο Γερμ.	119,26	124,12
Γιεν (τα 100)	146,63	152,55
ECU	248,55	250,05
Λίρα Αγγλίας	346,14	360,26
Λίρα Κύπρου	421,44	438,47
Πεσέτα Ισπαν.	1,89	1,96

τις ισοτιμίες των κυριωτέρων νομισμάτων από το δελτίο ισοτιμιών της Τράπεζας Ελλάδος, την 30 Ιουνίου 1992.

Το διπλανό πίνακα θα τον χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στις ασκήσεις.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε πόσα
α) πεντακοσάρικα β) κατοστάρικα
γ) πενηντάρικα δ) δεκάρικα
ε) πεντάδραχμα στ) δίδραχμα
έχουν οι 6.000 δρχ.

Λύση

α) Διαιρούμε το 6.000 διά 500
6.000 : 500 = 12. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 12 πεντακοσάρικα.
β) Διαιρούμε το 6.000 διά 100
6.000 : 100 = 60. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 60 κατοστάρικα.
γ) Διαιρούμε το 6.000 διά 50
6.000 : 50 = 120. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 120 πενηντάρικα.
δ) Διαιρούμε το 6.000 διά 10
6.000 : 10 = 600. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 600 δεκάρικα.
ε) Διαιρούμε το 6.000 διά 5
6.000 : 5 = 1.200. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 1.200 πεντάδραχμα.
στ) Διαιρούμε το 6.000 διά 2
6.000 : 2 = 3.000. Άρα οι 6.000 δρχ. έχουν 3.000 δίδραχμα.

2. Ένας υπάλληλος πήρε μισθό και δώρο χριστουγέννων 28 πεντοχίλιαρα, 25 χιλιάρικα, 11 πεντακοσάρικα, 3 κατοστάρικα και 3 δρχ. Αν ο μισθός του είναι κατά 10.547 δρχ. περισσότερος από το δώρο, πόσες δρχ. ήταν ο μισθός του και πόσες δρχ. το δώρο του;

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα πόσες δρχ. πήρε συνολικά ο υπάλληλος. Έχουμε:
28 · 5.000 δρχ. + 25 · 1.000 δρχ. +
+ 11 · 500 δρχ. + 3 · 100 δρχ. + 3 δρχ.
= (140.000 + 25.000 + 5.500 + 300 +
+ 3) δρχ. = 170.803 δρχ.
Αφαιρούμε από το ποσό αυτό το 10.547 που είναι η υπεροχή του μισθού από το δώρο 170.803 - 10.547 = 160.256 δρχ.
Διαιρούμε τώρα διά 2 και βρίσκουμε πόσα χρήματα ήταν το δώρο
160.256 : 2 = 80.128 δρχ.
Άρα ο μισθός του ήταν:
80.128 + 10.547 = 90.675 δρχ.

3. Πόσα δολάρια είναι τα 1.260 φράγκα αν η συναλλαγή γίνει μέσω της Τράπεζας;

Λύση

Σύμφωνα με τον πίνακα ισοτιμιών το 1 φράγκο θα το αγοράσει η Τράπεζα προς 35,48 δρχ. και θα μας δώσει έτσι για τα 1.260 φράγκα 1.260 · 35,48 = 44704,8 δηλαδή 44704,8 δρχ. Τις δραχμές αυτές θα τις δώσουμε μετά στην Τράπεζα και αυτή θα μας πουλήσει δολλάρια. Είναι:
1 δολλάριο = 188,84 δρχ. (τιμή πώλησης) οπότε με 44704,8 δρχ. θα πάρουμε 44704,8 : 188,84 = 236,73 δολλάρια. Επειδή όμως η Τράπεζα δίνει μόνο χαρτονομίσματα ξένων χωρών και όχι κέρματα τελικά θα μας δώσει 236 δολλάρια και θα μας επιστρέψει «ρέστα»
0,73 · 188,84 = 137,85 δρχ. δηλαδή 138 δρχ.

4. Το τουριστικό συνάλλαγμα είναι 760 ECU προκειμένου για ταξίδι σε χώρες της ΕΟΚ. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσουμε για να αγοράσουμε 760 ECU; Πόσες λίρες Αγγλίας θα μας δώσει η Τράπεζα για τα 760 ECU;

Λύση

Το 1 ECU μας το πουλάει η Τράπεζα προς 250,05 δρχ. Άρα για τα 760 ECU πρέπει να πληρώσουμε:
250,05 · 760 = 190.038 δρχ.
Η μια λίρα Αγγλίας έχει τιμή πώλησης 360,26 δρχ., άρα με τις 190.038 δρχ. θα πάρουμε:
190.038 : 360,26 = 527,5 λίρες.
Επειδή όμως η Τράπεζα δίνει μόνο χαρτονομίσματα ξένων χωρών θα μας δώσει 527 λίρες και θα μας επιστρέψει:
0,5 · 360,26 = 180,19 δηλαδή 180 δρχ. περίπου.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Πόσα δολλάρια Η.Π.Α θα πάρουμε με 10.000 δρχ.;

Λύση

Η τράπεζα πουλά το δολλάριο προς 188,84 δρχ. Άρα με 10.000 θα πάρουμε...

2. Πόσες δραχμές θα πάρουμε αν εξαργυρώσουμε 215 δολλάρια και 520 γιεν Ιαπωνίας;

Λύση

Η Τράπεζα αγοράζει το δολλάριο προς 181,44 δρχ. και τα γιεν προς 146,63 δρχ. (τα 100). Άρα τα 215 δολλάρια τα αγοράζει προς 215 · 181,44 = ...

3. Αν μια τηλεόραση κοστίζει στην Κύπρο 296 λίρες Κύπρου, πόσο κοστίζει η τηλεόραση αυτή σε δραχμές;

Λύση

Εδώ δεν πρόκειται για συναλλαγή μέσω Τράπεζας αλλά για σύγκριση τιμών. Έτσι από τον πίνακα ισοτιμιών θα πάρουμε τη μέση τιμή ισοτιμίας της λίρας Κύπρου με τις δραχμές. Θα προσθέσουμε δηλαδή την τιμή πώλησης και την τιμή αγοράς της και θα διαιρέσουμε διά 2. Είναι: 421,44 + 438,47 = 859,91 και 859,91 : 2 = 429,96. Δηλαδή
1 λίρα Κύπρου = 429,96 δρχ. Άρα...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Με 2.000 δρχ. πόσα α) δολλάρια, β) γιεν, γ) λίρες Αγγλίας μπορούμε να πάρουμε;

2. Έχουμε 3.125 κορώνες Σουηδίας και τις εξαργυρώνουμε στην Τράπεζα (τιμή αγοράς της Κορώνας είναι 32,84 δρχ.) Με τα χρήματα που θα πάρουμε πόσες λίρες Αγγλίας μπορούμε να αγοράσουμε; Πόσες δρχ. θα μας επιστραφούν;

3. Πόσες δρχ. πρέπει να πληρώσουμε για να αγοράσουμε 600 ECU; Ποσα μάρκα θα πάρουμε με τα 600 ECU και πόσες δρχ. «ρέστα»;

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Το πλάτος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσο με την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει εμβαδόν 9 cm^2. Το μήκος του ορθογωνίου αυτού είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

2. Ένα τετραγωνικό οικόπεδο έχει πλευρά 18 m. Πόσο στοιχίζει η αγορά του, αν πουλιέται 8.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο;

3. Ο αγοραστής του οικοπέδου του παραπάνω προβλήματος θέλει να το περιφράξει με διπλή σειρά σύρματος. Αν το 1 m στοιχίζει 1.200 δρχ., πόσο θα του στοιχίσει η περίφραξη;

4. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 50 km. Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν το ένα από την πόλη Α και το άλλο από την πόλη Β στις 10.00 και στις 11.00 αντίστοιχα και κινούνται πάνω στο δρόμο που ενώνει τις δύο πόλεις με ταχύτητες 20 χιλιόμετρα ανά ώρα το πρώτο και 30 χιλιόμετρα ανά ώρα το δεύτερο. Τι ώρα θα συναντηθούν και σε πόση απόσταση από την πόλη Α;

5. Ο όγκος ενός κύβου Α είναι οκταπλάσιος από τον όγκο ενός κύβου Β που η πλευρά του είναι 1 m. Πόση είναι η πλευρά του κύβου Α;

6. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου Α είναι εννιαπλάσιο από το εμβαδόν ενός τετραγώνου Β που έχει πλευρά 3 m. Πόση είναι η πλευρά του τετραγώνου Α;

7. Οι δεξαμενές ενός οινοποιητικού συνεταιρισμού περιέχουν 1.218 l κρασί. Πόσα μπουκάλια των 700 ml και πόσα του 1,5 l θα χρειαστεί ο συνεταιρισμός για να εμφιαλώσει το κρασί του, αν θέλει τα μπουκάλια των 700 ml σε αριθμό να είναι διπλάσια από τα μπουκάλια του 1,5 l;

8. Το κρασί του προηγουμένου προβλήματος πρόκειται να εξαχθεί στη Γερμανία και την Αγγλία και κάθε χώρα θα πάρει ίδιο αριθμό μπουκαλιών και από τους δύο τύπους. Η τιμή για κάθε μπουκάλι των 700 ml είναι 1.200 δρχ. ενώ για κάθε μπουκάλι του 1,5 l είναι 2.300 δρχ. και οι χώρες αυτές πληρώνουν με την εθνική νομισματική μονάδα τους. Πόσα μάρκα και πόσες λίρες θα εισπράξει ο συνεταιρισμός από την πώληση του κρασιού του; (Να πάρετε τη μέση τιμή κάθε νομισματικής μονάδας).

9. Σύμφωνα με την ΕΥΔΑΠ τα αποθέματα νερού του Μόρνου και της Υλικής επαρκούσαν το βράδυ της 22 Οκτωβρίου 1990 μέχρι τη 15 Δεκεμβρίου 1990. Αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι η ημερήσια κατανάλωση νερού στην πρωτεύουσα είναι 1.000.000 m^3, πόσα m^3 ήταν τα αποθέματα νερού στις 22 Οκτωβρίου 1990; Αν η ημερήσια κατανάλωση περιοριζόταν στα 780.000 m^3 ημερησίως, μέχρι ποια ημερομηνία θα επαρκούσαν τα αποθέματα;

10. Μια κυβική δεξαμενή έχει ακμή 0,5 m και γεμίζει ταυτόχρονα από δύο βρύσες που η κάθε μια παρέχει 30 l νερό την ώρα. Σε πόση ώρα θα γεμίσει η δεξαμενή;

11. Μια αποθήκη υγρών καυσίμων έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις βάσης 3 m, 4 m κι ύψος 6 m. Αν ρίξουμε 60.000 l πετρέλαιο μέσα σ' αυτήν, μέχρι ποιο ύψος θα φτάσει το υγρό;

12. Ένα δοχείο γεμάτο λάδι ζυγίζει 17 kg και 600 g. Αν αφαιρέσουμε τη μισή ποσότητα λαδιού ζυγίζει 9 kg και 400 g. Πόσο είναι το καθαρό βάρος του λαδιού και πόσο το απόβαρο του δοχείου;

13. Ένα πλοίο όταν ταξιδεύει με μέση ταχύτητα 30 ναυτικά μίλια την ώρα φτάνει στον προορισμό του σε 30 ώρες. Το πλοίο ταξίδεψε τις πρώτες 10 ώρες με την ταχύτητα αυτή αλλά μετά συνάντησε θαλασσοταραχή οπότε μείωσε την ταχύτητά του κατά το μισό και διήνυσε έτσι 100 μίλια. Μετά το τέλος της θαλασσοταραχής διπλασίασε την ταχύτητά του και έφτασε στον προορισμό του. Πόσες ώρες έφτασε καθυστερημένο;

14. Ένας μαθητής έχει στο εβδομαδιαίο σχολικό του πρόγραμμα 4 εξάωρα και ένα πεντάωρο. Η διδακτική ώρα είναι 45 min και μετά ακολουθεί δεκάλεπτο διάλειμμα. Πόσες ώρες την εβδομάδα απασχολείται ο μαθητής στο σχολείο;

15. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου που το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του, ισούται με την περίμετρο ενός τετραγώνου πλευράς 40 cm. Πόσα m^2 είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου;

16. Ένα κομμάτι ύφασμα έχει μήκος 9 yrd και πλάτος 12 ft. Πόσο θα πληρώσουμε για την αγορά του αν το 1 m^2 στοιχίζει 3.120 δρχ. Για ένα δεύτερο κομμάτι ύφασμα ίδιας ποιότητας και ίδιου πλάτους δώσαμε 40.560 δρχ. Πόσες yrd μήκος έχει αυτό;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

BASIC 4

Μια όμορφη απασχόληση θα μπορούσε να ήταν η αυτόματη μετατροπή μιας μονάδας σε κάποιο από τα πολλαπλάσιά της. Δηλαδή να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που εμείς θα δίνουμε π.χ. m² και ο υπολογιστής θα τα μετατρέπει σε cm² ή σε km² ή σε οτιδήποτε εμείς θέλουμε.

```
10 INPUT A            (↵)
20 PRINT A m²         (↵)
30 LET B= A*10.000    (↵)
40 PRINT B cm²        (↵)
50 LET Γ=A/1.000.000  (↵)
60 PRINT Γ km²        (↵)
```

Στο παραπάνω πρόγραμμα εμείς δίνουμε Α σε m² και ο υπολογιστής με πολλαπλασιασμό επί 10.000 το μετατρέπει και το τυπώνει σε cm², ενώ με διαίρεση δια 1.000.000 το μετατρέπει και μετά το τυπώνει σε km². (LET = έστω).

Όπως καταλαβαίνουμε με κατάλληλες διαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς μπορούμε να μετατρέψουμε όλες τις μονάδες του κεφαλαίου στα πολλαπλάσιά τους ή στα υποπολλαπλάσιά τους.

Ασκήσεις

1. Μετατρέψτε όλες τις μονάδες του κεφαλαίου στα υποπολλαπλάσιά τους και στα πολλαπλάσιά τους, φτιάχνοντας κατάλληλα προγράμματα. Πριν τα σώσετε (χρησιμοποιώντας την εντολή SAVE) κάντε έλεγχο για να διαπιστώσετε αν ο υπολογισμός είναι σωστός. Έτσι θα εφοδιαστείτε με ένα μηχανισμό για οποιαδήποτε μετατροπή θέλετε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Τα κλάσματα

3.1 Η έννοια του κλάσματος

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι λέγεται κλασματική μονάδα;	**1. Κλασματική μονάδα** λέγεται καθένα από τα ν ίσα μέρη που μπορούμε να χωρίσουμε ένα μέγεθος. Σύμβολο: $\frac{1}{ν}$ του μεγέθους. Διαβάζουμε «ένα νιοστό».
2. Τι λέγεται κλάσμα ή κλασματικός αριθμός;	**2. Κλάσμα ή κλασματικός αριθμός** λέγεται το μέγεθος που αποτελείται από λ ίσες κλασματικές μονάδες. Ονομάζεται «λ νιοστά» του αρχικού μεγέθους. Σύμβολο: $\frac{λ}{ν}$ του μεγέθους. Ο φυσικός αριθμός λ λέγεται **αριθμητής** και ο φυσικός αριθμός ν **παρονομαστής**.
3. Τι ονομάζουμε όρους ενός κλάσματος και τι μας δείχνουν;	**3. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής** ονομάζονται όροι του κλάσματος. Ο παρονομαστής μας δείχνει σε πόσα μέρη χωρίσαμε το μέγεθος και ο αριθμητής πόσα μέρη πήραμε από αυτό. Άρα ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι μηδέν.

4. Ποια κλάσματα λέγονται ομώνυμα και ποια ετερώνυμα;

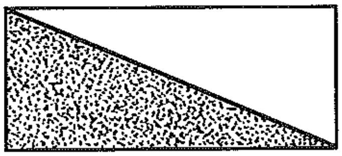
4. **Ομώνυμα** λέγονται τα κλάσματα τα οποία έχουν τον ίδιο παρονομαστή και **ετερώνυμα** αυτά που δεν έχουν ίδιο παρονομαστή.
π.χ.

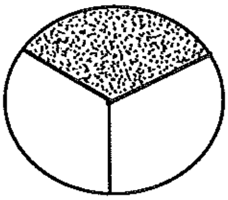
Ομώνυμα: $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$

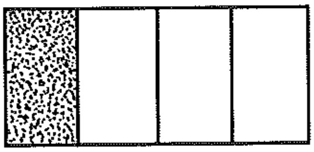
Ετερώνυμα: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$

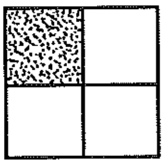
Α. Λυμένες ασκήσεις

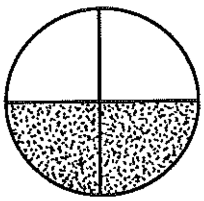
1. Να βρεθεί το κλάσμα που εκφράζει το σκιασμένο μέρος των παρακάτω σχημάτων.

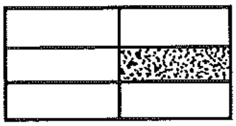
α) 

β) 

γ) 

δ) 

ε) 

στ) 

Λύση

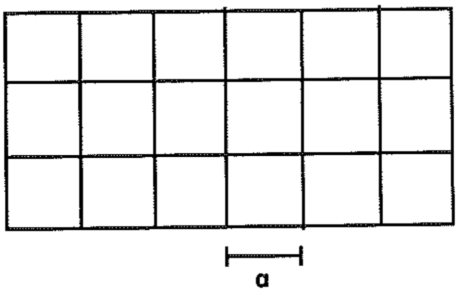
α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{3}$ γ) $\frac{1}{4}$ δ) $\frac{1}{4}$

ε) $\frac{1}{2}$ στ) $\frac{1}{6}$

2. Κατασκευάστε ένα παραλληλόγραμμο με διαστάσεις αντίστοιχα 6 και 3 και βρείτε τα $\frac{2}{3}$ αυτού.

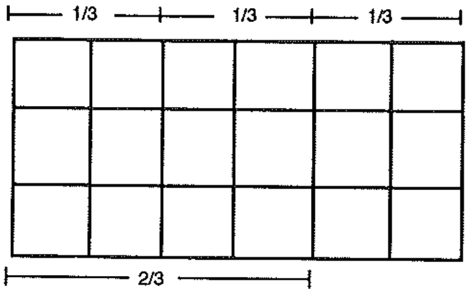
Λύση

Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 6 και 3 και μονάδα μέτρησης έστω το α και το διαιρούμε σε τετράγωνα που έχουν για πλευρά αυτή τη μονάδα μέτρησης.



Χωρίζουμε το παραλληλογραμμο σε 3 ίσα μέρη χρησιμοποιώντας δύο τρόπους:

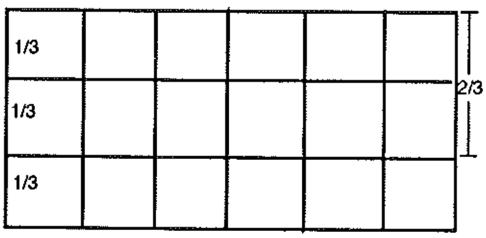
α' τρόπος:



Διαιρούμε τη μεγαλύτερή του διάσταση σε τρία ίσα μέρη. Το κάθε ένα από αυτά είναι:

το $\frac{1}{3}$ του παραλληλογράμμου και δύο από αυτά αντιπροσωπεύουν τα $\frac{2}{3}$ του ίδιου παραλληλογράμμου.

β' τρόπος:



Χωρίζουμε το παραλληλόγραμμο όπως στο παραπάνω σχέδιο διαιρώντας τη μικρότερή του διάσταση σε 3 ίσα μέρη. Το κάθε ένα από αυτά αντιπροσωπεύει πάλι το

$\frac{1}{3}$ του παραλληλογράμμου και τα

τα δύο από αυτά, αν και το έχουμε χωρίσει με διαφορετικό τρόπο, τα

$\frac{2}{3}$ του παραλληλογράμμου .

3. **Ένα βενζινάδικο πούλησε μία ημέρα τα $\frac{9}{14}$ από τα αποθέματα του. Αν τα αποθέματά του ήταν 3500 l βενζίνης με τιμή πώλησης 200 δρχ. το λίτρο, πόσα χρήματα εισπράχτηκαν;**

Λύση

Τα $\frac{14}{14}$ των αποθεμάτων είναι 3.500 λίτρα.

Άρα το $\frac{1}{14}$ είναι 3.500 : 14 = 250 l.

Επομένως τα $\frac{9}{14}$ είναι 250 · 9 = 2.250 l.

Άρα εισπράχτηκαν 2.250 · 200 =
= 450.000 δρχ.

4. **Να βρείτε πόσα γραμμάρια είναι:**
α) το $\frac{1}{4}$ του κιλού β) τα $\frac{3}{4}$ του κιλού.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι 1 kg = 1000 g άρα $\frac{1}{4}$ του κιλού είναι 1000 : 4 = 250 g.

β) Επειδή $\frac{1}{4}$ του κιλού είναι 250 g

τότε τα $\frac{3}{4}$ είναι 3 · 250 = 750 g.

5. **Να βρείτε:**

α) Πόσα cm είναι τα $\frac{2}{5}$ του m,

β) πόσα mm είναι τα $\frac{3}{4}$ dm,

γ) πόσα cm^2 είναι τα $\frac{3}{5}$ dm^2,

δ) πόσα πρώτα λεπτά είναι τα $\frac{5}{6}$ της της ώρας;

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι 1 m = 100 cm

οπότε $\frac{1}{5}$ του 100 είναι 100 : 5 = 20 .

Άρα τα $\frac{2}{5}$ του 100 είναι 2 · 20 = 40.

Δηλαδή τα $\frac{2}{5}$ του m είναι 40 cm.

β) Έχουμε 1 dm = 100 mm το $\frac{1}{4}$ · του dm είναι 100 : 4 = 20 mm. Άρα τα $\frac{3}{4}$ του dm είναι 3 · 25 = 75 mm.

γ) Το 1 dm^2 = 100 cm^2. Το $\frac{1}{5}$ του dm^2 είναι 100 : 5 = 20 cm^2. Άρα τα $\frac{3}{5}$ του dm^2 είναι 3 · 250 = 60 cm^2.

δ) Η 1 ώρα = 60 min. Το $\frac{1}{6}$ της ώρας είναι 60 : 6 = 10 min. Άρα τα $\frac{5}{6}$ της ώρας είναι 5 · 10 = 50 min.

6. Μία παρέα αποφασίζει να κάνει ένα ταξίδι 5.400 km και να κινηθεί με πούλμαν και αεροπλάνο. Αν τα $\frac{3}{8}$ της διαδρομής γίνονται με πούλμαν πόσα χιλιόμετρα έχει να διανύσει με αεροπλάνο;

Λύση

Τα $\frac{8}{8}$ της διαδρομής είναι 5.400 km .

Άρα το $\frac{1}{8}$ είναι 5.400 : 8 = 675 km και

τα $\frac{5}{8}$ είναι 675 · 5 = 3.375 km.

Δηλαδή με αεροπλάνο διάνυσε 3.375 km.

7. Προσδιορίστε έναν αριθμό αν τα $\frac{4}{7}$ αυτού είναι ο αριθμός 48 .

Λύση

Αφού τα $\frac{4}{7}$ του αριθμού είναι 48 τότε το $\frac{1}{7}$ είναι 48 : 4 = 12. Επομένως τα $\frac{7}{7}$ δηλαδή ο αριθμός που ζητάμε είναι

12 ·7 = 84 .

8. Ένας ποδηλάτης διήνυσε 60 km που αναλογούν στα $\frac{5}{8}$ της συνολικής διαδρομής που πρέπει να διανύσει. Πόσα χιλιόμετρα είναι όλη η διαδρομή;

Λύση

Αφού τα $\frac{5}{8}$ της διαδρομής είναι 60 km·

τότε το $\frac{1}{8}$ είναι 60 : 5 = 12 km.

Άρα τα $\frac{8}{8}$ δηλαδή όλη η διαδρομή είναι

12 · 8 = 96 km.

B. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών ενός σχολείου είναι 720. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο;

Λύση

Αφού τα $\frac{3}{4}$ των μαθητών είναι 720 το

$\frac{1}{4}$ είναι ...

2. Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση ίση με το $\frac{1}{5}$ της αξίας των ειδών του. Αν για ένα παντελόνι πληρώσαμε 8.600 δρχ., α) να βρεθεί ποιο μέρος της αρχικής αξίας είναι οι 8.600 δρχ.; β) Πόσες δρχ. ήταν η έκπτωση; γ) Πόσο κόστιζε το παντελόνι πριν την έκπτωση;

Λύση

α) Αφού οι 8600 δρχ. είναι τα $\frac{4}{5}$ τότε το $\frac{1}{5}$ κοστίζει ...

β) Η έκπτωση δηλ. το $\frac{1}{5}$ είναι 8600 : 4...

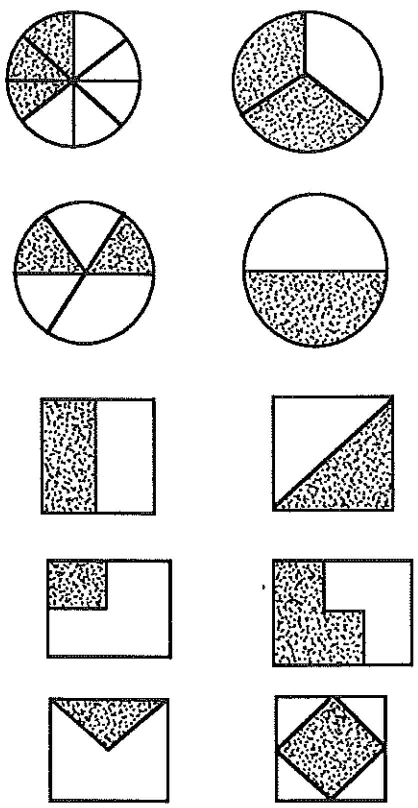
3. Να βρεθεί τι μέρος του μήνα είναι: α) η 1 μέρα, β) οι 7 μέρες, γ) οι 2 εβδομάδες.

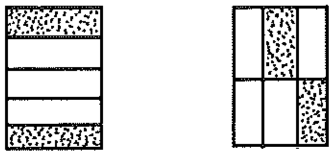
Λύση

Ο μήνας έχει 30 ημέρες άρα: α) η 1 μέρα είναι... β)... γ)...

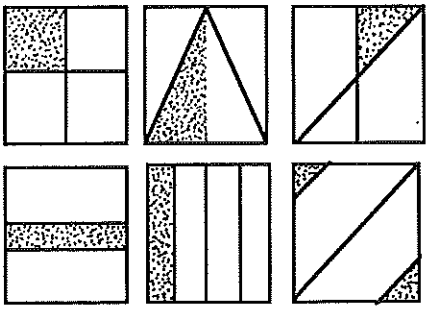
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δείξτε για τα επόμενα σχήματα ποιο κλάσμα εκφράζει το σκιασμένο μέρος:

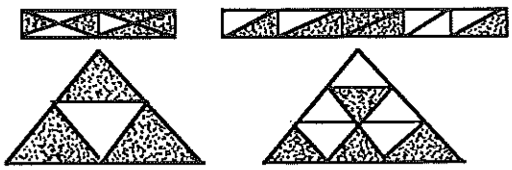




2. Ποιο από τα παρακάτω σκιασμένα μέρη παριστάνει το $\frac{1}{4}$ του κάθε σχήματος;



3. Ποιο κλάσμα παριστάνει το σκιασμένο μέρος;



4. Ο Λουκάς ξόδεψε τα $\frac{7}{8}$ των 1600 δρχ. για ένα βιβλίο, ένα ντοσιέ και ένα στυλό. Πόσο κοστίζει το βιβλίο, αν το ντοσιέ κοστίζει 200 δρχ. και το στυλό 150 δρχ.;

5. Ένας ταξιδιώτης πρέπει να διανύσει 360 km αλλά κάνει στάση στα $\frac{5}{8}$ της διαδρομής. Πόσα χιλιόμετρα έχει ήδη διανύσει; Αν θελήσει να χωρίσει την υπόλοιπη διαδρομή σε τρία ίσα μέρη, πόσα χιλιόμετρα πρέπει να κάνει κάθε φορά;

6. Μια νοικοκυρά αγοράζει από το μανάβη πορτοκάλια προς 260 δρχ. το κιλό και 12 κιλά αχλάδια προς 175 δρχ. το κιλό. Αν είχε μαζί της 12.000 δρχ. και για τα πορτοκάλια ξόδεψε τα $\frac{13}{24}$ του συνόλου των χρημάτων της, πόσα κιλά πορτοκάλια αγόρασε και πόσα χρήματα της περισσεψαν;

7. Για την κατασκευή πουκαμίσων χρησιμοποιούνται $\frac{7}{12}$ ενός ρολού υφάσματος 48 m. Πόσα πουκάμισα κατασκευάζονται από ένα ρολό, αν για καθένα από αυτά χρησιμοποιούνται 3,50 m ύφασμα;

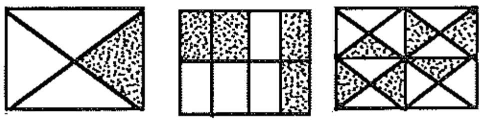
8. Ένας αυτοκινητιστής αγόρασε 42 l βενζίνη και σε ένα ταξίδι του ξόδεψε τα $\frac{5}{7}$. Πόσα l βενζίνη του απέμειναν στο ρεζερβουάρ;

9. Ένας δωρητής έδωσε σ' έναν έρανο 35.000 δρχ. Από αυτά τα χρήματα τα $\frac{7}{20}$ προορίζονται για μια φτωχή οικογένεια και τα υπόλοιπα για το ορφανοτροφείο. Πόσα χρήματα αναλογούν στο ορφανοτροφείο;

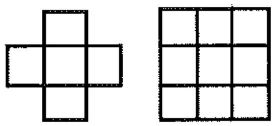
10. Σ' ένα σχολείο 256 μαθητών τα $\frac{23}{32}$ παρακολουθούν την πρώτη και τη δεύτερη τάξη. Πόσοι μαθητές παρακολουθούν την τρίτη τάξη;

11. Ένας μαθητής έλαβε για δώρο 15.000 δρχ. και ξόδεψε τα $\frac{7}{15}$. Πόσα χρήματα του έμειναν ;

12. Σε ποιο κλάσμα αντιστοιχεί η σκιασμένη πλευρά και σε ποιο η λευκή σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα;



13. Ποιο μέρος του σχήματος β παριστάνει το σχήμα α;



α β

α β

14. Να βρεθεί πόσα γραμμάρια είναι:

α) το $\frac{1}{5}$ του κιλού

β) τα $\frac{3}{5}$ του κιλού

γ) το $\frac{1}{4}$ του κιλού .

3.2 Το κλάσμα ως πηλίκο δύο φυσικών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Τι εκφράζει ένα κλάσμα;	**1.** Κάθε κλάσμα εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης που έχει διαιρετέο τον αριθμητή του κλάσματος και διαιρέτη τον παρονομαστή του κλάσματος, δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$, με $\beta \neq 0$
2. Ποια από τις τέσσερεις πράξεις υποδηλώνει ένα κλάσμα;	**2.** Ενα κλάσμα υποδηλώνει τη διαίρεση του αριθμητή διά του παρονομαστή. π.χ. $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ Επίσης πολλές φορές το πηλίκο δυο αριθμών το ονομάζουμε και **λόγο** των αριθμών αυτών. Π.χ. ο λόγος των αριθμών 3 και 4 είναι ο $\frac{3}{4}$ και διαβάζουμε **3 διά 4** ή **3 προς 4**.
3. Πότε ένα κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα;	**3.** Ένα κλάσμα είναι ίσο με τη μονάδα όταν οι όροι του είναι ίσοι. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$
4. Πότε ένα κλάσμα είναι ίσο με 0;	**4.** Ένα κλάσμα είναι ίσο με το 0 όταν ο αριθμητής του είναι 0. Δηλαδή: $\frac{0}{\alpha} = 0$
5. Πώς τρέπουμε ένα φυσικό αριθμό α σε κλάσμα με παρονομαστή ένα δοσμένο μη μηδενικό αριθμό β;	**5.** Για να τρέψουμε ένα φυσικό αριθμό α σε κλάσμα με παρονομαστή ένα δοσμένο αριθμό β που δεν είναι το 0 σχηματίζουμε το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο του α επί το β και παρονομαστή το β. Δηλαδή: $\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}$ γιατί $\alpha \cdot \beta : \beta = \alpha$

Άρα αν $\beta = 1$ τότε, κάθε φυσικός γράφεται σαν κλάσμα που έχει αριθμητή τον ίδιο τον αριθμό και παρονομαστή τη μονάδα.

$$\alpha = \frac{\alpha}{1}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν ως κλάσματα τα πηλίκα των διαιρέσεων:
α) 7 : 9 β) 23 : 51 γ) 3 : 10
δ) 1 : 3 ε) 51 : 700

Λύση

α) $7 : 9 = \frac{7}{9}$ β) $23 : 51 = \frac{23}{51}$ γ) $3 : 10 = \frac{3}{10}$ δ) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ ε) $51 : 700 = \frac{51}{700}$

2. Ποια διαίρεση παριστάνει το κάθε ένα από τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{7}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{23}{5}$ δ) $\frac{9}{23}$ ε) $\frac{371}{800}$

Λύση

α) $\frac{3}{7} = 3 : 7$ β) $\frac{1}{5} = 1 : 5$ γ) $\frac{23}{5} = 23 : 5$

δ) $\frac{9}{23} = 9 : 23$ ε) $\frac{371}{800} = 371 : 800$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x - 23}{9} = 0$ β) $\frac{x + 12}{19} = 1$

γ) $\frac{225 - y}{15} = 0$ δ) $\frac{230 - y}{150} = 1$

Λύση

α) Για να είναι το κλάσμα 0 πρέπει ο αριθμητής του να είναι 0 δηλαδή:
$x - 23 = 0$ επομένως $x = 23$.

β) Για να είναι το κλάσμα $\frac{x + 12}{19} = 1$

πρέπει ο αριθμητής να είναι ίσος με τον παρονομαστή του δηλ. $x + 12 = 19$, άρα $x = 7$.

γ) Ομοίως $\frac{225 - y}{15} = 0$ πρέπει

$225 - y = 0$ άρα $y = 225$.

δ) $\frac{230 - y}{150} = 1$ πρέπει $230 - y = 150$

άρα $y = 80$.

4. Ποιος φυσικός αριθμός είναι ίσος με καθένα από τα παρακάτω κλάσματα;

$\frac{6}{6}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{21}{7}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{12}{3}$

Λύση

$\frac{6}{6} = 6 : 6 = 1$ $\frac{15}{5} = 15 : 3 = 5$

$\frac{21}{7} = 21 : 7 = 3$ $\frac{18}{3} = 18 : 3 = 6$

$\frac{10}{2} = 10 : 2 = 5$ $\frac{12}{3} = 12 : 3 = 4$

5. Να βρείτε σε kg:

α) το $\frac{1}{3}$ των 5 Kg,

β) το $\frac{1}{100}$ των 120 kg,

γ) το $\frac{1}{4}$ των 8 kg.

Λύση

α) Το $\frac{1}{3}$ των 5 kg είναι $5 : 3 = \frac{5}{3}$ kg.

β) Το $\frac{1}{100}$ των 120 kg είναι $121 : 100 =$
$= \frac{121}{100}$ kg.

γ) Το $\frac{1}{4}$ των 8 kg είναι $8 : 4 = 2$ kg.

6. Το $\frac{1}{3}$ των μαθητών ενός σχολείου είναι 220. Πόσοι είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτών;

Λύση

Το $\frac{1}{3}$ των μαθητών είναι 220. Όλοι οι μαθητές είναι τα $\frac{3}{3}$. Οπότε το σύνολο των μαθητών θα είναι $3 \cdot 220 = 660$. Το $\frac{1}{4}$ αυτών είναι $660 : 4 = \frac{660}{4} = 165$ μαθητές. Άρα τα $\frac{3}{4}$ αυτών είναι $3 \cdot 165 = 495$ μαθητές.

7. Να γράψετε ως κλάσμα με παρονομαστη το 25 τους φυσικούς αριθμούς α) 8, β) 9, γ) 95, δ) 53.

Λύση

α) $8 = \frac{8 \cdot 25}{25} = \frac{200}{25}$

β) $9 = \frac{9 \cdot 25}{25} = \frac{225}{25}$

γ) $15 = \frac{15 \cdot 25}{25} = \frac{375}{25}$

δ) $53 = \frac{53 \cdot 25}{25} = \frac{1325}{25}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{3} = 0$ β) $\frac{x+23}{40} = 1$

γ) $\frac{3-x}{12} = 0$ δ) $\frac{4+x}{24} = 1$

Λύση

α) Επειδή το κλάσμα $\frac{x-2}{3}$ είναι ίσο με μηδέν πρέπει ο αριθμητής να είναι ...

β) Επειδή το κλάσμα $\frac{x+23}{40}$ είναι ίσο με τη μονάδα, πρέπει ο αριθμητής να είναι ...

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{13-x}{12} = 0$ β) $\frac{4+x}{27} = 1$

Λύση

α) Πρέπει ο αριθμητής να είναι $13 - x = ...$
β) Πρέπει $4 + x = ...$

3. Η απόσταση Αθήνας - Πάτρας είναι 220 km. Το Αίγιο απέχει από την Αθήνα 170 km. Τι κλάσμα της απόστασης Αθήνας - Πάτρας αντιπροσωπεύει η απόσταση αυτή;

Λύση

Πρέπει ο παρονομαστής να είναι 220 και ο αριθμητής ...

4. Να γράψετε ως κλάσμα με παρονομαστή το 8 τους αριθμούς:
α) 5, β) 23, γ)52, δ) 18.

Λύση

α) $5 = \frac{5 \cdot 8}{8} = ...$

β) ...

5. Ποια διαίρεση παριστάνει καθένα από τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{7}{9}$, β) $\frac{3}{25}$, γ) $\frac{45}{7}$, δ) $\frac{20}{5}$

Λύση

α) $\frac{7}{9} = 7:9$ β) $\frac{3}{25} = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γραφούν ως κλάσματα τα πηλίκα των διαιρέσεων:
α) 8 : 15, β) 9 : 53, γ) 3 : 4, δ) 5 : 29

2. Ποια διαίρεση παριστάνει καθένα από τα κλάσματα:

α) $\frac{2}{5}$, β) $\frac{3}{8}$, γ) $\frac{1}{7}$

δ) $\frac{49}{6}$, ε) $\frac{1500}{2370}$

3. Να γράψετε ως κλάσμα με παρονομαστή το 35 τους φυσικούς αριθμούς:
α) 7 β) 9 γ) 25 δ) 69

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-12}{5} = 0$ β) $\frac{x-17}{20} = 0$

γ) $\frac{23-y}{17} = 0$ δ) $\frac{y+23}{53} = 1$

ε) $\frac{\omega+20}{100} = 1$ στ) $\frac{15+\lambda}{30} = 1$

3.3 Ισοδύναμα κλάσματα

Θεωρία

Ερωτήσεις

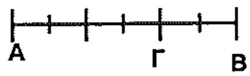
1. Ποια κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα;

Παρατήρηση: Όταν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε ισχύει:

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Απαντήσεις

1. **Ισοδύναμα ή ίσα** λέγονται τα κλάσματα που εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους.
Π.χ.



$ΑΓ = \frac{4}{6} ΑΒ$ ή $ΑΓ = \frac{2}{3} ΑΒ$

Δηλαδή τα $\frac{4}{6}$ και τα $\frac{2}{3}$ του ΑΒ αντιπροσωπεύουν το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Άρα είναι ισοδύναμα και γράφουμε $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε από ένα κλάσμα άλλα ισοδύναμά του;	**2.** Μπορούμε να δημιουργήσουμε ισοδύναμα κλάσματα από ένα δοσμένο μ' έναν από τους εξής τρόπους: **α)** Πολλαπλασιάζοντας με τον ίδιο φυσικό αριθμό και τους δυο όρους του κλάσματος. **β)** Διαιρώντας και τους δυο όρους του κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους.
3. Τι ονομάζεται απλοποίηση ενός κλάσματος;	**3. Απλοποίηση** ενός κλάσματος ονομάζεται η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε ένα άλλο κλάσμα ισοδύναμο αλλά με μικρότερους όρους. Η διαδικασία αυτή γίνεται διαιρώντας και τους δύο όρους του κλάσματος με κάποιο κοινό διαιρέτη τους (συνήθως το Μ.Κ.Δ τους).
4. Ποιο κλάσμα λέγεται ανάγωγο;	**4. Ανάγωγο** λέγεται το κλάσμα που οι όροι του είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (δηλ. που έχουν Μ.Κ.Δ = 1).

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\frac{34}{14}$ β) $\frac{32}{100}$

γ) $\frac{222}{333}$ δ) $\frac{144}{42}$

Λύση

α) $\frac{34}{14} = \frac{34:2}{14:2} = \frac{17}{7}$ (κλάσμα ανάγωγο)

β) $\frac{32}{100} = \frac{32:2}{100:2} = \frac{16}{50} = \frac{16:2}{50:2} = \frac{8}{25}$

ή $\frac{32}{100} = \frac{32:4}{100:4} = \frac{8}{25}$ (κλάσμα ανάγωγο),

, Μ.Κ.Δ (32, 100) = 4

γ) $\frac{222}{333} = \frac{222:111}{333:111} = \frac{2}{3}$

Μ.Κ.Δ (222, 333) = 111

δ) $\frac{144}{42} = \frac{144:6}{42:6} = \frac{24}{7}$

2. Το κλάσμα $\frac{2}{5}$ να μετατραπεί σε ισοδύναμο το οποίο να έχει παρανομαστή: α) 15, β) 25, γ) 35.

Λύση

α) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$ πολ/με αριθμητή και παρονομαστή με το 3 διότι 15 : 5 = 3

β) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{10}{25}$ (διότι 25 : 5 = 5)

γ) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$ (διότι 35 : 5 = 7)

δ) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{18}{45}$ (διότι 45 : 5 = 9)

ε) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 35}{5 \cdot 35} = \frac{70}{175}$ (διότι 175 : 5 = 35)

3. Το κάθε ένα από τα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{23}{24}$, $\frac{27}{30}$ να μετατραπεί σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 240.

Λύση

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 80}{3\cdot 80}=\frac{160}{240},\ \frac{4}{15}=\frac{4\cdot 16}{15\cdot 16}=\frac{64}{240},$$

$$\frac{7}{20}=\frac{7\cdot 12}{20\cdot 12}=\frac{84}{240},\ \frac{23}{24}=\frac{23\cdot 10}{24\cdot 10}=\frac{230}{240},$$

και $\frac{27}{30}=\frac{27\cdot 8}{30\cdot 8}=\frac{216}{240}$

4. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\frac{20α}{8α+14α}$ β) $\frac{2\cdot(3^3+3^2+3)}{3\cdot(2^3+2^2+2)}$

γ) $\frac{3\cdot 4^2+2\cdot 16}{(8-2^2)\cdot(9+3^3)}$

Λύση

α) $\frac{20α}{8α+14α}=\frac{20α}{(8+14)α}=\frac{20α}{22α}=$

$=\frac{20α:α}{22α:α}=\frac{20}{22}=\frac{20:2}{22:2}=\frac{10}{11}$

β) $\frac{2\cdot(3^3+3^2+3)}{3\cdot(2^3+2^2+2)}=\frac{2\cdot(27+9+3)}{3\cdot(8+4+2)}=$

$=\frac{2\cdot 33}{3\cdot 14}=\frac{66}{42}=\frac{66:6}{42:6}=\frac{11}{7}$

γ) $\frac{3\cdot 4^2+2\cdot 16}{(8-2^2)\cdot(9+3^3)}=\frac{3\cdot 16+2\cdot 16}{(8-4)\cdot(9+27)}=$

$=\frac{48+32}{4\cdot 36}=\frac{80}{144}=\frac{80:16}{144:16}=\frac{5}{9}$

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\frac{18\cdot 16\cdot 15}{9\cdot 8\cdot 30}$ β) $\frac{38\cdot 45\cdot 40}{25\cdot 35\cdot 80}$

Λύση

α) $\frac{18\cdot 16\cdot 15}{9\cdot 8\cdot 30}=\frac{(2\cdot 9)\cdot(2\cdot 8)\cdot(15)}{9\cdot 8\cdot(2\cdot 15)}=$

$=\frac{2\cdot 2\cdot 8\cdot 9\cdot 15}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 15}=2$

β) $\frac{38\cdot 45\cdot 40}{25\cdot 35\cdot 80}=\frac{38\cdot(5\cdot 9)\cdot 40}{25\cdot(5\cdot 7)\cdot(2\cdot 40)}=$

$=\frac{38\cdot 9\cdot(5\cdot 40)}{25\cdot 7\cdot 2\cdot(5\cdot 40)}=\frac{2\cdot 19\cdot 9}{25\cdot 2\cdot 7}=\frac{9\cdot 19}{7\cdot 25}$

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$ β) $\frac{5}{2}=\frac{15}{x}$ γ) $\frac{5x}{21}=\frac{10}{42}$

δ) $\frac{3x}{40}=\frac{135}{360}$ ε) $\frac{15}{x}=\frac{45}{60}$

στ) $\frac{3}{4}=\frac{x}{5}$

Λύση

α) $\frac{3}{4}=\frac{x}{8}$ ή $\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{x}{8}$ ή $\frac{6}{8}=\frac{x}{8}$

Παρατηρούμε ότι τα ίσα κλάσματα έχουν και ίσους παρονομαστές. Άρα θα έχουν ίσους και τους αριθμητές τους. Οπότε: $x=6$.

β) $\frac{5}{2}=\frac{15}{x}$ ή $\frac{3\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{15}{x}$ ή

$\frac{15}{6}=\frac{15}{x}$ οπότε $x=6$.

γ) $\frac{5x}{21}=\frac{10}{42}$ ή $\frac{5x}{21}=\frac{10:2}{42:2}$ ή

$\frac{5x}{21}=\frac{5}{21}$ οπότε $5x=5$ ή $x=1$.

δ) $\frac{3x}{40}=\frac{135}{360}$ ή $\frac{3x}{40}=\frac{135:9}{360:9}$ ή

$\frac{3x}{40}=\frac{15}{40}$ οπότε $3x=15$ ή $x=\frac{15}{3}=5$

ε) $\frac{15}{x}=\frac{45}{60}$ ή $\frac{15}{x}=\frac{45:3}{60:3}$ ή

$\frac{15}{x}=\frac{15}{20}$ οπότε $x=20$

στ) $\frac{3}{4}=\frac{x}{5}$ ή $\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{4\cdot x}{4\cdot 5}$ ή

$\frac{15}{20}=\frac{4x}{20}$ οπότε $4x=15$ ή $x=\frac{15}{4}$

Β Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Βρείτε 4 κλάσματα ισοδύναμα με καθένα από τα ακόλουθα κλάσματα:

$\frac{8}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{1}{5}$

Λύση

$\frac{8}{12} = \frac{8 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{16}{24}$ ή $\frac{8 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{24}{36}$

ή $\frac{8 : 2}{12 : 2} = \frac{4}{6}$ ή $\frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{8} = \ldots$

$\frac{12}{24} = \ldots$

$\frac{1}{5} = \ldots$

2. Απλοποιείστε καθένα από τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{14}{28}$ β) $\frac{56}{64}$ γ) $\frac{48}{80}$ δ) $\frac{45}{63}$ ε) $\frac{13}{26}$

Λύση

α) $\frac{14}{28} = \frac{14 : 14}{28 : 14} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{56}{64} = \ldots$

γ) $\frac{48}{80} = \ldots.$ δ) $\frac{45}{63} = \ldots$ ε) $\frac{13}{26} = \ldots.$

3. Μετατρέψτε σε ανάγωγα τα ακόλουθα κλάσματα:

α) $\frac{36}{48}$ β) $\frac{54}{72}$ γ) $\frac{16}{88}$ δ) $\frac{56}{60}$

Λύση

α) $\frac{36}{48} = \frac{36 : 12}{48 : 12} = \frac{3}{4}$

Μ.Κ.Δ (30, 48) = 12

β) $\frac{54}{72} = \ldots$ γ) $\frac{16}{88} = \ldots$ δ) $\frac{56}{60} = \ldots$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3x}{12} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{5x}{18} = \frac{80}{9}$

Λύση

α) $\frac{3x}{12} = \frac{1}{2}$ ή $\frac{3x}{12} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6}$ ή

$\frac{3x}{12} = \frac{6}{12}$ ή ...

β) $\frac{5x}{18} = \frac{80}{9}$ ή ...

5. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $A = \frac{2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3}{2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2}$

β) $B = \frac{8\alpha + 20\alpha}{3\alpha + 17\alpha}$

Λύση

α) $A = \frac{2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 12}{2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 8} = \ldots.$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Με μονάδα μέτρησης ελεύθερη σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 30 μονάδες. Κατασκευάστε κατόπιν τα ευθύγραμμα τμήματα που να είναι αντίστοιχα τα:

α) $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{12}{30}$

β) $\frac{20}{30}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{40}{60}$

του αρχικού.

Συγκρίνετε μεταξύ τους τα ευθύγραμμα τμήματα της α) ομάδας, της β) ομάδας και κατόπιν γράψτε τις παρατηρήσεις σας.

2. Βρείτε 5 κλάσματα ισοδύναμα αντίστοιχα με καθένα από τα ακόλουθα κλάσματα:

$\frac{8}{12}, \frac{6}{40}, \frac{7}{3}, 4, \frac{5}{9}, \frac{13}{7}$

3. Παρατηρείστε τα ακόλουθα ζεύγη ισοδυνάμων κλασμάτων:

$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}, \frac{5}{9} = \frac{10}{18}, \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

και σημειώστε με ποιο τρόπο το δεύτερο προήλθε από το πρώτο.

4. Απλοποιείστε καθένα από τα ακόλουθα κλάσματα:

α) $\frac{51}{60}, \frac{13}{26}, \frac{90}{72}, \frac{44}{66}, \frac{75}{90}$

β) $\frac{18}{54}, \frac{42}{36}, \frac{34}{51}, \frac{100}{120}$

γ) $\frac{105}{60}, \frac{160}{144}, \frac{96}{128}, \frac{240}{288}$

δ) $\frac{121}{132}, \frac{36}{48}, \frac{120}{216}, \frac{63}{147}$

5. Μετατρέψτε σε ανάγωγα τα ακόλουθα κλάσματα:

α) $\frac{210}{455}, \frac{336}{420}, \frac{378}{360}, \frac{588}{756}$

β) $\frac{1890}{1944}, \frac{882}{1323}, \frac{624}{2340}, \frac{864}{1800}$

γ) $\frac{7560}{7700}, \frac{896}{1232}, \frac{1053}{2106}, \frac{1856}{2784}$

6. Σ' ένα γυμνάσιο φοιτούν 240 μαθητές.

Απ' αυτούς τα $\frac{2}{5}$ παρακολουθούν μαθήματα της πρώτης και το $\frac{1}{3}$ μαθήματα της δευτέρας. Πόσοι μαθητές παρακολουθούν τα μαθήματα της κάθε μιας από τις τρεις τάξεις;

7. Ένα οικόπεδο 1.200 τετραγωνικά μέτρα χωρίζεται από 3 αδέλφια έτσι ώστε ο πρώτος να έχει στην κατοχή του το $\frac{1}{3}$ του οικοπέδου και ο δεύτερος τα $\frac{2}{5}$. Πόσα τετραγωνικά μέτρα αναλογούν στον καθένα τους;

8. Ένας έμπορος ξυλείας αγόρασε 480 τόννους ξύλα. Πούλησε πρώτα τα $\frac{5}{16}$ και μετά τα $\frac{2}{3}$ όσων του απέμειναν.

Πόσους τόνους ξυλείας πούλησε κάθε φορά; Αν πουλήσει τα υπόλοιπα ξύλα προς 275.000 τον τόνο, πόσα χρήματα θα εισπράξει από την πώληση;

9. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{3} = \frac{12}{9}$ β) $\frac{x}{15} = \frac{8}{3}$ γ) $\frac{8}{x} = \frac{4}{7}$

δ) $\frac{48}{x} = \frac{12}{5}$ ε) $\frac{3x}{20} = \frac{6}{4}$ στ) $\frac{5x}{3} = \frac{15}{9}$

10. Ομοίως οι εξισώσεις:

α) $\frac{3\psi}{10} = \frac{9}{5}$ β) $\frac{\omega}{19} = \frac{16}{38}$

γ) $\frac{5}{9} = \frac{\kappa}{45}$ δ) $\frac{4\lambda}{15} = \frac{8}{5}$

3. 4 Σύγκριση κλασμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πώς συγκρίνουμε δύο ομώνυμα κλάσματα;

1. Για να συγκρίνουμε δυο ομώνυμα κλάσματα αρκεί να συγκρίνουμε τους αριθμητές τους. Μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

παράδειγμα: $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$ γιατί $7 > 5$

2. Πώς συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα που έχουν ίσους αριθμητές;

2. Για να συγκρίνουμε δυο ετερώνυμα κλάσματα που έχουν ίσους αριθμητές αρκεί να συγκρίνουμε τους παρονομαστές τους. Μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρανομαστή.

παράδειγμα: $\frac{25}{70} > \frac{25}{80}$ γιατί $70 < 80$

3. Με ποιο τρόπο τρέπουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα;

3. Για να τρέψουμε δύο ή περισσότερα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα διαλέγουμε σαν κοινό παρονομαστή τους ένα από τα κοινά πολλαπλάσια των παρονομαστών τους, συνήθως το Ε.Κ.Π (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) και πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το πηλίκο της διαίρεσης του Ε.Κ.Π με τον παρονομαστή του.

π. χ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$

Το Ε.Κ.Π του 3 και του 4 είναι το 12,

οπότε $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$ (πολ/ζουμε τους όρους του κλάσματος με 12 : 3 = 4) και

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ (πολ/ζουμε τους όρους του κλάσματος με 12 : 4 = 3) ή πιο απλά

με καπελάκια: $\overset{4}{\frac{2}{3}}$, $\overset{3}{\frac{3}{4}} \rightarrow \frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$

4. Πώς συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές;

4. Για να συγκρίνουμε δυο ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα οπότε μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.

παράδειγμα: $\overset{3}{\frac{3}{4}}, \overset{4}{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{9}{12}, \frac{8}{12}$. Άρα $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Για την εύρεση του Ε.Κ.Π δύο ή περισσοτέρων αριθμών μπορούμε -εκτός απο τον τρόπο που μάθαμε στην παράγραφο 1.10- να χρησιμοποιήσουμε και τους παρακάτω 2 τρόπους.

α' τρόπος: Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και παίρνουμε το **γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη.** π.χ. Ε.Κ.Π (12, 24, 56)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 56 = 2^3 \cdot 7 \end{array}$$

Άρα Ε.Κ.Π $(12, 24, 56) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$

β' τρόπος: Παίρνουμε το μεγαλύτερο από αυτούς και τον διπλασιάζουμε, τριπλασιάζουμε κ.λπ. μέχρι να βρούμε κάποιον αριθμό που να διαιρείται από τους υπολοίπους: π.χ. από τους 12, 24, 56 ο μεγαλύτερος είναι το 56.
Άρα $56 \cdot 1 = 56$ δε διαιρείται με το 12.
$56 \cdot 2 = 112$ δε διαιρείται με το 12.
$56 \cdot 3 = 168$ διαιρείται και με το 12 και με το 24.
Άρα Ε.Κ.Π. (12, 24, 56) = 168.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{1}{2}$$

Λύση

Διαλέγουμε σαν κοινό παρονομαστή τον αριθμό $4 \cdot 7 \cdot 2 = 56$ οπότε πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος αντίστοιχα με τους αριθμούς:
$56 : 4 = 14$, $56 : 7 = 8$, $56 : 2 = 28$ και επομένως έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{42}{56}, \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{40}{56},$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 28}{2 \cdot 28} = \frac{28}{56}$$

Μπορούσαμε να διαλέξουμε σαν κοινό παρονομαστή και το Ε.Κ.Π (4, 7, 2) = = 28.

2. Να τρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ομώνυμα με κοινό παρανομαστή το 105.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{3}$$

Λύση

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 21}{5 \cdot 21} = \frac{42}{105}, \quad \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{45}{105},$$
$$\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 35}{3 \cdot 35} = \frac{140}{105}$$

3. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}, \frac{2}{10}$ β) $\frac{1}{3}, \frac{5}{7}$, γ) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}$

Λύση

α) $\overset{2}{\frac{3}{5}}, \overset{1}{\frac{2}{10}} \rightarrow \frac{6}{10}, \frac{2}{10}$

β) $\overset{7}{\frac{1}{3}}, \overset{3}{\frac{5}{7}} \rightarrow \frac{7}{21}, \frac{15}{21}$

γ) $\overset{1}{\frac{2}{9}}, \overset{3}{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{2}{9}, \frac{6}{9}$

4. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα με κοινό παρανομαστή το ΕΚΠ των παρανομαστών τους:

α) $\frac{5}{12}, \frac{23}{24}, \frac{7}{100}$

β) $\frac{3}{5}, \frac{8}{15}, \frac{7}{25}, \frac{9}{35}$

Λύση

α) Ε.Κ.Π (12, 24, 100) = 600

$\overset{50}{\frac{5}{12}}, \overset{25}{\frac{23}{24}}, \overset{6}{\frac{7}{100}} \rightarrow \frac{250}{600}, \frac{575}{600}, \frac{42}{600}$

β) ΕΚΠ (5, 15, 25, 35) = 525

$\overset{105}{\frac{3}{5}}, \overset{35}{\frac{8}{15}}, \overset{21}{\frac{7}{25}}, \overset{15}{\frac{9}{35}} \rightarrow$

$\frac{315}{525}, \frac{280}{525}, \frac{147}{525}, \frac{135}{525}$

5. Να συγκρίνετε τα κλάσματα:

α) $\frac{5}{7}, \frac{13}{7}$ β) $\frac{8}{23}, \frac{8}{17}$ γ) $\frac{13}{19}, \frac{12}{20}$

Λύση

α) $\frac{5}{7} < \frac{13}{7}$ γιατί $5 < 13$ (ομώνυμα)

β) $\frac{8}{23} < \frac{8}{17}$ γιατί $23 > 17$ (ίδιο αριθμητή)

γ) $\overset{20}{\frac{13}{19}}, \overset{19}{\frac{12}{20}} \rightarrow \frac{260}{380}, \frac{228}{380}$ και επειδή

$260 > 228$ έχουμε $\frac{13}{19} > \frac{12}{20}$

6. Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα με το 1:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{8}{9}$ δ) $\frac{5}{3}$ ε) $\frac{25}{30}$

στ) $\frac{70}{65}$ ζ) $\frac{805}{907}$

Λύση

α) $\frac{2}{5} < 1$ γιατί $\frac{2}{5} < \frac{5}{5} = 1$

β) $\frac{3}{4} < 1$ γιατί $\frac{3}{4} < \frac{4}{4} = 1$

γ) $\frac{8}{9} < 1$ γιατί $\frac{8}{9} < \frac{9}{9} = 1$

δ) $\frac{5}{3} > 1$ γιατί $\frac{5}{3} > \frac{3}{3} = 1$

ε) $\frac{25}{30} < 1$ γιατί $\frac{25}{30} < \frac{30}{30} = 1$

στ) $\frac{70}{65} > 1$ γιατί $\frac{70}{65} > \frac{65}{65} = 1$

ζ) $\frac{805}{907} < 1$ γιατί $\frac{805}{907} < \frac{907}{907} = 1$

7. Να βρείτε δύο κλάσματα μεγαλύτερα από τα:

α) $\frac{2}{7}$ β) $\frac{3}{4}$ γ) $\frac{5}{9}$ δ) $\frac{36}{25}$ ε) $\frac{72}{89}$

Λύση

α) $\frac{3}{7} > \frac{2}{7}$ γιατί $3 > 2$, $\frac{2}{6} > \frac{2}{7}$ γιατί $6 < 7$

β) $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$ γιατί $5 > 3$, $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$ γιατί $2 < 4$

γ) $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$ γιατί $7 > 5$, $\frac{5}{8} > \frac{5}{9}$ γιατί $8 < 9$

δ) $\frac{37}{25} > \frac{36}{25}$ γιατί $37 > 36$, $\frac{36}{24} > \frac{36}{25}$

γιατί $24 < 25$

ε) $\frac{73}{89} > \frac{72}{89}$ γιατί $73 > 72$, $\frac{72}{85} > \frac{72}{89}$

γιατί $85 < 89$

8. Να βρείτε δύο κλάσματα μικρότερα από τα:

α) $\frac{1}{5}$ **β)** $\frac{3}{4}$ **γ)** $\frac{7}{8}$

Λύση

α) $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ και $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$

β) $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ και $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$

γ) $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$ και $\frac{7}{9} < \frac{7}{8}$

9. Να βρεθεί ένα κλάσμα που να είναι

α) μεγαλύτερο από το $\frac{1}{7}$ και μικρότερο από το $\frac{3}{7}$ β) μεγαλύτερο από το $\frac{1}{3}$ και και μικρότερο από το $\frac{2}{3}$ γ) μεγαλύτερο από το $\frac{3}{5}$ και μικρότερο από το $\frac{4}{5}$ δ) μεγαλύτερο από το $\frac{1}{4}$ και μικρότερο από το $\frac{2}{3}$.

Λύση

α) Το $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ και $\frac{2}{7} < \frac{3}{7}$, άρα ένα απ' αυτά είναι το $\frac{2}{7}$.

β) Πολλαπλασιάζουμε τους όρους των κλασμάτων $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$ με κάποιο αριθμό π.χ. με το 3 οπότε βρίσκουμε τα ισοδύναμα με αυτά κλάσματα $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$ και $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$.

Επομένως το κλάσμα $\frac{5}{9} > \frac{3}{9}$ και $\frac{5}{9} < \frac{6}{9}$, άρα θα είναι $\frac{5}{9} > \frac{1}{3}$ και $\frac{5}{9} < \frac{2}{3}$. Άρα ένα από αυτά είναι το $\frac{5}{9}$.

γ) Πολλαπλασιάζουμε τους όρους των κλασμάτων με το 3 και παίρνουμε τα ισοδύναμα κλάσματα $\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$ και

και $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$. Άρα το $\frac{10}{15} > \frac{3}{5}$ και $\frac{10}{15} < \frac{4}{5}$. Επομένως ένα από τα κλάσματα αυτά είναι το $\frac{10}{15}$ ή $\frac{2}{3}$.

δ) Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα $\overset{3}{\frac{1}{4}}$, $\overset{4}{\frac{2}{3}}$

$\rightarrow \frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$. Άρα το $\frac{5}{12} > \frac{3}{12}$ και $\frac{5}{12} < \frac{8}{12}$ και αντίστοιχα $\frac{5}{12} > \frac{1}{4}$ και $\frac{5}{12} < \frac{2}{3}$. Άρα ένα από αυτά τα κλάσματα είναι το $\frac{5}{12}$.

10. Να βρείτε ποια είναι η σειρά των παρακάτω κλασμάτων, από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο:

α) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{17}{3}, \frac{18}{3}$

β) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{8}, \frac{3}{17}, \frac{3}{18}$

Λύση

α) $\frac{18}{3} > \frac{17}{3} > \frac{8}{3} > \frac{7}{3} > \frac{5}{3} > \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$

β) $\frac{3}{1} > \frac{3}{2} > \frac{3}{5} > \frac{3}{7} > \frac{3}{8} > \frac{3}{17} > \frac{3}{18}$

11. Να γραφούν με τη σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

β) $\frac{3}{12}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{13}{18}$

Λύση

α) Τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα:

$$\overset{15}{\frac{3}{4}}, \overset{30}{\frac{1}{2}}, \overset{12}{\frac{3}{5}}, \overset{20}{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{45}{60}, \frac{30}{60}, \frac{36}{60}, \frac{40}{60}$$

Συγκρίνοντας τώρα τους αριθμητές έχουμε:

$\frac{30}{60} < \frac{36}{60} < \frac{40}{60} < \frac{45}{60}$ άρα

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

β) Ομοίως έχουμε:

$$\overset{3}{\frac{3}{12}}, \overset{4}{\frac{7}{3}}, \overset{6}{\frac{5}{6}}, \overset{2}{\frac{13}{18}} \rightarrow \frac{9}{36}, \frac{28}{36}, \frac{30}{36}, \frac{26}{36}.$$

Άρα: $\frac{3}{12} < \frac{13}{18} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$

12. Να συγκρίνετε τα κλάσματα:

α) $\frac{5}{7}$ και $\frac{5+1}{7+1}$ β) $\frac{7}{3}$ και $\frac{7+1}{3+1}$

Λύση

α) Τρέπουμε τα $\frac{5}{7}$ και $\frac{5+1}{7+1} = \frac{6}{8}$ σε ομώνυμα και έχουμε $\overset{8}{\frac{5}{7}}, \overset{7}{\frac{6}{8}} \rightarrow \frac{40}{56}, \frac{42}{56}$

Άρα $\frac{5}{7} < \frac{6}{8}$ ή $\frac{5}{7} < \frac{5+1}{7+1}$.

β) Ομοίως για τα $\frac{7}{3}$ και $\frac{7+1}{3+1} = \frac{8}{4}$,

έχουμε: $\overset{4}{\frac{7}{3}}, \overset{3}{\frac{8}{4}} \rightarrow \frac{28}{12}, \frac{24}{12}$. Άρα

$\frac{7}{3} > \frac{7+1}{3+1}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν στους όρους ενός κλάσματος προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό δεν προκύπτει κλάσμα ίσο με το αρχικό.

13. Ένας εργάτης τελειώνει τη μια μέρα τα $\frac{3}{7}$ ενός έργου και ένας άλλος τα $\frac{4}{9}$ του ίδιου έργου. Ποιος εργάτης δούλεψε λιγότερο;

Λύση

Τρέπουμε τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{4}{9}$ σε ομώνυμα. Έχουμε: $\overset{9}{\frac{3}{7}}, \overset{7}{\frac{4}{9}} \rightarrow \frac{27}{63}, \frac{28}{63}$

Άρα ο πρώτος δούλεψε λιγότερο από το δεύτερο.

Β. Μισο..λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ β) $\frac{8}{9}, \frac{2}{18}$ γ) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

δ) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ε) $\frac{5}{7}, \frac{8}{21}$ στ) $\frac{3}{5}, \frac{18}{19}$

Λύση

α) $\overset{4}{\frac{3}{5}}, \overset{5}{\frac{7}{4}} \rightarrow \frac{12}{20}, \frac{35}{20}$ β) $\overset{2}{\frac{8}{9}}, \overset{1}{\frac{2}{18}} \rightarrow \ldots$

γ) $\overset{4}{\frac{2}{3}}, \overset{3}{\frac{3}{4}} \rightarrow \ldots$ δ) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rightarrow \ldots$

ε) $\frac{5}{7}, \frac{8}{21} \rightarrow \ldots$ στ) $\frac{3}{5}, \frac{18}{19} \rightarrow \ldots$

2. Να κάνετε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα με το μικρότερο δυνατό παρονομαστή:

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$ β) $\frac{3}{25}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{5}$

Λύση

α) ΕΚΠ (4, 16, 8) = 16, άρα:

$\overset{4)}{\frac{3}{4}}, \overset{1)}{\frac{5}{16}}, \overset{2)}{\frac{3}{8}} \rightarrow \ldots$

β) ΕΚΠ (25, 15, 5) = ...

$\frac{3}{25}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5} \rightarrow \ldots$

3. Να κάνετε ομώνυμα με κοινό παρονομαστή το 36 τα παρακάτω κλάσματα:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{9}, \frac{7}{12}$

Λύση

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 18}{2 \cdot 18} = \frac{18}{36}$ διότι $36 : 2 = 18$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κάνετε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα με κοινό παρονομαστή το α) 35 και β) το 48 αντίστοιχα.

α) $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{35}$ β) $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{13}{24}, \frac{3}{8}$

2. Να τρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα:

α) $\frac{2}{7}, \frac{7}{8}$ β) $\frac{3}{9}, \frac{8}{11}$ γ) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$

δ) $\frac{3}{18}, \frac{18}{24}$ ε) $\frac{7}{13}, \frac{8}{15}$ στ) $\frac{13}{30}, \frac{7}{15}$

3. Να τρέψετε σε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα αφού προηγουμένως βρείτε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών τους, το οποίο και θα χρησιμοποιήσετε σαν κοινό παρονομαστή:

α) $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{7}{18}, \frac{3}{36}$

β) $\frac{11}{20}, \frac{3}{25}, \frac{13}{15}, \frac{7}{50}$

γ) $\frac{3}{84}, \frac{18}{40}, \frac{9}{20}, \frac{7}{42}$

δ) $\frac{8}{27}, \frac{13}{81}, \frac{23}{18}, \frac{7}{36}$

ε) $\frac{18}{96}, \frac{17}{56}, \frac{18}{28}, \frac{15}{68}$

4. Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο >, <, = στη θέση του αστερίσκου * .

α) $\frac{3}{4} * \frac{7}{4}$ β) $\frac{5}{6} * \frac{5}{7}$

γ) $\frac{9}{8} * \frac{10}{8}$ δ) $\frac{1}{3} * \frac{2}{7}$

ε) $\frac{3}{4} * \frac{6}{8}$ στ) $\frac{4}{9} * \frac{3}{7}$

ζ) $\frac{5}{8} * \frac{8}{15}$ η) $\frac{5}{15} * \frac{15}{45}$

5. Ομοίως στα κλάσματα:

α) $\frac{5}{18} * \frac{7}{12}$ β) $\frac{9}{10} * \frac{8}{9}$ γ) $\frac{13}{15} * \frac{11}{12}$

δ) $\frac{37}{75} * \frac{29}{45}$

6. Τοποθετήστε κατάλληλο κλάσμα στις θέσεις των αστερίσκων:

α) $\frac{1}{2} < * < \frac{3}{2}$ β) $\frac{7}{8} > * > \frac{3}{8}$

γ) $\frac{11}{24} < * < \frac{11}{9}$ δ) $\frac{2}{5} < * < \frac{7}{10}$

ε) $\frac{7}{9} > * > \frac{3}{5}$

7. Τοποθετήστε με τη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τα παρακάτω κλάσματα:

$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{13}{24}, \frac{1}{2}$

8. Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{17}{32}, \frac{25}{48}$ β) $\frac{31}{36}, \frac{37}{40}$

γ) $\frac{13}{64}, \frac{7}{20}$ δ) $\frac{3}{25}, \frac{7}{45}$

ε) $\frac{10}{15}, \frac{13}{12}$ στ) $\frac{9}{32}, \frac{10}{34}$

9. Να συγκρίνετε με τη μονάδα καθένα από τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{3}$, β) $\frac{3}{4}$, γ) $\frac{7}{6}$, δ) $\frac{5}{3}$,

ε) $\frac{15}{17}$, στ) $\frac{25}{26}$, ζ) $\frac{35}{24}$, η) $\frac{135}{78}$

10. Να βάλετε κατάλληλο κλάσμα στα κενά των ανισοτικών σχέσεων:

α) $\frac{5}{16} < \dots < \frac{15}{16}$ β) $\frac{9}{15} < \dots < \frac{14}{15}$

γ) $\frac{9}{15} > \dots > \frac{9}{25}$ δ) $\frac{3}{7} < \dots < \frac{3}{2}$

ε) $\frac{2}{3} > \dots > \frac{7}{18}$ στ) $\frac{9}{20} < \dots < \frac{12}{25}$

ζ) $\frac{8}{9} > \dots > \frac{17}{36}$

11. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω κλάσματα με τη σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο:

α) $\frac{14}{25}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{9}{20}, \frac{13}{40}, \frac{1}{4}$

β) $\frac{2}{7}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{10}{21}, \frac{9}{14}, \frac{13}{42}, \frac{1}{28}$

12. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω κλάσματα με τη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο:

$\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{5}{10}, \frac{8}{9}, \frac{17}{30}, \frac{11}{18}, \frac{7}{8}$

13. Αγόρασαν τρία αδέλφια ένα αγρόκτημα και πήρε ο α' τα $\frac{5}{12}$ ο β' το $\frac{1}{3}$ και ο γ' $\frac{18}{72}$ αυτού. Ποιος πήρε το μεγαλύτερο μέρος του αγροκτήματος;

3. 5 Πρόσθεση κλασμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα;

Απαντήσεις

1. Για να προσθέσουμε ομώνυμα κλάσματα σχηματίζουμε το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο.

Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$

π.χ. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$

2. Πώς προσθέτουμε ετερώνυμα κλάσματα;

2. Για να προσθέσουμε ετερώνυμα κλάσματα τα κάνουμε πρώτα ομώνυμα και ύστερα προσθέτουμε τους αριθμητές τους με παρονομαστή το Ε.Κ.Π. τους.

π.χ. $\overset{7}{\frac{2}{3}} + \overset{3}{\frac{5}{7}} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{29}{21}$

3. Τι ονομάζουμε μεικτό αριθμό;

3. Μεικτός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που αποτελείται από το άθροισμα ενός φυσικού **α** και ενός κλάσματος $\frac{\beta}{\gamma}$ (συμβολίζουμε: $\alpha\frac{\beta}{\gamma}$). Ισχύει ότι:

$$\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \alpha + \frac{\beta}{\gamma}$$

π.χ. $6\frac{3}{4} = 6 + \frac{3}{4}$ (διαβάζεται έξι και τρία τέταρτα).

<u>Παρατήρηση:</u> Ο μεικτός $\alpha\frac{\beta}{\gamma}$ μετατρέπεται σε κλάσμα ως εξής: $\alpha\frac{\beta}{\gamma} = \alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma}$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $\frac{2}{9} + \frac{3}{9}$ **β)** $\frac{5}{7} + \frac{3}{7}$

Λύση

Επειδή τα κλάσματα είναι ομώνυμα έχουμε:

α) $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$

β) $\frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5+3}{7} = \frac{8}{7}$

2. Να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $\frac{7}{9} + \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{3}{15} + \frac{4}{5}$ γ) $\frac{8}{20} + \frac{9}{11}$ δ) $\frac{3}{7} + \frac{5}{14}$

Λύση

Επειδή τα κλάσματα είναι ετερώνυμα τα τρέπουμε σε ομώνυμα και μετά προσθέτουμε τα αντίστοιχα ομώνυμα.

α) $\frac{7}{9} + \frac{3}{5} = \overset{5}{\frac{7}{9}} + \overset{9}{\frac{3}{5}} = \frac{35}{45} + \frac{27}{45} =$

$= \frac{35+27}{45} = \frac{62}{45}$

β) $\frac{3}{15} + \frac{4}{5} = \overset{1}{\frac{3}{15}} + \overset{3}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{15} + \frac{12}{15} =$

$= \frac{3+12}{15} = \frac{15}{15} = 1$

γ) $\frac{8}{20} + \frac{9}{11} = \overset{11}{\frac{8}{20}} + \overset{20}{\frac{9}{11}} =$

$= \frac{88}{220} + \frac{180}{220} = \frac{88 + 180}{220} = \frac{268}{220} =$

$= \frac{268 : 4}{220 : 4} = \frac{67}{55}$

δ) $\frac{3}{7} + \frac{5}{14} = \overset{2}{\frac{3}{7}} + \overset{1}{\frac{5}{14}} = \frac{6}{14} + \frac{5}{14} =$

$= \frac{6 + 5}{14} = \frac{11}{14}$

3. Να γράψετε με μεικτούς αριθμούς τα αθροίσματα:

α) $7 + \frac{2}{5}$ β) $3 + \frac{8}{9}$ γ) $\frac{5}{129} + 53$

δ) $\frac{1}{2} + 8{,}3$

Λύση

α) $7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$ β) $3 + \frac{8}{9} = 3\frac{8}{9}$

γ) $\frac{5}{129} + 53 = 53\frac{5}{129}$

δ) $\frac{1}{2} + 8{,}3 = \overset{5}{\frac{1}{2}} + 8 + \overset{1}{\frac{3}{10}} =$

$= 8 + \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = 8 + \frac{8}{10} = 8 + \frac{4}{5} = 8\frac{4}{5}$

4. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ β) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$

γ) $\frac{7}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

Λύση

α) $\overset{6}{\frac{1}{2}} + \overset{4}{\frac{2}{3}} + \overset{3}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12}$

$= \frac{6 + 8 + 3}{12} = \frac{17}{12}$

β) $\overset{3}{\frac{3}{4}} + \overset{2}{\frac{1}{6}} + \overset{1}{\frac{5}{12}} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} + \frac{5}{12}$

$= \frac{9 + 2 + 5}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

γ) $\overset{2}{\frac{7}{9}} + \overset{6}{\frac{1}{3}} + \overset{3}{\frac{1}{6}} = \frac{14}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18}$

$= \frac{14 + 6 + 3}{18} = \frac{23}{18}$

5. Να βρεθούν τα αθροίσματα:

α) $2 + \frac{25}{30}$ β) $1 + \frac{9}{12}$

γ) $1 + \frac{3}{8} + \frac{7}{6}$ δ) $\frac{5}{12} + 2\frac{7}{16}$

Λύση

α) $\overset{30}{\frac{2}{1}} + \overset{1}{\frac{25}{30}} = \frac{60}{30} + \frac{25}{30} = \frac{85}{30} =$

$= \frac{17}{6}$

β) $\overset{12}{\frac{1}{1}} + \overset{1}{\frac{9}{12}} = \frac{12}{12} + \frac{9}{12} = \frac{21}{12} =$

$= \frac{7}{4}$

γ) $\overset{24}{\frac{1}{1}} + \overset{3}{\frac{3}{8}} + \overset{4}{\frac{7}{6}} = \frac{24}{24} + \frac{9}{24} + \frac{28}{24} =$

$= \frac{24 + 9 + 28}{24} = \frac{61}{24}$

δ) $\overset{4}{\frac{5}{12}} + \overset{48}{\frac{2}{1}} + \overset{3}{\frac{7}{16}} = \frac{20}{48} + \frac{96}{48} + \frac{21}{48}$

$= \frac{20 + 96 + 21}{48} = \frac{137}{48}$

6. Να βρεθούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(2\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) + (\frac{2}{3} + \frac{3}{5}) + (\frac{8}{3} + \frac{7}{5})$

β) $(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5}) + (3\frac{1}{3} + 1 + 2\frac{4}{5})$

Λύση

α) $(2\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) + (\frac{2}{3} + \frac{3}{5}) + (\frac{8}{3} + \frac{7}{5}) =$

$= (\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{3}) + (\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{7}{5}) =$

$= \frac{7+2+8}{3} + \frac{2+3+7}{5} =$

$= \overset{5}{\frac{17}{3}} + \overset{3}{\frac{12}{5}} = \frac{85}{15} + \frac{36}{15} = \frac{121}{15}$

β) $(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5}) + (3\frac{1}{3} + 1 + 2\frac{4}{5}) =$

$= (3 + 2 + 3 + 1 + 2) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} +$

$+ \frac{1}{5} + \frac{4}{5}) = 11 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{5} =$

$= 11 + 1 + \overset{3}{\frac{1}{4}} + \overset{4}{\frac{1}{3}} = 12 + \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$

$= 12 + \frac{7}{12} = 12\frac{7}{12}$

7. Να γράψετε με τη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τις τιμές των παρακάτω αθροισμάτων:

α) $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$, β) $\frac{4}{7} + \frac{5}{2}$, γ) $\frac{4}{7} + \frac{5}{4}$, δ) $\frac{1}{6} + \frac{4}{21}$

Λύση

α) $\overset{7}{\frac{3}{4}} + \overset{4}{\frac{5}{7}} = \frac{21+20}{28} = \frac{41}{28}$

β) $\overset{2}{\frac{4}{7}} + \overset{7}{\frac{5}{2}} = \frac{8+35}{14} = \frac{43}{14}$

γ) $\overset{4}{\frac{4}{7}} + \overset{7}{\frac{5}{4}} = \frac{16+35}{28} = \frac{51}{28}$

δ) $\overset{7}{\frac{1}{6}} + \overset{2}{\frac{4}{21}} = \frac{7+8}{42} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$

Τα κλάσματα που βρήκαμε τα κάνουμε ομώνυμα.

$\frac{41}{28}$, $\frac{86}{28}$, $\frac{51}{28}$, $\frac{10}{28}$

άρα η σειρά τους είναι β) , γ) , α) , δ)

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\frac{1}{17} + \frac{4}{17}$ β) $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$ γ) $\frac{8}{9} + \frac{7}{9}$

Λύση

Επειδή τα κλάσματα είναι ομώνυμα έχουμε:

α) $\frac{1}{17} + \frac{4}{17} = \frac{5}{17}$

β) $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$ ... γ) $\frac{8}{9} + \frac{7}{9}$ ...

2. Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $\frac{7}{12} + \frac{1}{15}$ β) $\frac{1}{36} + \frac{1}{24}$

γ) $\frac{4}{45} + \frac{7}{18}$ δ) $\frac{2}{21} + \frac{1}{28}$

ε) $\frac{5}{64} + \frac{3}{10}$ στ) $\frac{17}{72} + \frac{3}{16}$

Λύση

α) $\overset{5}{\frac{7}{12}} + \overset{4}{\frac{1}{15}} = \frac{35+4}{60} = ...$

β) $\overset{2}{\frac{1}{36}} + \overset{3}{\frac{1}{24}} = ...$ γ) $\frac{4}{45} + \frac{7}{18} = ...$

δ) $\frac{2}{21} + \frac{1}{28} = ...$ ε) $\frac{5}{64} + \frac{3}{10} = ...$

στ) $\frac{17}{72} + \frac{3}{16} = ...$

3. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\frac{4}{15} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10}$ β) $\frac{2}{9} + \frac{1}{15} + \frac{5}{18}$

γ) $\frac{11}{24} + \frac{5}{18} + \frac{3}{8}$ δ) $\frac{1}{14} + \frac{3}{35} + \frac{1}{10}$

ε) $3 + \frac{2}{7} + \frac{8}{9}$ στ) $\frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{7}{6}$

Λύση

α) ${}^{2}\frac{4}{15} + {}^{6}\frac{1}{5} + {}^{3}\frac{7}{10} = \frac{8 + 6 + 21}{30} = \ldots$

β) ${}^{10}\frac{2}{9} + {}^{6}\frac{1}{15} + {}^{5}\frac{5}{18} = \ldots$

γ) $\frac{11}{24} + \frac{5}{18} + \frac{3}{8} = \ldots$

δ) $\frac{1}{14} + \frac{3}{35} + \frac{1}{10} = \ldots$

ε) $3 + \frac{2}{7} + \frac{8}{9} = \ldots$

στ) $\frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{7}{6} = \ldots$

4. Να γράψετε σαν μεικτούς τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $3 + \frac{2}{5}$ β) $6 + \frac{1}{3}$

γ) $\frac{1}{4} + 5$ δ) $\frac{3}{4} + 7$

Λύση

α) $3 + \frac{2}{5} = 3\,\frac{2}{5}$ β) $6 + \frac{1}{3} = \ldots$

γ) $\frac{1}{4} + 5 = \ldots$ δ) $\frac{3}{4} + 7 = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{1}{24}$

β) $\frac{19}{36} + \frac{17}{36} + \frac{5}{36}$

γ) $\frac{4}{48} + \frac{11}{48} + \frac{1}{48}$

δ) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{7}{10}$

ε) $\frac{13}{40} + \frac{23}{40} + \frac{21}{40} + \frac{19}{40}$

2. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\frac{7}{12} + \frac{2}{15}$ β) $\frac{2}{21} + \frac{1}{28}$

γ) $\frac{5}{64} + \frac{3}{10}$ δ) $\frac{13}{72} + \frac{3}{16}$

ε) $3 + \frac{1}{3}$ στ) $5 + \frac{1}{5}$

ζ) $1 + \frac{5}{7}$ η) $\frac{1}{4} + 2$

3. Αφού κάνετε τις δυνατές απλοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $\frac{3}{8} + \frac{6}{12}$ β) $\frac{4}{8} + \frac{16}{34}$

γ) $\frac{8}{18} + \frac{4}{24}$ δ) $\frac{18}{81} + \frac{5}{60}$

ε) $\frac{21}{35} + \frac{8}{40}$ στ) $\frac{12}{42} + \frac{2}{98}$

ζ) $\frac{40}{24} + \frac{15}{30}$ η) $2 + \frac{25}{50}$

4. Ποια από τα παρακάτω αθροίσματα έχουν την ίδια τιμή;

α) $\frac{9}{10} + \frac{9}{15}$ β) $\frac{3}{5} + \frac{1}{15}$

γ) $\frac{8}{7} + \frac{5}{14}$ δ) $\frac{1}{2} + \frac{7}{5}$

ε) $\frac{15}{11} + \frac{3}{22}$ στ) $\frac{4}{13} + \frac{14}{39}$

5. Να γράψετε τα παρακάτω αθροίσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

α) $\frac{5}{12} + \frac{3}{20}$, β) $\frac{2}{5} + \frac{4}{3}$,

γ) $\frac{5}{4} + \frac{1}{12}$, δ) $\frac{1}{10} + \frac{1}{5}$

6. Να γίνουν οι δυνατές απλοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα και μετά να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{8}{20} + 1 + \frac{5}{8}$ β) $2 + \frac{3}{21} + \frac{7}{56}$

γ) $\frac{5}{40} + \frac{3}{36} + \frac{3}{48}$ δ) $\frac{1}{25} + \frac{31}{50} + \frac{4}{100}$ ε) $\frac{21}{56} + \frac{16}{36} + \frac{25}{60}$

στ) $\frac{27}{66} + \frac{18}{99} + \frac{40}{165}$ ζ) $\frac{44}{55} + \frac{9}{24} + \frac{21}{60}$ η) $\frac{40}{64} + \frac{11}{66} + \frac{49}{84}$

θ) $\frac{1}{59} + \frac{4}{24} + \frac{3}{27}$ ι) $\frac{5}{15} + \frac{4}{12} + \frac{7}{21}$

7. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $A = \left(2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{7}{2}\right)$

β) $B = \left(\frac{3}{12} + \frac{8}{9} + \frac{6}{15}\right) + \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{12} + \frac{8}{18}\right)$

γ) $A + B$

3. 6 Αφαίρεση κλασμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πώς αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα;	1. Για να αφαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα σχηματίζουμε το κλάσμα που έχει αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$ Παράδειγμα: $\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7}$
2. Τι κάνουμε για να αφαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα;	2. Για να αφαιρέσουμε ετερώνυμα κλάσματα τα τρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια κάνουμε αφαίρεση ομωνύμων. Π.χ. $\overset{5)}{\frac{3}{4}} - \overset{4)}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}$ β) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$

Λύση

Τα κλάσματα είναι ομώνυμα επομένως έχουμε:

α) $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

β) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7-1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$ β) $\frac{3}{8} - \frac{1}{3}$

γ) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ δ) $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

Λύση

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα γι' αυτό τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

α) $\overset{2}{\frac{4}{5}} - \overset{5}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10}$

β) $\overset{3}{\frac{3}{8}} - \overset{8}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{24} - \frac{8}{24} = \frac{9-8}{24} = \frac{1}{24}$

γ) $\overset{5}{\frac{1}{4}} - \overset{4}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}$

δ) $\overset{3}{\frac{2}{5}} - \overset{5}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$

3. Αφού κάνετε τις απλοποιήσεις στα κλάσματα να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{5}{10} - \frac{5}{15}$ β) $\frac{4}{12} - \frac{6}{24}$

γ) $\frac{13}{8} - \frac{15}{20}$ δ) $\frac{21}{12} - \frac{35}{30}$

ε) $1 - \frac{12}{16}$ στ) $\frac{56}{40} - 1$

Λύση

α) $\frac{5}{10} - \frac{5}{15} = \overset{3}{\frac{1}{2}} - \overset{2}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} =$

$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

β) $\frac{4}{12} - \frac{6}{24} = \overset{4}{\frac{1}{3}} - \overset{3}{\frac{1}{4}} = \frac{4-3}{12} =$

$= \frac{1}{12}$

γ) $\frac{13}{8} - \frac{15}{20} = \overset{1}{\frac{13}{8}} - \overset{2}{\frac{3}{4}} = \frac{13}{8} - \frac{6}{8} =$

$= \frac{13-6}{8} = \frac{7}{8}$

δ) $\frac{21}{12} - \frac{35}{30} = \overset{6}{\frac{7}{4}} - \overset{4}{\frac{7}{6}} = \frac{42}{24} - \frac{28}{24} =$

$= \frac{42-28}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

ε) $1 - \frac{12}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} =$

$= \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

στ) $\frac{56}{40} - 1 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} =$

$= \frac{7-5}{5} = \frac{2}{5}$

4. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, τα εξαγόμενα των αφαιρέσεων:

α) $\frac{15}{11} - \frac{27}{44}$ β) $\frac{5}{8} - \frac{3}{10}$

γ) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ δ) $\frac{7}{6} - \frac{2}{3}$

Λύση

α) $\overset{4}{\frac{15}{11}} - \overset{1}{\frac{27}{44}} = \frac{60}{44} - \frac{27}{44} = \frac{60-27}{44}$

$= \frac{33}{44} = \frac{3}{4}$

β) $\overset{5}{\frac{5}{8}} - \overset{4}{\frac{3}{10}} = \frac{25}{40} - \frac{12}{40} = \frac{13}{40}$

γ) $\overset{5}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

δ) $\overset{1}{\frac{7}{6}} - \overset{2}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{6} - \frac{4}{6} = \frac{7-4}{6} =$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Τα εξαγόμενα είναι $\overset{10}{\frac{3}{4}}, \overset{1}{\frac{13}{40}}, \overset{2}{\frac{7}{20}}, \overset{20}{\frac{1}{2}}$

Τα κάνουμε ομώνυμα $\frac{30}{40}, \frac{13}{40}, \frac{14}{40}, \frac{20}{40}$

Άρα η σειρά τους είναι:

$$\frac{13}{40} < \frac{7}{20} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

5. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{5}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$ **β)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12}$

Λύση

α) $\overset{3}{\frac{5}{4}} + \overset{4}{\frac{2}{3}} - \overset{2}{\frac{5}{6}} = \frac{15}{12} + \frac{8}{12} - \frac{10}{12} =$

$= \frac{15+8}{12} - \frac{10}{12} = \frac{23}{12} - \frac{10}{12} =$

$= \frac{23-10}{12} = \frac{13}{12}$

β) $\overset{12}{\frac{1}{2}} + \overset{3}{\frac{3}{8}} - \overset{2}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{24} + \frac{9}{24} - \frac{14}{24} =$

$= \frac{12+9}{24} - \frac{14}{24} = \frac{21}{24} - \frac{14}{24} =$

$= \frac{21-14}{24} = \frac{7}{24}$

6. Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $A = \frac{3}{4} - (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{3}{8})$

β) $B = (3 - \frac{7}{8}) - (1 + \frac{1}{5}) - (\frac{3}{20} + \frac{3}{5})$

Λύση

α) $A = \frac{3}{4} - (\overset{2}{\frac{2}{3}} - \overset{3}{\frac{1}{2}}) + (1 - \frac{3}{8}) =$

$= \frac{3}{4} - (\frac{4}{6} - \frac{3}{6}) + (\frac{8}{8} - \frac{3}{8}) =$

$= \frac{3}{4} - (\frac{4-3}{6}) + (\frac{8-3}{8}) =$

$= \overset{6}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{1}{6}} + \overset{3}{\frac{5}{8}} = \frac{18}{24} - \frac{4}{24} + \frac{15}{24} =$

$= \frac{14}{24} + \frac{15}{24} = \frac{29}{24}$

β) $B = (\overset{8}{\frac{3}{1}} - \overset{1}{\frac{7}{8}}) - (\overset{5}{\frac{1}{1}} + \overset{1}{\frac{1}{5}}) -$

$- (\overset{1}{\frac{3}{20}} + \overset{4}{\frac{3}{5}}) =$

$= (\frac{24}{8} - \frac{7}{8}) - (\frac{5}{5} + \frac{1}{5}) - (\frac{3}{20} + \frac{12}{20}) =$

$= (\frac{24-7}{8}) - (\frac{5+1}{5}) - (\frac{3+12}{20}) =$

$= \overset{5}{\frac{17}{8}} - \overset{8}{\frac{6}{5}} - \overset{2}{\frac{15}{20}} = \frac{85}{40} - \frac{48}{40} - \frac{30}{40} =$

$= \frac{85-48}{40} - \frac{30}{40} =$

$= \frac{37}{40} - \frac{30}{40} = \frac{37-30}{40} = \frac{7}{40}$

7. Να βρείτε σε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε τον αριθμό $\frac{5}{8}$ για να βρούμε αθροισμα $\frac{15}{4}$.

Λύση

Αν x ο αριθμός που ζητάμε τότε έχουμε την εξίσωση:

$x + \frac{5}{8} = \frac{15}{4}$ ή $x = \overset{2}{\frac{15}{4}} - \overset{1}{\frac{5}{8}}$ ή

$x = \frac{30-5}{8}$ ή $x = \frac{25}{8}$

8. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στο άθροισμα των $\frac{3}{7}$ και $\frac{2}{5}$ για να προκύψει ο $\frac{23}{5}$;

Λύση

Το άθροισμα των $\frac{3}{7}$ και $\frac{2}{5}$ είναι

$$\overset{5}{\frac{3}{7}} + \overset{7}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{29}{35}$$

Αν είναι x ο ζητούμενος αριθμός πρέπει

$$\frac{29}{35} + x = \frac{23}{5} \text{ ή } x = \overset{7}{\frac{23}{5}} - \overset{1}{\frac{29}{35}}$$

$$\text{ή } x = \frac{161}{35} - \frac{29}{35} \text{ ή}$$

$$x = \frac{161-29}{35} \text{ ή } x = \frac{132}{35}$$

9. Ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από τον $\frac{3}{8}$ για να βρούμε διαφορά $\frac{2}{15}$;

Λύση

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε:

$$\overset{15}{\frac{3}{8}} - x = \overset{8}{\frac{2}{15}} \text{ ή } \frac{45}{120} - x = \frac{16}{120}$$

$$\text{ή } x = \frac{45}{120} - \frac{16}{120} \text{ ή } x = \frac{29}{120}$$

10. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + \frac{5}{7} = \frac{8}{3}$, β) $x + \frac{3}{4} = 1$,

γ) $\frac{8}{5} - x = \frac{6}{7}$, δ) $\frac{19}{7} - x = \frac{4}{3}$

Λύση

α) $x + \frac{5}{7} = \frac{8}{3}$ ή $x = \overset{7}{\frac{8}{3}} - \overset{3}{\frac{5}{7}}$ ή

$x = \frac{56}{21} - \frac{15}{21}$ ή $x = \frac{41}{21}$

β) $x + \frac{3}{4} = 1$ ή $x = \overset{4}{\frac{1}{1}} - \overset{1}{\frac{3}{4}}$

ή $x = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$ ή $x = \frac{1}{4}$

γ) $\frac{8}{5} - x = \frac{6}{7}$ ή $x + \frac{6}{7} = \frac{8}{5}$ ή

ή $x = \overset{7}{\frac{8}{5}} - \overset{5}{\frac{6}{7}}$ ή $x = \frac{56}{35} - \frac{30}{35}$

ή $x = \frac{26}{35}$

δ) $\frac{19}{7} - x = \frac{4}{3}$ ή $x + \frac{4}{3} = \frac{19}{7}$ ή

$x = \overset{3}{\frac{19}{7}} - \overset{7}{\frac{4}{3}}$ ή $x = \frac{57}{21} - \frac{28}{21}$ ή

ή $x = \frac{29}{21}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{7}{9} - \frac{8}{18}$ β) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ γ) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5}$

Λύση

α) $\overset{2}{\frac{7}{9}} - \overset{1}{\frac{8}{18}} = \frac{14}{18} - \frac{8}{18} = \dots$

β) $\overset{2}{\frac{2}{3}} - \overset{3}{\frac{1}{2}} = \dots$ γ) $\overset{5}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{1}{5}} = \dots$

2. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{5}{3} + \frac{2}{9} - \frac{5}{6}$ β) $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

Λύση

α) $\overset{6}{\frac{5}{3}} + \overset{2}{\frac{2}{9}} - \overset{3}{\frac{5}{6}} = \frac{30}{18} + \frac{4}{18} - \frac{15}{18} = \dots$

β) $\overset{1}{\frac{7}{8}} + \overset{2}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{1}{2}} = \dots$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$ β) $x + \frac{7}{15} = \frac{11}{20}$

γ) $x + \frac{2}{21} = \frac{10}{7}$ δ) $\frac{1}{3} + x = \frac{5}{6}$

ε) $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{4}$ στ) $\frac{2}{3} - x = 0$

Λύση

α) $x + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$ ή $x = \frac{7}{4} - \frac{3}{2}$ ή...

β) $x + \frac{7}{15} = \frac{11}{20}$ ή $x = \frac{11}{20} - \frac{7}{15}$ ή...

γ) $x + \frac{2}{21} = \frac{10}{7}$ ή $x = \frac{10}{7} - \frac{2}{21}$ ή...

δ) $\frac{1}{3} + x = \frac{5}{6}$ ή $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$...

ε) $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{4}$ ή $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$..

στ) $\frac{2}{3} - x = 0$ ή $x = \dots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{17}{21} - \frac{8}{21}$ β) $\frac{11}{24} - \frac{5}{24}$

γ) $\frac{25}{51} - \frac{8}{51}$ δ) $\frac{9}{14} - \frac{3}{35}$

ε) $\frac{25}{30} - \frac{11}{24}$ στ) $\frac{9}{50} - \frac{11}{75}$

ζ) $\frac{13}{54} - \frac{5}{24}$ η) $\frac{17}{4} - 3$

2. Αφού κάνετε τις απλοποιήσεις στα κλάσματα, να κάνετε τις παρακάτω αφαιρέσεις:

α) $\frac{18}{27} - \frac{10}{20}$, β) $\frac{8}{30} - \frac{9}{108}$,

γ) $\frac{35}{10} - \frac{14}{16}$, δ) $\frac{9}{6} - \frac{21}{70}$,

ε) $\frac{4}{16} - \frac{6}{56}$, στ) $\frac{32}{20} - \frac{10}{8}$

ζ) $\frac{25}{20} - \frac{7}{84}$, η) $\frac{55}{33} - \frac{9}{18}$,

θ) $\frac{81}{36} - \frac{88}{40}$, ι) $\frac{25}{20} - 1$

3. Να διατάξετε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο τα εξαγόμενα των παρακάτω αφαιρέσεων:

α) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, β) $\frac{23}{12} - \frac{2}{3}$,

γ) $\frac{23}{20} - \frac{3}{4}$, δ) $\frac{3}{2} - \frac{1}{5}$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{6}{7} + \frac{8}{3} - \frac{15}{16}$ β) $\frac{4}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{18}$

γ) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} + \frac{4}{9}$, δ) $\frac{2}{15} + \frac{4}{9} - \frac{1}{5}$

ε) $\frac{7}{18} + \frac{5}{12} - \frac{8}{15}$

στ) $\frac{5}{30} - \frac{4}{45} + \frac{1}{20}$

ζ) $\frac{1}{8} + \frac{2}{7} - \frac{3}{14}$

η) $\frac{8}{27} - \frac{1}{12} + \frac{2}{9}$

θ) $\frac{7}{12} - \frac{2}{15} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20}$

ι) $\frac{1}{3} + \frac{7}{24} - \frac{9}{64} + \frac{7}{16}$

5. Αφού απλοποιήσετε τα κλάσματα μέχρι να γίνουν ανάγωγα, να γίνουν οι πράξεις:

α) $3 - \frac{15}{30} + \frac{4}{10}$, β) $\frac{10}{8} - 1 + \frac{21}{24}$

γ) $\frac{13}{34} + \frac{35}{42} - 1$, δ) $\frac{40}{30} - 1 + \frac{33}{55}$

ε) $2 - \frac{28}{32} - \frac{15}{36} + \frac{35}{56}$

στ) $\frac{9}{30} + 1 - \frac{20}{32} - \frac{14}{21}$

ζ) $\frac{39}{54} - \frac{44}{96} + \frac{55}{66} - 1$

6. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{3}{4} - (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{3}{8})$

β) $(\frac{15}{7} - \frac{1}{2}) + \frac{5}{3} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{7})$

γ) $(3 - \frac{7}{8}) - (1 + \frac{1}{5}) - (\frac{3}{20} + \frac{3}{5})$

δ) $3 - (\frac{9}{8} - \frac{1}{4}) - (\frac{3}{5} + \frac{7}{10})$

ε) $(\frac{5}{4} + 2 + \frac{3}{8}) - (\frac{5}{2} + \frac{3}{4}) +$
$+ (\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) - 1$

στ) $\frac{4}{5} - (\frac{3}{8} + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}) +$
$+ (\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8})$

ζ) $\frac{12}{27} - (1 - \frac{21}{24} + \frac{5}{20}) + (\frac{10}{24} -$
$- \frac{3}{72}) - \frac{1}{9}$

7. Να βρείτε σε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε τον $\frac{19}{8}$ για να βρούμε άθροισμα 5.

8. Να βρείτε ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από το $\frac{15}{9}$ για να βρούμε διαφορά $\frac{3}{4}$.

9. Από 1 μπουκάλι κρασί ήπιαμε τη μια μέρα τα $\frac{2}{7}$ και τη δεύτερη μέρα το $\frac{1}{3}$ του μπουκαλιού. Να βρείτε ποιο μέρος του μπουκαλιού απέμεινε.

10. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x + \frac{7}{12} = \frac{41}{36}$, β) $y + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

γ) $\omega + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, δ) $\varphi - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

ε) $\kappa - \frac{3}{4} = \frac{11}{60}$, στ) $\frac{2}{5} + \lambda = \frac{7}{10}$

ζ) $\frac{4}{7} - \mu = \frac{1}{14}$, η) $t - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$

11. Το διαστημικό όχημα Z_3 διάνυσε την πρώτη μέρα του ταξιδιού του $\frac{1}{3}$ της διαδρομής. Τη δεύτερη ημέρα τα $\frac{3}{5}$ της υπόλοιπης. Την τρίτη μέρα 50 αστρικές ημέρες. Πόσες αστρικές ημέρες διάνυσε συνολικά;

12. Συμπλήρωσε στη θέση του □ το κατάλληλο κλάσμα:

α) $\square - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

β) $\frac{7}{11} - \square = \frac{2}{11}$

γ) $\square - \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$

δ) $\frac{2}{5} - \square = \frac{1}{10}$

ε) $\square - \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$

στ) $\frac{4}{7} - \square = \frac{1}{14}$

3.7 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς ορίζεται το γινόμενο δύο κλασμάτων;

Απαντήσεις

1. Το γινόμενο δύο κλασμάτων ορίζεται ως το κλάσμα, το οποίο έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

Παράδειγμα: $\frac{3}{7} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$

2. Πώς βρίσκονται τα $\frac{\lambda}{\nu}$ (λάμδα νιοστά) ενός αριθμού α;

2. Τα $\frac{\lambda}{\nu}$ ενός αριθμού α βρίσκονται αν πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα $\frac{\lambda}{\nu}$ με τον τον αριθμό α

π.χ. τα $\frac{3}{4}$ των 1000 γραμμαρίων είναι

$\frac{3}{4} \cdot 1000 = \frac{3 \cdot 1000}{4} = \frac{3000}{4} = 750$ g.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ β) $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}$ γ) $\frac{6}{11} \cdot \frac{1}{5}$

δ) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4}$ ε) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$ στ) $\frac{9}{7} \cdot \frac{3}{4}$

Λύση

α) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$

β) $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 8} = \frac{7}{24}$

γ) $\frac{6}{11} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6 \cdot 1}{11 \cdot 5} = \frac{6}{55}$

δ) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32}$

ε) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$

στ) $\frac{9}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{27}{28}$

2. Να βρεθούν τα γινόμενα:

α) $2 \cdot \frac{1}{3}$, β) $3 \cdot \frac{4}{5}$, γ) $4 \cdot \frac{5}{9}$,

δ) $5 \cdot \frac{8}{9}$

Λύση

α) $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

β) $3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5}$

γ) $4 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 9} = \frac{20}{9}$

δ) $5 \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5 \cdot 8}{1 \cdot 9} = \frac{40}{9}$

3. Ποια από τα παρακάτω γινόμενα έχουν την ίδια τιμή;

α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}$ **β)** $\frac{3}{40} \cdot \frac{4}{9}$ **γ)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}$

δ) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$ **ε)** $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{28}$ **στ)** $\frac{9}{44} \cdot \frac{11}{5}$

Λύση

α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{9}{20}$

β) $\frac{3}{40} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{40 \cdot 9} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$

γ) $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 10} = \frac{9}{20}$

δ) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$

ε) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{28} = \frac{8 \cdot 3}{5 \cdot 28} = \frac{24}{140} = \frac{6}{35}$

στ) $\frac{9}{44} \cdot \frac{11}{5} = \frac{9 \cdot 11}{44 \cdot 5} = \frac{99}{220} = \frac{9}{20}$

Άρα έχουν την ίδια τιμή: τα α), γ), στ) και τα δ), ε).

4. Να διατάξετε από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}$ **β)** $\frac{3}{32} \cdot \frac{8}{15}$ **γ)** $\frac{7}{6} \cdot \frac{9}{14}$

δ) $\frac{13}{6} \cdot \frac{9}{15}$

Λύση

α) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$

β) $\frac{3}{32} \cdot \frac{8}{15} = \frac{3 \cdot 8}{32 \cdot 15} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5} =$

$= \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$

γ) $\frac{7}{6} \cdot \frac{9}{14} = \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 14} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

δ) $\frac{13}{6} \cdot \frac{9}{15} = \frac{13 \cdot 9}{6 \cdot 15} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10}$

Οπότε έχουμε:

$\overset{4)}{\frac{4}{15}}, \overset{3)}{\frac{1}{20}}, \overset{15)}{\frac{3}{4}}, \overset{6)}{\frac{13}{10}} \rightarrow$

$\frac{16}{60}, \frac{3}{60}, \frac{45}{60}, \frac{78}{60}$ (ομώνυμα) άρα η σειρά τους από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο είναι: $\frac{13}{10} > \frac{3}{4} > \frac{4}{15} > \frac{1}{20}$

5. Να κάνετε τις πράξεις με δύο διαφορετικούς τρόπους:

$(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{25}) \cdot \frac{5}{7}$

Λύση

α' τρόπος: $(\overset{10)}{\frac{2}{5}} + \overset{25)}{\frac{1}{2}} + \overset{2)}{\frac{2}{25}}) \cdot \frac{5}{7} =$

$= (\frac{20 + 25 + 4}{50}) \cdot \frac{5}{7} = \frac{49}{50} \cdot \frac{5}{7} =$

$= \frac{49 \cdot 5}{50 \cdot 7} = \frac{7}{10}$

β' τρόπος: $(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{25}) \cdot \frac{5}{7} =$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{25} \cdot \frac{5}{7} =$

$= \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5}{25 \cdot 7} =$

$= \overset{10)}{\frac{2}{7}} + \overset{5)}{\frac{5}{14}} + \overset{2)}{\frac{2}{35}} = \frac{20 + 25 + 4}{70} =$

$= \frac{49}{70} = \frac{7}{10}$

6. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{15}{2}$ β) $\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{4}$

γ) $\frac{9}{20} \cdot \frac{35}{18} \cdot \frac{16}{21}$

Λύση

α) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{15}{2} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 15}{5 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} =$
$= \frac{21}{4}$

β) $\frac{3}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 15}{10 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5}{10} =$
$= \frac{10}{10} = 1$

γ) $\frac{9}{20} \cdot \frac{35}{18} \cdot \frac{16}{21} = \frac{9 \cdot 35 \cdot 16}{20 \cdot 18 \cdot 21} =$
$= \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

7. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{35}$

β) $1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{16}\right) +$
$+ \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{21}{40}\right)$

Λύση

α) $\frac{2}{3} \cdot \left(\overset{2}{\frac{4}{5}} - \overset{5}{\frac{1}{2}}\right) + \left(\overset{2}{\frac{5}{6}} - \overset{3}{\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{3}{35} =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{8-5}{10} + \frac{10-3}{12} \cdot \frac{3}{35} =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \cdot 5} =$
$= \overset{4}{\frac{1}{5}} + \overset{1}{\frac{1}{20}} = \frac{4+1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

β) $1 - \left(\overset{1}{\frac{1}{15}} + \overset{5}{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(\overset{2}{\frac{5}{8}} + \overset{1}{\frac{5}{16}}\right) +$
$+ \frac{1}{6} \cdot \left(\overset{8}{\frac{3}{5}} + \overset{1}{\frac{21}{40}}\right) =$

$1 - \left(\frac{1+5}{15}\right) \cdot \left(\frac{10+5}{16}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{24+21}{40} =$
$= 1 - \frac{6}{15} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{6} \cdot \frac{45}{40} =$
$= \overset{16}{\frac{1}{1}} - \overset{2}{\frac{3}{8}} + \overset{1}{\frac{3}{16}} = \frac{16 - 6 + 3}{16} = \frac{13}{16}$

8. Να βρεθεί πόσα g είναι: α) τα $\frac{3}{4}$ του κιλού β) το $\frac{1}{4}$ του κιλού
γ) το $\frac{1}{2}$ του κιλού.

Λύση

α) Τα $\frac{3}{4}$ του κιλού είναι $\frac{3}{4} \cdot 1000 =$
$= \frac{3 \cdot 1000}{4} = 750$ g

β) $\frac{1}{4} \cdot 1000 = \frac{1000}{4} = 250$ g

γ) $\frac{1}{2} \cdot 1000 = \frac{1000}{2} = 500$ g

9. Ένας έμπορος είχε στο μαγαζί του 150 kg ζάχαρη. Πούλησε πρώτα τα $\frac{2}{5}$, μετά τα $\frac{2}{15}$ και τέλος $\frac{1}{6}$ αυτής. Πόσα kg ζάχαρη πούλησε κάθε φορά και πόσα του έμειναν;

Λύση

Πρώτα πούλησε $\frac{2}{5} \cdot 150 = \frac{300}{5} = 60$ kg

μετά $\frac{2}{15} \cdot 150 = \frac{300}{15} = 20$ kg και

τέλος $\frac{1}{6} \cdot 150 = 25$ kg.

Άρα πούλησε συνολικά:
60 + 20 + 25 = 105 kg ζάχαρης και του απέμειναν: 150 − 105 = 45 kg.

10. Ένας φούρναρης αγόρασε 84 κιλά αλεύρι και για να φτιάξει ψωμί χρησι-

μοποίησε πρώτα το $\frac{1}{3}$ και μετά τα $\frac{3}{4}$ αυτού που του έμεινε. Πόσα κιλά χρησιμοποίησε κάθε φορά και πόσα του απέμειναν;

Λύση

Πρώτα χρησιμοποίησε $\frac{1}{3} \cdot 84 = \frac{84}{3} =$

$= 28$ kg αλεύρι. Άρα του έμειναν

$84 - 28 = 56$ kg από τα οποία χρησιμοποίησε τα $\frac{3}{4} \cdot 56 = \frac{3 \cdot 56}{4} = 42$ kg.

Άρα του έμειναν
$84 - (28 + 42) = 84 - 70 = 14$ kg αλεύρι.

11. Ένας μανάβης αγόρασε 480 κιλά πορτοκάλια. Πούλησε στην αρχή τα $\frac{5}{16}$ και μετά τα $\frac{2}{3}$ από αυτά που του έμειναν. Πόσα κιλά πούλησε κάθε φορά; Αν πούλησε αυτά που του έμειναν με 170 δρχ. το κιλό, πόσα χρήματα πήρε από αυτά;

Λύση

Στην αρχή πούλησε τα $\frac{5}{16} \cdot 480 =$

$= \frac{5 \cdot 480}{16} = 150$ kg.

Άρα του έμειναν $480 - 150 = 330$ kg.

Από αυτά πούλησε $\frac{2}{3} \cdot 330 = \frac{2 \cdot 330}{3} =$

$= 220$ kg. Άρα του έμειναν:
$330 - 220 = 110$ kg και από αυτά κέρδισε $110 \cdot 170 = 18.700$ δρχ.

12. Ένα ποσό 30.000 δρχ. ξοδεύτηκε ως εξής: πρώτα τα $\frac{7}{12}$, μετά το $\frac{1}{6}$ και τέλος το $\frac{1}{24}$. Πόσο έμεινε από όλο το ποσό;

Λύση

Ξοδεύτηκαν τα $\overset{2}{\frac{7}{12}} + \overset{4}{\frac{1}{6}} + \overset{1}{\frac{1}{24}} =$

$= \frac{14 + 4 + 1}{24} = \frac{19}{24}$. Άρα απέμειναν

$1 - \frac{19}{24} = \frac{24}{24} - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$. Επομένως

$\frac{5}{24} \cdot 30000 = \frac{5 \cdot 30000}{24} = 6250$ δρχ.

13. Για την κατασκευή ενός δρόμου χρειάστηκαν 4 μήνες. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν τα $\frac{3}{8}$, το δεύτερο το $\frac{1}{4}$, τον τρίτο $\frac{1}{5}$ αυτού που έμεινε και τον τέταρτο 12 km. Πόσα χιλιόμετρα είναι αυτός ο δρόμος και πόσα κατασκευάστηκαν κάθε μήνα;

Λύση

$\overset{1}{\frac{3}{8}} + \overset{2}{\frac{1}{4}} = \frac{3 + 2}{8} = \frac{5}{8}$ αυτά που κατασκευάστηκαν τον 1ο και τον 2ο μήνα,

$\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ αυτό που απέμεινε για τον 3ο και 4ο μήνα,

$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$ αυτό που κατασκευάστηκε τον 3ο μήνα,

$\overset{5}{\frac{5}{8}} + \overset{1}{\frac{3}{40}} = \frac{25 + 3}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$ αυτό που κατασκευάστηκε τους 3 πρώτους μήνες.

Άρα $\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ αυτό που απέμεινε για τον 4ο μήνα, οπότε τα 12 km είναι τα $\frac{3}{10}$ του έργου. Όλο το έργο λοιπόν είναι $\frac{12}{3} \cdot 10 = 40$ km

και επομένως τον 1ο μήνα κατασκευάστηκαν

$\frac{3}{8} \cdot 40 = 15$ km

τον δεύτερο μήνα $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ km.

Άρα τον τρίτο $40 - (15 + 10 + 12) =$

$= 40 - 37 = 3$ km.

14. Ένα ποσό χρημάτων μοιράστηκε σε 4 αδέλφια με τον ακόλουθο τρόπο. Στον πρώτο και το δεύτερο δόθηκαν τα $\frac{2}{7}$ και $\frac{1}{5}$ αντίστοιχα ολόκληρου του ποσού. Στον τρίτο δόθηκαν τα $\frac{5}{6}$ αυτού που έμεινε.

Ο τέταρτος πήρε 750.000 δρχ. Πόσο ήταν ολόκληρο το πόσο και πόσα χρήματα αναλογούν στον καθένα;

Λύση

Ο 1ος και ο 2ος πήραν $\overset{5}{\frac{2}{7}} + \overset{7}{\frac{1}{5}} = \frac{10+7}{35}$

$= \frac{17}{35}$, άρα έμειναν $\frac{35}{35} - \frac{17}{35} = \frac{18}{35}$

από τα οποία πήρε ο τρίτος τα $\frac{5}{6}$, δηλαδή

$\frac{5}{6} \cdot \frac{18}{35} = \frac{5 \cdot 18}{6 \cdot 35} = \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$.

Άρα ο 1ος, ο 2ος και ο 3ος πήραν μαζί

$\frac{17}{35} + \frac{15}{35} = \frac{32}{35}$.

Άρα ο 4ος πήρε $\frac{35}{35} - \frac{32}{35} = \frac{3}{35}$ τα οποία είναι 750.000 δρχ. Άρα όλο το ποσόν είναι $\frac{750.000}{3} \cdot 35 = 8.750.000$

Ο 1ος πήρε $\frac{2}{7} \cdot 8.750.000 = 2.500.000$,

ο 2ος πήρε $\frac{1}{5} \cdot 8.750.000 = 1.750.000$

και ο 3ος πήρε
$8.750.000 - (2.500.000 + 1.750.000 +$
$+ 750.000) =$
$8.750.000 - 5.000.000 = 3.750.000$ δρχ.

Β Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:

α) $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}$ β) $\frac{45}{16} \cdot \frac{48}{25}$ γ) $\frac{36}{49} \cdot \frac{35}{54}$

δ) $\frac{80}{81} \cdot \frac{45}{56}$ ε) $\frac{25}{9} \cdot \frac{18}{10}$

Λύση

α) $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 8} = \frac{1}{16}$

β) $\frac{45}{16} \cdot \frac{48}{25} = ...$ γ) $\frac{36}{49} \cdot \frac{35}{54} = ...$

δ) $\frac{80}{81} \cdot \frac{45}{56} = ...$ ε) $\frac{25}{9} \cdot \frac{18}{10} = ...$

2. Να διατάξετε τα παρακάτω γινόμενα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο:

α) $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4}$ β) $\frac{7}{45} \cdot \frac{3}{2}$ γ) $\frac{2}{65} \cdot \frac{26}{3}$

δ) $\frac{25}{27} \cdot \frac{9}{10}$

Λύση

α) $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{18}{20}$

β) $\frac{7}{45} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{45 \cdot 2} = ...$

γ) $\frac{2}{65} \cdot \frac{26}{3} = ...$ δ) $\frac{25}{27} \cdot \frac{9}{10} = ...$

3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με δύο τρόπους:

α) $(\frac{5}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) \cdot \frac{14}{9}$

β) $\frac{15}{4} \cdot (\frac{2}{7} - \frac{1}{10} + \frac{3}{14})$

Λύση

α) $(\frac{\overset{6}{5}}{7} - \frac{\overset{14}{1}}{3} + \frac{\overset{7}{1}}{6}) \cdot \frac{14}{9} = ...$

β) $\frac{15}{4} \cdot (\frac{2}{7} - \frac{1}{10} + \frac{3}{14}) = ...$

4. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$[\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{9} - \frac{5}{6} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{2})] \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$

Λύση

$[\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{9} - \frac{5}{6} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{2})] \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{2} =$

$[\frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 9} - \frac{5}{6} \cdot (\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 9} - \frac{5 \cdot 3}{18 \cdot 2})] \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = ...$

5. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$A = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot [(\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{5}) \cdot (\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3}]$

Λύση

$A = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot [(\frac{6 \cdot 2}{5 \cdot 3} - \frac{2}{5}) \cdot (\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 9} + \frac{2}{3}) + \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 3}] =$

$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot [(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}) \cdot (\frac{1}{6} + \frac{2}{3}) + \frac{8}{9}] = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7}$ β) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$ γ) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}$

δ) $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12}$ ε) $\frac{3}{20} \cdot \frac{3}{5}$ στ) $0 \cdot \frac{3}{6}$

2. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με δύο τρόπους:

α) $(\frac{1}{2} + \frac{31}{25} + \frac{19}{50}) \cdot \frac{5}{2}$

β) $\frac{25}{29} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2})$

γ) $(\frac{1}{3} + \frac{3}{13} + \frac{4}{39}) \cdot \frac{3}{2}$

δ) $\frac{6}{7} \cdot (\frac{1}{3} + \frac{2}{13} + \frac{2}{39})$

ε) $\frac{5}{13} \cdot (\frac{4}{5} + \frac{11}{25} - \frac{1}{5})$

στ) $\frac{15}{4} \cdot (\frac{2}{7} - \frac{1}{10} + \frac{3}{14})$

3. Να διατάξετε από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\frac{1}{24} \cdot \frac{15}{4}$ β) $\frac{6}{72} \cdot \frac{9}{4}$

γ) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ δ) $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{8}$

4. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\frac{36}{7} \cdot \frac{7}{5}$ β) $\frac{4}{7} \cdot 9$ γ) $\frac{3}{14} \cdot \frac{2}{9}$

δ) $\frac{8}{35} \cdot \frac{5}{4}$ ε) $\frac{9}{25} \cdot \frac{15}{18}$

5. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} - \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$

β) $\left[\frac{5}{7} \cdot \frac{21}{4} - \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{25} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9}\right)\right] \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5}$

γ) $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} - 1\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right]$

6. Ένας έμπορος πλήρωσε 16.500 δρχ. για την τελευταία δόση ενός ποσού που έπρεπε να ξοφληθεί σε 3 δόσεις. Αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη δόση είναι τα $\frac{2}{7}$ όλου του ποσού και η δεύτερη δόση είναι τα $\frac{4}{15}$ αυτού που έμεινε να πληρωθεί, πόσο ήταν όλο το ποσό και πόση ήταν η κάθε δόση;

7. Ένα ποσό χρημάτων πρόκειται να μοιραστεί σε 3 αδέρφια. Στον πρώτο αναλογούν τα $\frac{2}{15}$ όλου του ποσού και στο δεύτερο τα $\frac{7}{13}$ αυτού που μένει.

Αν για τον τρίτο μένουν 24.000 δρχ., ποιο είναι το ποσό που θα μοιραστεί; Ποιο ποσό αναλογεί στον 1ο και ποιο στον 2ο από τα αδέρφια;

8. Ένας έμπορος αγοράζει εμπορεύματα για το κατάστημά του και πληρώνει αμέσως τα $\frac{2}{5}$ της αξίας τους, τα $\frac{5}{9}$ του υπολοίπου μετά από ένα μήνα και το υπόλοιπο που είναι 15.000 δρχ. μετά από δυο μήνες. Πόσα ξόδεψε συνολικά; Πόσα πλήρωσε κάθε φορά;

9. Ένας μαθητής αγοράζει ένα δίσκο με τις οικονομίες του και πληρώνει μετρητά το μισό της αξίας του. Μετά από ένα μήνα δίνει τα $\frac{2}{3}$ από αυτά που πλήρωσε και του μένουν να πληρώσει ακόμη 300 δρχ. Πόσο κοστίζει αυτός ο δίσκος; Πόσα πλήρωσε κάθε φορά;

10. Ένας παντοπώλης πούλησε χθες τα $\frac{3}{8}$ των προμηθειών του σε ζάχαρη και σήμερα τα $\frac{14}{15}$ αυτών που του έμειναν.

Αν του έχουν απομείνει 15 κιλά ζάχαρη, πόσα κιλά είχε και πόσα κιλά πούλησε;

11. Ένα πλυντήριο κοστίζει 120.000 δρχ. και ο έμπορος μας κάνει έκπτωση ίση με $\frac{18}{100}$ της αξίας του. Πόσα χρήματα είναι η έκπτωση και πόσα πληρώσαμε;

12. Από ένα οικόπεδο πουλήθηκαν πρώτα τα $\frac{5}{9}$ και μετά το $\frac{1}{4}$ αυτού που απέμεινε. Αν έχουν μείνει ακόμη 1500 m^2, πόσο ήταν όλο το οικόπεδο και πόσα τετραγωνικά μέτρα πουλήθηκαν κάθε φορά;

3. 8 Αντίστροφοι αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

2. Πώς βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός κλάσματος κ/λ;

Απαντήσεις

1. **Αντίστροφοι** λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο 1.

π.χ. Αντίστροφος του $\frac{3}{4}$ είναι το $\frac{4}{3}$

ο αντίστροφος του 8 είναι ο $\frac{1}{8}$

2. Ο αντίστροφος ενός κλάσματος $\frac{κ}{λ}$ βρίσκεται αν «αντιστρέψουμε» τους όρους του κλάσματος $\frac{κ}{λ}$ και είναι ο αριθμός $\frac{λ}{κ}$ (γιατί $\frac{κ}{λ} \cdot \frac{λ}{κ} = \frac{κ \cdot λ}{λ \cdot κ} = 1$).

Παρατήρηση: Ο αριθμός 0 **δεν** έχει αντίστροφο.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος των αριθμών:

α) $\frac{2}{7}$ **β)** $\frac{8}{13}$ **γ)** $\frac{15}{7}$ **δ)** $\frac{123}{209}$

ε) $\frac{1}{7}$ **στ)** $\frac{1}{100}$ **ζ)** 6 **η)** 129

Λύση

α) Ο αντίστροφος του $\frac{2}{7}$ είναι ο $\frac{7}{2}$

β) Ο αντίστροφος είναι $\frac{8}{13}$ είναι ο $\frac{13}{8}$

γ) Ο αντίστροφος του $\frac{15}{7}$ είναι ο $\frac{7}{15}$

δ) Ο αντίστροφος του $\frac{123}{209}$ είναι ο $\frac{209}{123}$

ε) Ο αντίστροφος του $\frac{1}{7}$ είναι ο $\frac{7}{1} = 7$

στ) Ο αντίστροφος του $\frac{1}{100}$ είναι ο $\frac{100}{1} = 100$

ζ) Ο αντίστροφος του $\frac{6}{1}$ είναι ο $\frac{1}{6}$

η) Ο αντίστροφος του $129 = \frac{129}{1}$ είναι ο $\frac{1}{129}$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3}{4} \cdot x = 1$ **β)** $\frac{5}{7} \cdot y = 1$

γ) $\frac{1}{9} \cdot ω = 1$ **δ)** $23\,κ = 1$ **ε)** $5\,λ = 1$

Λύση

α) $\frac{3}{4}\cdot x = 1$ άρα ο x και ο $\frac{3}{4}$ είναι αντίστροφοι, επομένως $x = \frac{4}{3}$.

Επαλήθευση $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1$ ή $1 = 1$ ισχύει

β) $\frac{5}{7}\cdot y = 1$ ή $y = \frac{7}{5}$

(ο αντίστροφος του $\frac{5}{7}$)

γ) $\frac{1}{9}\cdot\omega = 1$ ή $\omega = 9$

(ο αντίστροφος του $\frac{1}{9}$)

δ) $23\,\kappa = 1$ ή $\kappa = \frac{1}{23}$

(ο αντίστροφος του 23)

ε) $5\cdot\lambda = 1$ ή $\lambda = \frac{1}{5}$

(ο αντίστροφος του 5)

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3}{7}\cdot x = \frac{2}{9}$ **β)** $\frac{5}{9}\cdot \alpha = \frac{25}{18}$

γ) $\frac{8}{7}\cdot\omega = \frac{16}{42}$ **δ)** $3\cdot y = \frac{1}{5}$

ε) $27\cdot y = \frac{54}{35}$ **στ)** $\frac{3}{5}\cdot\beta = \frac{5}{3}$

Λύση

α) $\frac{3}{7}\cdot x = \frac{2}{9}$ ή $\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot x = \frac{7}{3}\cdot\frac{2}{9}$

ή $1\cdot x = \frac{14}{27}$ ή $x = \frac{14}{27}$

β) $\frac{5}{9}\cdot\alpha = \frac{25}{18}$ ή $\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\alpha = \frac{9}{5}\cdot\frac{25}{18}$

ή $\alpha = \frac{9\cdot 25}{5\cdot 18}$ ή $\alpha = \frac{5}{2}$

γ) $\frac{8}{7}\cdot\omega = \frac{16}{42}$ ή $\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{7}\cdot\omega = \frac{7}{8}\cdot\frac{16}{42}$

ή $\omega = \frac{7\cdot 16}{8\cdot 42}$ ή $\omega = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

δ) $3\cdot y = \frac{1}{5}$ ή $\frac{1}{3}\cdot 3y = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$ ή

$y = \frac{1}{15}$

ε) $27\cdot y = \frac{54}{35}$ ή $\frac{1}{27}\cdot 27y = \frac{1}{27}\cdot\frac{54}{35}$

ή $y = \frac{54}{27\cdot 35} = \frac{2}{35}$

στ) $\frac{3}{5}\cdot\beta = \frac{5}{3}$ ή $\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\beta = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}$

ή $\beta = \frac{25}{9}$

4. Να βρεθεί ο αντίστροφος των παρακάτω αριθμών:

α) $2\frac{3}{7}$ **β)** $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$ **γ)** $2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3}$

Λύση

α) $2\frac{3}{7} = \frac{17}{7}$ του οποίου ο αντίστροφος είναι ο $\frac{7}{17}$

β) $\overset{7}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{2}{7}} = \frac{21}{28} - \frac{8}{28} = \frac{13}{28}$ έχει αντίστροφο τον $\frac{28}{13}$

γ) $2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} = \overset{3}{\frac{13}{5}} - \overset{5}{\frac{4}{3}} = \frac{39}{15} - \frac{20}{15} =$

$= \frac{19}{15}$ με αντίστροφο τον αριθμό $\frac{15}{19}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών:

$\frac{2}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{27}$, 8 ,
9 , 25

Λύση

$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2}$, $\frac{7}{9} \rightarrow ...$,
$\frac{3}{8} \rightarrow ...$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α) $\frac{23}{9} \cdot x = 1$ β) $\frac{3}{8} \cdot x = 1$

γ) $25 \cdot x = 1$ δ) $35 \cdot x = 1$

Λύση

α) $\frac{23}{9} \cdot x = 1$ ή $x = \frac{9}{23}$

(ο αντίστροφος του $\frac{23}{9}$)

β) $\frac{3}{8} \cdot x = 1$ ή $x = ...$

γ) $25 \cdot x = 1$ ή $x = ...$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3}{7} \cdot x = \frac{9}{14}$, β) $\frac{21}{5} \cdot x = \frac{7}{25}$

γ) $\frac{38}{5} \cdot x = \frac{76}{35}$

Λύση

α) $\frac{3}{7} \cdot x = \frac{9}{14}$ ή $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot x = \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{14}$

ή $x = \frac{7 \cdot 9}{3 \cdot 14}$ ή $x = ...$

β) $\frac{21}{5} \cdot x = \frac{7}{25}$ ή ...

γ) $\frac{38}{5} \cdot x = \frac{76}{35}$ ή...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω αριθμών:

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{30}{15}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{4}$,

$\frac{7}{9}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{14}{2}$, $\frac{5}{6}$,

4 , 3 , $\frac{19}{19}$, $\frac{7}{2}$.

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{3}{25} \cdot x = 1$ β) $\frac{8}{29} \cdot y = 1$

γ) $\frac{5}{2} \cdot \varphi = 1$ δ) $\frac{1}{21} \cdot x = 1$

ε) $23 \cdot \rho = 1$ στ) $75 \cdot x = 1$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{11}{2} \cdot x = \frac{88}{3}$ β) $\frac{5}{11} \cdot y = \frac{3}{7}$

γ) $3 \cdot \omega = \frac{13}{4}$ δ) $5 \cdot \lambda = \frac{1}{5}$

ε) $13 \cdot \kappa = \frac{7}{26}$

4. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των αριθμών:

α) $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5}$ β) $8\frac{1}{7} - 5\frac{3}{4}$

γ) $\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{4}$ δ) $\left(6 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$

5. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω αριθμών και να διαταχθούν από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο:

$\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{8}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{13}.$

3.9 Διαίρεση κλασμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς υπολογίζουμε το πηλίκο δύο κλασμάτων;

2. Τι λέγεται σύνθετο κλάσμα και πώς μετατρέπεται σε απλό;

Απαντήσεις

1. Για να υπολογίσουμε το πηλίκο της διαίρεσης δύο κλασμάτων πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Π.χ. $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{8}.$

2. **Σύνθετο** κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει σαν αριθμητή και παρονομαστή δύο άλλα κλάσματα. Για να το κάνουμε απλό κάνουμε διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή.

Π.χ. $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{8}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα παρακάτω πηλίκα:

α) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ β) $\frac{3}{7} : \frac{5}{4}$

γ) $3 : \frac{5}{9}$ δ) $\frac{12}{13} : 5$

Λύση

α) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

β) $\frac{3}{7} : \frac{5}{4} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$

γ) $3 : \frac{5}{9} = 3 \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{5}$

δ) $\frac{12}{13} : 5 = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12 \cdot 1}{13 \cdot 5} = \frac{12}{65}$

2. Να βρεθούν τα παρακάτω πηλίκα:

α) $5\frac{3}{8} : 1\frac{1}{2}$ β) $7 : 3\frac{1}{2}$

γ) $3\frac{1}{4} : 2\frac{5}{8}$

Λύση

α) $5\frac{3}{8} : 1\frac{1}{2} = \frac{43}{8} : \frac{3}{2} = \frac{43}{8} \cdot \frac{2}{3} =$

$= \frac{43 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{43}{12}$

β) $7 : 3\frac{1}{2} = 7 : \frac{7}{2} = 7 \cdot \frac{2}{7} =$

$= \frac{7 \cdot 2}{7} = 2$

γ) $3\frac{1}{4} : 2\frac{5}{8} = \frac{13}{4} : \frac{21}{8} = \frac{13}{4} \cdot \frac{8}{21} =$

$= \frac{13 \cdot 8}{4 \cdot 21} = \frac{26}{21}$

3. Ποιες από τις παρακάτω διαιρέσεις έχουν ίδιο πηλίκο;

α) $\frac{5}{2} : \frac{2}{3}$ β) $\frac{9}{2} : \frac{6}{5}$ γ) $\frac{4}{15} : \frac{5}{6}$

δ) $\frac{22}{7} : \frac{33}{4}$ ε) $\frac{27}{8} : \frac{9}{10}$ στ) $\frac{18}{25} : \frac{9}{4}$

Λύση

α) $\frac{5}{2} : \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$

β) $\frac{9}{2} : \frac{6}{5} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$

γ) $\frac{4}{15} : \frac{5}{6} = \frac{4}{15} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$

δ) $\frac{22}{7} : \frac{33}{4} = \frac{22}{7} \cdot \frac{4}{33} = \frac{88}{231} = \frac{8}{21}$

ε) $\frac{27}{8} : \frac{9}{10} = \frac{27}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{270}{72} = \frac{15}{4}$

στ) $\frac{18}{25} : \frac{9}{4} = \frac{18}{25} \cdot \frac{4}{9} = \frac{72}{225} = \frac{8}{25}$

Άρα ίδιο πηλίκο έχουν οι: α, β, ε και οι: γ, δ, στ.

4. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων:

α) $\frac{1}{24} : \frac{4}{15}$ β) $\frac{6}{72} : \frac{4}{9}$

γ) $\frac{1}{4} : 2$ δ) $\frac{6}{5} : \frac{8}{5}$

Λύση

α) $\frac{1}{24} : \frac{4}{15} = \frac{1}{24} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{24 \cdot 4} = \frac{5}{32}$

β) $\frac{6}{72} : \frac{4}{9} = \frac{6}{72} \cdot \frac{9}{4} = \frac{6 \cdot 9}{72 \cdot 4} = \frac{3}{16}$

γ) $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

δ) $\frac{6}{5} : \frac{8}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{3}{4}$

Έχουμε λοιπόν τα κλάσματα:

$\overset{1}{\frac{5}{32}}, \overset{2}{\frac{3}{16}}, \overset{4}{\frac{1}{8}}, \overset{8}{\frac{3}{4}}$

τα οποία μετατρέπουμε σε ομώνυμα

$\frac{5}{32}, \frac{6}{32}, \frac{4}{32}, \frac{24}{32}$

Άρα η σειρά είναι: $\frac{1}{8} < \frac{5}{32} < \frac{3}{16} < \frac{3}{4}$

5. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{3}{14}\right) : \frac{12}{35}$

β) $\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{4}{35}\right) : \frac{3}{2}$

Λύση

α) $\left(\overset{7}{\frac{1}{2}} + \overset{2}{\frac{1}{7}} + \overset{1}{\frac{3}{14}}\right) : \frac{12}{35} =$

$\left(\frac{7}{14} + \frac{2}{14} + \frac{3}{14}\right) : \frac{12}{35} = \frac{12}{14} : \frac{12}{35}$

$= \frac{12}{14} \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{14}$

β) $\left(\overset{10}{\frac{2}{7}} + \overset{7}{\frac{1}{10}} + \overset{2}{\frac{4}{35}}\right) : \frac{3}{2} =$

$\left(\frac{20}{70} + \frac{7}{70} + \frac{8}{70}\right) : \frac{3}{2} = \frac{35}{70} : \frac{3}{2} =$

$= \frac{35}{70} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

6. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\frac{25}{8} : \left(\frac{15}{4} : \frac{5}{16}\right)$

β) $\left(\frac{25}{8} : \frac{15}{4}\right) : \frac{5}{16}$

Λύση

α) $\frac{25}{8} : \left(\frac{15}{4} : \frac{5}{16}\right) =$

$= \frac{25}{8} : \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{16}{5}\right) = \frac{25}{8} : \frac{15 \cdot 16}{4 \cdot 5}$

$= \frac{25}{8} : 12 = \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{96}$

β) $\left(\frac{25}{8} : \frac{15}{4}\right) : \frac{5}{16} =$

$= \left(\frac{25}{8} \cdot \frac{4}{15}\right) : \frac{5}{16} = \left(\frac{25 \cdot 4}{8 \cdot 15}\right) : \frac{5}{16} =$

$= \frac{5}{6} : \frac{5}{16} = \frac{5}{6} \cdot \frac{16}{5} = \frac{5 \cdot 16}{6 \cdot 5} = \frac{8}{3}$

7. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $\frac{5}{16} + \frac{1}{8} : \frac{5}{4} + \frac{15}{16} : \frac{9}{4}$

β) $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) : \left(2 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \cdot$

$\cdot \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{10}$

Λύση

α) $\frac{5}{16} + \frac{1}{8} : \frac{5}{4} + \frac{15}{16} : \frac{9}{4} =$

$= \frac{5}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} + \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{9} =$

$\frac{5}{16} + \frac{1 \cdot 4}{8 \cdot 5} + \frac{15 \cdot 4}{16 \cdot 9} = \overset{15}{\frac{5}{16}} + \overset{24}{\frac{1}{10}} + \overset{20}{\frac{5}{12}} =$

$= \frac{75}{240} + \frac{24}{240} + \frac{100}{240} = \frac{199}{240}.$

β) $\left(\overset{1}{\frac{1}{6}} + \overset{3}{\frac{1}{2}}\right) : \left(\overset{3}{\frac{2}{1}} - \overset{1}{\frac{1}{3}}\right) - \left(\overset{1}{\frac{1}{6}} + \overset{2}{\frac{1}{3}}\right) \cdot$

$\cdot \left(\overset{1}{\frac{7}{12}} - \overset{3}{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{10} =$

$= \left(\frac{1+3}{6}\right) : \left(\frac{6-1}{3}\right) - \left(\frac{1+2}{6}\right) \cdot$

$\cdot \left(\frac{7-3}{12}\right) + \frac{1}{10} =$

$= \frac{4}{6} : \frac{5}{3} - \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{10} =$

$= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{72} + \frac{1}{10} = \frac{12}{30} - \frac{12}{72} + \frac{1}{10}$

$= \frac{3}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \overset{3}{\frac{4}{10}} - \overset{5}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{30} - \frac{5}{30} =$

$= \frac{7}{30}.$

8. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

α) $\dfrac{3}{\frac{3}{4}}$ β) $\dfrac{5}{\frac{20}{9}}$ γ) $\dfrac{\frac{7}{8}}{14}$

δ) $\dfrac{\frac{10}{21}}{15}$ ε) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}}$ στ) $\dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{14}}$

Λύση

α) $\dfrac{3}{\frac{3}{4}} = 3 : \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3} = 4$

β) $\dfrac{5}{\frac{20}{9}} = 5 : \frac{20}{9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{9}{20} = \frac{45}{20}$

γ) $\dfrac{\frac{7}{8}}{14} = \dfrac{7}{8} : \dfrac{14}{1} = \dfrac{7}{8} \cdot \dfrac{1}{14} = \dfrac{7 \cdot 1}{8 \cdot 14} =$

$= \dfrac{1}{16}$

δ) $\dfrac{\frac{10}{21}}{15} = \dfrac{10}{21} : 15 = \dfrac{10}{21} \cdot \dfrac{1}{15} =$

$= \dfrac{10}{21 \cdot 15} = \dfrac{2}{63}$

ε) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{5}} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{6}{5} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} =$

$= \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \dfrac{5}{8}$

στ) $\dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{14}} = \dfrac{7}{6} : \dfrac{1}{14} = \dfrac{7}{6} \cdot \dfrac{14}{1} =$

$= \dfrac{7 \cdot 14}{6 \cdot 1} = \dfrac{49}{3}$

9. Να γίνουν τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{7}{2} + 2}$ β) $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{4}{45}}$

Λύση

α) $\dfrac{\frac{\overset{5}{1}}{2} + \frac{\overset{2}{3}}{5}}{\frac{7}{2} + \frac{2}{1}} = \dfrac{\frac{5}{10} + \frac{6}{10}}{\frac{7}{2} + \frac{4}{2}} = \dfrac{\frac{11}{10}}{\frac{11}{2}} =$

$= \dfrac{11}{10} : \dfrac{11}{2} = \dfrac{11}{10} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

β) $\dfrac{\frac{\overset{3}{3}}{5} - \frac{\overset{5}{1}}{3}}{\frac{\overset{5}{1}}{9} + \frac{\overset{15}{1}}{3} - \frac{\overset{1}{4}}{45}} = \dfrac{\frac{9}{15} - \frac{5}{15}}{\frac{5}{45} + \frac{15}{45} - \frac{4}{45}} =$

$= \dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{16}{45}} = \dfrac{4}{15} : \dfrac{16}{45} = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{45}{16} =$

$= \dfrac{4 \cdot 45}{15 \cdot 16} = \dfrac{3}{4}$

10. Από $3\frac{1}{2}$ κιλά κρέας πόσες μερίδες του $\frac{1}{4}$ του κιλού μπορούμε να πάρουμε;

Λύση

$3\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{2} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{4}{1} = \dfrac{28}{2} = 14$

Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε 14 μερίδες.

11. Ένας οινοπαραγωγός θέλει να εμφιαλώσει 900 l κρασί σε φιάλες των $\frac{3}{4}$ l. Πόσες φιάλες θα χρειαστεί;

Λύση

Κάθε φιάλη περιέχει $\frac{3}{4}$ l. Άρα τα 900 l θα περιέχονται σε $900 : \dfrac{3}{4} = 900 \cdot \dfrac{4}{3} =$

$=$ 1200 φιάλες.

12. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα ενός αυτοκινήτου που χρειάστηκε $2\frac{1}{4}$ h για να διανύσει μια απόσταση 220 km.

Λύση

Η μέση ταχύτητα βρίσκεται αν διαιρέσουμε την απόσταση που διάνυσε με το χρόνο που χρειάστηκε για να τη διανύσει. Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου λοιπόν είναι:

$220 : 2\dfrac{1}{4} = 220 : \dfrac{9}{4} = 220 \cdot \dfrac{4}{9} =$

$= \dfrac{880}{9} = 97,8$ Km ανά ώρα.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\frac{3}{7} : \frac{21}{5}$ β) $\frac{5}{12} : \frac{4}{7}$

γ) $\frac{9}{8} : 4$ δ) $5 : \frac{4}{9}$

Λύση

α) $\frac{3}{7} : \frac{21}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{21} = ...$

β) $\frac{5}{12} : \frac{4}{7} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{4} = ...$

γ) $\frac{9}{8} : 4 = ...$ δ) $5 : \frac{4}{9} = ...$

2. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με δυο τρόπους:

α) $\left(\frac{7}{25} + \frac{3}{20} + \frac{3}{100}\right) : \frac{2}{25}$

β) $\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{4}{35}\right) : \frac{3}{2}$

Λύση

Κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ή χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.

α) $\left(\overset{4}{\frac{7}{25}} + \overset{5}{\frac{3}{20}} + \overset{1}{\frac{3}{100}}\right) : \frac{2}{25} = ...$

ή $\frac{7}{25} : \frac{2}{25} + \frac{3}{20} : \frac{2}{25} + \frac{3}{100} : \frac{2}{25} = ..$

β) $\left(\overset{10}{\frac{2}{7}} + \overset{7}{\frac{1}{10}} + \overset{2}{\frac{4}{35}}\right) : \frac{3}{2} = ...$

ή $\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{4}{35}\right) : \frac{3}{2} =$

$= \frac{2}{7} : \frac{3}{2} + \frac{1}{10} : \frac{3}{2} + \frac{4}{35} : \frac{3}{2} = ...$

3. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$\left(1 - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{17}{50} - \frac{1}{10}\right) +$

$+ \left(\frac{3}{7} + \frac{6}{5} - \frac{12}{35}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7} : 5\right)$

Λύση

Κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

$\left(1 - \overset{1}{\frac{1}{5}}\right) : \left(\overset{1}{\frac{17}{50}} - \overset{5}{\frac{1}{10}}\right) +$

$+ \left(\overset{5}{\frac{3}{7}} + \overset{7}{\frac{6}{5}} - \overset{1}{\frac{12}{35}}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5}\right) = ...$

4. Να κάνετε τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\dfrac{\frac{7}{8}}{14}$ β) $\dfrac{9}{\frac{12}{7}}$ γ) $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{10}{9}}$ δ) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}}$

Λύση

α) $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{14}{1}} = \dfrac{7 \cdot 1}{8 \cdot 14} = \dfrac{1}{16}$

β) $\dfrac{\frac{9}{1}}{\frac{12}{7}} = ...$ γ) $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{10}{9}} = ...$

δ) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}} = ...$

5. Να κάνετε απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

α) $\dfrac{5 + \frac{2}{3} : \frac{4}{5}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}$ β) $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{7} : \frac{6}{7}}$

Λύση

α) $\dfrac{5+\frac{2}{3}:\frac{4}{5}}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \dfrac{5+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}}{1+\frac{1\cdot 2}{4\cdot 3}} = \ldots$

β) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{7}:\frac{6}{7}} = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\frac{33}{27}:\frac{22}{9}$ β) $\frac{44}{45}:\frac{22}{27}$ γ) $\frac{25}{72}:\frac{75}{16}$

δ) $\frac{9}{10}:\frac{81}{100}$ ε) $\frac{64}{57}:\frac{24}{95}$ στ) $\frac{84}{91}:\frac{24}{7}$

ζ) $\frac{30}{121}:\frac{144}{55}$ η) $\frac{96}{125}:\frac{64}{75}$

2. Να διατάξετε από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τα πηλίκα των παρακάτω διαιρέσεων:

α) $\frac{7}{36}:\frac{7}{5}$ β) $\frac{7}{4}:9$

γ) $\frac{1}{39}:\frac{3}{26}$ δ) $\frac{41}{3}:\frac{82}{4}$

3. Να κάνετε με 2 διαφορετικούς τρόπους τις παρακάτω πράξεις:

α) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{5}{12}\right):\frac{2}{3}$

β) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right):\frac{7}{8}$

γ) $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{7}{6}$

δ) $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right):\frac{4}{5}$

4. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

α) $\left(\frac{3}{10}:\frac{6}{25}\right):\frac{5}{4}$ β) $\frac{3}{10}:\left(\frac{6}{25}:\frac{5}{4}\right)$

γ) $\left(\frac{9}{8}:\frac{27}{20}\right):\frac{25}{12}$ δ) $\frac{9}{8}:\left(\frac{27}{20}:\frac{25}{12}\right)$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{32}{45}:8-\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{54}+\frac{1}{3}:\frac{3}{2}+\frac{1}{4}:\frac{9}{2}$

β) $\left(\frac{7}{2}:14+\frac{3}{10}:\frac{12}{5}\right):$
$:\left(\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{12}-\frac{3}{4}:4\right)+\frac{2}{7}\cdot 7-1$

γ) $\left[\left(3-\frac{11}{7}\right):\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{14}\right)\cdot 5\right]:$
$:\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}$

6. Να γίνουν τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\dfrac{3}{\frac{2}{3}}$ β) $\dfrac{9}{\frac{7}{27}}$ γ) $\dfrac{25}{\frac{8}{75}}$

δ) $\dfrac{\frac{3}{4}}{16}$ ε) $\dfrac{\frac{8}{9}}{27}$ στ) $\dfrac{\frac{9}{8}}{4}$

ζ) $\dfrac{\frac{22}{7}}{\frac{33}{4}}$ η) $\dfrac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{10}}$ θ) $\dfrac{\frac{18}{25}}{\frac{9}{4}}$

7. Να γίνουν τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\dfrac{\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}:3\right)}{1-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}:\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{10}\right)}$

β) $\dfrac{1+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}:\frac{16}{5}\right)}{2-\frac{13}{16}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\right)+\frac{16}{5}}$

8. Να βρείτε το μήκος πλευράς τετραγώνου, αν η περίμετρός του είναι $19\frac{1}{4}$ m.

9. Ένα εμπόρευμα πουλιέται με κέρδος $\frac{5}{21}$ της αξίας του αντί 52.000 δρχ. Ποια είναι η αξία του;

10. Στο θαλασσινό νερό το $\frac{1}{20}$ του βάρους του είναι αλάτι. Πόσο καθαρό νερό πρέπει να αναμίξουμε σε 80 g θαλασσινού νερού ώστε το αλάτι να είναι το $\frac{1}{40}$ του βάρους του;

11. Μια μπαλίτσα ρίχνεται από κάποιο ύψος και αναπηδά. Κάθε φορά ανεβαίνει τα $\frac{2}{7}$ του προηγούμενου ύψους.

Από ποιο ύψος ρίχνεται αρχικά αν στην τρίτη αναπήδηση ανέβηκε σε ύψος 1,5 m;

3. 10 Δεκαδικά κλάσματα – δεκαδικοί αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Ποια κλάσματα ονομάζονται δεκαδικά κλάσματα;	1. **Δεκαδικά κλάσματα** ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή κάποια δύναμη του 10. Δηλαδή τα κλάσματα $\frac{5}{100}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{123}{1000}$, $\frac{66}{10.000}$ κλπ. ονομάζονται δεκαδικά κλάσματα.
2. Με ποιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα σαν δεκαδικό αριθμό;	2. Αν δίνεται κάποιο δεκαδικό κλάσμα μπορούμε να το γράψουμε σαν δεκαδικό αριθμό με τον ακόλουθο τρόπο: Παίρνουμε τον αριθμητή του και χωρίζουμε τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενι- Π.χ $\frac{512}{100} = 5,12$, ή $\frac{3}{1000} = 0,003$
3. Με ποιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε ένα δεκαδικό αριθμό σαν δεκαδικό κλάσμα;	3. Αν δίνεται κάποιος δεκαδικός αριθμός μπορούμε να τον γράψουμε σαν δεκαδικό κλάσμα με τον ακόλουθο τρόπο: Γράφουμε σαν αριθμητή τον ακέραιο, που προκύπτει από το δεκαδικό αριθμό, παραλείποντας την υποδιαστολή και παρονομαστή βάζουμε τη μονάδα ακολουθούμενη από τόσα μηδενικά όσα και τα

δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού.

Π.χ $1,32 = \frac{132}{100}$, ή $0,4 = \frac{4}{10}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν σαν δεκαδικοί αριθμοί τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

$\frac{2}{100}$, $\frac{14}{10}$, $\frac{125}{1000}$, $\frac{536}{10}$, $\frac{80}{100}$, $\frac{501}{1000}$, $\frac{87}{1000}$, $\frac{4}{100}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{2}{100} = 0,02$, $\frac{14}{10} = 1,4$

$\frac{125}{1000} = 0,125$, $\frac{536}{10} = 53,6$,

$\frac{80}{100} = 0,80$, $\frac{501}{1000} = 0,501$,

$\frac{87}{1000} = 0,087$, $\frac{4}{100} = 0,04$

2. Να γραφούν σαν δεκαδικά κλάσματα οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί:
0,05 , 0,127 , 2,2 , 0,15 , 10,1 , 53,67

Λύση

Έχουμε: $0,05 = \frac{5}{100}$, $0,127 = \frac{127}{1000}$

$0,15 = \frac{15}{100}$ $10,1 = \frac{101}{10}$, $2,2 = \frac{22}{10}$,

$53,67 = \frac{5367}{100}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν σαν δεκαδικοί αριθμοί τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

$\frac{35}{1000}$, $\frac{28}{10}$, $\frac{736}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{529}{100}$, $\frac{10020}{1000}$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά: $\frac{35}{1000} = 0,035$,

$\frac{28}{10} = 2,8$, $\frac{736}{10} = ...$

2. Να γραφούν σαν δεκαδικά κλάσματα οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί:
0,9 35,24 28,9 0,47

Λύση

Έχουμε ότι: $0,9 = \frac{9}{10}$, $35,24 = \frac{3524}{100}$

28,9 = ..

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γραφούν σαν δεκαδικοί αριθμοί τα παρακάτω δεκαδικά κλάσματα:

$\frac{835}{1000}$, $\frac{16}{10000}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{86}{1000}$

2. Ομοίως τα παρακάτω:

$\frac{532}{10}$, $\frac{10751}{100}$, $\frac{947}{1000}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{188}{10}$

3. Να γραφούν σαν δεκαδικά κλάσματα οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί:
0,37 1,8032 2,39 1,851 0,649 22,77 9,03 0,01.

4. Ομοίως οι παρακάτω:
9,501 100,1 1,5 0,021 7,37 0,0016 8,37 14,405.

3. 11 Τροπή κλάσματος σε δεκαδικό

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Με ποιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε ένα κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό;	1. Όπως γνωρίζουμε ένα κλάσμα υποδηλώνει τη διαίρεση του αριθμητή διά τον παρονομαστή. Έτσι όταν θέλουμε να γράψουμε ένα κλάσμα σαν δεκαδικό αριθμό κάνουμε τη διαίρεση του αριθμητή διά τον παρονομαστή.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν ως δεκαδικοί αριθμοί τα κλάσματα:

$\frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{23}{46}, \frac{3}{4}, \frac{12}{8}, \frac{25}{4}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125$ $\quad \frac{5}{16} = 5 : 16 = 0,31$

$\frac{23}{46} = 23 : 46 = 0,5$ $\quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$

$\frac{12}{8} = 12 : 8 = 1,5$ $\quad \frac{25}{4} = 25 : 4 = 6,25$

2. Να γραφεί καθένα από τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικός α) με προσέγγιση εκατοστού, β) με προσέγγιση χιλιοστού.

$\frac{5}{13}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{13}{11}, \frac{76}{23}$

Λύση

α) Με προσέγγιση εκατοστού έχουμε:

$\frac{5}{13} = 5 : 13 = 0,38$ $\quad \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,67$

$\frac{7}{6} = 7 : 6 = 1,17$ $\quad \frac{13}{11} = 13 : 11 = 1,18$

$\frac{76}{23} = 76 : 23 = 3,30$

β) Με προσέγγιση χιλιοστού έχουμε:

$\frac{5}{13} = 5 : 13 = 0,385$ $\quad \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,667$

$\frac{7}{6} = 7 : 6 = 1,167$ $\quad \frac{13}{11} = 13 : 11 = 1,118$

$\frac{76}{23} = 76 : 23 = 3,304$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν ως δεκαδικοί αριθμοί τα κλάσματα:

$\frac{98}{56}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{75}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1580}{32}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{98}{56} = 98 : 56 = 1,75$

$\frac{19}{4} = 19 : 4 = 4,75$ $\frac{75}{12} = 75 : 12 = ...$

2. Να γραφούν τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικοί με α) προσέγγιση εκατοστού, β) προσέγγιση χιλιοστού.

$\frac{3}{14}$, $\frac{8}{65}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{35}{15}$

Λύση

α) Έχουμε: $\frac{3}{14} = 3 : 14 = 0,21$, ...

β) Έχουμε: $\frac{3}{14} = 3 : 14 = 0,214$, ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γραφούν τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί:

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{57}{15}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{32}$

2. Να γραφεί καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε μορφή δεκαδικού α) με προσέγγιση δεκάτου, β) με προσέγγιση εκατοστού, γ) με προσέγγιση χιλιοστού.

$\frac{11}{27}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{187}{51}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{3}$

3. 12 Η έννοια του ποσοστού

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι εννοούμε με το σύμβολο α % και πώς ονομάζεται;

2. Τι εννοούμε με το σύμβολο α ‰ και πώς ονομάζεται;

Απαντήσεις

1. Με το σύμβολο α % εννοούμε το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$ και ονομάζεται **ποσοστό άλφα επί τοις εκατό** ή απλούστερα **ποσοστό.**

2. Με το σύμβολο α ‰ εννοούμε $\frac{\alpha}{1000}$ και ονομάζεται **ποσοστό άλφα επί τοις χιλίοις.**

3. Τι σημαίνει έκπτωση α%;

3. Έκπτωση α% σημαίνει ότι, η τιμή πώλησης ενός προϊόντος μειώνεται κατά τα α/100 της.
π.χ. Αν σε ένα βιβλίο με τιμή πώλησης 3.500 δρχ. γίνει έκπτωση 10% τότε η αρχική τιμή πωλήσεώς του μειώνεται κατά:

$$\frac{10}{100} \cdot 3500 = 350 \text{ δρχ.}$$

4. Τι σημαίνει ποσοστό κέρδους α%;

4. Ποσοστό κέρδους α% σημαίνει ότι κατά την πώληση ενός προϊόντος το κέρδος είναι τα α/100 της τιμής κόστους (ή αγοράς).

5. Τι σημαίνει ποσοστό κέρδους α % στην τιμή πώλησης;

5. Ποσοστό κέρδους α % στην τιμή πώλησης σημαίνει ότι κατά την πώληση ενός προϊόντος το κέρδος είναι το α/100 της τιμής της πώλησης.

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι:
α) **Τιμή αγοράς** λέγεται το χρηματικό ποσό το οποίο δίνεται από τον έμπορο για την αγορά ενός εμπορεύματος.
β) **Τιμή κόστους** λέγεται το άθροισμα της τιμής αγοράς και των υπολοίπων εξόδων (φόροι, μεταφορικά κ.λπ.) με τα οποία επιβαρύνεται το εμπόρευμα.
γ) **Τιμή πώλησης** λέγεται το ποσό που εισπράττεται από τον έμπορο κατά την πώληση ενός εμπορεύματος.

6. Τι σημαίνει ζημιά α %;

6. Ζημιά α % επί της αρχικής αξίας σημαίνει ότι κατά την πώληση ενός προϊόντος η αρχική τιμή του μειώνεται κατά τα α/100 αυτής.
π.χ. Ένα ραδιόφωνο αξίας 5.000 δρχ. πωλήθηκε με ζημιά 5%. Αυτό σημαίνει ότι πωλήθηκε:

$$\frac{5}{100} \cdot 5000 = \frac{25000}{100} = 250 \text{ δρχ.}$$

φθηνότερα, δηλαδή η αξία του έπεσε στις 5.000 - 250 = 4.750 δρχ.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γραφούν με μορφή ποσοστών τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{100}$ **β)** $\frac{4}{100}$ **γ)** $\frac{3}{5}$ **δ)** $\frac{8}{10}$ **ε)** $\frac{20}{250}$

Λύση

α) $\frac{3}{100} = 3\%$ β) $\frac{4}{100} = 4\%$

γ) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$

δ) $\frac{8}{10} = \frac{8 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{80}{100} = 80\%$

ε) $\frac{20}{250} = \frac{2}{25} = \frac{2 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{8}{100} = 8\%$

2. Να γραφούν με μορφή ποσοστών τα κλάσματα:

α) $\frac{9}{15}$ **β)** $\frac{59}{50}$ **γ)** $\frac{17,92}{128}$

δ) $\frac{76,72}{137}$ **ε)** $\frac{351,44}{1528}$

Λύση

α) $\frac{9}{15} = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{60}{100} = 60\%$

β) $\frac{59}{50} = \frac{59 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{118}{100} = 118\%$

γ) $\frac{17,92}{128} = 0,14 = \frac{14}{100} = 14\%$

δ) $\frac{76,72}{137} = 0,56 = \frac{56}{100} = 56\%$

ε) $\frac{351,44}{1528} = 0,23 = \frac{23}{100} = 23\%$

3. Να γραφούν με μορφή κλασμάτων τα ποσοστά:

α) 3% β) 17% γ) 123% δ) 20,5%
ε) 27,3%

Λύση

α) $3\% = \frac{3}{100}$ β) $17\% = \frac{17}{100}$

γ) $123\% = \frac{123}{100}$ δ) $20,5\% = \frac{20,5}{100}$

ε) $27,3\% = \frac{27,3}{100}$

4. Να υπολογίσετε:
α) Το 17% του 535 β) Το 25% του 192
γ) Το 15% του 4.800 δ) Το 4,5% του 180
ε) Το 150‰ του 480
στ) Το 6,5‰ του 17.100

Λύση

α) $\frac{17}{100} \cdot 535 = \frac{17 \cdot 535}{\cdot 100} = \frac{9095}{100} = 90,95$

β) $\frac{25}{100} \cdot 192 = \frac{25 \cdot 192}{100} = \frac{4800}{100} = 48$

γ) $\frac{15}{100} \cdot 4800 = \frac{15 \cdot 4800}{100} = \frac{72000}{100} = 720$

δ) $\frac{4,5}{100} \cdot 180 = \frac{4,5 \cdot 180}{100} = \frac{810}{100} = 8,1$

ε) $\frac{150}{1000} \cdot 480 = \frac{150 \cdot 480}{1000} = \frac{72000}{1000} = 72$

στ) $\frac{6,5}{1000} \cdot 17100 = \frac{6,5 \cdot 17100}{1000} =$

$= \frac{111150}{1000} = 111,15$

5. Να εξηγήσετε τι σημαίνουν οι εκφράσεις:
α) Το 53% των μαθητών είναι αγόρια
β) Το 3% των ψήφων ήταν λευκά
γ) Το ενοίκιο αυξήθηκε κατά 10%
δ) Η εμπορική κίνηση αυξήθηκε κατά 8% φέτος.

Λύση

α) Αν το σχολείο έχει 100 μαθητές τα 53 είναι αγόρια και τα υπόλοιπα 47 κορίτσια.

β) Σε κάθε 100 ψήφους οι 3 είναι λευκές.

γ) Σε κάθε 100 δρχ. από το ποσό του ενοικίου ο ενοικιαστής πρέπει να πληρώσει 10 δρχ. παραπάνω.

δ) Αν είχαν γίνει 100 εμπορικές πράξεις (αγορές - πωλήσεις), τα προηγούμενα χρόνια, φέτος έγιναν 100 + 8 = 108.

6. Ο Θωμάς αγόρασε ένα παντελόνι αξίας 10.000 δρχ. και ο έμπορος του έκανε έκπτωση 1.250 δρχ. Να βρεθεί το ποσοστό έκπτωσης.

Λύση

Η έκπτωση είναι τα $\frac{1250}{10000}$ της αρχικής αξίας του παντελονιού. Οπότε έχουμε:

$$\frac{1250}{10000} = \frac{125}{100} = 12{,}5\% \text{ έκπτωση.}$$

7. Ένας έμπορος αγόρασε 2.000 kg μήλα προς 48.000 δρχ. Αν κατά τη μεταφορά τους σάπισαν 60 kg, πόσο τοις εκατό (%) των φρούτων του θα πωλήσει; Πόσες δραχμές το κιλό πρέπει να πωλήσει για να έχει κέρδος 10.200 δρχ.;

Λύση

Από τα 2000 kg μήλα του σάπισαν 60 kg

δηλαδή τα $\frac{60}{2000} = 0,03 = 3\,\%$.

Άρα θα πωλήσει το 100 – 3 = 97% των φρούτων. Τα «γερά» μήλα που έμειναν είναι:
2.000 - 60 = 1.940 kg.
Πρέπει λοιπόν από τα 1.940 kg μήλα να εισπράξει: 48.000 + 10.200 = 58.200 δρχ. Άρα πρέπει να πωλήσει προς 58.200 : 1.940 = 30 δρχ. το κιλό.

8. Στην περίοδο των εκπτώσεων ένα πολυκατάστημα κάνει σε όλα τα είδη του 12% έκπτωση. Πόσο θα πληρώσουμε για ένα ποδήλατο αξίας 35.500 δρχ.;

Λύση

Η έκπτωση είναι:

$$\frac{12}{100} \cdot 35.500 = 12 \cdot 355 = 4.260 \text{ δρχ.}$$

Άρα θα πληρώσουμε:
35.500 - 4.260 = 31.240 δρχ.

9. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής πριν από τις εκπτώσεις κόστιζε 275.000 δρχ., ενώ τώρα, στην περίοδο εκπτώσεων τον πουλάνε 260.000 δρχ. Να βρεθεί το ποσοστό της έκπτωσης που έγινε.

Λύση

Η έκπτωση που έγινε ήταν:
275.000 – 260.000 = 15.000 δρχ.
που σημαίνει ότι είναι τα:

$$\frac{15000}{275000} = \frac{15}{275} \cong 0{,}05 \text{ της αρχικής}$$

τιμής. Άρα το ποσοστό της έκπτωσης ήταν 5%.

10. Το ενοίκιο ενός σπιτιού ήταν 40.000 δρχ. Έγινε μια πρώτη αύξηση κατά 10% και μετά από λίγους μήνες μια δεύτερη αύξηση κατά 15%. Να βρεθεί η αξία του ενοικίου α) μετά την πρώτη αύξηση, β) μετά τη δεύτερη αύξηση. γ) Κάποιος ισχυρίζεται ότι η τιμή του ενοικίου αυξήθηκε συνολικά κατά 25%. Να εξετάσετε αν είναι σωστή η άποψη αυτή.

Λύση

α) Η πρώτη αύξηση είναι ίση με:

$$\frac{10}{100} \cdot 40000 = 4000 \text{ δρχ.}$$

Επομένως μετά την πρώτη αύξηση, το ενοίκιο θα είναι 44.000 δρχ.
β) Μετά τη δεύτερη αύξηση το ενοίκιο θα είναι:

$$44000 + \frac{15}{100} \cdot 44000 =$$

$$= 44000 + 15 \cdot 440 = 44000 + 6600 =$$
$$= 50600 \text{ δρχ.}$$

γ) Η συνολική αύξηση ήταν:
4.000 + 6.000 = 10.600 δρχ που είναι

$$\text{τα } \frac{10600}{40000} = 0{,}265 \text{ της αρχικής τιμής}$$

ή 26,5% και όχι 25%.

Παρατήρηση:

Η άποψη ότι η τιμή του ενοικίου αυξήθηκε συνολικά κατά 25% δεν είναι σωστή, γιατί η δεύτερη αύξηση δεν έγινε στις 40.000 δρχ. αλλά στις 44.000 δρχ. που είναι η νέα τιμή του ενοικίου μετά την πρώτη αύξηση.

11. Η τιμή ενός εμπορεύματος αυξήθηκε κατά 10% και κοστίζει τώρα 5.970 δρχ. Να βρεθεί η τιμή του πριν από την αύξηση.

Λύση

Η αύξηση ήταν ίση με 10/100 της αρχικής τιμής.
Θεωρούμε ότι η αρχική τιμή είναι το 100/100, τότε η τιμή μετά την αύξηση είναι:

$\frac{100}{100} + \frac{10}{100} = \frac{110}{100}$ της αρχικής τιμής.

Έτσι έχουμε:

Το $\frac{110}{100}$ της αρχικής τιμής είναι 5970 δρχ

Τα $\frac{1}{100}$ της αρχικής τιμής είναι $\frac{5970}{110}$ δρχ

Τα $\frac{100}{100}$ της αρχικής τιμής είναι

$100 \cdot \frac{5970}{110} = 5427{,}5$ δρχ.

Άρα η τιμή του εμπορεύματος πριν από την αύξηση κατά 10 % ήταν 5.427,5 δρχ.

12. Στην τιμή ενός εμπορεύματος έγινε έκπτωση 15% και κοστίζει 12.750 δρχ. Να βρεθεί η τιμή του πριν από την έκπτωση.

Λύση

Η έκπτωση ήταν ίση με 15/100 της αρχικής τιμής. Η τελική τιμή του εμπορεύματος θα είναι:

Τα $\frac{(100 - 15)}{100} = \frac{85}{100}$ της αρχικής τιμής

οπότε τα $\frac{85}{100}$ της αρχικής τιμής είναι 12750 δρχ.

Το $\frac{1}{100}$ της αρχικής τιμής είναι $\frac{12750}{85}$

Τα $\frac{100}{100}$ της αρχικής τιμής είναι

$100 \cdot \frac{12750}{85} = 15000$ δρχ.

Άρα η τιμή του εμπορεύματος πριν από την έκπτωση κατά 15 % ήταν 15000.

13. Δύο φίλοι βάζουν από 480.000 δρχ. και φτιάχνουν μια επιχείρηση. Τον πρώτο χρόνο κερδίζουν 15% των χρημάτων που έβαλαν. Όμως το δεύτερο χρόνο χάνουν 10% των χρημάτων που είχαν στο τέλος του πρώτου χρόνου. Γι' αυτό αποφασίζουν να διαλύσουν το συνεταιρισμό και να μοιραστούν τα χρήματα. Από πόσα χρήματα θα πάρουν;

Λύση

Το κεφάλαιο της επιχείρησης ήταν:
$2 \cdot 480.000 = 960.000$ δρχ.
Τον πρώτο χρόνο τα κέρδη τους ήταν:

$\frac{15}{100} \cdot 960.000 = 144.000$ δρχ.

Έτσι το αρχικό κεφάλαιο από 960.000 δρχ. έγινε:
$960.000 + 144.000 = 1.104.000$ δρχ.
Αφού χάνουν 10% στο τέλος του δευτέρου χρόνου θα μοιραστούν τα:

$\frac{100}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$ των χρημάτων τους.

δηλ. $\frac{90}{100} \cdot 1.104.000 = 993.600$ δρχ.

Τελικά ο καθένας θα πάρει:
$993.600 : 2 = 496.800$ δρχ.

Β. Μισο.. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν ο Ο.Τ.Ε αυξήσει την τιμή μονάδος από 5 σε 8 δρχ., να βρεθεί το ποσοστό αύξησης της μονάδος.

Λύση

Η τιμή μονάδος αυξήθηκε κατά 8 - 5 = 3 δρχ., και αποτελούν τα 3/5 = 0,6 της αρχικής τιμής...

2. Η βενζίνη σούπερ κοστίζει 160 δρχ. το λίτρο και η απλή κοστίζει 145 δρχ. το λίτρο. Αν η τιμή τους αυξηθεί κατά 12% να βρεθεί η νέα τιμή της βενζίνης.

Λύση

Βρίσκουμε πόσο αυξήθηκε η σούπερ.

$$\frac{12}{100} \cdot 160 = \frac{12 \cdot 160}{100} = \frac{1920}{100} = 19{,}2 \text{ δρχ.}$$

Άρα η σούπερ θα κοστίζει:
160 + 19,2 = 179,2 δρχ. ...

3. Σε κάποιο νομό της Ελλάδας, το 1990 οι γεννήσεις ήταν 18‰ και οι θάνατοι 11‰, οπότε ο πληθυσμός έγινε 375.125. Να βρεθούν πόσες ήταν οι γεννήσεις.

Λύση

Επειδή σε κάθε 1.000 άτομα γεννήθηκαν 18 και πέθαναν 11 προκύπτει ότι τα 1.000 άτομα έγιναν 1.018 - 11 = 1.007.
Οι γεννήσεις ήταν 18.....

4. Ο χυτοσίδηρος είναι κράμα σιδήρου και άνθρακα. Περιέχει 95% σίδηρο και 5% άνθρακα. Αν ο λέβητας της πολυκατοικίας (κατασκευασμένος από χυτοσίδηρο) ζυγίζει 150 κιλά. Πόσα κιλά σίδηρο και πόσα κιλά άνθρακα περιέχει;

Λύση

Ο λέβητας περιέχει $\frac{95}{100} \cdot 150 = 142{,}5$ κιλά σίδηρο. Ο άνθρακας που περιέχει είναι...

5. Να υπολογίσετε:
α) Το 15% των 5.000 δρχ., 1.000 l, 2 kg
β) Το 2,5% των 5 στρεμμάτων, 2,5 l.
γ) Το 12,75% των 8 km, 200 m, 800 g.

Λύση

α) Το 15 % των 5000 δρχ. είναι

$$\frac{15}{100} \cdot 5000 = \frac{75000}{100} = 750 \text{ δρχ.}$$

Το 15% των 1000 l είναι:

$$\frac{15}{100} \cdot 1000 = \frac{15 \cdot 1000}{100} = 150 \text{ l}$$

6. Ο μηνιαίος μισθός ενός εργάτη είναι 95.150 δρχ. και επ' αυτού γίνονται 18% κρατήσεις. Πόσο είναι το «καθαρό» ημερομίσθιο του εργάτη, αν ο μήνας έχει 24 εργάσιμες μέρες;

Λύση

Οι κρατήσεις είναι:

$$\frac{18}{100} \cdot 95150 = \frac{1712700}{100} = 17127 \text{ δρχ.}$$

Άρα τα «καθαρά» χρήματα που παίρνει στο τέλος του μηνός είναι:
95150 - 17127 = ...

7. Να υπολογιστούν τα x, y, z, ω στον παρακάτω πίνακα που παριστάνει τα αποτελέσματα μιας δημοσκόπησης (γκάλοπ).

Απαντήσεις	%	Αριθμός Απαντήσεων
ΝΑΙ	44	y
ΟΧΙ	37	z
Δεν έχουν γνώμη	x	ω
Σύνολο	100	2100

Λύση

Το ποσοστό των απαντήσεων «χωρίς γνώμη» είναι:
$x = 100 - (44 + 37) = 100 - 81 = 19$
Το 44% του 2.100 είναι $y = ...$

8. Το εργατικό δυναμικό μιας πόλης είναι 19.000 άτομα. Το 15% αυτών είναι άνεργοι, ενώ το 20% είναι υποαπασχολούμενοι. Να βρεθούν πόσα άτομα εργάζονται κανονικά;

Λύση

Οι κανονικοί εργαζόμενοι είναι τα:
$100 - (15 + 20) = 100 - 35 = 65\%$ του εργατικού δυναμικού. Άρα ...

9. Ένας υποψήφιος δήμαρχος πήρε στις τελευταίες εκλογές 12.520 ψήφους. Αν το σύνολο των έγκυρων ψήφων που μετρήθηκαν ήταν 25.040, ποιο είναι το ποσοστό επί τοις εκατό των ψήφων που πήρε;

Λύση

Ο υποψήφιος δήμαρχος πήρε 12.520 ψήφους από τους 25.040 που είναι το:

$\frac{12520}{25040} = 0,5$ των ψήφων, δηλαδή ......

10. Στην περίοδο των εκπτώσεων ένα πολυκατάστημα κάνει σε όλα τα είδη του 20% έκπτωση. Πόσο θα πληρώσουμε για ένα ζευγάρι παπούτσια αξίας 11.500 δρχ.;

Λύση

Η έκπτωση είναι:

$\frac{20}{100} \cdot 11.500 = ...$

11. Ένα ποδήλατο πριν τις εκπτώσεις κόστιζε 26.500 δρχ. και κατά τις εκπτώσεις πουλήθηκε 23.320 δρχ. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης;

Λύση

Η έκπτωση ήταν:
$26.500 - 23.320 = 3.180$ δρχ...

12. Ένα στερεοφωνικό συγκρότημα κοστίζει 100.000 δρχ. Έγινε μια πρώτη αύξηση κατά 10% και μετά από λίγους μήνες μια δεύτερη αύξηση κατά 12%. Να βρεθεί η αξία του στερεοφωνικού συγκροτήματος μετά τη δεύτερη αύξηση. Είναι σωστή η άποψη ότι η τιμή αυξήθηκε συνολικά κατά 22%;

Λύση

Η πρώτη αύξηση είναι ίση με:

$\frac{10}{100} \cdot 100.000 = 0,1 \cdot 100.000 = 10.000$ δρχ.

Επομένως η αξία του συγκροτήματος θα είναι:
$100.000 + 10.000 = 110.000$ δρχ.
Μετά τη δεύτερη αύξηση θα κοστίζει...

13. Ένας οπωροπώλης εξ αιτίας της χαμηλής ζήτησης αποφάσισε να πωλήσει τις μπανάνες προς 550 δρχ. το κιλό, ενώ τις είχε αγοράσει 600 δρχ. το κιλό. Να βρείτε το ποσοστό ζημιάς του.

Λύση

Στις 600 δρχ. ζημιώνεται:
$600 - 550 = 50$ δρχ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γράψετε με μορφή ποσοστών τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{2}{5}, \frac{1}{20}, \frac{7}{8}, \frac{10}{24}, \frac{17}{32}$

β) $\frac{170}{525}, \frac{231}{6}, \frac{730}{1200}, \frac{605}{1100}$

γ) $\frac{164}{8}, \frac{18,72}{156}, \frac{6,35}{250}$

2. Να γράψετε με μορφή κλασμάτων τα παρακάτω ποσοστά:
α) 11% 7% 13% 37%
β) 12,3% 116,5% 3,15%
γ) 133% 201% 135,7%

3. Να υπολογίσετε:
α) Το 41% του 526
β) Το 6,2% του 320
γ) Το 19% του 1

4. Να υπολογίσετε:
α) Το 150‰ του 55
β) Το 1.710‰ του 549
γ) Το 8‰ του 1950

5. Ένας μισθωτός ξοδεύει το 20% του μισθού του για τρόφιμα. Αν ο μισθός του είναι 120.000 δρχ., πόσα χρήματα του μένουν;

6. Ένας έμπορος αναμειγνύει 500 kg λάδι πρώτης ποιότητας με λάδι δεύτερης ποιότητας και φτιάχνει 1.810 kg μείγματος. Τι ποσοστό δεύτερης ποιότητος υπάρχει στο μείγμα;

7. Μια οικογένεια έχει έσοδα 150.300 δρχ. το μήνα. Ξοδεύει το 30% των χρημάτων για ενοίκιο, το 35% για τροφή, το 14% για ρούχα και τα υπόλοιπα τα αποταμιεύει. Πόσα χρήματα αποταμιεύει;

8. Για να κατασκευαστεί μια ατσάλινη πόρτα χρησιμοποιήθηκαν 135 kg σίδηρος και 7 kg άνθρακα. Να βρεθεί το ποσοστό του σιδήρου και το ποσοστό του άνθρακα μέσα στο κράμα αυτό.

9. Να υπολογίσετε το ποσοστό αυξήσεως των τελών κυκλοφορίας των δικύκλων, αν γίνουν από 4.500 δρχ. 6.950 δρχ.

10. Ένας οπωροπώλης αγόρασε 250 kg πατάτες και πλήρωσε 9.000 δρχ. Τα 3/5 από τις πατάτες τα πούλησε με κέρδος 22% και τα υπόλοιπα με 35 δρχ. το κιλό. Να βρεθεί αν κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο.

11. Το σύνολο των μαθητών ενός τμήματος είναι 36 άτομα. Κατά τη διάρκεια των μαθητικών εκλογών ένας υποψήφιος μαθητής πήρε 13 ψήφους, ένας άλλος πήρε 15 ψήφους και ένας τρίτος πήρε 8 ψήφους. Πόσο τοις εκατό των ψήφων πήρε ο κάθε υποψήφιος;

12. Μαθητής αγόρασε ένα παντελόνι αξίας 11.500 δρχ. με έκπτωση 20% και ένα σακάκι αξίας 15.000 δρχ. με έκπτωση 15%. Πόσες δραχμές πλήρωσε και πόσο τοις εκατό ήταν η συνολική έκπτωση;

13. Ο μισθός ενός υπαλλήλου αυξάνεται από 92.000 δρχ. σε 105.300 δρχ. Ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης;

3.13 Εφαρμογές των ποσοστών
3.14 Παράσταση ποσοστών με διαγράμματα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Γιατί χρησιμοποιούμε τα ποσοστά;

Απαντήσεις

1. Τα ποσοστά τα χρησιμοποιούμε γιατί μπορούμε με πολύ μικρά νούμερα (π.χ. από το 0 έως το 100), να κάνουμε συγκρίσεις και να καταλαβαίνουμε εύκολα πως μεταβάλλεται ένα μέγεθος π.χ. οι πωλήσεις μιας εταιρείας αυξήθηκαν κατά 12% το μήνα Δεκέμβριο σε σύγκρι-

ση με το προηγούμενο έτος ή η κίνηση των αυτοκινήτων στην εθνική οδό μειώθηκε κατά 30 % τη Δευτέρα σε σύγκριση με την Κυριακή.

2. Τι είναι ο φόρος προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α); Πώς εκφράζεται και από τι εξαρτάται;

2. Ο φόρος προστιθέμενης αξίας είναι ένας ειδικός φόρος που επιβάλλεται πάνω στην αξία ενός αγαθού ή στη τιμή μιας υπηρεσίας. Εκφράζεται με ποσοστό επί τοις εκατό και καθορίζεται με νόμο του Υπουργείου Οικονομικών. Τα ποσοστά του Φ.Π.Α ή οι συντελεστές όπως τους ονομάζουν ποικίλουν ανάλογα με την κατηγορία των αγαθών ή των υπηρεσιών. Έτσι π.χ. αγαθά τα οποία χαρακτηρίζονται ως αγαθά πρώτης ανάγκης έχουν συντελεστή Φ.Π.Α μικρότερο από αυτά, τα οποία χαρακτηρίζονται ως πολυτελείας.

3. Τι είναι το Πάγιο ενός λογαριασμού;

3. Το **Πάγιο** ενός λογαριασμού είναι το σταθερό χρηματικό ποσό που πληρώνει ο καταναλωτής σε κάθε λογαριασμό της επιχείρησης που του προσφέρει υπηρεσίες.

4. Τι είναι τα Δημοτικά τέλη και τι ο Δημοτικός φόρος;

4. Δημοτικά τέλη είναι το αντίτιμο που πληρώνει ο δημότης για τις υπηρεσίες που του παρέχει ο Δήμος (π.χ. καθαριότητα κ.α.).
Δημοτικός φόρος είναι ο φόρος που επιβάλει ο Δήμος στους κατοίκους του.

5. Τι είναι ο τόκος;

5. Τόκος λέγεται το συνολικό κέρδος, που εισπράττει αυτός που δανείζει ή καταθέτει χρήματα.

6. Τι είναι το επιτόκιο;

6. Το **επιτόκιο** είναι ο τόκος των 100 δρχ. σ' ένα χρόνο και εκφράζεται με «ποσοστό επί τοις εκατό».
π.χ. Αν καταθέσουμε στην τράπεζα 100 δρχ. με επιτόκιο 12 %, τότε στο τέλος του χρόνου θα πάρουμε τόκο 12 δρχ.

7. Πώς μπορούν να παρασταθούν τα ποσοστά;

7. Τα ποσοστά μπορούν να παρασταθούν:
α) με πίνακα
β) με ραβδογράμμματα
γ) με ορθογώνια διαγράμματα και
δ) με κυκλικά διαγράμματα.
Στις ασκήσεις που ακολουθούν γίνεται λεπτομερής ανάλυση των παραπάνω τρόπων.

4. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο Φ.Π.Α που αντιστοιχεί σε είδη αξίας 1.500 δρχ. και 17.200 δρχ. αν ο συντελεστής είναι:
α) 6% β) 16% και γ) 36%

Λύση

α) $\frac{6}{100} \cdot 1500 = 6 \cdot 15 = 90$ δρχ.

$\frac{6}{100} \cdot 17200 = 6 \cdot 172 = 1032$ δρχ.

β) $\frac{16}{100} \cdot 1500 = 16 \cdot 15 = 240$ δρχ.,

$\frac{16}{100} \cdot 17200 = 16 \cdot 172 = 2752$ δρχ.

γ) $\frac{36}{100} \cdot 1500 = 36 \cdot 15 = 540$ δρχ.,

$\frac{36}{100} \cdot 17200 = 36 \cdot 172 = 6192$ δρχ.

2. Να βρείτε πόσο θα πρέπει να πληρώσουμε στο ταμείο για είδη αξίας:
α) 1.375 δρχ. β) 16.310 δρχ.
αν ο Φ.Π.Α γι' αυτά έχει συντελεστή 18%.

Λύση

α) Ο Φ.Π.Α είναι $\frac{18}{100} \cdot 1375 = \frac{24750}{100}$

$= 247{,}5$ δρχ.
Επομένως θα πληρώσουμε
$1375 + 247{,}5 = 1622{,}5$ δρχ.

β) Ο Φ.Π.Α είναι $\frac{18}{100} \cdot 16310 = \frac{293580}{100}$

$= 2935{,}8$ δρχ.
Επομένως θα πληρώσουμε:
$16310 + 2935{,}8 = 19245{,}8$ δρχ. δηλ. περίπου 19246 δρχ.

3. Για ένα είδος που έχει συντελεστή Φ.Π.Α 16% πληρώσαμε στο ταμείο συνολικά (αξία + Φ.Π.Α) 9.350 δρχ. Να υπολογιστεί:
α) Η αξία του είδους αυτού χωρίς Φ.Π.Α.
β) Ο Φ.Π.Α που πληρώσαμε γι' αυτό.

Λύση

α) Η επιβάρυνση της αξίας του προϊόντος που αγοράσαμε είναι τα

$\frac{16}{100}$ της αρχικής τιμής. (Με $\frac{100}{100}$ θα εννοούμε την αρχική αξία). Επομένως η τιμή με Φ.Π.Α θα είναι ίση με

$\frac{100}{100} + \frac{16}{100} = \frac{116}{100}$ της αρχικής αξίας.

Το $\frac{116}{100}$ της αρχικής αξίας, σύμφωνα με την υπόθεση είναι 9350 δρχ.

Το $\frac{1}{100}$ είναι $\frac{9350}{116}$ δρχ. οπότε τα

$\frac{100}{100}$ είναι: $\frac{9350}{116} \cdot 100 \cong 8060$ δρχ.

Άρα το είδος χωρίς Φ.Π.Α αξίζει 8060 δρχ.
β) Ο Φ.Π.Α είναι: $9.350 - 8.060 = 1.290$ δρχ.

4. Η Φωτεινή αγόρασε ρούχα αξίας 22.700 δρχ. Να βρεθεί ο Φ.Π.Α που θα πληρώσει, αν ο συντελεστής είναι 16% και τα ρέστα που θα πάρει από 6 πεντοχίλιαρα.

Λύση

Η Φωτεινή θα πληρώσει για Φ.Π.Α

$\frac{16}{100} \cdot 22.700 = 16 \cdot 227 = 3.632$ δρχ.

Επομένως θα πληρώσει συνολικά
$22.700 + 3.632 = 26.332$ δρχ.
Τα ρέστα που θα πάρει από τα 6 πεντοχίλιαρα (30.000 δρχ.) θα είναι:
$30.000 - 26.332 = 3.668$ δρχ.

5. Για είδη αξίας:
α) 125 δρχ. β) 1.235 δρχ. γ) 10.625

δρχ. πληρώσαμε αντίστοιχα μαζί με το Φ.Π.Α 132,5 δρχ., 1.457,3 δρχ. και 14.450 δρχ. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση το συντελεστή του Φ.Π.Α.

Λύση

α) Ο Φ.Π.Α σε δρχ. είναι:
132,5 - 125 = 7,5 δρχ. ή

$$\text{τα } \frac{7,5}{125} = 0,06 = \frac{6}{100} = 6\,\%$$

των 125 δρχ.

β) Ο Φ.Π.Α σε δρχ. είναι:
1457,3 — 1235 = 222,3 δρχ. ή

$$\text{τα } \frac{222,3}{1235} = 0,18 = \frac{18}{100} = 18\,\%$$

των 1235 δρχ.

γ) Ο Φ.Π.Α σε δρχ. είναι:
14450 — 10625 = 3825 δρχ. ή

$$\text{τα } \frac{3825}{10625} = 0,36 = \frac{36}{100} = 36\,\%$$

των 10625 δρχ.

6. Να εξετάσετε αν το συνολικό ποσό πληρωμής του παρακάτω λογαριασμού της Δ.Ε.Η είναι σωστό.

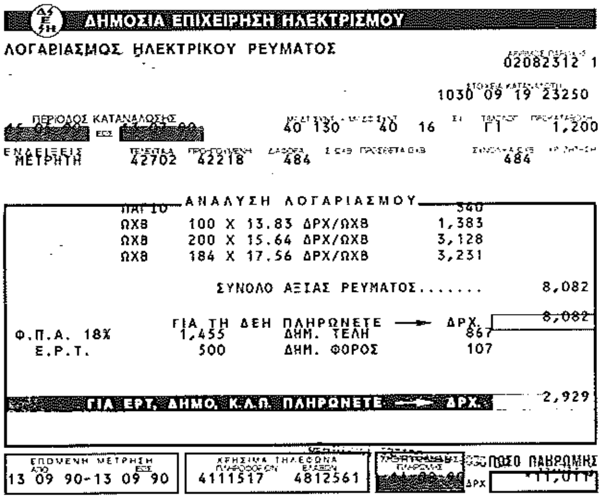
Λύση

Βρίσκουμε την ολική κατανάλωση ρεύματος σε ΩΧΒ από τις ενδείξεις **τελευταία, προηγούμενη** αφαιρώντας τα αντίστοιχα ποσά:
42.702 - 42.218 = 484 ΩΧΒ.
Για τα πρώτα 100 ΩΧΒ πληρώνει:
100 · 13,83 = 1383 δρχ.
Για τα επόμενα 200 ΩΧΒ πληρώνει:
200 · 15,64 = 3.128 δρχ.
Για τα υπόλοιπα 184 ΩΧΒ πληρώνει:
184 · 17,56 = 3.231 δρχ.
Για το πάγιο πληρώνει 340 δρχ.
Άρα συνολικά η αξία του ρεύματος είναι:
340 + 1.383 + 3.128 + 3.231 = 8.082 δρχ.
Για τα ποσά αυτά πληρώνει Φ.Π.Α 18% δηλαδή:

$$\frac{18}{100} \cdot 8082 = 1454,76 \cong 1455 \text{ δρχ.}$$

Για τα Δημοτικά τέλη πληρώνει 867 δρχ.
Για το Δημοτικό φόρο πληρώνει 107 δρχ. και για Ε.Ρ.Τ πληρώνει 500 δρχ.
Τελικά για Φ.Π.Α και για κρατήσεις υπέρ τρίτων πληρώνει:
1.455 + 867 + 107 + 500 = 2.929 δρχ.
Επομένως το ποσό πληρωμής του λογαριασμού είναι:
8.082 + 2.929 = 11.011 δρχ.
Άρα το συνολικό ποσό πληρωμής είναι σωστό.

<u>Παρατήρηση:</u> Τα ποσά με τα οποία χρεώνεται ο καταναλωτής για τα Δημοτικά τέλη προκύπτουν από τα τετραγωνικά μέτρα (m^2) του ακινήτου και από διάφορους συντελεστές που καθορίζονται από το Δήμο ή την Κοινότητα στην οποία βρίσκεται το ακίνητο.


ΔΗΜΟΣΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ
ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ
02082312 1
1030 09 19 23250
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ [redacted] ΕΩΣ [redacted]
40 130 40 16 Γ1 1,200
ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΜΕΤΡΗΤΗ 42702 42218 484 484

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ

ΠΑΓΙΟ		[illegible]
ΩΧΒ	100 Χ 13.83 ΔΡΧ/ΩΧΒ	1,383
ΩΧΒ	200 Χ 15.64 ΔΡΧ/ΩΧΒ	3,128
ΩΧΒ	184 Χ 17.56 ΔΡΧ/ΩΧΒ	3,231

ΣΥΝΟΛΟ ΑΞΙΑΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ....... 8,082
ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΗ ΠΛΗΡΩΝΕΤΕ → ΔΡΧ. 8,082
Φ.Π.Α. 18% 1,455 ΔΗΜ. ΤΕΛΗ 867
Ε.Ρ.Τ. 500 ΔΗΜ. ΦΟΡΟΣ 107
ΓΙΑ ΕΡΤ, ΔΗΜΟ, Κ.Λ.Π. ΠΛΗΡΩΝΕΤΕ → ΔΡΧ. 2,929
ΕΠΟΜΕΝΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΠΟ ΕΩΣ 13 09 90-13 09 90
ΧΡΗΣΙΜΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΒΛΑΒΩΝ 4111517 4812561
[redacted]
ΠΟΣΟ ΠΛΗΡΩΜΗΣ ΔΡΧ *11,011*

7. Αγοράσαμε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή με ευκολίες πληρωμής (με δόσεις). Η αξία του υπολογιστή είναι 360.000 δρχ. και επί πλέον Φ.Π.Α 6%. Τον Φ.Π.Α είμαστε υποχρεωμένοι να τον καταβάλουμε εξ ολοκλήρου στην αρχή. Για την πληρωμή του υπολογιστή, συμφωνήσαμε τα ακόλουθα: Θα δώσουμε για προκαταβολή το 40% της αξίας του και τα υπόλοιπα σε 4 μηνιαίες δόσεις. Η κάθε δόση συμφωνήθηκε να επιβαρύνεται με τόκο 3% το μήνα. Υπογράφηκαν 4 συναλλαγματικές. Σε κάθε συναλλαγματική αναγράφεται το ποσό της δόσης και ο τόκος που αναλογεί σ' αυτό. Να υπολογίσετε:
α) Τον Φ.Π.Α που πληρώσαμε;
β) Την προκαταβολή που δώσαμε καθώς και το υπόλοιπο ποσό που έμεινε για να πληρώσουμε με δόσεις;
γ) Πόση θα είναι κάθε δόση;
δ) Με τι τόκο επιβαρύνεται καθεμιά από τις 4 δόσεις;
ε) Τι ποσό θα αναγράφει καθεμιά από τις 4 συναλλαγματικές;
στ) Πόσο πληρώσαμε συνολικά για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή;

Λύση

α) Φ.Π.Α: $\frac{6}{100} \cdot 360.000 =$

$= \frac{6 \cdot 360.000}{100} = 21.600$ δρχ.

β) Προκαταβολή: $\frac{40}{100} \cdot 360.000 =$

$= \frac{40 \cdot 360.000}{100} = 144.000$ δρχ.

Το υπόλοιπο ποσό είναι:
360.000 - 144.000 = 216.000 δρχ.

γ) Η κάθε δόση θα είναι:
216.000 : 4 = 54.000 δρχ.

δ) Τόκος 1ης δόσης:

$\frac{3}{100} \cdot 54.000 = 1.620$ δρχ.

Τόκος 2ης δόσης:
6% (3 + 3 = 6) των 54.000 δρχ.
Δηλαδή:

$\frac{6}{100} \cdot 54.000 = 3.240$ δρχ.

Τόκος 3ης δόσης:
9% (3 + 3 + 3 = 9) των 54.000 δρχ.
Δηλαδή:

$\frac{9}{100} \cdot 54.000 = 4.860$ δρχ.

Τόκος 4ης δόσης:
12% (3 + 3 + 3 + 3 = 12) των 54.000 δρχ. Δηλαδή:

$\frac{12}{100} \cdot 54.000 = 6.480$ δρχ.

ε) Το ποσό που θα αναγράφεται σε καθεμιά από τις 4 συναλλαγματικές είναι:

<u>1η συναλλαγματική:</u>
54.000 + 1620 = 55.620 δρχ.

<u>2η συναλλαγματική:</u>
54.000 + 3.240 = 57.240 δρχ.

<u>3η συναλλαγματική:</u>
54.000 + 4.860 = 58.860 δρχ.

<u>4η συναλλαγματική:</u>
54.000 + 6.480 = 60.480 δρχ.

στ) Το σύνολο των δόσεων είναι:
55.620 + 57.240 + 58.860 + 60.480 =
= 232.200 δρχ.
Τελικά ο υπολογιστής κόστισε:

Σύνολο δόσεων:	232.200 δρχ.
Προκαταβολή:	144.000 δρχ.
Φ.Π.Α:	21.600 δρχ.
Σύνολο:	397.800 δρχ.

8. Καταθέσαμε στο ταμιευτήριο 670.000 δρχ. για ένα χρόνο με επιτόκιο 18,5%. Να βρεθεί τι τόκο θα εισπράξουμε στο τέλος του χρόνου.

Λύση

Επιτόκιο 18,5 % σημαίνει ότι στις 100 δρχ. που καταθέτουμε, το ταμιευτήριο στο τέλος του χρόνου μας δίνει επί πλέον 18,5 δρχ.
Έτσι το 18,5 % των 670.000 δρχ. θα είναι:

$\frac{18,5}{100} \cdot 670.000 = 123.950$ δρχ.

Άρα ο τόκος θα είναι 123.950 δρχ.

9. Το Ε' Γυμνάσιο Πειραιά έχει 400 μεθητές από τους οποίους, οι 120 είναι 12 ετών, οι 99 είναι 13 ετών, οι 97 είναι 14 ετών και οι υπόλοιποι είναι 15 ετών.
α) Να παρασταθούν σ' ένα πίνακα ποσοστών οι μαθητές ως προς την ηλικία τους.
β) Να γίνει το ραβδόγραμμα.
γ) Τα ποσοστά να παρασταθούν σε ορθογώνιο διάγραμμα.
δ) Να παρασταθούν και σε κυκλικό διάγραμμα.

Λύση

α) Τα $\frac{120}{400} = 0,3 = \frac{30}{100} = 30\%$ είναι είναι 12 ετών

Τα $\frac{99}{400} = 0,2475 = \frac{24,75}{100} = 24,75\%$
είναι 13 ετών

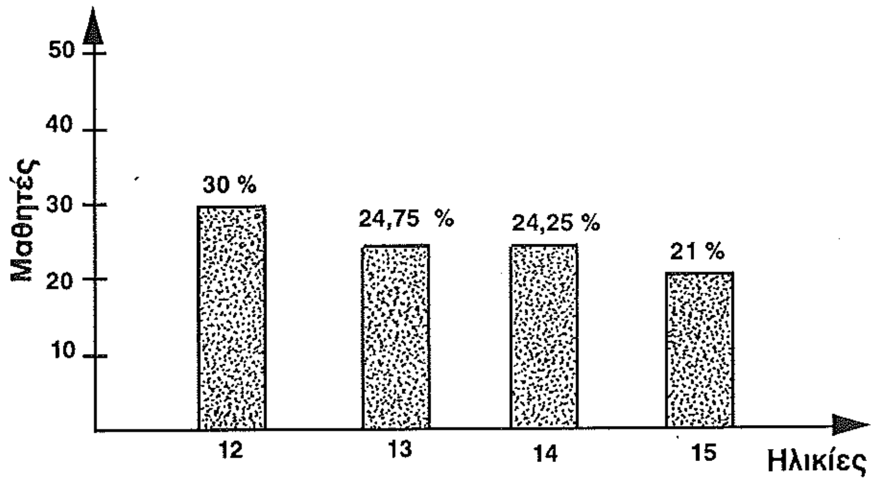
Τα $\frac{97}{400} = 0,2425 = \frac{24,25}{100} = 24,25\%$
είναι 14 ετών

Τα $\frac{84}{400} = 0,21 = \frac{21}{100} = 21\%$ είναι
15 ετών

Άρα ο πίνακας ποσοστών είναι:

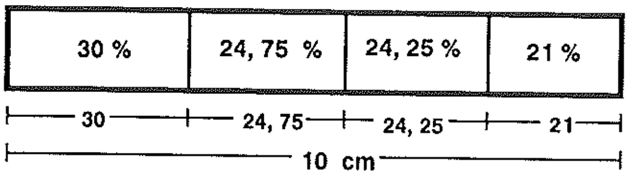
Ηλικία	12	13	14	15
Αριθ. μαθητών	120	99	97	84
%	30	24,75	24,25	21

β) Το ραβδόγραμμα είναι:



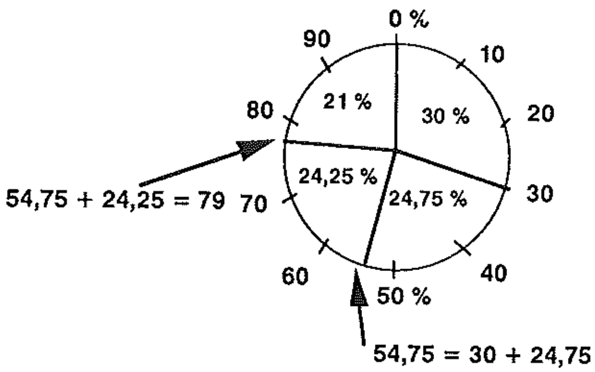
Παρατήρηση: Οι αριθμοί 10, 20, 30, 40 κ.τ.λ που είναι στον κατακόρυφο άξονα παριστάνουν αριθμό μαθητών. Οι ράβδοι που παριστάνουν ποσοστά έχουν υψωθεί μέχρι τα σημεία 30 24,75 24,25 και 21 αντίστοιχα και παριστάνουν το 30% 24,75% 24,25% και 21%.

γ) Το ορθογώνιο διάγραμμα είναι:



Παρατήρηση: Για πρακτικούς λόγους διαλέγουμε ορθογώνιο μήκους 10 cm οπότε εύκολα το χωρίζουμε σε ορθογώνια με μήκη 30 mm 24,75 mm 24,25 mm και 21 mm. Το κάθε ένα από τα ορθογώνια αυτά αντιπροσωπεύει το 30% 24,75% 24,25% και 21% αντίστοιχα.

δ) Το κυκλικό διάγραμμα είναι:



Παρατήρηση: Για το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιούμε τον παραπάνω βαθμολογημένο κύκλο (έχει χωριστεί σε εκατό ίσα τόξα). Από το τέλος του ενός ποσοστού αρχίζουμε το επόμενο ποσοστό. Ο μηχανισμός φαίνεται από το σχήμα.

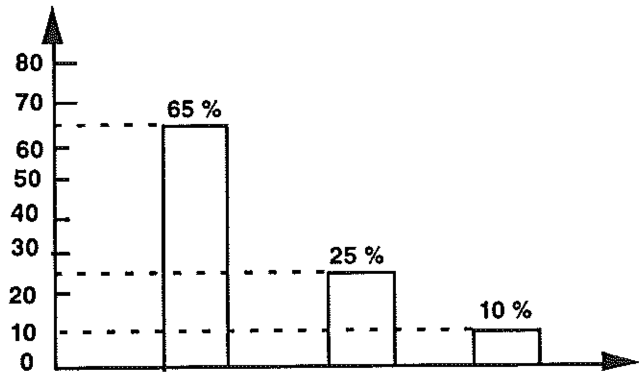
10. Στην περιοχή της πρωτεύουσας (Αθήνα) έγινε μία δημοσκόπηση (γκάλοπ). Ρωτήθηκαν 1.500 άτομα αν το καλοκαίρι πήγαν διακοπές. Από αυτά τα 975 απάντησαν ναι, τα 375 απάντησαν όχι, ενώ τα υπόλοιπα δεν θέλησαν να απαντήσουν στην ερώτηση. Τα αποτελέσματα αυτής της δημοσκόπησης να παρασταθούν: α) με πίνακα, β) με ραβδόγραμμα, γ) με ορθογώνια διαγράμματα και δ) με κυκλικό διάγραμμα.

Λύση

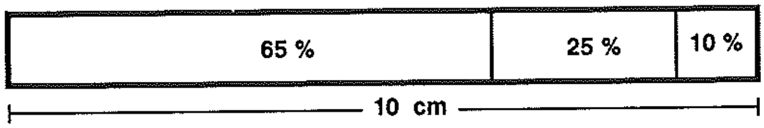
α) Με πίνακα:

Απαντήσεις	αριθμός ατόμων	ποσοστό
έκαναν διακοπές	975	65 %
δεν έκαναν	375	25 %
δεν απάντησαν	150	10 %
Σύνολο	1500	100 %

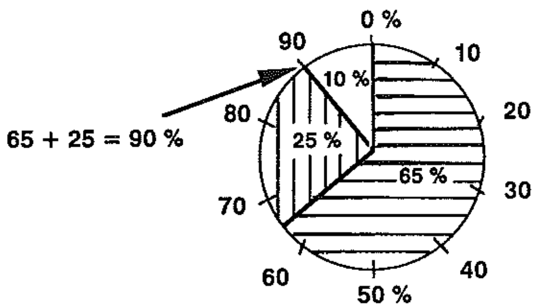
β) Με ραβδόγραμμα:



γ) Με ορθογώνια διάγραμματα:



δ) Με κυκλικό διάγραμμα:



Β. Μισο.. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο Φ.Π.Α για είδη αξίας:
α) 250 δρχ., β) 16.732 δρχ. και
γ) 250.900 δρχ.
αν ο συντελεστής είναι 6%.

Λύση

α) Ο Φ.Π.Α είναι: $\frac{6}{100} \cdot 250 = \frac{1500}{100}$ = 15 δρχ.

β) Ο Φ.Π.Α είναι: ...

2. Ο Γιάννης αγόρασε μια μπάλα ποδοσφαίρου 7.800 δρχ. Αν ο Φ.Π.Α έχει συντελεστή 18%, να βρεθεί το ποσό που θα πληρώσει συνολικά.

Λύση

Ο Φ.Π.Α είναι: $\frac{18}{100} \cdot 7800 = \dots$

3. Για ένα είδος που έχει συντελεστή Φ.Π.Α 16% πληρώσαμε στο ταμείο συνολικά (αξία + Φ.Π.Α) 13.410 δρχ. Να υπολογιστεί η αξία του καθώς και ο Φ.Π.Α που πληρώσαμε γι' αυτό.

Λύση

Η τιμή του είδους με Φ.Π.Α είναι:

$\frac{100}{100} + \frac{16}{100} = \frac{116}{100}$ της αρχικής αξίας..

(Με $\frac{100}{100}$ θα εννοούμε την αρχική αξία)

**4. Για είδη αξίας:
α) 750 δρχ. β) 4800 δρχ. και γ) 9.150 δρχ. πληρώσαμε αντίστοιχα μαζί με Φ.Π.Α 795 δρχ., 5664 δρχ. και 12444 δρχ. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση το συντελεστή του Φ.Π.Α.**

Λύση

α) Ο Φ.Π.Α σε δρχ. είναι:
795 − 750 = 45 δρχ. ή

$\frac{45}{750} = 0{,}06 = \frac{6}{100} = 6\,\%$

β) ...

5. Σ' ένα πολυκατάστημα ο Δημήτρης αγόρασε τρόφιμα αξίας 8.750 δρχ., ένα βιβλίο αξίας 1.240 δρχ. και μια μπάλα μπάσκετ αξίας 9.500 δρχ. Αν οι συντελεστές Φ.Π.Α για τα τρία αντικείμενα είναι αντίστοιχα 6%, 36% και 18%, πόσα χρήματα θα πληρώσει συνολικά και πόσα θα πλήρωνε αν δεν υπήρχε ο Φ.Π.Α;

Λύση

Ο Φ.Π.Α για τα τρόφιμα είναι:

$\frac{6}{100} \cdot 8750 = \frac{52500}{100} = 525$ δρχ.

Άρα για τα τρόφιμα θα πληρώσει:
8.750 + 525 = 9.275 δρχ.
Ο Φ.Π.Α για το βιβλίο είναι ...

**6. Το τιμολόγιο της Δ.Ε.Η για το οικιακό ρεύμα είναι:
Πάγιο 340 δρχ.
Για κατανάλωση:
από 0 εως 100 ΩΧΒ 13,83 Δρχ./ ΩΧΒ.
από 101 εως 300 ΩΧΒ 15,64 Δρχ./ ΩΧΒ.
από 301 εως 800 ΩΧΒ 17,56 Δρχ./ ΩΧΒ.
από 801 και άνω 20,06 Δρχ./ ΩΧΒ.
Επί πλέον για κρατήσεις:
Για Δημοτικά τέλη 2.004 δρχ.
Για Δημοτικό φόρο 500 δρχ.
Για Ε.Ρ.Τ 700 δρχ. και ΦΠΑ 18%.
Υπολογίστε τι θα πληρώσει ο καταναλωτής αν οι ενδείξεις είναι:**

Τελευταία	προηγουμένη
53.973	53.167

Λύση

Αφαιρούμε τις δύο ενδείξεις για να βρούμε την ολική κατανάλωση του ρεύματος σε ΩΧΒ.
53.973 - 53.167 = 806 ΩΧΒ.
Για τα πρώτα 100 ΩΧΒ πληρώνει:
100 · 13,83 = 1.383 δρχ.
Για τα επόμενα 200 ΩΧΒ πληρώνει:
200 · 15,64 = 3.128 δρχ.
Για τα επόμενα 500 ΩΧΒ πληρώνει:
500 · 17,56 = ...

(σημείωση: Μην ξεχάσετε να υπολογίσετε και το Φ.Π.Α)

7. Ένας άλλος καταναλωτής έχει τη μισή κατανάλωση απ' ότι ο καταναλωτής της προηγούμενης άσκησης αλλά τα υπόλοιπα έξοδα υπέρ τρίτων (ΕΡΤ, Δημ. Τέλη, Δημ. Φόρος κ.λπ.) είναι ίδια. Να βρείτε αν θα πληρώσει τα μισά χρήματα απ' ότι ο καταναλωτής της προηγούμενης άσκησης. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η κατανάλωση που αναγράφεται στο λογαριασμό της προηγούμενης άσκησης είναι: 805 ΩΧΒ. Άρα η δική του είναι:

$\frac{806}{2} = 403$ ΩΧΒ

Οπότε για πάγιο πληρώνει 340 δρχ.
Για τα πρώτα 100 ΩΧΒ πληρώνει:
100 · 13,83 = 1.383 δρχ. ...

8. Ασφαλιστής αγόρασε σκάφος αξίας 3.500.000 δρχ. Έδωσε για προκαταβολή το 60% της αξίας του και το Φ.Π.Α 18%. Τα υπόλοιπα τα συμφώνησε σε 6 ισόποσες μηνιαίες δόσεις για τις οποίες υπόγραψε συναλλαγματικές, οι οποίες επιβαρύνονται με τόκο 3% το μήνα η καθεμιά. Να υπολογίσετε:
α) Το ποσό κάθε συναλλαγματικής συμπεριλαμβάνοντας σ' αυτή και τον αντίστοιχο τόκο.
β) Πόσο θα στοιχίσει τελικά το σκάφος;

Λύση

Το ποσό της προκαταβολής είναι:

$$\frac{60}{100} \cdot 3.500.000 = 0,6 \cdot 3.500.000 =$$

$= 2.100.000$ δρχ.
Το Φ.Π.Α είναι:

$$\frac{18}{100} \cdot 3.500.000 = 0,18 \cdot 3.500.000 =$$

$= 630.000$ δρχ.
Το υπόλοιπο είναι:
$3.500.000 - 2.100.000 = ...$

9. Μισθωτός καταθέτει στην Εθνική Τράπεζα Ελλάδος 300.000 δρχ. με επιτόκιο 16% για ένα χρόνο. Στο τέλος του χρόνου κάνει ανάληψη των χρημάτων του και τα καταθέτει για ένα χρόνο στην Εμπορική Τράπεζα με επιτόκιο 19,5%. Πόσα χρήματα θα εισπράξει στο τέλος του 2ου χρόνου, αν αποφασίσει να κάνει ανάληψη;

Λύση

Τα 16% των 300.000 δρχ. θα είναι:

$$\frac{16}{100} \cdot 300.000 = 48.000 \text{ δρχ.}$$

Άρα ο τόκος θα είναι 48.000 δρχ. Τα χρήματα που εισέπραξε από την πρώτη ανάληψη θα είναι:
$300.000 + 48.000 = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο Φ.Π.Α που αντιστοιχεί σε είδη αξίας 790 δρχ., 5.700 δρχ. και 21.320 δρχ., αν ο συντελεστής είναι:
α) 6%, β) 10%, γ) 36%.

2. Να βρεθεί πόσο θα πληρώσουμε (με Φ.Π.Α 10%) για είδη αξίας:
α) 1.730 δρχ. β) 5.990 δρχ.
γ) 63.150 δρχ. δ) 864,5 δρχ.

3. Η Κατερίνα αγόρασε διάφορα είδη και πλήρωσε συνολικά μαζί με Φ.Π.Α 32.610 δρχ. Αν ο συντελεστής για το Φ.Π.Α είναι 36% να υπολογίσετε:
α)Την αξία των ειδών αυτών χωρίς Φ.Π.Α.
β)Τον Φ.Π.Α που πλήρωσε γι' αυτά.

4. Ένας αγρότης πούλησε 2,5 τόννους πορτοκάλια προς 40 δρχ. το κιλό. Το τιμολόγιο το επιβάρυνε με Φ.Π.Α 6%. Πόσες δρχ. πλήρωσε ο αγοραστής;

5. Ο Μιχάλης αγόρασε βιβλία και τετράδια αξίας 10.625 δρχ. Να υπολογίσετε τον Φ.Π.Α που θα πληρώσει, αν ο συντελεστής είναι 16% και τα ρέστα που θα πάρει από 3 πεντοχίλιαρα.

6. Για είδη αξίας:
α) 1.700 δρχ. β) 2.725 δρχ. γ) 3.367,6 δρχ. πληρώσαμε αντίστοιχα μαζί με το Φ.Π.Α 1.802 δρχ., 3.215,5 δρχ. και 4.580 δρχ. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση το συντελεστή του Φ.Π.Α.

7. Το τιμολόγιο της ΔΕΗ για το οικιακό ρεύμα είναι:
Πάγιο 340 δρχ.
από 0 - 100 ΩΧΒ 13,83 Δρχ. /ΩΧΒ.
από 101 - 300 ΩΧΒ 15,64 Δρχ. /ΩΧΒ.
από 301 - 800 ΩΧΒ 17,56 Δρχ. /ΩΧΒ.
από 801 και άνω 20,06 Δρχ. /ΩΧΒ.
Επιπλέον γίνονται κρατήσεις:
867 δρχ. για Δημοτικά τέλη

107 δρχ. για Δημοτικό φόρο
400 δρχ. για Ε.Ρ.Τ. και
Φ.Π.Α 18% επί του ποσού που πληρώνουμε για την κατανάλωση ρεύματος. Υπολογίστε τι θα πληρώσει τελικά ένας καταναλωτής αν οι ενδείξεις είναι:

Τελευταία	Προηγούμενη
42.964	42.702

8. Χρησιμοποιώντας το τιμολόγιο της Δ.Ε.Η της άσκησης (7), να βρείτε πόσος θα είναι ο λογαριασμός ενός καταναλωτή αν η τελευταία ένδειξη του μετρητή είναι 21.540 και η προηγούμενη 20.540 και ο καταναλωτής αυτός πληρώνει 350 δρχ. πάγιο, 1.020 δρχ. για Δημοτικά τέλη, 400 δρχ. για Δημοτικό φόρο, 670 δρχ. για Ε.Ρ.Τ και Φ.Π.Α 18%.

9. Ένας άλλος καταναλωτής έχει διπλάσια κατανάλωση από τον καταναλωτή της άσκησης (7) αλλά τα υπόλοιπα έξοδα υπερ τρίτων (Ε.Ρ.Τ, ΔΗΜΟΤΙΚΑ ΤΕΛΗ, ΔΗΜ. ΦΟΡΟΣ) είναι ίδια. Να βρείτε αν θα πληρώσει τα διπλάσια χρήματα από ότι ο καταναλωτής της άσκησης (7).

10. Ένας έμπορος αγόρασε 10 πλυντήρια αξίας 640.000 δρχ. Πόσο πρέπει να πωλήσει το καθένα, αν θέλει το ποσοστό κέρδους του να είναι 25%;

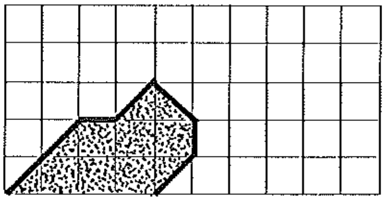
11. Κατέθεσε κάποιος την 1η Ιανουαρίου στο ταμιευτήριο 273.000 δρχ. με επιτόκιο 17%. Τι ποσό θα πάρει στο τέλος του χρόνου, αν κάνει ανάληψη όλων των χρημάτων του;

12. Καταθέτουμε στο ταμιευτήριο 1.000.000 δρχ. με επιτόκιο 18,5%. Στο τέλος κάθε χρόνου προσθέτουμε στο κεφάλαιο τους τόκους της προηγούμενης χρονιάς. Τι ποσό θα εισπράξουμε, αν αποσύρουμε όλα τα χρήματα μετά από 3 χρόνια ακριβώς;

13. Ένας οικογενειάρχης αγόρασε ένα οικόπεδο αξίας 2.500.000 δρχ. Πλήρωσε το 60% προκαταβολή και συμφώνησε να εξοφλήσει το υπόλοιπο σε τέσσερις μηνιαίες δόσεις. Κάθε δόση επιβαρύνεται με τόκο 4% το μήνα.
Να βρεθεί:
α) Το ποσό κάθε δόσης.
β) Τι ποσό θα πληρώνει κάθε μήνα.
γ) Πόσο στοίχισε τελικά το οικόπεδο.

14. Ένας κρεοπώλης αγόρασε 500 κιλά κρέας πληρώνοντας 320.000 δρχ. Πωλεί τα 310 κιλά με κέρδος 20% και τα υπόλοιπα με κέρδος 15%. Πόσα χρήματα κερδίζει συνολικά;

15. Να βρείτε τι μέρος του σχήματος καταλαμβάνει το χρωματισμένο κομμάτι. Να χρωματίσετε με κάποια άλλο χρώμα το 20% του υπολοίπου σχήματος και τέλος να βρείτε τι μέρος του σχήματος καταλαμβάνει το κομμάτι που μένει αχρωμάτιστο.



16. Ένας παντοπώλης πωλεί το λάδι 600 δρχ. το κιλό με κέρδος 25% στην τιμή πώλησης. Να βρεθεί πόσο έχει πληρώσει για να αγοράσει 4 βαρέλια των 50 κιλών.

17. Ένας έμπορος αγοράζει μία φωτογραφική μηχανή 63.000 δρχ. και την πωλεί με κέρδος 25% στην τιμή αγοράς, αφού κάνει έκπτωση στον αγοραστή 10% στην αναγραφόμενη τιμή. Να βρεθεί η τιμή που αναγράφει ο έμπορος στη φωτογραφική μηχανή.

18. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις ηλικίες από τον αριθμό των 525 μαθητών ενός Γυμνασίου.

ηλικία	12	13	14	15
μαθητές	72	109	Ζ	163
%	Χ	Ψ	Φ	Ω

α) Να βρεθούν τα Χ, Ψ, Ζ, Φ, Ω.
β) Να γίνει το ραβδόγραμμα.
γ) Να γίνει το ορθογώνιο διάγραμμα.
δ) Να γίνει το κυκλικό διάγραμμα.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω προσθέσεις και αφαιρέσεις:

α) $\frac{5}{2} - \{2 - [(\frac{3}{8} + \frac{2}{5} - \frac{3}{4}) + (1 - \frac{1}{5}) - \frac{3}{8}]\} + \frac{1}{20}$

β) $\frac{3}{8} + \{\frac{21}{8} - [(\frac{3}{2} - \frac{2}{5}) - (\frac{1}{8} + \frac{13}{40}) - \frac{1}{20}] + (\frac{7}{10} + \frac{2}{5} - 1)\}$

γ) $2 - [(2 + \frac{1}{3}) - (\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) - \frac{1}{6}] + (\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1)$

2. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $1 - \frac{4}{5} \cdot [\frac{3}{5} + \frac{1}{14} \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{8}) - \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})]$

β) $\{[(2 + \frac{3}{2} : 2) : (\frac{5}{2} + \frac{4}{5}) + 1] : (2 + \frac{8}{3} : \frac{8}{5}) + \frac{1}{6}\} : \frac{5}{6} + \frac{1}{5}$

γ) $\{1 + [(1 + \frac{2}{5} - \frac{4}{35}) : (\frac{5}{6} + \frac{5}{21} + \frac{6}{7}) + \frac{4}{5} : \frac{6}{25}] : 4 - \frac{1}{2}\} : \frac{25}{4} + 1$

3. Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $\frac{19}{12} - \frac{3}{20} \cdot \{[\frac{3}{2} - (\frac{4}{5} : \frac{4}{3} - \frac{1}{3}) \cdot (\frac{7}{4} + \frac{11}{8})] : (\frac{5}{4} - \frac{10}{9}) + \frac{1}{5}\}$

β) $1 - \{[\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{5} + (1 + \frac{3}{14} : \frac{6}{7}) : (3 + \frac{1}{8})] : [(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}) : \frac{5}{6} + \frac{2}{5}] -$
$- \frac{5}{4}\} : \frac{5}{2}$

γ) $\{[\frac{1}{2} \cdot (\frac{9}{20} - \frac{1}{4}) + (\frac{23}{12} + \frac{11}{4}) : 5] : \frac{1}{3} - (2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{15})\} : (1 + \frac{6}{7} : 4 -$
$- \frac{1}{2}) - 1$

4. Να κάνετε τα σύνθετα κλάσματα απλά:

$$\alpha)\ \frac{1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} : \frac{16}{5}\right) - \frac{3}{8} : \left(1 - \frac{5}{2} : 10\right)}{2 - \frac{13}{16} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\right) + \frac{16}{5}\cdot\left(\frac{9}{8} - 1\right)}$$

$$\beta)\ \frac{\left(1 - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{25} - 3\cdot\left[\frac{4}{35}\cdot\frac{7}{4} + \frac{1}{5} : \left(2 - \frac{16}{21}\cdot\frac{7}{4}\right)\right.}{6 + \frac{47}{4} : \left[2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9} - \frac{3}{8}\cdot\left(2 + \frac{20}{3}\cdot\frac{7}{50}\right)\right]}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha)\ \frac{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} : \frac{8}{9}}{2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{15}{4}} - \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{3}{2}}{3 + \frac{1}{7}\cdot\frac{14}{5}}$$

$$\beta)\ \frac{\left(2 - \frac{1}{5} - \frac{10}{3}\right) : \frac{4}{3} - \frac{1}{6}}{3 - \frac{2}{5} : \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7} : \frac{4}{3}\right)} : \frac{2 - \frac{3}{16} : \frac{3}{16}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{5} : 3}\cdot\left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

6. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$\alpha)\ 1 + \frac{7}{8}\cdot\left[\left(2 - \frac{5}{6} : \frac{10}{9}\right)\cdot\left(\frac{8}{7} - \frac{6}{7} : \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{10}\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$

$\beta)\ \left\{\left[\left(5 - \frac{3}{7}\right) : \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{21}\right)\cdot 5\right] : \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}\right\} : \frac{25}{4} - 2$

$\gamma)\ 1 - \frac{3}{8} : \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} : \left[\left(\frac{3}{4} : 2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{5} : \frac{20}{3}\right) - \frac{1}{2}\right]\right\}$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$\alpha)\ \left\{\frac{3}{4} + \left[\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{64} - \frac{1}{32}\right] : \frac{3}{16} + 2\right\} : \frac{15}{2} + 1 : \left(1 + \frac{13}{30} : \frac{13}{20}\right)$

$\beta)\ \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{14}\right)\cdot\left[\frac{13}{36} - \left(2 : \frac{3}{2} - 1\right)\cdot\frac{5}{6}\right] + \left[1 - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{10}{21}\cdot\frac{14}{15} + \frac{1}{3}\right) : 2\right]\right\} : \frac{2}{3} + 1$

8. Ένα ποσό μοιράστηκε σε τρία άτομα. Στο πρώτο αναλογούν $\frac{7}{15}$, στο δεύτερο $\frac{5}{12}$ και στο τρίτο 3850. Ποιο ποσό μοιράστηκε;

9. Σε μια αθλητική συγκέντρωση τα $\frac{3}{20}$ από αυτούς που συμμετείχαν ήταν μαθητές λυκείου, τα $\frac{8}{15}$ μαθητές Γυμνασίου και 95 ήταν απόφοιτοι. Πόσοι συμμετείχαν στην συγκέντρωση;

10. Η Χριστιάνα διαβάζει ένα βιβλίο. Την πρώτη μέρα διάβασε τα $\frac{3}{7}$ των σελίδων και τη δεύτερη ημέρα διάβασε τα $\frac{3}{10}$ των υπολοίπων. Αν έχει ακόμη να διαβάσει 100 σελίδες , πόσες είναι οι σελίδες του βιβλίου;

11. Ένας γεωργός έχει καλλιεργήσει τα $\frac{2}{5}$ του κτήματός του με μπιζέλια, το $\frac{1}{3}$ με ρεβύθια, το $\frac{1}{12}$ με πατάτες και τα υπόλοιπα 168 τετραγωνικά μέτρα με πράσα. Πόσα τετρ. μέτρα είναι το κτήμα;

12. Ένας μανάβης πούλησε πρώτα τα $\frac{5}{12}$ των αποθεμάτων σε βερύκοκα ύστερα τα $\frac{3}{14}$ αυτών που του έμειναν. Αν τώρα του έχουν μείνει 33 κιλά, πόσα κιλά βερύκοκα είχε και πόσα κιλά πούλησε κάθε φορά;

13. Κάποιος πλήρωσε ένα λογαριασμό με τον ακόλουθο τρόπο:

– 3 δόσεις που η κάθε μια ήταν το $\frac{1}{8}$ του ποσού

– 4 δόσεις που η κάθε μια ήταν τα $\frac{2}{3}$ του ποσού κάθε μιας από τις προηγούμενες.

– 5 δόσεις των 3.500.
Ποιο είναι το ποσό που πλήρωσε συνολικά;

14. Μια βιομηχανία εμφιαλώσεως κρασιού προμήθευσε:

– σε καθένα από 5 πελάτες το $\frac{1}{12}$ των φιαλών που είχε,

– σε καθένα από άλλους 4 πελάτες τα $\frac{3}{4}$ των φιαλών που είχε προμηθεύσει σε καθένα από τους προηγούμενους. Περίσσεψαν 8.400 φιάλες κρασιού. Πόσες φιάλες είχε και πόσες διέθεσε σε κάθε έναν από τους πελάτες;

15. Να γραφούν σαν κλάσματα τα ποσοστά:
α) 15,75% β) 2,15% γ) 18,25% δ) 1.721 ‰ ε) 4,16% στ) 5,5‰

16. Να βρείτε το 6 % των παρακάτω αριθμών:
α) 735,6 β) 1.984 γ) 18,5 δ) 92.150 ε) 9.346,5 στ) 0,05

17. Ένας εργαζόμενος έχει έσοδα 102.300 δρχ. το μήνα. Ξοδεύει το 27% των χρημάτων του για έξοδα του σπιτιού, το 26% για τροφή, το 14% για ρούχα, το 18% για διασκέδαση και τα υπόλοιπα τα αποταμιεύει. Πόσα χρήματα αποταμιεύει;

18. Μια βιβλιοθήκη κοστίζει 46.400 δρχ. και ο Φ.Π.Α είναι 36%. Αν την αγοράσουμε με έκπτωση 18%, πόσο θα κοστίσει τελικά η βιβλιοθήκη;

19. Ένας έμπορος αναγράφει στα εμπορεύματά του την τιμή πώλησης υπολογίζοντας το κέρδος του να είναι 30% πάνω στο κόστος. Αν μετά κάνει έκπτωση 10% στην αναγραφόμενη τιμή, τι ποσοστό κερδίζει πάνω στο κόστος;
(**Υπόδειξη:** Να υποθέσετε ότι το κόστος των εμπορευμάτων ήταν 100 δρχ.)

20. Μια αντιπροσωπία αγοράζει από την Ιαπωνία δίκυκλες μηχανές προς 54.600 δρχ. τη μία. Να βρείτε την αναγραφόμενη τιμη στην Ελλάδα έτσι ώστε αν ο έμπορος κάνει έκπτωση 10% στην τιμή αυτή, να έχει κέρδος 25% στην τιμή αγοράς.

21. Ένα προϊόν αυξήθηκε 12% και στη συνέχεια 18%. Πόσο είναι το ποσοστό της συνολικής αύξησης;
(**Υπόδειξη:** Να υποθέσετε ότι το προϊόν έχει αρχικό κόστος 100 δρχ.)

22. Στην τιμή ενός προϊόντος γίνεται αύξηση 20% και στη συνέχεια μείωση 20%. Να βρεθεί η αύξηση ή η μείωση που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή.

23. Ένας έμπορος αγοράζει από έναν ελαιοπαραγωγό λάδι προς 500 δρχ. το κιλό, με έκπτωση 10%. Το πουλάει με κέρδος 20%. Αν ο Φ.Π.Α είναι 18%, να βρείτε την τιμή πώλησης.

24. Ο Σπύρος καταθέτει τα 3/5 των χρημάτων του στο ταμιευτήριο με επιτόκιο 13% και τα υπόλοιπα που ήταν 270.000 τα δανείζει σε μια επιχείρηση με τόκο 16%. Πόσο τόκο θα πάρει μετά από έναν χρόνο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

BASIC 5

Στα προηγούμενα κομμάτια της «BASIC» είχαμε δει ότι μια μεταβλητή γινόταν πιο εύχρηστη αν την εισάγουμε με την εντολή INPUT.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 2 μεταβλητές χρησιμοποιώντας συγχρόνως 2 INPUTS π.χ.

```
10 INPUT A      (↵)
20 INPUT B      (↵)
30 PRINT A*B    (↵)
40 GO TO 10     (↵)
```

Όπως καταλαβαίνουμε, εμείς θα δίνουμε ό,τι τιμές θέλουμε για Α και Β και ο υπολογιστής θα τις πολλαπλασιάζει.
Φυσικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σειρά 30 με την
30 PRINT A + B ή με την
30 PRINT A - B ή με την
30 PRINT A : B
για να εκτελέσει πρόσθεση, αφαίρεση ή διαίρεση αντίστοιχα.
Αν γνωρίζουμε από πριν όλες τις τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούμε τότε μπορούμε να φτιάξουμε πρόγραμμα με τις εντολές READ και DATA.

Έστω ότι η μεταβλητή Α έχει τις τιμές 10, 20, 30, 40, 50 και η Β τις τιμές 15, 25, 35, 45, 55.
Τότε το πρόγραμμα θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

```
10 READ A, B                (↵)
20 DATA 10,15,20,25,
   30,35,40,45,50,55        (↵)
30 PRINT A*B                (↵)
40 GO TO 10                 (↵)
50 END                      (↵)
```

Ο υπολογιστής με το πρόγραμμα αυτό διαβάζει (γραμμή 10) το πρώτο ζευγάρι τιμών (10, 15) (γραμμή 20), κάνει τον πολλαπλασιασμό, τον τυπώνει (γραμμή 30) και στη συνέχεια αναγκάζεται (γραμμή 40) να επιστρέψει για να διαβάσει το επόμενο ζευγάρι τιμών (γραμμή 10) κ.ο.κ.

Προσοχή: οι μεταβλητές Α και Β έχουν τοποθετηθεί στη γραμμή 20 εναλλάξ, δηλαδή

```
10  15  20  25
↓   ↓   ↓   ↓
A   B   A   B
```

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα παρόμοιο με το προηγούμενο δίνοντας δικές σας τιμές για τα Α και Β. Μελετήστε τη λειτουργία του προγράμματος.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα χρησιμοποιώντας 3 INPUTS για τα Α, Β, Γ και υπολογίστε τις παραστάσεις:
α) (Α + Β) · Γ και β) Α · Γ + Β · Γ

Άραγε ο υπολογιστής σκέφτεται; Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις **ναι**. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο άνισους αριθμούς και ζητάμε από τον υπολογιστή να αποφασίσει ποιος είναι μεγαλύτερος. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **IF THEN**, δηλαδή μια εντολή που αναγκάζει τον υπολογιστή να σκεφτεί κάπως έτσι: **ΕΑΝ** συμβαίνει αυτό **ΤΟΤΕ** κάνε εκείνο, δηλ. ΕΑΝ το x είναι μεγαλύτερος από το y ΤΟΤΕ τύπωσε το x.
Να και ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε δυο οποιουσδήποτε αριθμούς x και y και ο υπολογιστής θα βρίσκει και θα τυπώνει το μεγαλύτερο.

Προσοχή:

Η γραμμή 30 λέει:
Αν οι τιμές των x και y που δώσαμε στις γραμμές 10 και 20 επαληθεύουν τη σχέση x > y τότε ο υπολογιστής θα συνεχίσει και θα εκτελέσει την εντολή που υπάρχει μετά το THEN-δηλαδή θα πάει στη γραμμή 60 και θα τυπώσει το x.
Αν οι τιμές των x και y όμως δεν επαληθεύουν τη σχέση x > y τότε ο υπολογιστής θα αγνοήσει το THEN και θα προχωρήσει στην αμέσως επόμενη γραμμή δηλαδή θα τυπώσει το y.

```
10 INPUT x                    (↵)
20 INPUT y                    (↵)
30 IF x > y THEN GO TO 60     (↵)
40 PRINT y                    (↵)
50 GO TO 70                   (↵)
60 PRINT x                    (↵)
70 END                        (↵)
```

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που όταν θα δίνουμε αριθμό μικρότερο του 10 θα τυπώνει τη λέξη «κόκκινο» αλλιώς θα τυπώνει τη λέξη «μαύρο».

2. Αν οι πρώτες 100 kwh χρεώνονται από τη ΔΕΗ 10 δρχ. και οι υπόλοιπες 15 δρχ. φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε τις kwh που καταναλώσαμε και ο υπολογιστής θα υπολογίζει πόσο πρέπει να πληρώσουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Ανάλογα ποσά

4.1 Η έννοια των ανάλογων ποσών

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποια ποσά λέγονται ανάλογα;

1. Δυο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού μ' έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

Παρατήρηση: Οι αντίστοιχες τιμές δύο ανάλογων ποσών όταν διαιρούνται δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο.

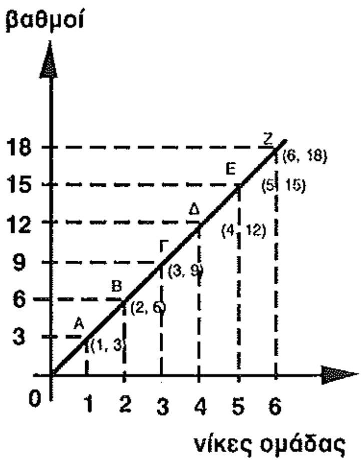
2. Δώστε ένα παράδειγμα δύο ανάλογων ποσών και παραστήστε τις τιμές τους σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Τι παρατηρείτε;

2. Παράδειγμα δύο αναλόγων ποσών: Με το νέο σύστημα βαθμολογίας στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου η νίκη μιας ομάδας αξιολογείται με τρεις βαθμούς. Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

νίκες ομάδας	1	2	3	4	5	6
βαθμοί	3	6	9	12	15	18

Παρατηρούμε ότι: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$

Άρα σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση τα ποσά είναι ανάλογα.
Στο διπλανό σχήμα αν ενώσουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ θα διαπιστώσουμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα;

α) ταχύτητα αυτοκινήτου και χρόνος για να διανυθεί μια σταθερή απόσταση

β) αριθμός αστικών τηλεφωνημάτων και αξία σε δραχμές

γ) εμβαδόν ενός οικοπέδου και αξία σε δραχμές

δ) εργάτες και έργο σε σταθερό χρόνο

ε) ηλικία και βάρος ανθρώπου.

Λύση

α) Όταν αυξάνεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί μια σταθερή απόσταση μειώνεται. Επομένως τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

β) Όταν ένα τηλεφώνημα κοστίζει α δρχ. τα δύο τηλεφωνήματα κοστίζουν 2α δρχ., τα τρία κοστίζουν 3α δρχ. κ.λπ. Άρα τα παραπάνω ποσά είναι ανάλογα.

γ) Ομοίως τα ποσά εμβαδόν οικοπέδου και αξία σε δραχμές είναι ανάλογα.

δ) Όταν ο αριθμός των εργατών διπλασιάζεται το έργο που παράγουν διπλασιάζεται επίσης κ.ο.κ. Άρα τα ποσά είναι ανάλογα.

ε) Είναι προφανές ότι μεγαλώνοντας ένα παιδί αυξάνεται και το βάρος του. Όμως η αύξηση αυτή δε γίνεται με τον ίδιο τρόπο κάθε χρόνο που περνά και όταν ο άνθρωπος ενηλικιώνεται το βάρος σχεδόν σταθεροποιείται. Άρα τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες περιέχουν ανάλογα ποσά:

α)

2	4	6
8	16	24

β)

1	2	3	4
2	4	6	9

γ)

10	70	150	230
6	42	90	138

δ)

α	β	γ
3α	3β	3γ

Λύση

Η άσκηση θα λυθεί με τη βοήθεια της παρατήρησης της ερώτησης 1.

α) Έχουμε: $\frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Άρα τα ποσά είναι ανάλογα.

β) Έχουμε: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{4}{9}$

Άρα τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

γ) Έχουμε: $\frac{10}{6} = \frac{72}{42} = \frac{150}{90} = \frac{230}{138} = \frac{5}{3}$

Άρα τα ποσά είναι ανάλογα.

δ) Έχουμε: $\frac{α}{3α} = \frac{β}{3β} = \frac{γ}{3γ} = \frac{1}{3}$

Άρα τα ποσά είναι ανάλογα.

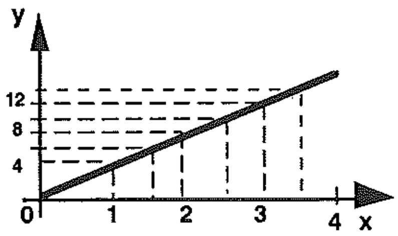
3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα ώστε να περιέχει ανάλογα ποσά. Να παραστήσετε τις τιμές σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	4					

Λύση

Η δεύτερη γραμμή θα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά τις τιμές της πρώτης γραμμής επί το 4.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	4	6	8	10	12	14



Β. Μισο.. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εξακριβώσετε αν οι παρακάτω πίνακες περιέχουν ανάλογα ποσά και να παραστήσετε τις τιμές τους σε συστήματα ορθογωνίων αξόνων. Τι παρατηρείτε;

α)

2	7	9	10	13
6	21	27	30	45

β)

3	4	8	14,5
7,5	10	20	36,25

Λύση

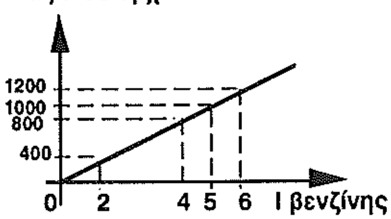
Σύμφωνα με την παρατήρηση έχουμε:

α) $\frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \frac{9}{27} = \frac{10}{30} \neq \frac{13}{45}$

Άρα τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

β) $\frac{3}{7,5} = \frac{4}{10} = ...$

2. Από την παρακάτω γραφική παράσταση να κατασκευάσετε πίνακα τιμών και να εξετάσετε αν τα ποσά είναι ανάλογα.



Λύση

2	4	5	6
400	800	.....	......

Άρα ...

3. Να υπολογιστούν τα α, β, γ ώστε τα ποσά x, y του παρακάτω πίνακα να είναι ανάλογα.

x	2	3	4	5
y	1	α - 1	β + 2	2γ

Λύση

Εφόσον τα ποσά x, y είναι ανάλογα, οι τιμές τους θα έχουν σταθερό πηλίκο:

$\frac{2}{1} = 2$

Άρα η τρίτη στήλη μας δίνει: $\frac{3}{\alpha - 1} = 2$

ή $2 \cdot (\alpha - 1) = 3$ ή $2\alpha - 2 = 3$
ή $2\alpha = 3 + 2$ ή $2\alpha = 5$ ή

$\alpha = \frac{5}{2}$. Ομοίως: $\frac{4}{\beta + 2}$ ...

4. Η περίμετρος του κύκλου διαμέτρου δ δίνεται από τον τύπο: Π = δ · π, όπου π = 3,14. Να βρείτε τις περιμέτρους των κύκλων με διαμέτρους αντίστοιχα 2, 7, 9, 11 cm και να κατασκευάσετε πίνακα για τις τιμές περιμέτρων - διαμέ-

τρων. Τι διαπιστώνετε για τα ποσά περίμετρος - διάμετρος;

Λύση

Από τον τύπο Π = δ · π τοποθετώντας διαδοχικά στη θέση του δ τις τιμές 2, 7, 9, 11 έχουμε τον πίνακα:

δ	2	7	9	11
Π	2π	7π	.....	.....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα;
α) βάρος κρέατος - αξία σε δραχμές
β) ποσότητα χαρτιού - εφημερίδα με σταθερό αριθμό φύλων
γ) ταχύτητα αυτοκινήτου - διάστημα σε σταθερό χρόνο
δ) αριθμός εργατών - έργο σε σταθερό χρόνο
ε) διάρκεια τηλεοπτικής διαφήμισης - αξία σε δραχμές.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες περιέχουν ποσά ανάλογα:

α)

2	3	3,5
5	7,5	8,75

β)

α	β	γ
α/2	β/2	γ/2

γ)

3	4	7	8
12	15	28	32

δ)

x	x+1	x+2	x+3
2x	2(x+1)	x+4	x+6

3. Να βρεθούν τα x, y, ω ώστε τα ποσά του παραπάνω πίνακα να είναι ανάλογα και να παραστήσετε τις τιμές σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

2	4	5	8
3	x	ω+1	2y

4. 2 Εφαρμογές των ανάλογων ποσών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πως λύνουμε προβλήματα που αναφέρονται στον υπολογισμό μιας τιμής δύο ανάλογων ποσών;

Απαντήσεις

1. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα που αναφέρεται στον υπολογισμό μιας τιμής δύο ανάλογων ποσών κάνουμε τα εξής:

α) Διαπιστώνουμε από την εμπειρία μας ότι τα ποσά είναι ανάλογα.

β) Κατασκευάζουμε πίνακα με τις δοσμένες τιμές τοποθετώντας τη μεταβλητή x στη θέση της άγνωστης τιμής.

γ) Χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$ που ισοδύναμα μας δίνει:

$$\alpha x = \beta \cdot \gamma \quad ή \quad x = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ένα ελαστικό αυτοκινήτου κοστίζει 12.500 δρχ. Πόσο κοστίζουν τα 5 ελαστικά;

Λύση

Τα ποσά αριθμός ελαστικών - αξία είναι ανάλογα. Αν x είναι η αξία των 5 ελαστικών έχουμε τον πίνακα:

ελαστικά	1	5
αξία	12.500	x

Από τον οποίο προκύπτει:

$$\frac{1}{12.500} = \frac{5}{x} \quad ή \quad x = 5 \cdot 12.500 \quad ή$$

$x = 62.500$ δρχ.

2. Πέντε ζευγάρια παπούτσια κοστίζουν 75.000 δρχ. Πόσο κοστίζουν τα δυο ζευγάρια;

Λύση

Τα ποσά αριθμός ζευγαριών - αξία είναι ανάλογα. Αν x είναι η αξία των 2 ζευγαριών έχουμε τον πίνακα:

ζευγάρια παπουτ.	5	2
αξία	75.000	x

Από τον οποίο προκύπτει:

$$\frac{5}{75.000} = \frac{2}{x} \quad ή \quad 5x = 2 \cdot 75.000 \quad ή$$

$5x = 150.000$ ή $x = 30.000$ δρχ.

3. Η τιμή ενός προϊόντος όταν το αγοράζουμε τοις μετρητοίς είναι 14.000 δρχ. Αν το αγοράσουμε με πιστωτική κάρτα επιβαρύνεται ο καταστηματάρχης με 8 %. Πόσες δρχ. εισπράττει καθαρά ο καταστηματάρχης με το δεύτερο τρόπο;

Λύση

Αν η τιμή τοις μετρητοίς είναι 100 δρχ. τότε ο καταστηματάρχης εισπράττει μετά τις κρατήσεις του 8%: 100 − 8 = 92 δρχ. Άρα έχουμε:

Αξία τοις μετρητοίς	100	14.000
Αξία με την κάρτα	92	x

Οπότε:

$$\frac{100}{92} = \frac{14.000}{x} \quad ή \quad 100x = 92 \cdot 14.000$$

$$ή \quad x = \frac{1.288.000}{100} \quad ή \quad x = 12.880 \text{ δρχ.}$$

4. Η τιμή ενός ηλεκτρικού ψυγείου είναι 175.000 δρχ. Στην περίοδο των εκπτώσεων πωλείται με έκπτωση 15 %. Ποια η τιμή του σ' αυτή την περίοδο;

Λύση

Αν η κανονική τιμή του ψυγείου ήταν 100 δρχ. στην περίοδο των εκπτώσεων αυτή γίνεται 85 · (100 − 15). Άρα έχουμε:

Κανονική τιμή	100	175.000
Τιμή με έκπτωση	85	x

Οπότε:

$$\frac{100}{85} = \frac{175.000}{x} \quad ή \quad 100x = 85 \cdot 175.000$$

$$x = \frac{14.875.000}{100} \quad ή \quad x = 148.750 \text{ δρχ.}$$

Β. Μισο.. Λυμένες ασκήσεις

1. Καταθέσαμε στην Τράπεζα ένα κεφάλαιο 2.500.000 με επιτόκιο 18 %. Πόσα χρήματα θα εισπράξουμε μετά από 1 χρόνο;

Λύση

Αν καταθέταμε 100 δρχ. μετά 1 χρόνο θα εισπράταμε 118 δρχ. Άρα έχουμε:

κεφάλαιο	100	2.500.000
κεφάλαιο+τόκος	118	x

Οπότε:

$$\frac{100}{118} = \frac{2.500.000}{x} \quad \text{ή} \ \ldots$$

2. Οι 255.964 δρχ. αντιστοιχούν σε 1.438 δολλάρια. Τα 2.500 δολλάρια σε πόσες δρχ. αντιστοιχούν;

Λύση

Δολλάρια	1.438	2.500
Δραχμές	255.964	x

Οπότε:

$$\frac{1.438}{255.964} = \frac{2.500}{x} \quad \text{ή} \ \ldots$$

3. Η τιμή της μονάδας του αστικού τηλεφωνήματος από 6,25 δρχ. ανέβηκε στις 7,10 δρχ. Ποια η επί τοις εκατό αύξηση;

Λύση

Η αύξηση της μονάδας είναι 7,10 – 6,25 = 0,85 δρχ. Άρα έχουμε:

Τιμή μονάδας	6,25	100
Αύξηση	0,85	x

Οπότε:

$$\frac{6,25}{0,85} = \frac{100}{x} \quad \text{ή} \ \ldots$$

4. Η τιμή ενός αυτοκινήτου είναι 3.800.000 δρχ. Πόσα πρέπει να πληρώσουμε σαν προκαταβολή αν αυτή αντιπροσωπεύει το 30 % της αξίας του;

Λύση

Αξία	100	3.800.000
Προκαταβολή	30	x

Οπότε:

$$\frac{100}{30} = \frac{3.800.000}{x} \quad \text{ή} \ \ldots$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δύο καφάσια μήλα στοιχίζουν 7.800 δρχ. Πόσο στοιχίζουν τα 8 καφάσια;

2. Η τιμή του λίτρου της βενζίνης ήταν 145 δρχ. Πόσο τοις εκατό αυξήθηκε αν η τιμή του έγινε 195 δρχ.;

3. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 40 cm. Πόση θα γίνει αυτή αν η πλευρά του αυξηθεί κατά 15 %;

4. Ένα βιβλίο που περιέχει 200 σελίδες ζυγίζει 600 g. Πόσο θα ζυγίζει ένα βι-

βλίο αν έχει 50 όμοιες σελίδες περισσότερες;

5. Το ανθρώπινο σώμα περιέχει περίπου 68 % νερό. Πόσα Kg νερό περιέχει ένας άνθρωπος που ζυγίζει 104 kg;

6. 5 yrd είναι 4,57 m. Πόσα m είναι οι 8 yrd;

4. 3 Κλίμακες

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται κλίμακα;

Απαντήσεις

1. **Κλίμακα** ονομάζεται ο λόγος της απόστασης δύο σημείων σ' ένα τοπογραφικό σχεδιάγραμμα (χάρτης, αρχιτεκτονικό σχέδιο, κ.λπ.) προς την πραγματική απόσταση των σημείων αυτών.

$$\text{κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}}$$

Οι αποστάσεις μετρούνται στις ίδιες μονάδες.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Η απόσταση δύο σημείων είναι 7 cm. Η πραγματική απόσταση των δυο αυτών σημείων είναι 35 km. Ποια η κλίμακα του χάρτη;

Λύση

Απόσταση στο χάρτη cm	7	1
πραγματική απόσταση cm	3.500.000	x

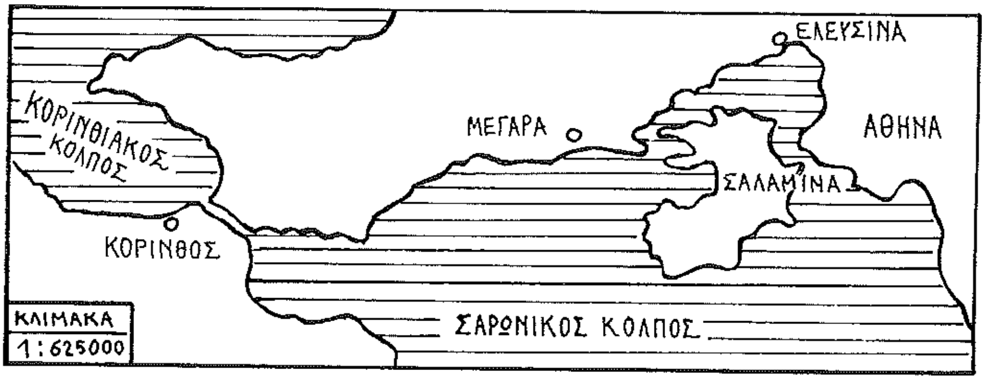
Οπότε:

$$\frac{7}{3.500.000} = \frac{1}{x} \quad \text{ή} \quad 7x = 3.500.000$$

$$\text{ή} \quad x = \frac{3.500.000}{7} \quad \text{ή} \quad x = 500.000$$

Άρα η κλίμακα είναι 1 : 500.000 που σημαίνει ότι απόσταση 1 cm στο χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 500.000 cm = 5 km.

2. Με τη βοήθεια του παρακάτω χάρτη να βρεθεί η πραγματική απόσταση (σε ευθεία γραμμή) της Ελευσίνας από την Κόρινθο.



Λύση

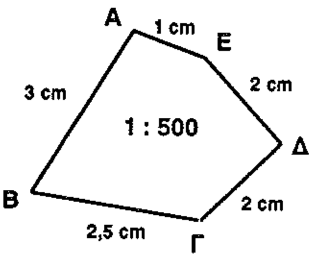
Μετρώντας με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι η απόσταση Ελευσίνας - Κορίνθου είναι 8,5 cm. Αν x είναι η πραγματική απόσταση έχουμε:

$$\frac{8{,}5}{x} = \frac{1}{625.000} \quad ή \quad x = 625.000 \cdot 8{,}5$$

ή $x = 5.312.500$ cm $= 53.125$ m $=$

$= 53{,}125$ km

3. Ποιες οι πραγματικές διαστάσεις του παρακάτω σχεδίου;



Λύση

Απόσταση στο σχέδιο	1	3	2,5	2	2	1
πραγματική απόσταση	500	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΑΕ

Έχουμε:

$$\frac{1}{500} = \frac{3}{ΑΒ} \quad ή \quad ΑΒ = 3 \cdot 500 \quad ή$$

ΑΒ = 1500 cm

$$\frac{1}{500} = \frac{2{,}5}{ΒΓ} \quad ή \quad ΒΓ = 2{,}5 \cdot 500 \quad ή$$

ΒΓ = 1250 cm

$$\frac{1}{500} = \frac{2}{ΓΔ} \quad ή \quad ΓΔ = 2 \cdot 500 \quad ή$$

ΓΔ = 1000 cm

Όμοια έχουμε:
ΔΕ = 1000 cm και ΑΕ = 500 cm.

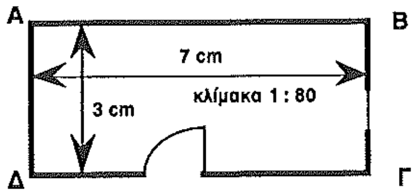
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια του παρακάτω χάρτη να βρεθεί η πραγματική απόσταση σε ευθεία γραμμή του Μεσολογγίου από τη Ναύπακτο, καθώς και του Μεσολογγίου από την Πάτρα.

Λύση

Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι η απόσταση Μεσολογγίου - Ναυπάκτου είναι στο χάρτη 5,3 cm, ενώ η απόσταση Μεσολογγίου - Πάτρας 4,7 cm. Άρα έχουμε...

2. Στο επόμενο σχέδιο φαίνεται η κάτοψη ενός δωματίου. Να βρεθεί η περίμετρός του.



Λύση

Ονομάζουμε x τη διάσταση ΑΒ και y τη διάσταση ΑΔ. Τότε:

$\frac{7}{x} = \frac{3}{y} = \frac{1}{80}$ Οπότε: $\frac{7}{x} = \frac{1}{80}$ ή ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Κλίμακα	Μήκος στο σχέδιο	Μήκος πραγματικό
1 : 3	7 cm	α cm
3 : 5	β cm	10 cm
1 : 80	5,6 cm	γ cm
δ	8,1 cm	24,3 cm

2. Να βρείτε την κλίμακα στις παρακάτω περιπτώσεις:

Πραγματική απόσταση	Απόσταση στο χάρτη	Κλίμακα
18 km	2 cm	α
135 km	9 cm	β
1890 km	3 cm	γ
225 km	25 cm	δ

3. Με τη βοήθεια του χάρτη της λυμένης άσκησης 2 υπολογίστε την πραγματική απόσταση σε ευθεία γραμμή Κορίνθου - Μεγάρων.

4. Με τη βοήθεια του χάρτη της μισολυμένης άσκησης 1 υπολογίστε την πραγματική απόσταση σε ναυτικά μίλια Ρίου - Αντιρίου.

4.4 Μερισμός σε μέρη ανάλογα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε μερισμό ενός αριθμού Α σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ;

2. Ποια ιδιότητα χρησιμοποιούμε για να λύσουμε ένα πρόβλημα μερισμού;

Απαντήσεις

1. Μερισμός ενός αριθμού Α σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ ονομάζεται η εύρεση τριών αριθμών x, y, z που να είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ αντίστοιχα και το άθροισμά τους να είναι ο αριθμός Α.

2. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα μερισμού χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{x+y+\omega}{\alpha+\beta+\gamma}$$

η οποία ισχύει και για περισσότερα από τρία ποσά.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να μεριστεί ο αριθμός 850 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 3, 6.

Λύση

Ζητάμε τρεις αριθμούς x, y, ω έτσι ώστε να είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, 3, 6 και να έχουν άθροισμα 850. Δηλαδή:

$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{6}$ και $x+y+\omega=850$. Από την παραπάνω ιδιότητα έχουμε:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{6}=\frac{x+y+\omega}{1+3+6}=\frac{850}{10}=\frac{85}{1}$$

Άρα: $\frac{x}{1}=\frac{85}{1}$ ή $x=85$

$\frac{y}{3}=\frac{85}{1}$, ή $y=255$

$\frac{\omega}{6}=\frac{85}{1}$ ή $\omega=510$

2. Τρεις συνέταιροι που συμμετέχουν σε μια επιχείρηση με ποσοστά 15 %, 25 % και 60 % είχαν κέρδος στο τέλος του προηγούμενου οικονομικού έτους 6.000.000 δρχ. Πόσα χρήματα αναλογούν στον καθένα;

Λύση

Αν στον πρώτο αναλογούν x δρχ., στο δεύτερο y δρχ. και στον τρίτο ω δρχ., έχουμε τις σχέσεις:

$\frac{x}{15}=\frac{y}{25}=\frac{\omega}{60}$ και $x+y+\omega=6.000.000$

Άρα $\frac{x}{15} = \frac{y}{25} = \frac{\omega}{60} = \frac{x+y+\omega}{15+25+60} =$

$= \frac{6.000.000}{100} = 60.000$

Οπότε $\frac{x}{15} = 60.000$ ή $x = 900.000$ δρχ.

$\frac{y}{25} = 60.000$ ή $y = 1.500.000$ δρχ.

$\frac{\omega}{60} = 60.000$ ή $\omega = 3.600.000$ δρχ.

3. Η εφ' άπαξ εισφορά ενός ακινήτου που ανήκει σε δυο ιδιοκτήτες με ποσοστά συνιδιοκτησίας 35 % και 65 % είναι 150.000 δρχ. Τι ποσό πρέπει να πληρώσει ο καθένας;

Λύση

Αν ο πρώτος πρέπει να πληρώσει x δρχ. και ο δεύτερος y δρχ. έχουμε τις σχέσεις:

$\frac{x}{35} = \frac{y}{65}$ και $x + y = 150.000$. Άρα

$\frac{x}{35} = \frac{y}{65} = \frac{x+y}{35+65} = \frac{150.000}{100} =$

$= 1.500$

Οπότε $\frac{x}{35} = 1.500$ ή $x = 52.500$ δρχ.

και $\frac{y}{65} = 1.500$ ή $y = 97.500$ δρχ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Τρεις φρουτέμποροι διέθεσαν φρούτα στη Λαχαναγορά και εισέπραξαν 2.600.000 δρχ. Τα μεταφορικά τα επιβαρύνθηκε ο ένας από τους τρεις και ήταν το 8 % της είσπραξης. Τα χρήματα μοιράστηκαν ως εξής: Αυτός που επιβαρύνθηκε τα μεταφορικά πήρε το 40 % και οι άλλοι δυο από 30 %. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας; Αυτός που επιβαρύνθηκε τα μεταφορικά κέρδισε ή όχι και πόσα;

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τα μεταφορικά έξοδα.

Είσπραξη	100	2.600.000
Μεταφορικά	8	x

$\frac{100}{8} = \frac{2.600.000}{x}$ ή $100x = 2.600.000$

ή $x = 208.000$ δρχ.

Αν α, β, γ είναι τα κέρδη του καθενός σε δρχ. έχουμε:

$\frac{\alpha}{40} = \frac{\beta}{30} = \frac{\gamma}{30} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{40+30+30} =$

$= \frac{2.600.000}{100} = 26.000$

Άρα $\frac{\alpha}{40} = 26.000$ ή $\alpha = \ldots$

$\frac{\beta}{30} = 26.000$ ή $\beta = \ldots$

Άρα αυτός που επιβαρύνθηκε τα μεταφορικά ...

2. Μια κληρονομιά αξίας 95.000.000 δρχ. μοιράστηκε σε τέσσερεις δικαιούχους ως εξής: Ο πρωτος πήρε ένα ακίνητο αξίας 60.000.000 δρχ. και οι άλλοι μοιράστηκαν την υπόλοιπη αξία της κληρονομιάς ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5. Τι ποσό αντιστοιχεί σε καθένα από τους υπόλοιπους τρεις;

Λύση

Η κληρονομιά που μοιράστηκε στους υπόλοιπους τρεις ήταν αξίας:
95.000.000 – 60.000.000 = 35.000.000 δρχ.

Αν x, y, ω το ποσό που αντιστοιχεί σε καθένα από αυτούς, έχουμε...

3. Σε μια τριόροφη πολυκατοικία οι ένοικοι κάθε ορόφου συμμετέχουν στην πληρωμή των κοινόχρηστων εξόδων του ανελκυστήρα ως εξής: Ο ένοικος του ισογείου κατά 10 %, του πρώτου ορόφου κατά 15 %, του δεύτερου ορόφου κατά 30 % και του τρίτου ορόφου κατά 45 %. Αν τον προηγούμενο μήνα τα έξοδα ήταν 13.500 δρχ., να βρείτε τι ποσό πλήρωσε ο καθένας. (Κάθε όροφος έχει ένα διαμέρισμα)

Λύση

Ονομάζουμε x, y, ω, z τα ποσά που πλήρωσε ο κάθε ένοικος. Τότε:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{\omega}{30} = \frac{z}{45} = \ldots$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μια επιχείρηση που αποτελείται από τρεις μετόχους με ποσοστό συμμετοχής ανάλογο προς τους αριθμούς 5, 7, 8 είχε ζημιά 860.000 δρχ. Τι ποσό ζημιάς αναλογεί στον καθένα;

2. Ένα κόσμημα περιέχει 70 % χρυσό, 10 % πλατίνα και 20 % χαλκό. Αν το βάρος του είναι 25 γραμμάρια, πόσα γραμμάρια είναι ο χρυσός, πόσα η πλατίνα και πόσα ο χαλκός;

3. Ένα κοκταίηλ περιέχει 30 % μπράντυ, 15 % ρούμι, 35 % χυμό, 20 % σόδα και έχει όγκο 200 ml. Πόσα ml περιέχει από το κάθε υγρό;

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο Ε = α². Να συμπηρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Πλευρά α	2	3	4	5	6	7	8
Εμβαδό Ε							

Να παραστήσετε τα ζεύγη (α, Ε) σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Τα ποσά είναι ανάλογα;

2. Η επιμήκυνση x ενός ελατηρίου σε cm,όταν κρεμάμε σ' αυτό βάρος Β p δίνεται από τον τύπο Β = 3x. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Επιμήκυνση x	1	1,5	2	2,5	3	8
Βάρος Β						

Να παραστήσετε τα ζεύγη (x, Β) σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Τα ποσά είναι ανάλογα;

3. Να βρεθούν τα x, y, ω, z ώστε τα παρακάτω ποσά που περιγράφονται στον πίνακα να είναι ανάλογα.

2z	2ω−8	3x−3	6	15
6	2/3	5	2	y+2

4. Ένα κεφάλαιο 1.000.000 δρχ. κατατέθηκε στην Τράπεζα με επιτόκιο 18 %. Πόσο γίνεται μαζί με τους τόκους μετά από 2 χρόνια;

5. Ένα προϊόν που κατασκευάζεται στο εξωτερικό εισάγεται αντί του ποσού των 2.000.000 δρχ. και επιβαρύνεται στο τελωνείο με 40 % της αξίας του για φόρους. Αν ο έμπορος που το διαθέτει στην κατανάλωση κερδίζει 30 %, πόσο το αγοράζει ο καταναλωτής;

6. Η απόσταση δυο πόλεων σε ευθεία γραμμή σε χάρτη κλίμακας 1: 1.000.000 είναι 5 cm.
α) Να βρείτε την πραγματική απόσταση σε ευθεία γραμμή των δυο πόλεων.
β) Αν η πραγματική απόσταση των δυο πόλεων αυξάνεται κατά μέσο όρο κατά 25 % ανά χιλιόμετρο λόγω της χάραξης του δρόμου (στροφές κ.λπ.), να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο για να πάει από τη μια πόλη στην άλλη.

7. Στην τιμή των 2.000 δρχ. ενός εισιτηρίου θεάτρου περιέχονται: 60 % αμοιβή καλλιτεχνών, 10 % ενοίκιο θεάτρου, 8 % φωτισμός, 9 % φόροι και 13 % άλλα έξοδα. Σε μια παράσταση διατέθηκαν 550 εισιτήρια. Πώς μοιράστηκαν τα χρήματα που εισπράχτηκαν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

BASIC 7

Στην παράγραφο 4.4 μάθαμε να μερίζουμε ένα ποσό Α σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ. Διαπιστώσαμε δε ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα βασιζόταν στην επεξεργασία του τύπου:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{x+y+\omega}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{A}{\alpha+\beta+\gamma}$$

δηλαδή η λύση ήταν:

$$x=\frac{\alpha \cdot A}{\alpha+\beta+\gamma},\quad y=\frac{\beta \cdot A}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ και}$$

$$,\ \omega=\frac{\gamma \cdot A}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία αυτά μπορούμε να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα όπου θα δίνουμε το ποσό Α που πρέπει να μεριστεί καθώς επίσης και τους αριθμούς α, β, γ ως προς τους οποίους πρέπει να βρεθούν τα ανάλογα μερίδια, και ο υπολογιστής θα υπολογίζει και θα τυπώνει τα μερίδια x, y και ω. Δηλαδή:

```
10 INPUT A                  (↵)
20 INPUT α                  (↵)
30 INPUT β                  (↵)
40 INPUT γ                  (↵)
50 LET x = A*α*(α+β+γ)      (↵)
60 LET y = A*β*(α+β+γ)      (↵)
70 LET ω = A*γ*(α+β+γ)      (↵)
80 PRINT x,y,ω              (↵)
```

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα για κάθε μια από τις ασκήσεις της παραγράφου 4.4 (λυμένες).

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε την κλίμακα και την απόσταση δύο πόλεων και ο υπολογιστής θα μας δίνει την πραγματική απόσταση αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Βασικές γεωμετρικές έννοιες

5.1 Γεωμετρικά στερεά

Θεωρία

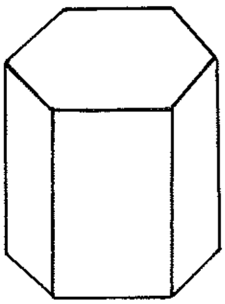
Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε γεωμετρικά στερεά;

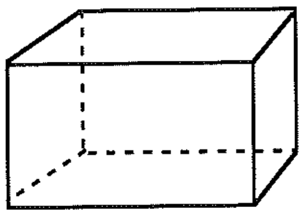
1. Γεωμετρικά στερεά ονομάζουμε τα στερεά που η Γεωμετρία εξετάζει μόνο ως προς το σχήμα που έχουν και ως προς το χώρο (όγκο) που καταλαμβάνουν.

2. Ποια είναι τα σπουδαιότερα γεωμετρικά στερεά;

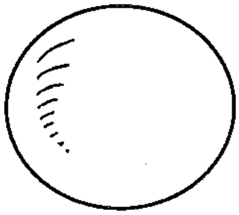
2. Τα σπουδαιότερα γεωμετρικά στερεά, είναι: Τα πρίσματα (ορθά πρίσματα, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κύβοι), οι πυραμίδες, οι κύλινδροι, οι κώνοι και οι σφαίρες.



ορθό πρίσμα

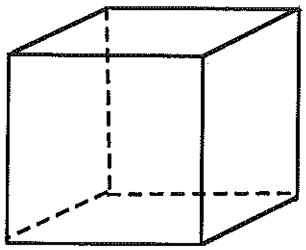


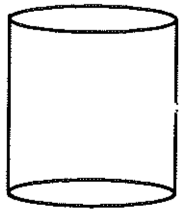
ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



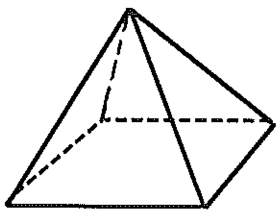
σφαίρα

κύβος

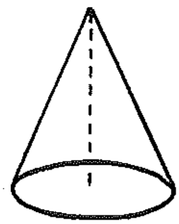




Κύλινδρος



πυραμίδα

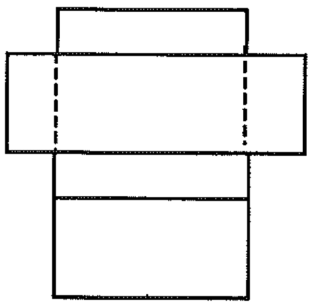


Κώνος

3. Τι ονομάζουμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και τι έδρες αυτού;

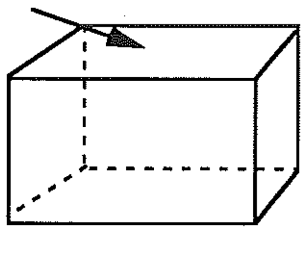
3. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ονομάζουμε το γεωμετρικό στερεό που περιορίζεται από έξι επίπεδες επιφάνειες και που η κάθε μία έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλόγραμμου. Τα έξι αυτά ορθογώνια παραλληλόγραμμα λέγονται και **έδρες** του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Σημείωση: Αν ανοίξουμε ένα κουτί που έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έτσι ώστε όλες οι έδρες του να εφαρμόζουν πάνω στην επιφάνεια του τραπεζιού τότε θα έχουμε το διπλανό σχήμα που λέγεται **ανάπτυγμα** της επιφάνειας του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



Ανάπτυγμα

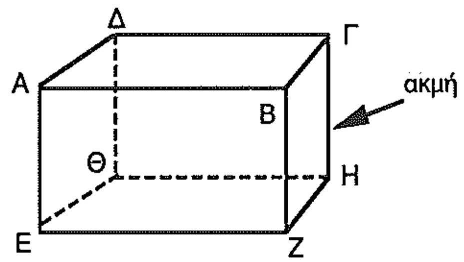
έδρα



4. Τι ονομάζουμε ακμή και τι κορυφή ενός παραλληλεπιπέδου;

4. Ακμή ενός παραλληλεπιπέδου ονομάζουμε την κοινή πλευρά δύο διαδοχικών εδρών.

Κορυφή ενός παρ/δου ονομάζουμε το σημείο που τέμνονται τρεις ακμές.

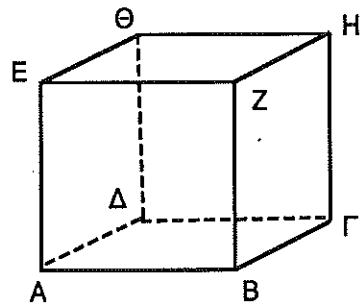


Π.χ.

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ είναι οι κορυφές του παραλληλεπιπέδου. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, και ΔΘ είναι οι ακμές του παραλληλεπιπέδου.

5. Τι είναι ο κύβος;

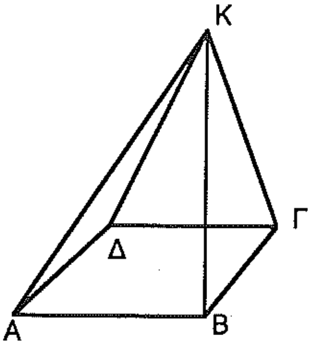
5. Κύβος είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που όλες οι έδρες του είναι τετράγωνα. (Άρα οι ακμές του έχουν όλες το ίδιο μήκος).



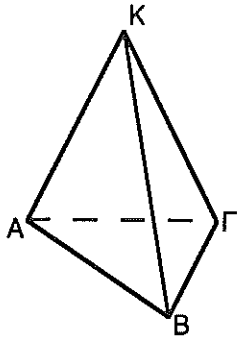
6. Τι είναι η πυραμίδα;

6. Η πυραμίδα είναι το γεωμετρικό στερεό που περικλείεται από παράπλευρες έδρες σχήματος τριγώνου (με κοινή κορυφή) και από μια έδρα στήριξης που λέγεται **βάση**, η οποία μπορεί να είναι τρίγωνο, τετράγωνο, εξάγωνο κ.λπ. Ανάλογα με το σχήμα της βάσης η πυραμίδα λέγεται τριγωνική, εξαγωνική κ.λπ.

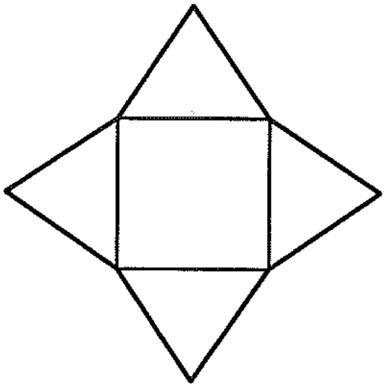
Παρατήρηση: Το πλήθος των παράπλευρων εδρών είναι ίσο με το πλήθος των πλευρών της βάσης.



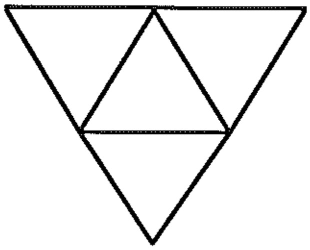
πυραμίδα με βάση τετράγωνο



τριγωνική πυραμίδα



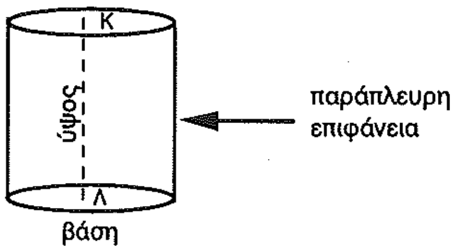
ανάπτυγμα τετραγωνικής πυραμίδας



ανάπτυγμα τριγωνικής πυραμίδας

7. Τι είναι κύλινδρος;

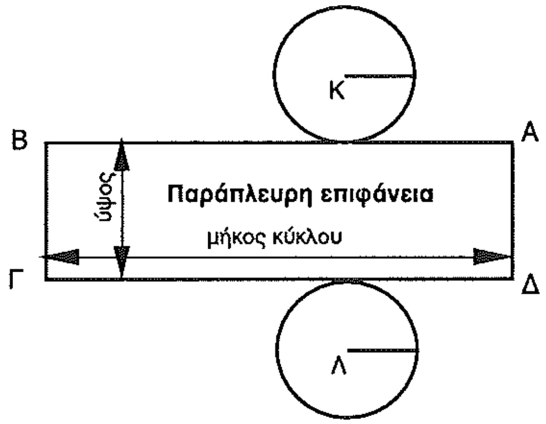
7. Ο κύλινδρος είναι ένα γεωμετρικό στερεό που περικλείεται από δύο ίσους κυκλικούς δίσκους που λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου και από μία καμπύλη επιφάνεια που λέγεται **παράπλευρη επιφάνεια** του κυλίνδρου.



8. Από ποιες επιφάνειες αποτελείται το ανάπτυγμα του κυλίνδρου;

8. Το ανάπτυγμα του κυλίνδρου αποτελείται από δυο ίσους κυκλικούς δίσκους και από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

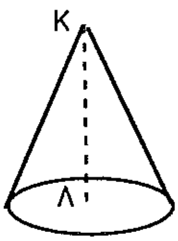
<u>Σημείωση:</u> Αν ανοίξουμε έναν κύλινδρο από χαρτόνι έτσι ώστε οι κυκλικοί δίσκοι και η παράπλευρη επιφάνειά του να εφαρμόσουν πάνω σ' ένα τραπέζι θα πάρουμε το παρακάτω ανάπτυγμα:

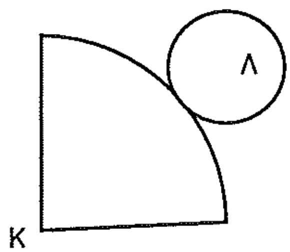


9. Τι είναι κώνος;

9. Ο κώνος είναι το γεωμετρικό στερεό που περικλείεται από έναν κυκλικό δίσκο και από μία καμπύλη επιφάνεια. Ο κυκλικός δίσκος λέγεται και **βάση** του κώνου.

Το ανάπτυγμα του κώνου μας δίνει το παρακάτω σχήμα:

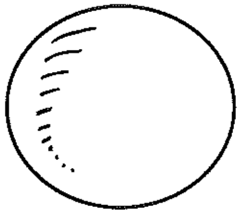




10. Τι γνωρίζετε για την επιφάνεια της σφαίρας;

10. Η επιφάνεια της σφαίρας είναι καμπύλη. Πάνω στην επιφάνειά της ο χάρακας δεν εφαρμόζει σε καμμιά διεύθυνση άρα κανένα μέρος της δεν είναι επίπεδο. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα στερεά (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύβος, κύλινδρος κ.λπ.) η επιφάνεια της σφαίρας δεν έχει ανάπτυγμα.

σφαίρα



11. Τι λέγεται επίπεδη επιφάνεια ή απλά επίπεδο;

11. **Επίπεδη επιφάνεια** ή **επίπεδο** λέγεται μια απεριόριστη επιφάνεια πάνω στην οποία ένας χάρακας εφαρμόζει ακριβώς κατά οποιαδήποτε διεύθυνση κι αν τοποθετηθεί. Η επιφάνεια ενός τραπεζίου, η επιφάνεια του πίνακα, η σελίδα ενός βιβλίου, αν φανταστούμε πως επεκτείνονται απεριόριστα, μας δίνουν φυσικές εικόνες επιπέδων.

12. Από τι δεχόμαστε στη Γεωμετρία ότι αποτελούνται τα σχήματα;

12. Στη Γεωμετρία δεχόμαστε ότι τα σχήματα αποτελούνται από άπειρα σημεία. Ένα σημείο παριστάνεται με μία τελεία και δίπλα γράφουμε ένα κεφαλαίο γράμμα που είναι το «όνομα» του σημείου.

13. Τι εννοούμε λέγοντας επίπεδο σχήμα και τι στερεό;

13. **Επίπεδο σχήμα** στη γεωμετρία εννοούμε το σχήμα του οποίου όλα τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Επίπεδα σχήματα είναι το τρίγωνο, το παραλληλόγραμμο, η έδρα ενός κύβου, η βάση μιας πυραμίδας ο κυκλικός δίσκος κ.λπ.

Στερεό σχήμα εννοούμε το σχήμα του οποίου τα σημεία **δε** βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο. Π.χ. ο κύβος, η πυραμίδα κ.ά.

14. Πόσες διαστάσεις έχει ένα επίπεδο σχήμα και πόσες ένα στερεό;

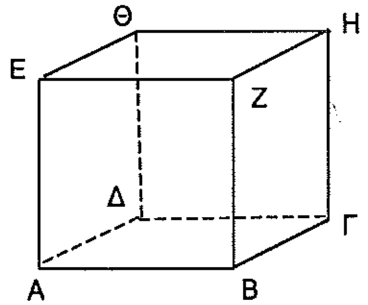
14. Ένα επίπεδο σχήμα έχει δυο διαστάσεις, ενώ ένα στερεό έχει τρεις.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Στον πίνακα του σχολείου ο Καθηγητής σχεδίασε έναν κύβο. Ένας μαθητής παρατηρεί ότι ο κύβος έχει 6 έδρες και κάθε έδρα 4 ακμές. Βγάζει έτσι το συμπέρασμα ότι ο κύβος έχει 4 · 6 = 24 ακμές. Είναι σωστό αυτό;

Λύση

Το συμπέρασμα που βγάζει ο μαθητής είναι λάθος. Αν παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι δύο γειτονικές έδρες του κύβου, έχουν κοινή ακμή. Άρα ο κύβος έχει 12 ακμές (24 : 2 = 12).



2. Να βρείτε το είδος της επιφάνειας που έχουν τα παρακάτω σχήματα: Το τζάμι, η μπάλα του μπάσκετ, η επιφάνεια μιας λίμνης, το δάπεδο, η Σελήνη, ένα μεταλλικό κουτί με αναψυκτικό.

Λύση

Η επιφάνεια που έχουν: το τζάμι, η λίμνη και το δάπεδο είναι επίπεδη. Η επιφάνεια της μπάλας και της Σελήνης είναι σφαιρική. Το μεταλλικό κουτί που περιέχει αναψυκτικό έχει παράπλευρη επιφάνεια κυλινδρική.

3. Τοποθετούμε 10 δίδραχμα (της ίδιας σειράς) το ένα πάνω στο άλλο, ώστε να εφαρμόσουν ακριβώς. Τι σχήμα θα προκύψει;

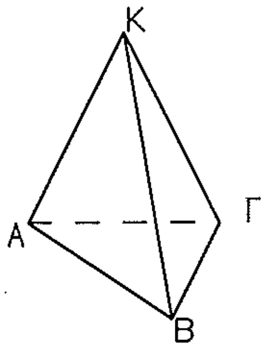
Λύση

Το σχήμα που θα σχηματίσουν τα 10 δίδραχμα θα είναι κύλινδρος.

4. Να βρείτε πόσες έδρες, ακμές και κορυφές έχει μία πυραμίδα με βάση τρίγωνο.

Λύση

Η πυραμίδα με βάση τρίγωνο έχει 4 έδρες οι οποίες είναι: ΑΒΓ, ΑΒΚ, ΑΓΚ και ΒΓΚ. Έχει 6 ακμές, τις: ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ. Έχει και 4 κορυφές τις: Α, Β, Γ, Κ.



5. Πόσα κουτιά από σπίρτα θα χρειαστούμε για να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που είναι τέσσερεις φορές πιο μακρύ, τρεις φορές πιο πλατύ και πέντε φορές πιο ψηλό από ένα κουτί σπίρτα;

Λύση

Για να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που είναι τέσσερεις φορές πιο μακρύ και τρεις φορές πιο πλατύ θα χρειαστούμε 4 · 3 = 12 κουτιά. Για να γίνει πέντε φορές πιο ψηλό από ένα κουτί σπίρτα θα θέλουμε 5 τέτοιες δωδεκάδες. Άρα θα χρειαστούμε συνολικά 12 · 5 = 60 κουτιά σπίρτα.

6. Να κατασκευάσετε με χαρτόνι το ανάπτυγμα ενός κυλίνδρου που έχει ύψος 10 cm και που η ακτίνα της βάσεώς του (κυκλικός δίσκος) είναι ρ=3

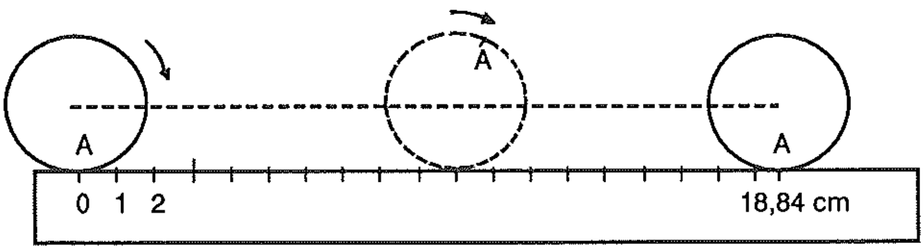
cm.

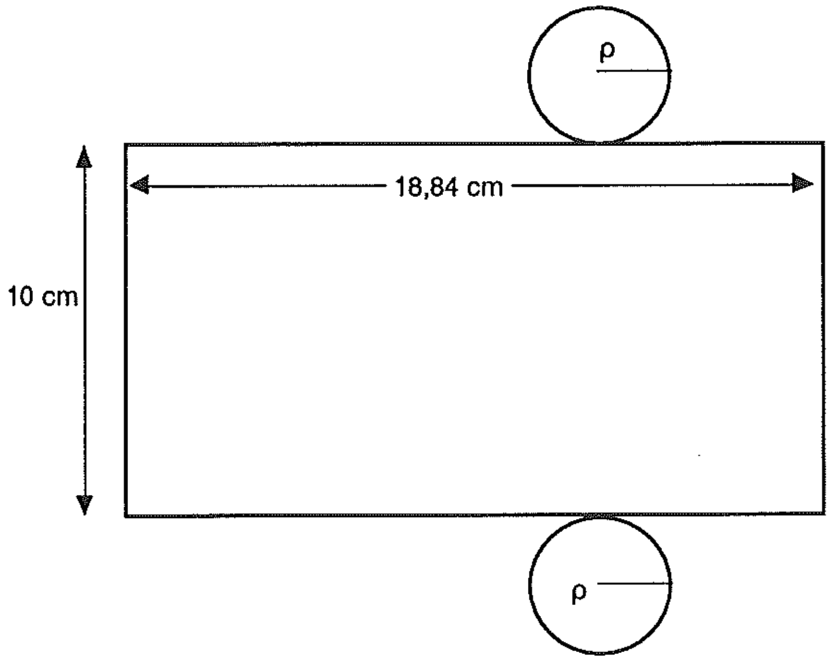
Λύση

Πάνω σε ένα χαρτόνι και με τη βοήθεια ενός διαβήτη σχεδιάζουμε δύο κύκλους με ακτίνα ρ = 3 cm. Με ένα ψαλίδι κόβουμε προσεκτικά το περίγραμμα των δύο κύκλων έτσι ώστε να πάρουμε δύο ίσους κυκλικούς δίσκους.

Στην συνέχεια σχεδιάζουμε στο χαρτόνι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μια πλευρά του ίση με 10 cm. Αυτό που θα μας δυσκολέψει λίγο είναι η άλλη πλευρά του. Πρέπει το μήκος αυτής της πλευράς να είναι ίσο με το μήκος του κύκλου γι' αυτό κάνουμε το εξής:

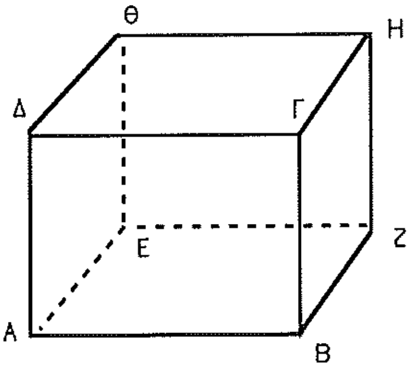
Μπροστά από τη βαθμολογημένη κλίμακα ενός χάρακα ξεκινώντας από το μηδέν (0) στρέφουμε τον ένα κυκλικό δίσκο έτσι ώστε να κάνει μία ολόκληρη στροφή όπως στο σχήμα. Η ένδειξη που θα πάρουμε στο χάρακα είναι το μήκος της άλλης πλευράς του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αν η παραπάνω εργασία έγινε προσεκτικά η ένδειξη στο χάρακα είναι 18,84 cm.





Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύβος;



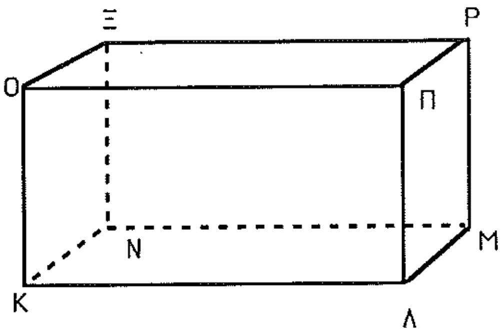
Λύση

Ομοιότητες:
Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύβος έχουν:

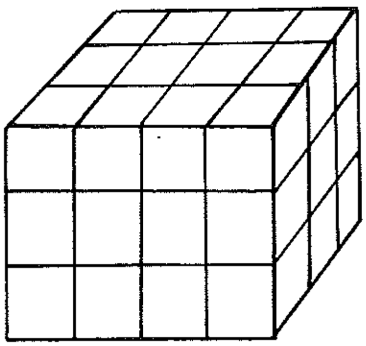
α) Όλες τις επιφάνειές τους επίπεδες,
β) έχουν από 6 έδρες,
γ) έχουν 12 ακμές,
δ) έχουν 8 κορυφές και
ε) έχουν τις απέναντι έδρες ίσες.

Διαφορές:

α) Οι απέναντι έδρες του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ίσες, ενώ του κύβου είναι όλες μεταξύ τους ίσες.
β) Οι ακμές του κύβου είναι όλες ίσες, ενώ του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου .... κ.λπ.



2. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι συναρμολογημένο από μικρούς κύβους.
α) Από πόσους κύβους αποτελείται;
β) Σε πόσους κύβους φαίνονται τρεις έδρες;
γ) Σε πόσους κύβους φαίνονται δύο έδρες;
δ) Σε πόσους κύβους φαίνεται μία έδρα;



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η πάνω έδρα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου αποτελείται από 12 κύβους και ότι το ύψος του από 3 κύβους. Άρα το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο αποτελείται από $3 \cdot 12 = 36$ κύβους.

β) Οι τρεις έδρες φαίνονται μόνο σ' ένα κύβο.

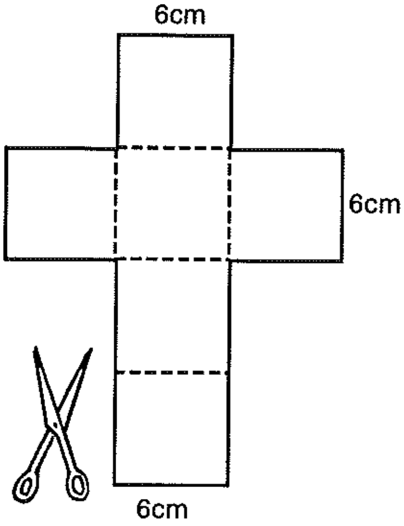
γ) Οι 2 έδρες φαίνονται.....

3. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα αναπτύγματα, να κατασκευάσετε με χαρτόνι: α) Έναν κύβο που έχει ακμή 6 cm.
β) Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 4 cm, 6 cm και 8 cm.

Λύση

α) Πάνω σ' ένα χαρτόνι σχεδιάζουμε 6 τετράγωνα με πλευρά 6 cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Με ένα ψαλίδι κόβουμε το περίγραμμα. Στη συνέχεια τσακίζουμε το χαρτόνι στις διακεκομμένες γραμμές. Με κατάλληλες αναδιπλώσεις έχουμε τον κύβο με ακμή 6 cm.

β) .....



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τι σχήμα έχει κάθε έδρα μιας πυραμίδας με βάση τετράγωνο.

2. Πόσες έδρες, ακμές και κορυφές έχει μία πυραμίδα με βάση εξάγωνο;

3. Πάνω σε έναν κύβο τοποθετούμε μία πυραμίδα, που η βάση της είναι ίση με μία έδρα του κύβου, ώστε να εφαρμόσει ακριβώς. Να βρείτε:
α) Το πλήθος των εδρών,
β) το πλήθος των ακμών,
γ) το πλήθος των κορυφών του νέου στερεού.

4. Με 12 σπίρτα να κατασκευάσετε 4 τετράγωνα. Στη συνέχεια:
α) Αφαιρέστε 4 σπίρτα ώστε να μείνει ένα τετράγωνο.
β) Αφού τοποθετήσετε πίσω τα 4 σπίρτα, να αφαιρέσετε 2 σπίρτα, ώστε να μείνουν 3 τετράγωνα.
γ) Πόσα σπίρτα, από τα 12 πρέπει να αφαιρέσουμε, ώστε να μείνουν 2 τετράγωνα;

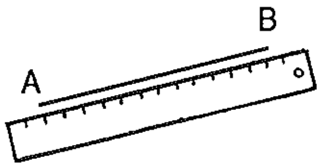
5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να εφαρμόσουμε δύο κουτιά από σπίρτα, ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

5. 2 Το ευθύγραμμο τμήμα

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

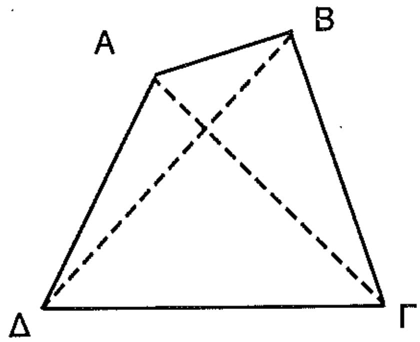


1. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ονομάζουμε την επίπεδη γραμμή που γράφουμε με τη βοήθεια ενός χάρακα και η οποία έχει αρχή το Α και τέλος το Β (ή αντίστροφα ΒΑ).

<u>**Σημείωση:**</u> Το ευθύγραμμο τμήμα, όπως και κάθε γραμμή, είναι ένα σύνολο σημείων.

2. Τι λέγεται πλευρά και τι διαγώνιος ενός πολυγώνου;

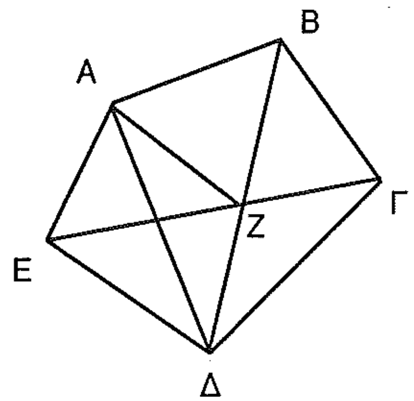
2. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο διαδοχικές κορυφές ενός πολυγώνου λέγεται **πλευρά**, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές του λέγεται **διαγώνιος** του πολυγώνου.
Π.χ.:



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και πλευρές τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιές του.

Α. Λυμένες ασκήσεις

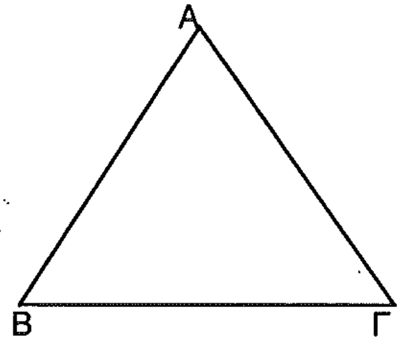
1. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος που ορίζονται από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.



Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι τα: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, ΑΔ, ΒΔ, ΓΕ, ΑΖ, ΔΖ, ΒΖ, ΕΖ, ΓΖ.

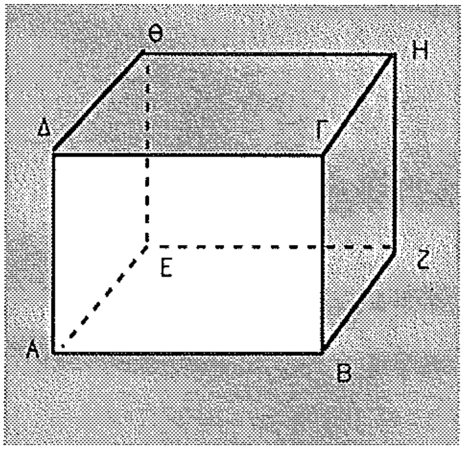
2. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Να ονομάσετε:
α) τις κορυφές,
β) τις πλευρές και
γ) τις διαγώνιές του.



Λύση

α) Οι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Α, Β, Γ.
β) Οι πλευρές του είναι τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.
γ) Το τρίγωνο δεν έχει διαγώνιες.

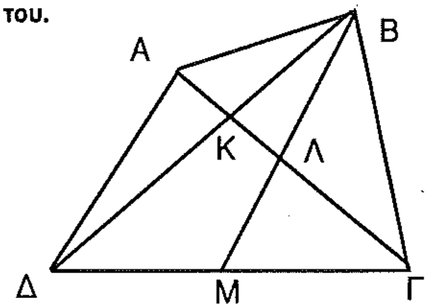
3. Δίνεται ο κύβος με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Να γράψετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με αρχή το σημείο Α και τέλος το σημείο μίας άλλης κορυφής.



Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται με αρχή το Α και τέλος το σημείο μιας άλλης κορυφής του κύβου είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ, ΑΗ.

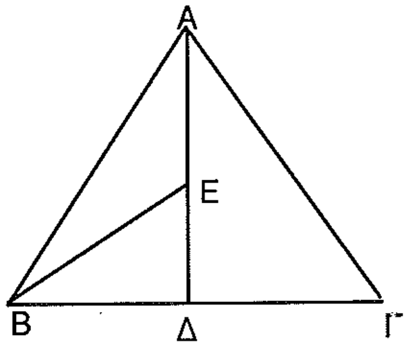
4. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε και να ονομάσετε τις διαγώνιές του.



Λύση

Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ δεν είναι διαγώνιος γιατί δε συνδέει δύο μη διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου.

5. Στο διπλανό σχήμα να ορίσετε όλα τα τρίγωνα που έχουν σχηματιστεί.

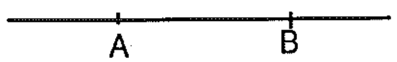


Λύση

Τα τρίγωνα που έχουν σχηματιστεί είναι τα: ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΒΔΕ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

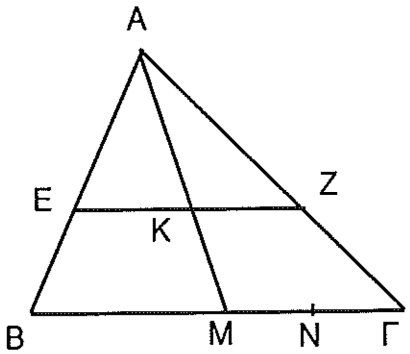
1. Να βρεθεί από πόσα σημεία αποτελείται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις (μήκος, πλάτος, ύψος) ούτε ύλη. Χαρακτηριστικά ο μεγάλος 'Ελληνας γεωμέτρης της αρχαιότητας Ευκλείδης έγραψε:
«σημείο είναι εκείνο που δεν έχει μέρη».
Επίσης στη γεωμετρία δεχόμαστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα σύνολο σημείων. Επομένως...

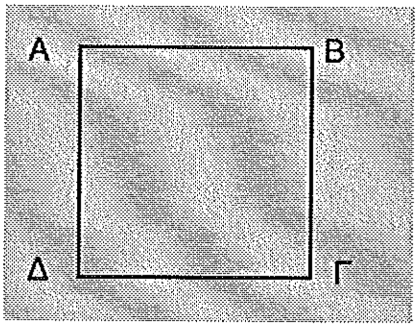
2. Να γραφούν τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σχεδιασμένα στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν έχουν σχεδιαστεί είναι: ΖΝ, ΒΚ, ...

3. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να ονομάσετε τις πλευρές του και να γραφούν οι διαγώνιές του. Πόσες έχει; Αν συγκρίνετε τις διαγώνιες μ' ένα χάρακα τι παρατηρείτε;



Λύση

Οι πλευρές του τετραγώνου είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ.
Οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι τα ευθύγραμμα τμήματα....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να πάρετε πάνω σ' ένα επίπεδο 10 διαφορετικά σημεία. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται με αρχή το ένα απ' αυτά τα σημεία;

2. Δίνονται 5 σημεία ενός επιπέδου. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται αν ενώσουμε τα σημεία αυτά ανά δύο;

3. Να γράψετε ένα επίπεδο σχήμα με 6 πλευρές. Να ονομάσετε τις πλευρές και τις διαγώνιές του.

4. Να σχηματίσετε ένα πεντάγωνο και να φέρετε όλες τις διαγώνιές του. Να κάνετε το ίδιο με ένα εξάγωνο. Πόσες διαγώνιες έχει το κάθε σχήμα; Μπορείτε να βρείτε τρόπο να υπολογίσετε τον αριθμό των διαγωνίων χωρίς να τις μετράτε;

5. Με το χάρακα να χαράξετε μια ευθεία γραμμή. Πάνω στην ευθεία αυτή να πάρετε 3 σημεία. Στη συνέχεια να πάρετε ένα σημείο Α που δεν είναι σημείο αυτής της ευθείας γραμμής. Να βρείτε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα 4 αυτά σημεία.

5.3 Η ευθεία και η ημιευθεία

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται ευθεία;

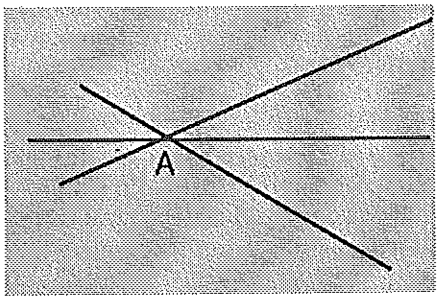
2. Πόσες ευθείες διέρχονται από ένα σημείο Α;

Απαντήσεις

1. Ευθεία γραμμή ή ευθεία είναι η γραμμή που προκύπτει αν προεκτείνουμε με τη βοήθεια ενός χάρακα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ απεριόριστα και προς το μέρος του Α και προς το μέρος του Β. Από τον τρόπο που ορίσαμε την ευθεία καταλαβαίνουμε ότι: Η ευθεία δεν έχει αρχή ούτε τέλος.

2. Από ένα σημείο Α διέρχονται άπειρες ευθείες.
π.χ. Από το σημείο Α και με τη βοήθεια

ενός χάρακα μπορούμε να σχεδιάσουμε άπειρες ευθείες.



3. Πόσες ευθείες διέρχονται από δύο σημεία Α και Β;

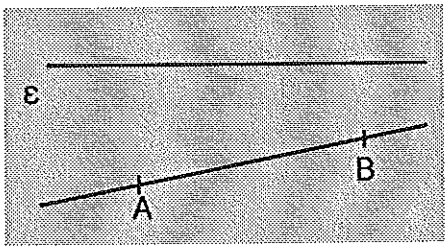
3. Από δύο σημεία Α και Β διέρχεται μία μόνο ευθεία.

4. Πώς μπορούμε να ονομάσουμε μία ευθεία;

4. Για να ονομάσουμε μία ευθεία χρησιμοποιούμε ένα μικρό γράμμα της αλφαβήτου (α, β, γ, ε κ.λπ.). Μπορούμε ακόμα να της δώσουμε το όνομα δύο σημείων της γιατί είναι η μόνη ευθεία που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία.

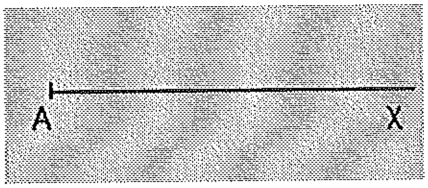
π.χ.

Ευθεία ε, ευθεία ΑΒ ή ευθεία ΒΑ.



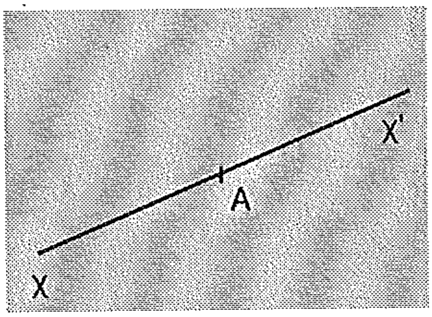
5. Τι λέγεται ημιευθεία;

5. Ημιευθεία είναι η γραμμή που προκύπτει αν προεκτείνουμε με τη βοήθεια ενός χάρακα ένα ευθύγραμμο τμήμα μόνο από το ένα άκρο. Η ημιευθεία έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος. Μία ημιευθεία με αρχή Α μπορεί να ονομαστεί και ημιευθεία Αχ όπου το μικρό γράμμα χ γράφεται προς το μέρος που προεκτείνεται η ημιευθεία και δε δηλώνει ένα ορισμένο σημείο της.
π.χ. Η ημιευθεία Αχ.



6. Πότε δύο ημιευθείες Αχ και Αχ' λέγονται αντικείμενες ημιευθείες;

6. Αντικείμενες ημιευθείες Αχ και Αχ' λέγονται οι ημιευθείες που προκύπτουν αν πάνω σε μια ευθεία χ'χ πάρουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Οι δυο ημιευθείες έχουν κοινή αρχή Α αλλά αντίθετες κατευθύνσεις.



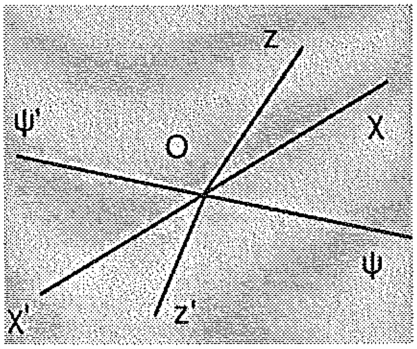
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Πόσες ημιευθείες έχουν αρχή Ο στο σχήμα; Πόσες από αυτές είναι αντικείμενες ημιευθείες;

Λύση

Οι ημιευθείες που έχουν αρχή Ο στο σχήμα είναι οι:

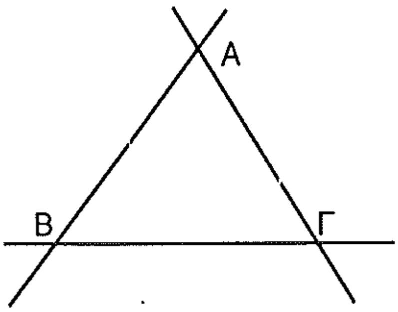
Οχ, Οχ', Οψ, Οψ', Oz, Oz'.
Από το σημείο Ο διέρχονται οι ευθείες χχ' και ψψ' άρα έχουμε τέσσερις ημιευθείες ανά δύο αντικείμενες. Τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών είναι τα:
Οχ, Οχ' και Οψ, Οψ'.



2. Να χαράξετε και να ονομάσετε όλες τις ευθείες, οι οποίες ορίζονται από τρία σημεία Α, Β, Γ που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Λύση

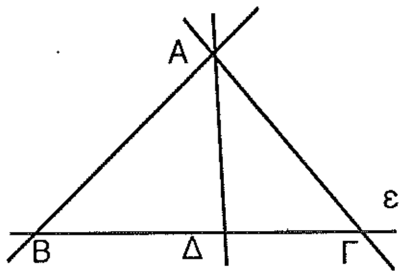
Γνωρίζουμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία. Άρα τα τρία σημεία Α, Β, Γ ορίζουν ανά δύο μία ευθεία. Αυτές είναι:
η ευθεία ΑΒ, η ευθεία ΑΓ και η ευθεία ΒΓ.



3 Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ από τα οποία τα Β, Γ, Δ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε. Να χαράξετε και να ονομάσετε όλες τις ευθείες που ορίζονται από αυτά τα σημεία. Ονομάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα τέσσερα σημεία.

Λύση

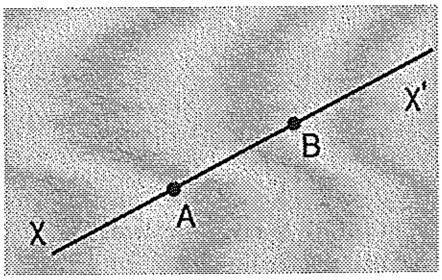
Οι ευθείες που ορίζονται από τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι οι:
ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, και ΒΓ.
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΒΔ, ΔΓ, ΒΓ και ε είναι ευθείες που ταυτίζονται γι' αυτό τις θεωρούμε ότι είναι μία και μόνο μία. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται είναι τα: ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ, ΒΔ, ΒΓ, ΔΓ.



4. Πάνω σε μία ευθεία χ'χ να γράψετε δύο σημεία Α και Β. Να ονομάσετε τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Α και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Β. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται;

Λύση

Οι αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το σημείο Α είναι οι: Αχ' και Αχ. Οι αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το σημείο Β είναι οι Βχ' και Βχ. Το ΑΒ είναι το μόνο ευθύγραμμο τμήμα.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται η ευθεία ε. Πόσες αντικείμενες ημιευθείες μπορούμε να πάρουμε από την ευθεία αυτή θεωρώντας σαν αρχή τους ένα οποιοδήποτε σημείο της;

Λύση

Έστω Α ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ε. Τότε ορίζονται δύο αντικείμενες ημιευθείες με αρχή Α και είναι οι: Αχ, Αχ'. Γνωρίζουμε ότι μία ευθεία αποτελείται από άπειρα σημεία. Επομένως....

2. Μέσα σ' ένα δωμάτιο πετούν δύο μύγες. Σε ποια θέση πρέπει να βρίσκονται έτσι ώστε να ορίζουν μία ευθεία;

Λύση

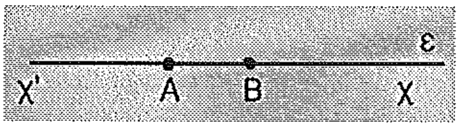
Γνωρίζουμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία. Αν φανταστούμε λοιπόν ότι οι δύο μύγες είναι σημεία, τότε συμπεραίνουμε ότι....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σε μία ευθεία να ορίσετε τα σημεία Α, Β, Γ. Με ποιους τρόπους μπορείτε να ονομάσετε την ευθεία αυτή;

2. Να βρεθεί η διαφορά μεταξύ ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας και ημιευθείας.

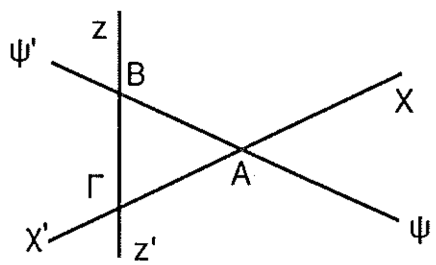
3. Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε τις ημιευθείες Αχ' και Βχ . Μπορούμε να πούμε ότι οι ημιευθείες αυτές είναι αντικείμενες;



4. Μπορούμε να πούμε ότι το μήκος μιας ευθείας είναι διπλάσιο από το μήκος μιας ημιευθείας;

5. Σ' ένα επίπεδο (το φύλλο του τετραδίου) να πάρετε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ που ανά τρία να μην ανήκουν στην ίδια ευθεία. Πόσες ευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται από τα τέσσερα αυτά σημεία;

6. Να βρείτε ποιες ευθείες και ποιες ημιευθείες υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα. Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες ημιευθείες;



5. 4 Απόσταση δυο σημείων
Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται απόσταση δύο σημείων Α και Β;

Απαντήσεις

1. **Απόσταση** δύο σημείων Α και Β ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία αυτά.

2. Τι λέγεται μέσο ευθυγράμμου τμήματος;

2. Το σημείο το οποίο χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα τμήματα λέγεται **μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.**

5. 5 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με ποιους τρόπους μπορούμε να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα;

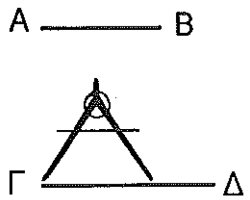
Απαντήσεις

1. Για να συγκρίνουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

α) Να μετρήσουμε με το υποδεκάμετρο και να βρούμε τα μήκη τους. Αυτό που έχει μεγαλύτερο μήκος είναι το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα.

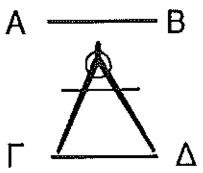
β) Να συγκρίνουμε με το διαβήτη. Δηλαδή να ανοίξουμε το διαβήτη, ώστε οι δύο άκρες του να ταυτίζονται με τα άκρα του ενός από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα και μετά διατηρώντας το άνοιγμα του διαβήτη σταθερό ελέγχουμε αν το άλλο τμήμα είναι μεγαλύτερο μικρότερο ή ίσο με το πρώτο.

1) π.χ.



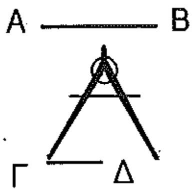
ΑΒ < ΓΔ

2)



ΑΒ = ΓΔ

3)



ΑΒ > ΓΔ

2. Τι ονομάζεται διάμεσος τριγώνου;

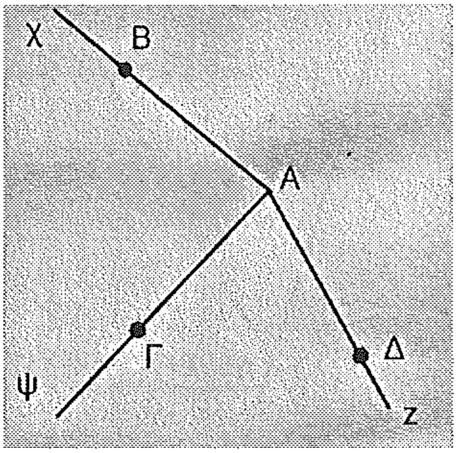
2. Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Α. Λυμένες ασκήσεις

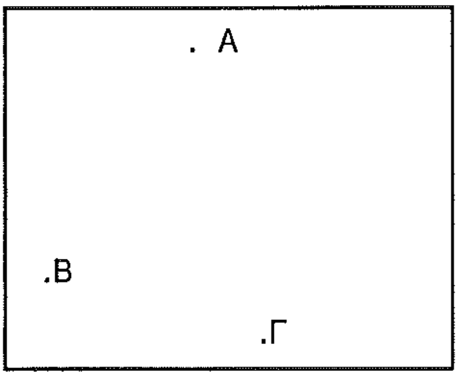
1. Να γράψετε ένα σημείο Α και μετά να βρείτε τρία σημεία Β, Γ και Δ που να απέχουν από το Α απόσταση 3 cm.

Λύση

Παίρνουμε το σημείο Α και χαράζουμε τις ημιευθείες Αχ, Αψ, Αz. Με το υποδεκάμετρο παίρνουμε πάνω στις ημιευθείες Αχ, Αψ, Αz τα σημεία Β, Γ και Δ έτσι ώστε:
ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 3 cm, ΑΔ = 3 cm.
Τα σημεία Β ,Γ και Δ απέχουν από το Α απόσταση 3 cm.



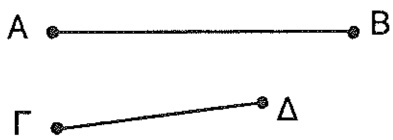
2. Στο παρακάτω σχήμα να μετρήσετε τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων Α, Β και Γ.



Λύση

Αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ, με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι: ΑΒ = 3,6 cm, ΑΓ = 4 cm, ΒΓ = 3 cm.

3. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του παρακάτω σχήματος. Να τα συγκρίνετε με το διαβήτη.



Λύση

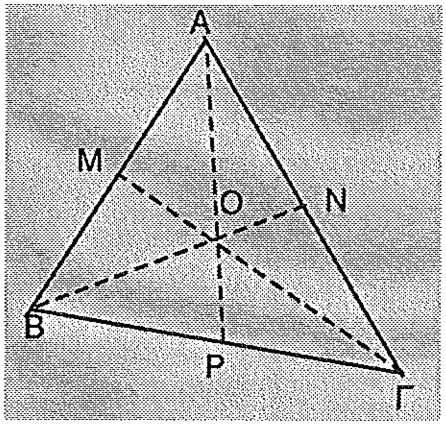
Τοποθετούμε τα άκρα του διαβήτη στα σημεία Α κα Β. Χωρίς να αλλάξουμε το άνοιγμα του διαβήτη, τοποθετούμε το ένα άκρο του στο σημείο Γ. Παρατηρούμε ότι το άλλο άκρο του διαβήτη πέφτει μετά από το σημείο Δ. Άρα το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ και γράφουμε:
ΑΒ > ΓΔ.

4. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και μετά να σχεδιάσετε τις διαμέσους του. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ. Με το υποδεκάμετρο μετράμε τις πλευρές του και βρίσκουμε ότι ΑΒ = 4,2 cm, ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 5 cm.
Μετά βρίσκουμε τα μέσα Μ, Ν, Ρ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα έτσι ώστε: ΑΜ = ΜΒ = 2,1 cm, ΑΝ = ΝΓ = 2,5 cm και ΒΡ = ΡΓ = 2,5 cm.

Χαράζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΡ, ΒΝ, ΓΜ. Αυτά τα τμήματα είναι οι διάμεσοι του τριγώνου.
Παρατηρούμε ότι και οι τρεις διάμεσοι περνούν από το ίδιο σημείο Ο (το σημείο Ο ονομάζεται βαρύκεντρο).

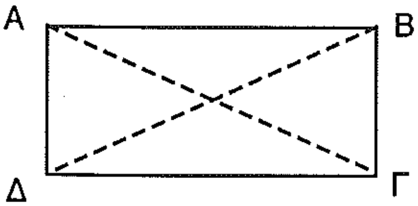


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο και να μετρήσετε τις διαγωνίους του. Τι παρατηρείτε;

Λύση

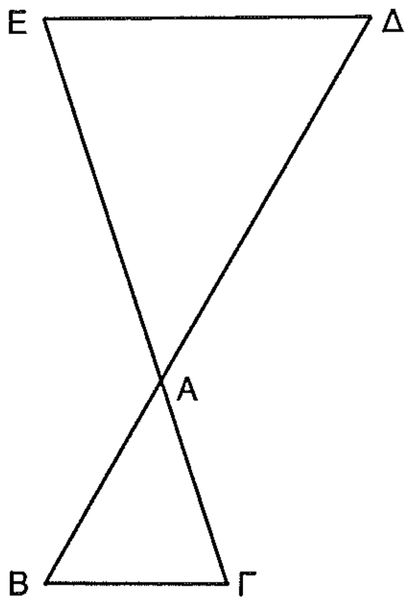
Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και φέρνουμε τις διαγωνίους του ΑΓ και ΒΔ. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι η ΑΓ είναι....



2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να προεκτείνετε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α. Να πάρετε στην προέκταση της ΑΒ τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ τμήμα ΑΕ = 2ΑΓ. Να μετρήσετε τη ΔΕ και να τη συγκρίνετε με τη ΒΓ.

Λύση

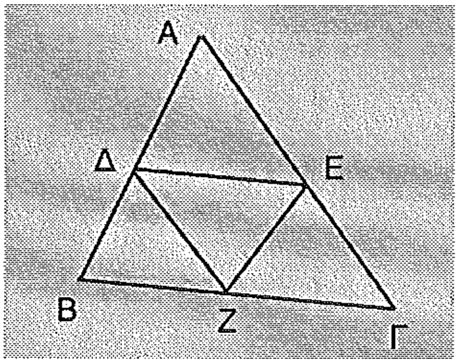
Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α όπως το σχήμα. Ανοίγουμε ένα διαβήτη όσο είναι η πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ και παίρνουμε στην προέκτασή της δύο φορές το άνοιγμα του διαβήτη. Το τμήμα που κατασκευάσαμε είναι το ΑΔ=2ΑΒ....



3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να βρείτε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, και ΒΓ. Να τα ονομάσετε Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Να μετρήσετε τις ΑΒ, ΑΓ, και ΒΓ και μετά να σχεδιάσετε το τρίγωνο ΔΕΖ. Μετρήστε τις πλευρές του και να τις συγκρίνετε με τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και μετράμε τις πλευρές του. Είναι:
ΑΒ = 3,6 cm, ΑΓ = 4,4 cm και ΒΓ = 4,2 cm. Μετά μετράμε στην ΑΒ από το Α απόσταση 1,8 cm και τοποθετούμε το μέσο Δ της ΑΒ....



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε δύο σημεία που να απέχουν 2,5 cm.

2. Να σχεδιάσετε ένα σημείο Ο και να βρείτε τρία σημεία Α, Β και Γ που να απέχουν από το Ο απόσταση 2 cm.

3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και αφού μετρήσετε τις πλευρές του να διαπιστώσετε ότι το άθροισμα των δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά.

4. Να πάρετε πάνω σε μία ευθεία χχ' τέσσερα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε:
ΑΒ = 4cm, ΒΓ = 4,2 cm, ΓΔ = 3,8 cm.
Μετά να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ.

5. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και να βρείτε ένα σημείο Γ που δεν ανήκει στην ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το ΑΒ, το οποίο απέχει από το Β 2,3 cm. Μετά να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το Γ με το μέσο Μ του ΑΒ. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις ΓΑ, ΓΒ, ΓΜ.

6. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 cm, ΒΓ = 4,7 cm , ΑΓ = 3,2 cm. Να φέρετε τις διαμέσους του και να τις μετρήσετε.

5.6 Σχετικές θέσεις δυο ευθειών στο επίπεδο

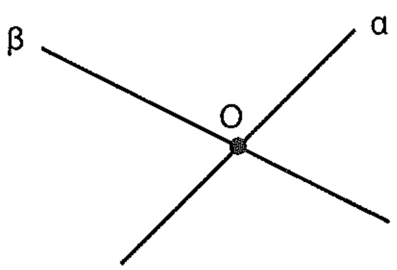
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πότε δύο ευθείες α και β τέμνονται;

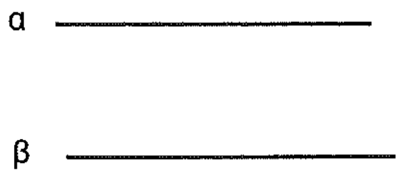
Απαντήσεις

1. Δύο ευθείες α και β τέμνονται όταν έχουν ένα κοινό σημείο.
Π.χ. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες α και β έχουν ένα κοινό σημείο το Ο. Άρα τέμνονται.



2. Πότε δύο ευθείες α και β που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες;

2. Δύο ευθείες α και β του ίδιου επιπέδου είναι **παράλληλες** αν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
Π.χ. Οι ευθείες του παρακάτω σχήματος όσο και αν προεκταθούν και από τις δύο πλευρές τους δε θα έχουν κανένα κοινό σημείο.



Για να δηλώσουμε ότι οι α και β είναι παράλληλες γράφουμε **α // β.**

3. Ποιες θέσεις μπορεί να έχουν μεταξύ τους δύο ευθείες του επιπέδου;

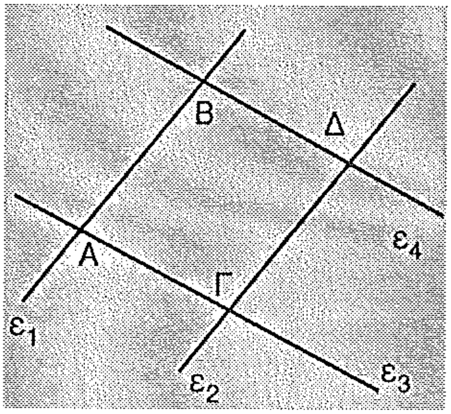
3. Δύο ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορεί να έχουν τις εξής θέσεις μεταξύ τους:
α) να τέμνονται ή
β) να είναι παράλληλες.

4. Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα;

4. Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα, όταν βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να διακρίνετε ποιες από τις ευθείες του παρακάτω σχήματος είναι τεμνόμενες και ποιες παράλληλες.

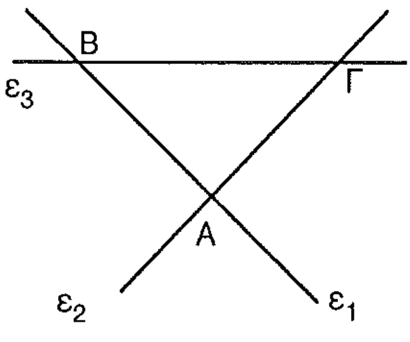


Λύση

Η ευθεία ε_1 τέμνει τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η ευθεία ε_2 τέμνει τις ευθείες ε_3 και ε_4 στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη με την ε_2 ενώ η ε_3 είναι παράλληλη με την ε_4.

2. Να σχεδιάσετε τρεις ευθείες που ανά δύο τέμνονται, χωρίς να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

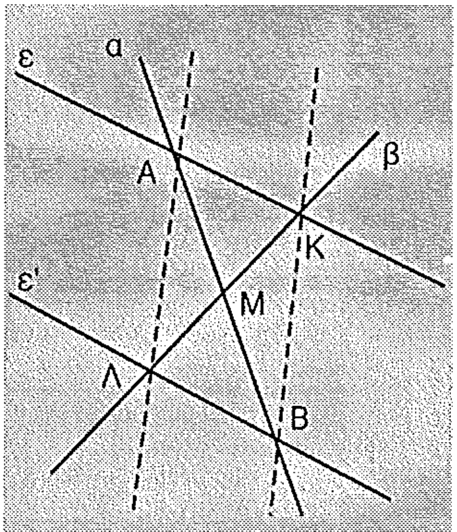


Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα η ε_1 τέμνει τις ευθείες ε_2 και ε_3 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Οι δε ευθείες ε_2 και ε_3 τέμνονται στο Γ. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 δε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. Μια ευθεία α τέμνει δύο παράλληλες ε και ε' στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Μια άλλη ευθεία β διέρχεται από το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και τέμνει τις ευθείες ε και ε' στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να διαπιστώσετε ότι το Μ είναι μέσο του ΚΛ και ότι ΑΛ παράλληλη της ΒΚ.

Λύση

Φέρουμε την ευθεία α ώστε να τέμνει τις παράλληλες ευθείες ε, ε' στα σημεία Α και Β. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και φέρουμε από αυτό ευθεία β που να τέμνει τις ε και ε' στα Κ, Λ αντίστοιχα. Με το διαβήτη παρατηρούμε ότι το Μ είναι μέσο του ΚΛ. Επίσης παρατηρούμε ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ΑΛ και ΚΒ δεν τέμνονται όσο κι αν προεκταθούν. Άρα είναι παράλληλες. Επομένως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΚΒ είναι παράλληλα.

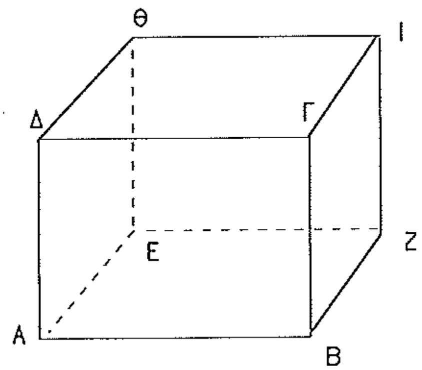


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα κύβο και να βρείτε:
α) τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα,
β) τα τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα,
γ) τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν τέμνονται χωρίς να είναι παράλληλα.

Λύση

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο με τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΓ, ΘΙ και ΕΖ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΘ είναι παράλληλο με τα ευθύγραμμα τμήματα...
β) Τα τμήματα ΑΔ, ΑΒ, ΑΕ τέμνονται στο Α. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ τέμνονται στο ...
γ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΙ δεν τέμνονται χωρίς να είναι παράλληλα. Τα τμήματα ΑΒ και ΔΘ ....



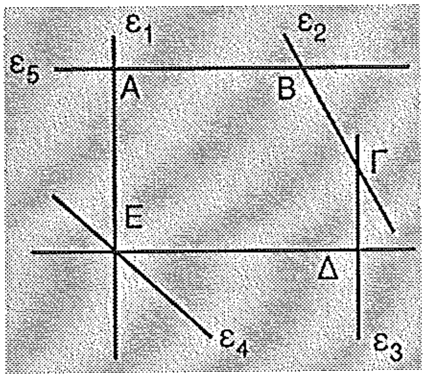
Παρατήρηση

Βλέπουμε ότι υπάρχει περίπτωση δύο ευθείες να μην είναι τεμνόμενες ούτε παράλληλες. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι αυτές οι ευθείες δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οι ευθείες αυτές λέγονται ασύμβατες.

2. Να διακρίνετε στο παρακάτω σχήμα:
α) ποιες ευθείες είναι τεμνόμενες και σε ποια σημεία τέμνονται,
β) να βρείτε τις παράλληλες ευθείες.

Λύση

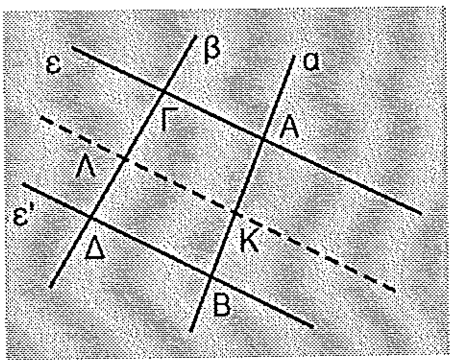
α) Οι ευθείες ε_1 και ε_5 τέμνονται στο Α...
β) Οι ευθείες ε_1 και ε_3 είναι παράλληλες...



3. Η ευθεία α τέμνει δύο παράλληλες ευθείες ε και ε' στα σημεία Α και Β αντίστοιχα ενώ η ευθεία β τέμνει τις ε και ε' στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τα μέσα Κ, Λ των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και να φέρετε την ευθεία που ενώνει τα Κ και Λ. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Φέρουμε τις ευθείες α και β που τέμνουν τις ε και ε' στα Α, Β, και Γ, Δ αντίστοιχα. Με το υποδεκάμετρο παίρνουμε τα μέσα Κ και Λ των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα...



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε στην αίθουσα:
α) Δύο ευθείες παράλληλες.
β) Δύο ευθείες τεμνόμενες.
γ) Δύο ευθείες που δεν τέμνονται χωρίς να είναι παράλληλες.

2. Να σχεδιάσετε τέσσερις ευθείες που να τέμνονται ανά δύο και να βρείτε τα σημεία τομής τους.

3. Να σχεδιάσετε δύο ευθείες παράλληλες και μία τρίτη ευθεία που να τέμνει τη μία από τις δύο. Θα τέμνει την άλλη;

4. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και να βρείτε:
α) τα τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα,
β) τα παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα,
γ) τα ευθύγραμμα τμήματα που δεν τέμνονται αλλά δεν είναι και παράλληλα.

5. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να πάρετε τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να φέρετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΛΜ, και ΚΜ. Τι παρατηρείτε;

5.7 Κάθετες ευθείες

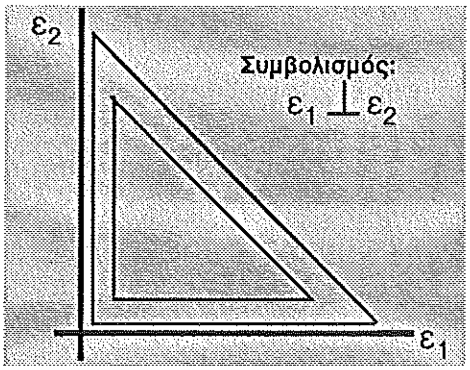
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιες ευθείες λέγονται κάθετες;

Απαντήσεις

1. Κάθετες λέγονται οι τεμνόμενες ευθείες που χαράσουμε με τη βοήθεια του γνώμονα χρησιμοποιώντας σαν οδηγούς τις δύο μικρότερες πλευρές του.
(Γνώμονας είναι το γεωμετρικό όργανο γνωστό μας σαν τρίγωνο).

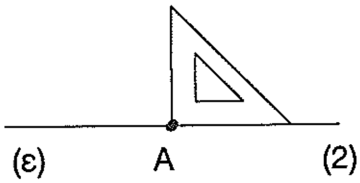


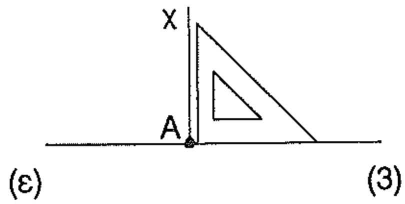
Ερωτήσεις

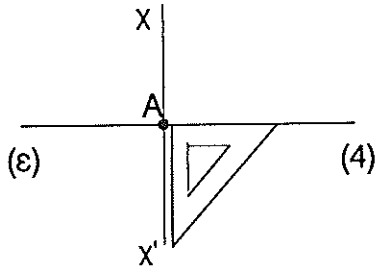
2. Με ποιο τρόπο μπορούμε να χαράξουμε ευθεία που να διέρχεται από ένα σημείο Α και να είναι κάθετη σε άλλη ευθεία ε;

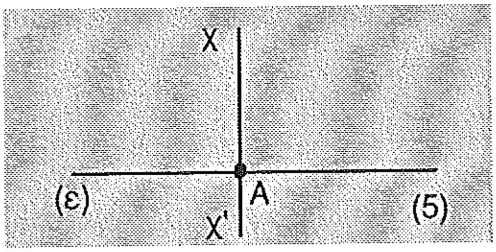
Απαντήσεις

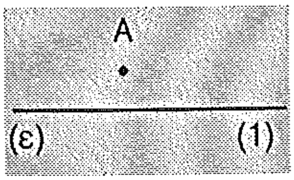
2. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
α) Το σημείο Α να ανήκει στην ευθεία ε (σχ.1). Τοποθετούμε το γνώμονα έτσι ώστε η μία κάθετη πλευρά να συμπίπτει με την ε και το άκρο της να ταυτίζεται με το Α (σχ. 2). Στη συνέχεια χαράσουμε την ημιευθεία Αχ (σχ. 3), και αμέσως μετά την αντικείμενή της ημιευθεία Αχ' (σχ. 4). Οι ευθείες ε και χ'χ είναι κάθετες.



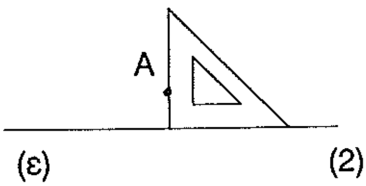


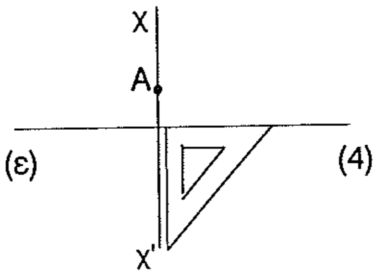


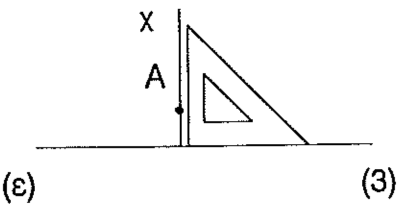


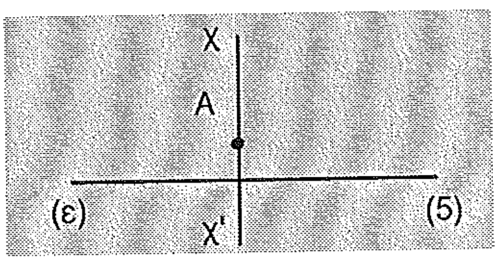


β) Το σημείο Α να μην ανήκει στην ευθεία ε. Τοποθετούμε το γνώμονα ώστε η μία κάθετη πλευρά του να είναι πάνω στην ευθεία και η άλλη πάνω στο σημείο Α (σχ. 2). Στη συνέχεια κάνουμε ότι και στην περίπτωση α).









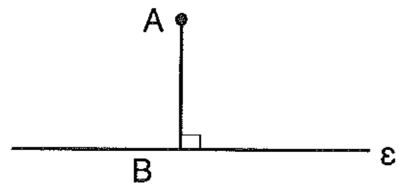
5.8 Απόσταση σημείου από ευθεία

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι λέγεται απόσταση ενός σημείου Α από μια ευθεία ε;

1. Απόσταση ενός σημείου Α από μια ευθεία ε λέγεται το **μικρότερο** ευθύγραμμο τμήμα που μπορούμε να φέρουμε με αρχή το Α και τέλος ένα σημείο Β της ευθείας ε. Η ευθεία ΑΒ είναι **πάντα** κάθετη στην ε.



2. Από ένα σημείο Α πόσες κάθετες ευθείες μπορούμε να φέρουμε προς μια ευθεία ε;

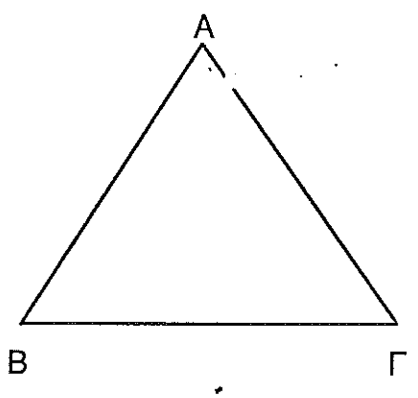
2. Από ένα σημείο Α μπορούμε να φέρουμε **μία μόνο** ευθεία κάθετη προς μια ευθεία ε.

3. Τι λέγεται ύψος ενός τριγώνου;

3. **Ύψος** ενός τριγώνου λέγεται η απόσταση μιας κορυφής του από την απέναντι πλευρά ή πιο σωστά από την ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη.

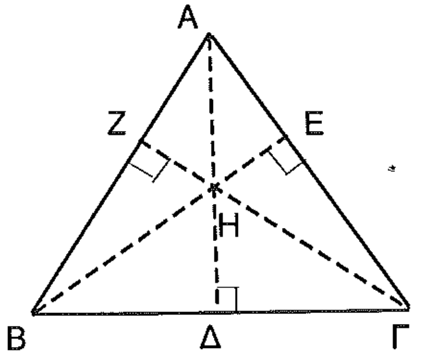
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τα ύψη του τριγώνου στο παρακάτω σχήμα. Τι παρατηρείτε;

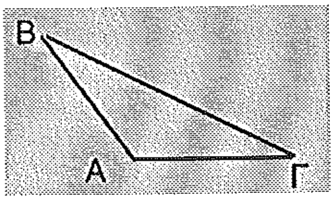


Λύση

Φέρνουμε την ΑΔ κάθετη στη ΒΓ, την ΒΕ κάθετη στην ΑΓ και την ΓΖ κάθετη στην ΑΒ όπως στο σχήμα και παρατηρούμε ότι τέμνονται στο Η. Δηλαδή τα τρία ύψη του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

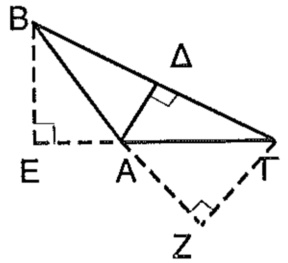


2. Να κατασκευάσετε τα ύψη του παρακάτω τριγώνου:



Λύση

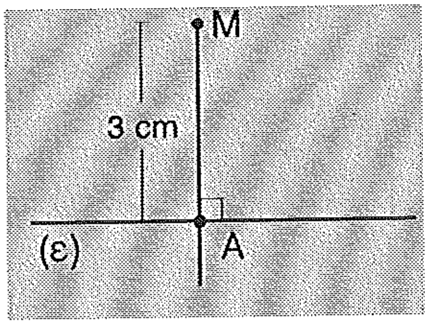
Από την κορυφή Α φέρουμε την κάθετη ΑΔ στη ΒΓ, από δε τις κορυφές Β και Γ φέρουμε τις κάθετες ΒΕ και ΓΖ στις ευθείες ΑΓ και ΒΑ αντίστοιχα (δηλ. στις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ).



3. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και να βρείτε ένα σημείο Μ σε απόσταση 3 cm από αυτή.

Λύση

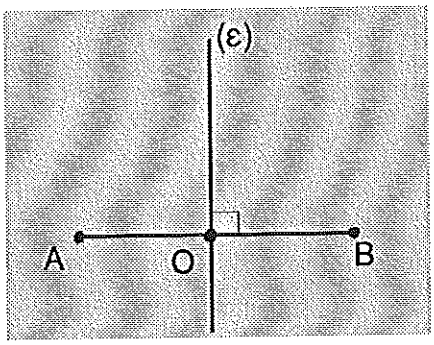
Σχεδιάζουμε μια ευθεία ε. Φέρουμε μία κάθετη στην ε σ' ένα σημείο Α αυτής. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ένα σημείο Μ που απέχει 3 cm από το Α. Το σημείο Μ βρίσκεται λοιπόν σε απόσταση 3 cm από την ευθεία ε.



4. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και να κατασκευάσετε την κάθετη στο μέσο του.

Λύση

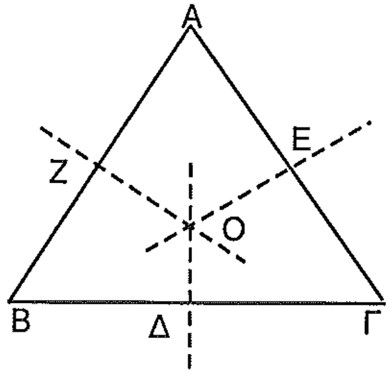
Σχεδιάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Βρίσκουμε το μέσο του ΑΒ με το υποδεκάμετρο, έστω το Ο και με το γνώμονα φέρουμε την κάθετη στο σημείο Ο. Η κάθετη αυτή ονομάζεται **μεσοκάθετη** του ΑΒ.



5. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τις κάθετες στα μέσα των πλευρών του.

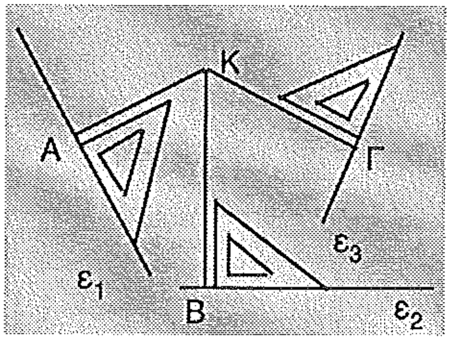
Λύση

Βρίσκουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Στα σημεία αυτά φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές δηλ. τις τρεις μεσοκάθετες. Παρατηρούμε ότι αυτές τέμνονται σ' ένα σημείο το οποίο λέγεται **περίκεντρο**.

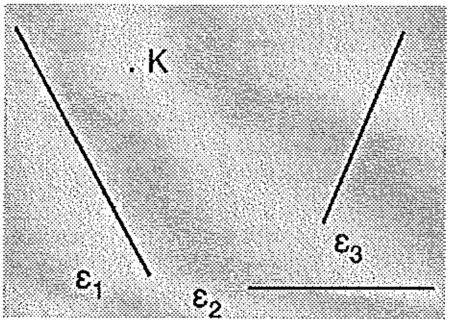


Λύση

Με τη βοήθεια του γνώμονα φέρουμε τις ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κάθετες στις ε_1, ε_2, ε_3 αντίστοιχα.

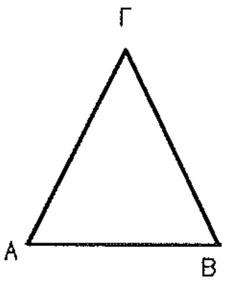


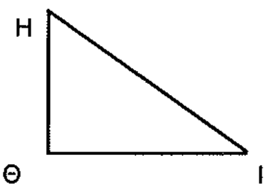
6. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου Κ από τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

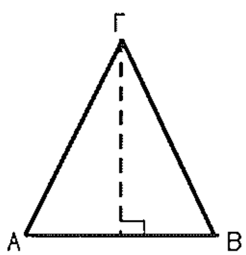
1. Να φέρετε τα ύψη των παρακάτω τριγώνων.



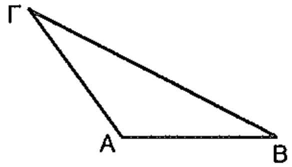


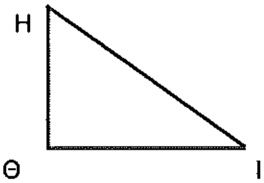
Λύση

Φέρουμε τις κάθετες από τις κορυφές στις απέναντι πλευρές.



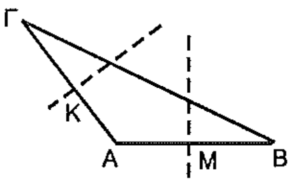
2. Να φέρετε τις μεσοκαθέτους των παρακάτω τριγώνων και να βρείτε το σημείο τομής τους (περίκεντρο).





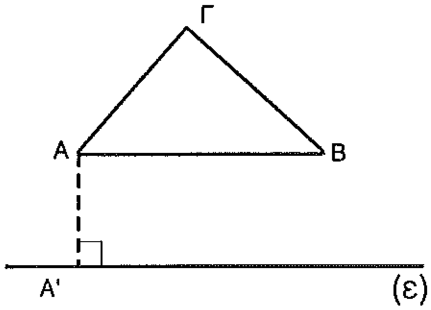
Λύση

Βρίσκουμε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και φέρουμε τις κάθετες σ' αυτά.



.....

3. Να βρείτε τις αποστάσεις των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ από την ευθεία ε στο παρακάτω σχήμα.



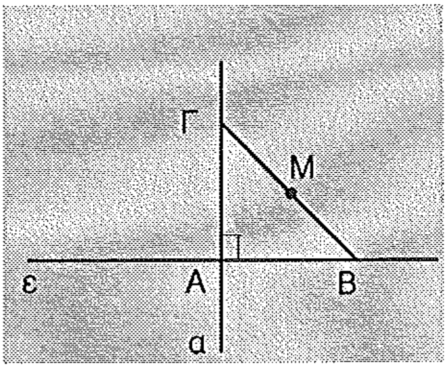
Λύση

Φέρουμε τις κάθετες ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' των σημείων Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ε...

4. Πάνω σε μία ευθεία ε σημειώστε δύο σημεία Α και Β. Φέρτε την κάθετη α στο Α και πάνω σ' αυτή πάρτε ένα σημείο Γ. Φέρτε την ΒΓ. Βρείτε το μέσο Μ της ΒΓ και τις αποστάσεις ΒΚ και ΓΛ των Β και Γ από την ΑΜ.

Λύση

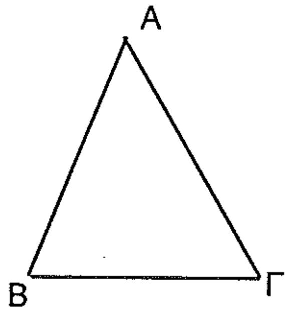
Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία Α και Β. Φέρουμε την κάθετη α στο Α και παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Γ πάνω σ' αυτή. Βρίσκουμε με το υποδεκάμετρο το μέσο Μ της ΒΓ και...



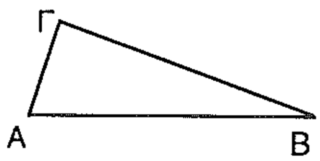
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να φέρετε τα ύψη των παρακάτω τριγώνων.

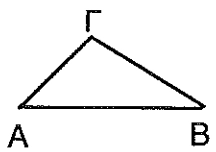
α)



β)



γ)



2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, να φέρετε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ και να συγκριθούν μεταξύ τους.

3. Σχεδιάστε τμήμα ΑΒ μήκους 5 cm και έστω Μ το μέσο του. Φέρτε την κάθετη χ'Μχ. α) Πάρτε ένα σημείο Ε στην χ'Μ χ και συγκρίνετε τα τμήματα ΕΑ και ΕΒ. β) Πάρτε ένα σημείο Ε' που δεν ανήκει στην χ'Μ χ και συγκρίνετε τα τμήματα Ε'Α και Ε'Β.

4. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, φέρτε το ύψος του ΑΔ. Φέρτε τις αποστάσεις του Δ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ και να τις συγκρίνετε.

5. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ. Κατόπιν να φέρετε τις αποστάσεις των κορυφών Β και Γ από αυτήν.

6. Να φέρετε τις μεσοκαθέτους ενός τριγώνου ΑΒΓ. Αν Κ το σημείο που τέμνονται, να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Κ από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες (όχι κάθετες) ε_1 και ε_2 σ' ένα σημείο Α. Παίρνουμε τα σημεία Β και Γ πάνω στις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα έτσι ώστε: ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 3 cm. Αν φέρουμε τις κάθετες στις ε_1 και ε_2 στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ και να συγκριθούν τα τμήματα ΜΒ και ΜΓ.

5.9 Χάραξη παραλλήλων ευθειών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι γνωρίζετε για δυο ευθείες ενός επιπέδου που είναι κάθετες σε μια ευθεία του;

2. Να δικαιολογήσετε γιατί δύο ευθείες ε_1 και ε_2 ενός επιπέδου που είναι κάθετες σε μια ευθεία του ε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

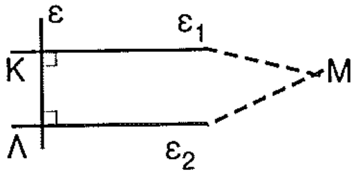
3. Πώς χαράζουμε παράλληλες ευθείες;

4. Τι λέγεται απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών;

Απαντήσεις

1. Δύο ευθείες ενός επιπέδου που είναι κάθετες σε μια ευθεία του είναι μεταξύ τους παράλληλες.

2. Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 που είναι κάθετες στην ε δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες. Τότε αν τις προεκτείνουμε θα τέμνονται σε κάποιο σημείο. Έστω το Μ. Παρατηρούμε ότι από το Μ έχουμε δύο ευθείες ΜΚ και ΜΛ κάθετες στην ε. Γνωρίζουμε όμως ότι από ένα σημείο μόνο μια ευθεία κάθετη μπορούμε να φέρουμε προς μια άλλη ευθεία. Επομένως η υπόθεση ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται δεν είναι σωστή. Άρα δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.



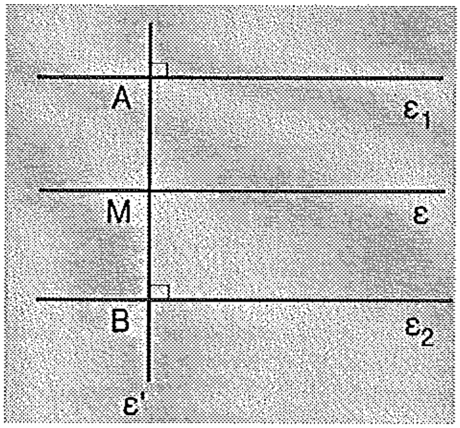
3. Για να χαράξουμε δύο ή περισσότερες ευθείες αρκεί να τις σχεδιάσουμε κάθετες προς μια τυχαία τρίτη.

4. **Απόσταση** δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που μπορούμε να φέρουμε με άκρα δυο σημεία των παραλλήλων. Το τμήμα αυτό είναι πάντα κάθετο στις παράλληλες.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν ε_1 και ε_2 ευθείες παράλληλες, να κατασκευάσετε μία ευθεία παράλληλη σ' αυτές στο μέσο της απόστασής τους.

Λύση

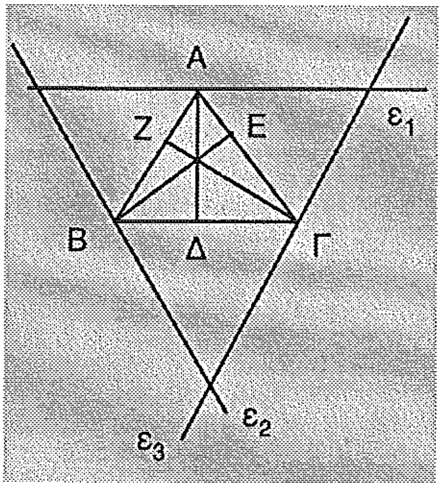


Φέρουμε μία ευθεία ε' κάθετη στις ε_1 και ε_2 που τις τέμνει στα σημεία Α και Β. Βρίσκουμε το μέσο Μ της ΑΒ (απόσταση των ε_1, ε_2) και στο σημείο αυτό φέρουμε την κάθετη ε στην ΑΒ. Η ευθεία αυτή είναι η ζητούμενη ευθεία που λέγεται και **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2.

2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε από κάθε κορυφή του παράλληλη προς την απέναντι πλευρά του.

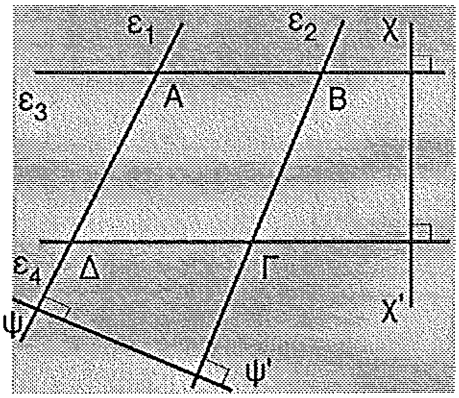
Λύση

Φέρουμε πρώτα το ύψος ΑΔ. Στη συνέχεια φέρουμε την ε_1 κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α. Τότε ε_1 // ΒΓ γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΔ. Με ανάλογο τρόπο χαράζουμε τις ε_2 και ε_3 αφού προηγουμένως φέρουμε τα ύψη ΒΕ και ΓΖ.



3. Να κατασκευάσετε τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 έτσι ώστε: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Η ε_1 τέμνει την ε_3 και ε_4 στα Α και Δ αντίστοιχα ενώ η ε_2 τέμνει αυτές στα Β και Γ, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

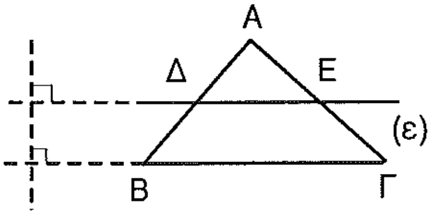
Λύση



Κατασκευάζουμε με το γνωστό τρόπο την $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Αν συγκρίνουμε με το διαβήτη τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ βλέπουμε ότι: ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ = ΑΔ.

4. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ και από το μέσο Δ της πλευράς του ΑΒ να φέρετε παράλληλη στη ΒΓ. Αν Ε το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την ΑΓ, να συγκρίνετε τα τμήματα ΕΑ και ΕΓ.

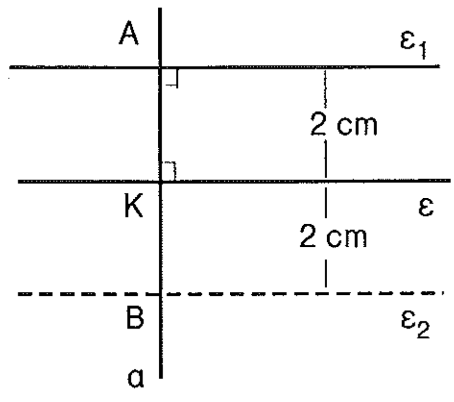
Λύση



Βρίσκουμε το μέσο Δ της ΑΒ και φέρουμε την ε // ΒΓ. Αυτή τέμνει την ΑΓ στο Ε. Εύκολα με το διαβήτη διαπιστώνουμε ότι: ΑΕ = ΕΓ.

5. Να κατασκευάσετε ευθεία παράλληλη σε δοσμένη ευθεία ε και σε απόσταση 2 cm από αυτή.

Λύση

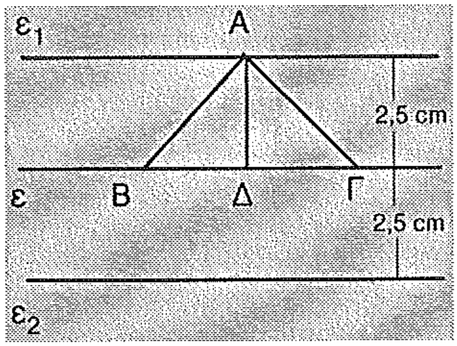


Από ένα οποιοδήποτε σημείο Κ της ευθείας ε φέρουμε την κάθετη α στην ε. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ένα σημείο πάνω σ' αυτή Α τέτοιο ώστε ΚΑ = 2 cm. Στο σημείο Α φέρουμε την κάθετη ε_1 στην α. Η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στην ε και απέχει από αυτή 2 cm.

<u>Παρατήρηση:</u> Η άσκηση έχει δύο λύσεις την ε_1 και ε_2 (όπως φαίνεται στο σχήμα).

6. Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία της Β και Γ. Να βρείτε ένα σημείο Α τέτοιο ώστε το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α να είναι 2,5 cm.

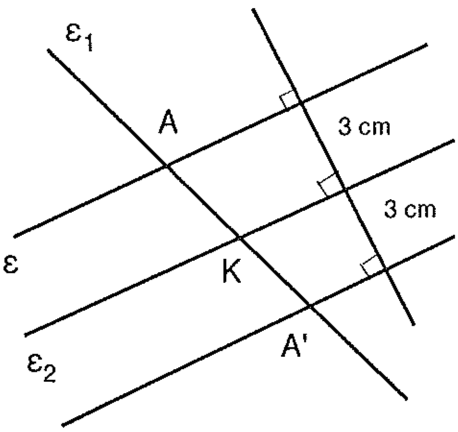
Λύση



Κατασκευάζουμε, όπως στην προηγούμενη άσκηση, δυο ευθείες ε_1 και ε_2 παράλληλες στην ε και σε απόσταση από την ε 2,5 cm. Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Α της ε_1 ή της ε_2, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα έχει ύψος ΑΔ = 2,5 cm γιατί όλα τα σημεία της ε_1 και της ε_2 απέχουν από την ε 2,5 cm, άρα και το Α απέχει το ίδιο.

7. Να γράψετε δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 που να μην είναι κάθετες. Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 που να απέχει από την ε_2 απόσταση 3 cm.

Λύση

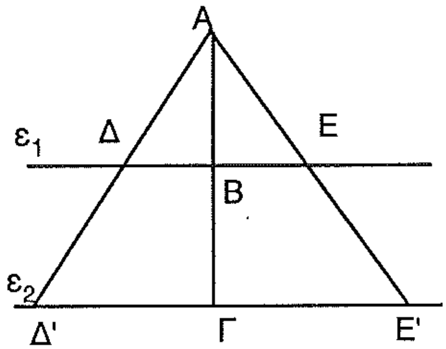


Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες που τέμνονται στο Κ. Φέρουμε μία ευθεία ε παράλληλη στην ε_2 και σε απόσταση από αυτήν 3 cm. Αν αυτή τέμνει την ε_1 στο σημείο Α, τότε το Α είναι το ζητούμενο. Υπάρχουν δυο ευθείες οι οποίες απέχουν 3 cm από την ε_2 και είναι παράλληλες σ' αυτήν. Άρα υπάρχουν δυο σημεία της ε_1 (τα Α, Α') τα οποία απέχουν από την ε_2 3 cm.

8. Από το σημείο Α φέρουμε μία κάθετη στις παράλληλες ε_1 και ε_2 (όπως στο παρακάτω σχήμα). Αυτή τέμνει την ε_1 στο Β και την ε_2 στο Γ. Πάνω στην ε_1 ορίζουμε τμήματα ΒΔ = ΒΕ και φέρουμε τις ημιευθείες ΑΔ και ΑΕ οι οποίες τέμνουν την ε_2 στα Δ' και Ε'. Να συγκριθούν τα τμήματα ΓΔ' και ΓΕ'.

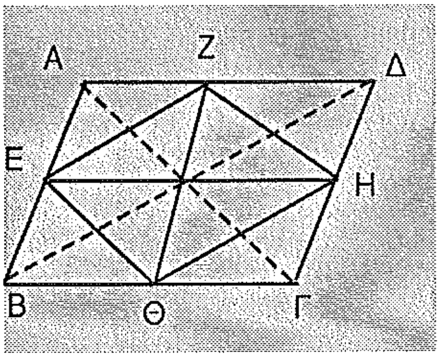
Λύση

Φέρουμε την ε_1 // ε_2 και με το γνώμονα την ΑΒ κάθετη στην ε_1. Παίρνουμε ΔΒ = ΒΕ. Φέρουμε τις ΑΔ και ΑΕ, τις προεκτείνουμε και αυτές τέμνουν την ε_2 στα Δ' και Ε'. Εύκολα με το διαβήτη διαπιστώνουμε ότι: ΓΔ'= ΓΕ'.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα να σημειώσετε τις ευθείες που είναι μεταξύ τους παράλληλες.

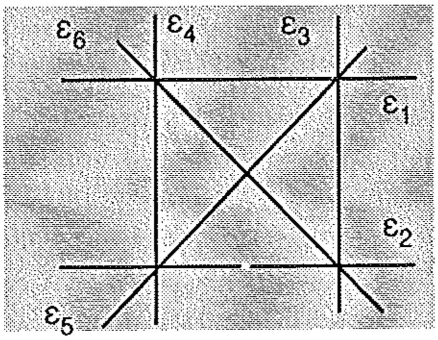


Λύση

α) ΑΒ // ΖΘ // ΔΓ

β) ......

2. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τον πίνακα σημειώνοντας με // τις παράλληλες με $\perp$ τις κάθετες και με Χ τις τεμνόμενες ευθείες.

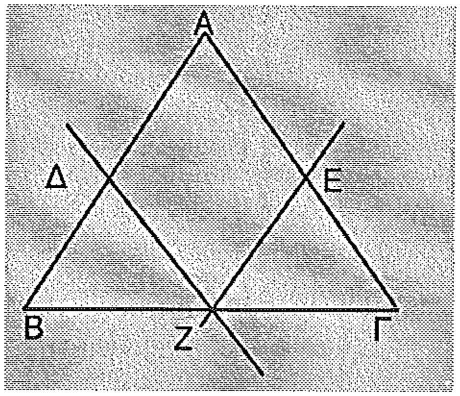


Λύση

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_1		//			X	
ε_2						
ε_3	$\perp$			//		
ε_4						
ε_5						
ε_6						

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρετε από τα Δ και Ε παράλληλες στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Τι παρατηρείτε;

Λύση



Φέρουμε τη ΔΖ παράλληλη στην ΑΓ. Αν φέρουμε από το Ε μία παράλληλη στην ΑΒ, θα παρατηρήσουμε ότι....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνεται μια ευθεία ε. Να χαράξετε παράλληλες ευθείες προς την ε που να απέχουν από αυτή απόσταση 3,5 cm.

2. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Να φέρετε τη διάμεσο του ΑΜ και από το Μ να φέρετε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Αυτές τέμνουν την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ. Να εξετάσετε αν η ΚΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ και να συγκριθεί το ΚΛ με το ΜΒ και ΜΓ.

3. Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο Ο. Παίρνουμε πάνω στην ε_1 τα τμήματα ΟΑ = ΑΒ = 3 cm και στην ε_2 τα ΟΓ = ΟΔ = 2 cm. Να εξετάσετε αν η ΑΓ είναι παράλληλη στην ΒΔ.

4. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ. Από τυχαίο σημείο αυτής Α', φέρουμε τις παράλληλες Α'Β' και Α'Γ' προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Β' και Γ'. Να συγκριθούν τα τμήματα ΔΒ' και ΔΓ'.

5. Σε μία ευθεία ε ορίζουμε τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε: ΑΒ = ΒΓ = 3 cm. Στα σημεία αυτά φέρουμε κάθετες ευθείες προς την ε. Τέλος φέρουμε μια άλλη ευθεία ε' που να τέμνει τις κάθετες στα σημεία Α', Β' και Γ'. Να συγκρίνετε τα τμήματα Α' Β' και Β' Γ'.

5. 10 Κύκλος- κυκλικός δίσκος

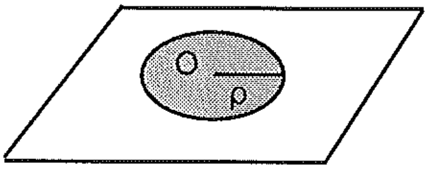
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ; Πώς τον συμβολίζουμε για συντομία;

Απαντήσεις

1. Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ είναι το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Για συντομία συμβολίζουμε τον παραπάνω κύκλο που έχει κέντρο Ο και ακτίνα ρ, «κύκλος (Ο, ρ)».



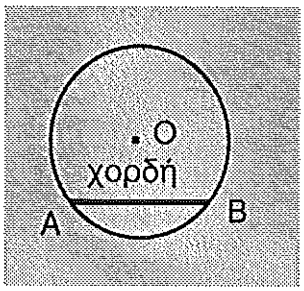
2. Ποια είναι τα στοιχεία του κύκλου και πώς ορίζονται;

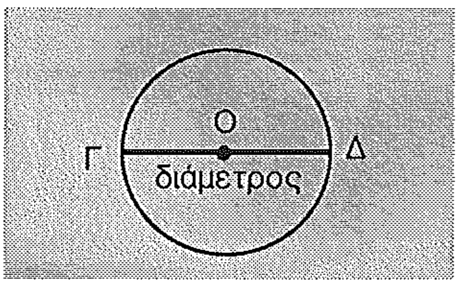
2. Τα στοιχεία του κύκλου είναι η χορδή, η διάμετρος και το τόξο.

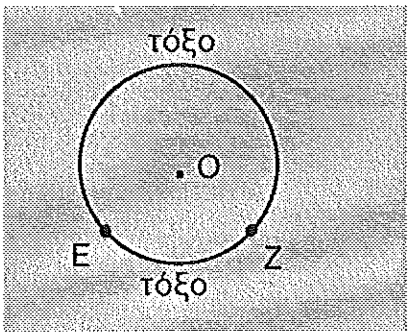
Χορδή ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του κύκλου.

Διάμετρος ονομάζεται η χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. (Είναι φανερό ότι μια διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου και είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας του).

Τόξο με άκρα Ε και Ζ ονομάζεται καθένα από τα μέρη του κύκλου που χωρίζεται από τα σημεία Ε και Ζ αυτού.
Συμβολίζεται με $\overset{\frown}{EZ}$.
Τα στοιχεία του κύκλου φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.







3. Τι ονομάζουμε κυκλικό δίσκο;

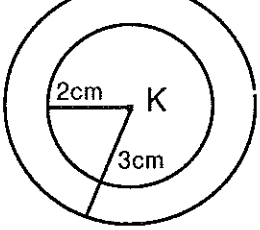
3. Κυκλικός δίσκος είναι το σύνολο των σημείων του κύκλου καθώς και όλα τα σημεία του επιπέδου που αυτός περικλείει.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να πάρετε ένα σημείο Κ και να σχεδιάσετε τους κύκλους (Κ, 2 cm), (Κ, 3 cm).

Λύση

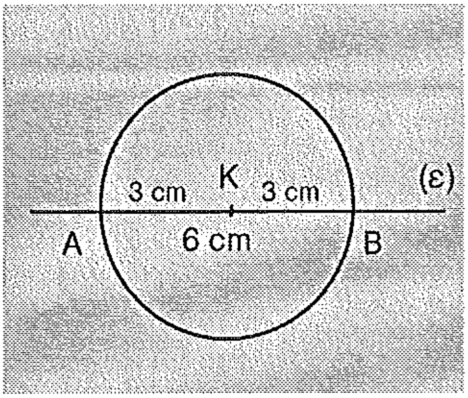
Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Κ, ανοίγουμε το διαβήτη μας πρώτα 2 cm και σχεδιάζουμε ένα κύκλο με κέντρο το Κ. Μετά τον ανοίγουμε 3 cm και σχεδιάζουμε άλλο κύκλο με το ίδιο κέντρο Κ.
Οι δύο αυτοί κύκλοι λέγονται **ομόκεντροι** γιατί έχουν το ίδιο κέντρο.



2. Να ορίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm και να σχεδιάσετε ένα κύκλο με διάμετρο το ΑΒ.

Λύση

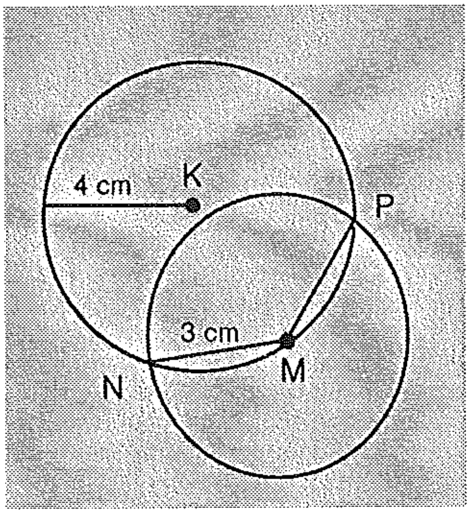
Πάνω σε μία ευθεία ε, ορίζουμε με το διαβήτη το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm. Βρίσκουμε το μέσο του Κ, οπότε με κέντρο αυτό το σημείο και ακτίνα 6/2 =3 cm σχεδιάζουμε ένα κύκλο. Τότε το ΑΒ είναι διάμετρος αυτού του κύκλου, αφού το μέσο του Κ είναι κέντρο του κύκλου και το μήκος του είναι ΑΒ = 6 cm, δηλαδή διπλάσιο από την ακτίνα του κύκλου.



3. Σ' ένα κύκλο (Κ, 4 cm), παίρνουμε ένα σημείο Μ. Να σχεδιάσετε μια χορδή μήκους 3 cm με άκρο το Μ. Πόσες λύσεις έχει το πρόβλημα;

Λύση

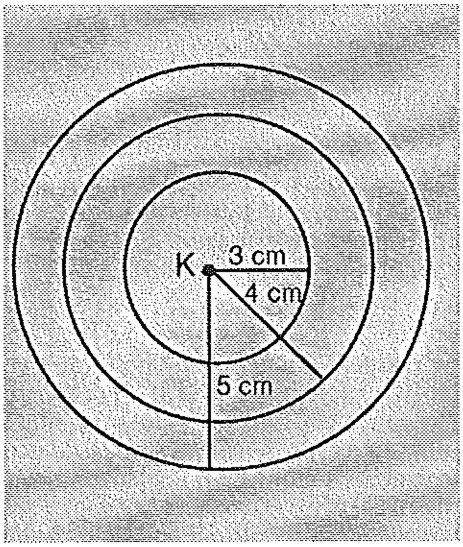
Σχεδιάζουμε τον κύκλο με κέντρο το Κ και ακτίνα 4 cm και παίρνουμε πάνω σ' αυτόν το σημείο Μ.
Με κέντρο το Μ και ακτίνα 3 cm χαράζουμε άλλο κύκλο που συναντά τον αρχικό στο σημείο Ν.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι η ζητούμενη χορδή, γιατί έχει άκρο το Μ και μήκος 3 cm ως ακτίνα του κύκλου (Μ, 3 cm).
Όπως φαίνεται στο σχήμα και η χορδή ΜΡ ικανοποιεί το πρόβλημα, δηλαδή υπάρχουν δύο λύσεις.



4. Να ορίσετε ένα σημείο Κ και να σχεδιάσετε τρεις κύκλους με κέντρο το Κ και ακτίνες 3, 4 και 5 cm αντίστοιχα.

Λύση

Ορίζουμε το σημείο Κ, ανοίγουμε το διαβήτη 3 cm, 4 cm, 5 cm και σχεδιάζουμε τους τρεις κύκλους διαδοχικά με κέντρο το Κ.



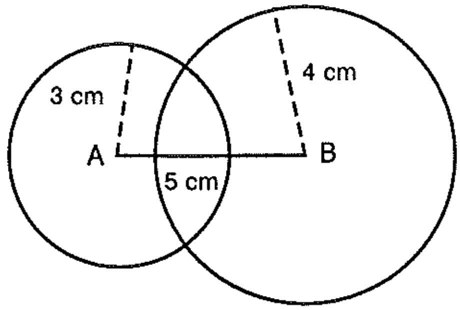
5. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν: α) 3 cm από το Α, β) 4 cm από το Β.

Λύση

Γράφουμε πρώτα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm.

α) Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν 3 cm από το Α θα είναι τα σημεία του κύκλου (Α, 3 cm). Σχεδιάζουμε λοιπόν τον κύκλο αυτό. Τα σημεία του είναι αυτά που ζητάμε.

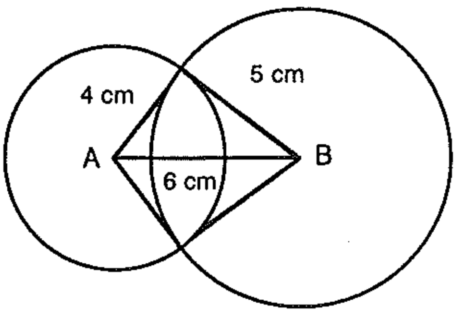
β) Με τον ίδιο τρόπο συλλογισμού τα σημεία που απέχουν 4 cm από το Β βρίσκονται πάνω στον κύκλο (Β, 4 cm).



6. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν ταυτόχρονα 4 cm από το Α και 5 cm από το Β.

Λύση

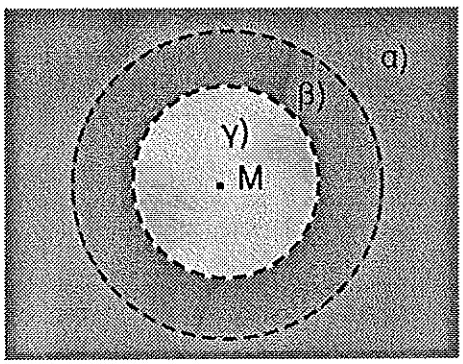
Αν σκεφτούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι τα σημεία που απέχουν 4 cm από το Α βρίσκονται πάνω στον κύκλο (Α, 4 cm), ενώ εκείνα που απέχουν 5 cm από το Β βρίσκονται πάνω στον κύκλο (Β, 5 cm). Σχεδιάζουμε επομένως τους δύο αυτούς κύκλους. Αφού λοιπόν ζητάμε τα σημεία που απέχουν ταυτόχρονα 4 cm από το Α και 5 cm από το Β, πρέπει να βρίσκονται ταυτόχρονα και στους δύο κύκλους.
Δηλαδή θα είναι τα σημεία που συναντιούνται οι δύο κύκλοι. Άρα τα σημεία που ζητάμε είναι τα Γ και Δ.



7. Να ορίσετε ένα σημείο Μ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου τα οποία απέχουν από το Μ: α) περισσότερο από 3 cm, β) λιγότερο από 2 cm, γ) ταυτόχρονα περισσότερο από 2 cm και λιγότερο από 3 cm.

Λύση

Σχεδιάζουμε τους κύκλους (Μ, 2 cm) και (Μ, 3 cm).
α) Τα σημεία που βρίσκονται έξω από τον κυκλικό δίσκο (Μ, 3 cm) απέχουν από το Μ αποστάσεις μεγαλύτερες από 3 cm.
β) Τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου (Μ, 2 cm) απέχουν από το Μ αποστάσεις μικρότερες από 2 cm.
γ) Τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στους δύο κύκλους (Μ, 2 cm) και (Μ, 3 cm) απέχουν ταυτόχρονα περισσότερο από 2 cm, αφού είναι εξωτερικά του κυκλικού δίσκου (Μ, 2 cm) και λιγότερο από 3 cm, αφού είναι εσωτερικά του κυκλικού δίσκου (Μ, 3 cm).



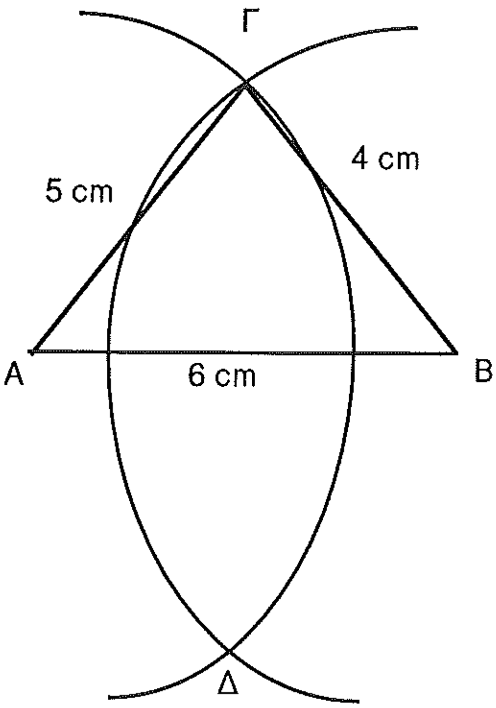
8. Να βρείτε τρία σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ έτσι ώστε: ΑΒ = 6 cm , ΒΓ = 4 cm, ΑΓ = 5 cm.

Λύση

Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm. Γράφουμε τους κύκλους (Α, 5 cm) και (Β, 4 cm). Οι κύκλοι αυτοί τέμνονται στο σημείο Γ. Το σημείο αυτό επειδή ανήκει και στους δύο κύκλους απέχει 5 cm από το Α και 4 cm από το Β. Άρα τα Α, Β, Γ είναι τα τρία σημεία που ζητούσαμε.

Παρατήρηση:

Οι δύο κύκλοι τέμνονται και σε άλλο σημείο Δ εκτός από το Γ, και το σημείο αυτό έχει την ιδιότητα να απέχει 5 cm από το σημείο Α και 4 cm από το Β. Δηλαδή τα σημεία Α, Β, Δ είναι επίσης λύση του προβλήματος.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο που να έχει διάμετρο 4 cm.

Λύση

Αφού η διάμετρος του κύκλου είναι 4 cm, τότε η ακτίνα που θα είναι:
4 : 2 = 2 cm....

2. Να πάρετε ένα σημείο Κ και να σχεδιάσετε τον κύκλο (Κ, 4 cm). Πάνω σ' αυτόν να ορίσετε ένα τυχαίο σημείο Α. Να γράψετε τις χορδές ΑΒ = 2 cm και ΑΓ = 3 cm του κύκλου αυτού.

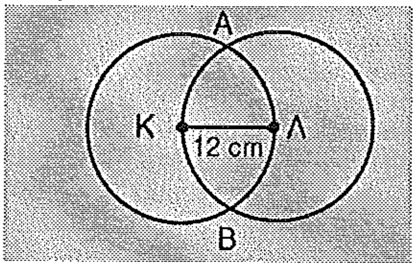
Λύση

Κατασκευάζουμε τον κύκλο (Κ, 4 cm) και ορίζουμε το τυχαίο σημείο Α. Ανοίγουμε το διαβήτη πρώτα 2 cm και μετά 3 cm και γράφουμε τις χορδές που μας ζητούν....

3. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ = 12 cm. Να κατασκευάσετε μετά τους κύκλους (Κ, 12 cm), (Λ, 12 cm). Να ονομάσετε Α και Β τα σημεία που τέμνονται οι δύο κύκλοι. Να βρείτε και να υπολογίσετε τις αποστάσεις των Α και Β από τα Κ και Λ. Τι παρατηρείτε;

Λύση

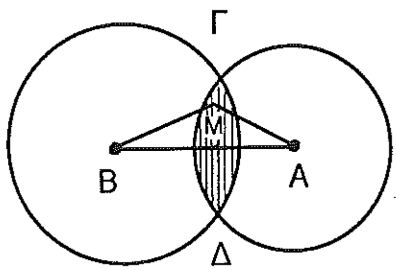
Σχεδιάζουμε τους δύο κύκλους (Κ, 12 cm) και (Λ, 12 cm) που τέμνονται στα Α και Β. Η ΚΑ είναι ακτίνα και των δύο κύκλων. Άρα ΚΑ = 12 cm...



4. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB = 6 cm. Να βρείτε τα σημεία M του επιπέδου που απέχουν από το A λιγότερο από 4 cm και από το B λιγότερο από 5 cm ταυτόχρονα.

Λύση

Σχεδιάζουμε τους κύκλους (A, 4 cm) και (B , 5 cm). Οι δύο κυκλικοί δίσκοι τέμνονται και ορίζουν το μέρος εκείνο του επιπέδου που είναι σκιασμένο στο παρακάτω σχήμα...



5. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο και να φέρετε δύο κάθετες διαμέτρους του. Να συγκρίνετε τις τέσσερις χορδές που σχηματίζονται.

Λύση

Σχεδιάζουμε τον κύκλο (K, ρ) και φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους με τη βοήθεια του γνώμονα. Τις ονομάζουμε AB και ΓΔ. Φέρουμε μετά τις χορδές AΓ, ΓB, BΔ, ΔA και τις συγκρίνουμε με το διαβήτη....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (K, 4 cm) και να πάρετε δύο σημεία M και N πάνω σ' αυτόν. Πόσα τόξα ορίζονται πάνω στον κύκλο με τα σημεία αυτά; Πόσες χορδές σχηματίζονται;

2. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB = 7,5 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το A λιγότερο από 6 cm και από το B λιγότερο από 5 cm. Ποια σημεία απέχουν ακριβώς 6 cm από το A και 5 cm από το B ταυτόχρονα;

3. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB = 8 mm. Υπάρχουν σημεία του επιπέδου που να απέχουν:
α) λιγότερο από 4 cm από το A και το B ταυτόχρονα;
β) ακριβώς 4 cm από το A και το B ταυτόχρονα; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

4. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ του επιπέδου, έτσι ώστε να μη βρίσκονται όλα πάνω σε ευθεία. Η απόσταση AB = 4 cm, η BΓ = 5 cm και η AΓ = 3 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν:
α) λιγότερο από 3 cm από τα A, B, Γ,
β) ακριβώς 3 cm από τα A, B, Γ.

5. Να σχεδιάσετε δύο κύκλους (A, AB), (B, BA). Ονομάστε Γ και Δ τα σημεία της τομής τους και φέρτε τη ΓΔ. Ονομάστε M το σημείο που συναντά η ΓΔ την AB. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα AM και MB. Τι παρατηρείτε;

6. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο ABΓ , ώστε AB = 8 cm, BΓ = 5 cm και AΓ = 6 cm.

5. 11 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρία

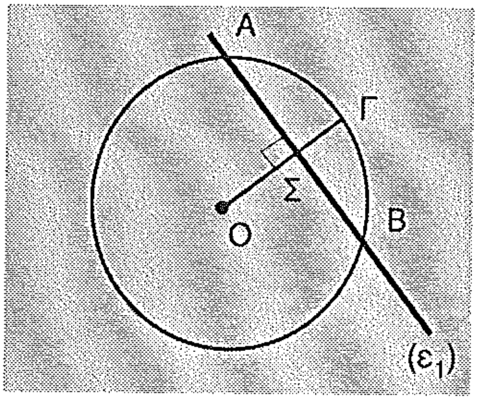
Ερωτήσεις

1. Πόσα κοινά σημεία μπορούν να έχουν μια ευθεία και ένας κύκλος;

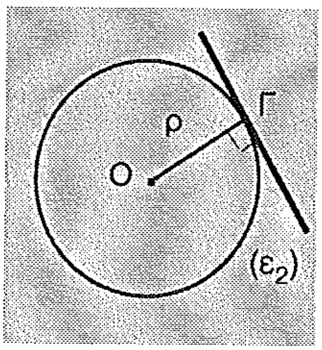
Απαντήσεις

1. Μια ευθεία και ένας κύκλος μπορεί να έχουν δύο, ένα ή κανένα κοινά σημεία. Ας δούμε τις περιπτώσεις αυτές αναλυτικά.

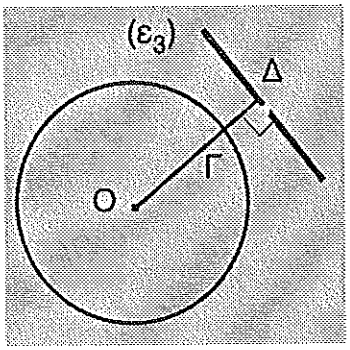
α) Παίρνουμε ένα κύκλο (Ο, ρ) και φέρνουμε την ακτίνα του ΟΓ. Παίρνουμε ένα σημείο Σ πάνω σ' αυτήν έτσι ώστε το Σ να είναι εσωτερικό του κύκλου. Σχεδιάζουμε τώρα μια ευθεία ε_1 κάθετη στην ΟΓ που περνά από το Σ. Παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή συναντά τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β. Η ευθεία αυτή λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου, και έχει δύο κοινά σημεία με αυτόν, τα Α και Β.



Η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε_1 είναι η ΟΣ. Βλέπουμε ότι η απόσταση αυτή είναι μικρότερη από την ακτίνα ΟΓ του κύκλου.



β) Σχεδιάζουμε όπως προηγουμένως τον κύκλο (Ο, ρ) και την ακτίνα του ΟΓ. Φέρουμε τώρα την ευθεία ε_2 κάθετη στην ακτίνα ΟΓ έτσι ώστε να περνά από το Γ. Παρατηρούμε ότι η ευθεία ε_2 έχει ένα κοινό σημείο, το Γ, με τον κύκλο. Λέμε τότε ότι η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο ή ότι η ευθεία είναι **εφαπτομένη** του κύκλου. Το σημείο Γ λέγεται **σημείο επα -**



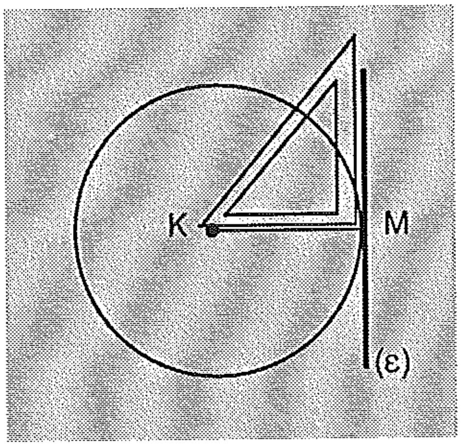
φής. Η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε_2 είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

γ) Σχεδιάζουμε όπως προηγουμένως τον κύκλο (Ο, ρ) και την ακτίνα του ΟΓ. Προεκτείνουμε τώρα την ΟΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε πάνω σ' αυτήν ένα σημείο Δ. Είναι φανερό ότι το Δ δεν ανήκει στον κυκλικό δίσκο. Σχεδιάζουμε μια ευθεία ε_3 κάθετη στην ΟΔ που να περνά από το Δ.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία ε_3 και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία. Η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε_3 είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.

2. Πώς μπορούμε πρακτικά να σχεδιάσουμε μια εφαπτόμενη ευθεία ε σε ένα σημείο Μ ενός κύκλου (Κ, ρ);

2. Φέρουμε την ακτίνα ΚΜ του κύκλου και με τη βοήθεια του γνώμονα κατασκευάζουμε μια κάθετη ευθεία ε στην ΚΜ στο σημείο Μ. Η ε είναι η εφαπτόμενη που ζητάμε.



3. Πώς διαπιστώνουμε ότι μια ευθεία ε είναι εφαπτόμενη σ' ένα κύκλο σ' ένα σημείο του Μ;

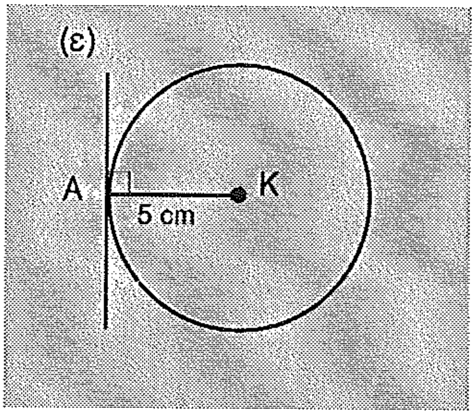
3. Όταν θέλουμε να εξετάσουμε αν μια ευθεία ε είναι εφαπτόμενη σε ένα κύκλο στο σημείο του Μ, θα ελέγχουμε αν η ακτίνα του κύκλου στο σημείο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ε. Αν αυτό συμβαίνει η ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Κ, 5 cm) και να πάρετε ένα σημείο του Α. Να φέρετε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο αυτό.

Λύση

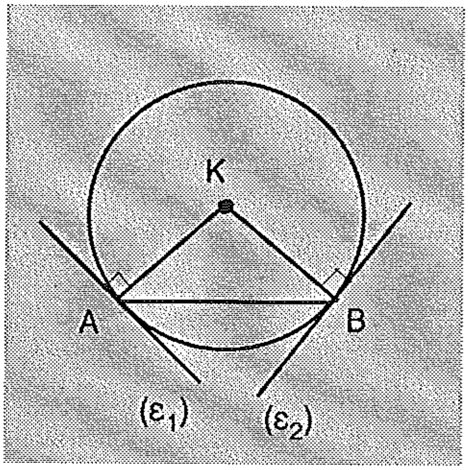
Κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα 5 cm. Παίρνουμε ένα σημείο του Α και φέρουμε την ακτίνα του ΚΑ. Με τη βοήθεια του γνώμονα φέρουμε μια ευθεία ε κάθετη στην ΚΑ στο σημείο Α. Η ευθεία αυτή είναι η εφαπτόμενη που ζητάμε γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα του στο σημείο Α.



2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (Κ, ρ) και να φέρετε μια χορδή του ΑΒ. Να φέρετε μετά τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β.

Λύση

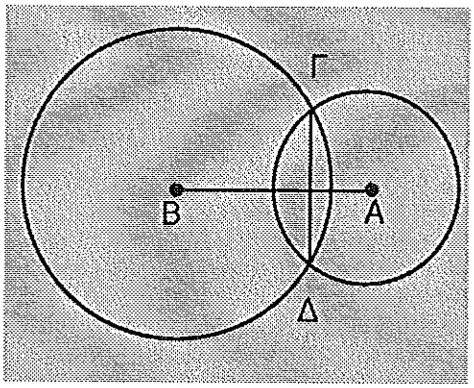
Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο κύκλο και φέρουμε μια χορδή του ΑΒ. Χαράσσουμε τις ακτίνες ΚΑ και ΚΒ και φέρουμε δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 σε αυτές στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Οι ευθείες αυτές είναι οι εφαπτόμενες.



3. Να πάρετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 18 cm. Να σχεδιάσετε μετά τους κύκλους (Α, 9 cm) και (Β, 12 cm). Να φέρετε μια χορδή που να ανήκει και στους δύο κύκλους. Να εξετάσετε μετά αν η χορδή αυτή είναι κάθετη στην ΑΒ.

Λύση

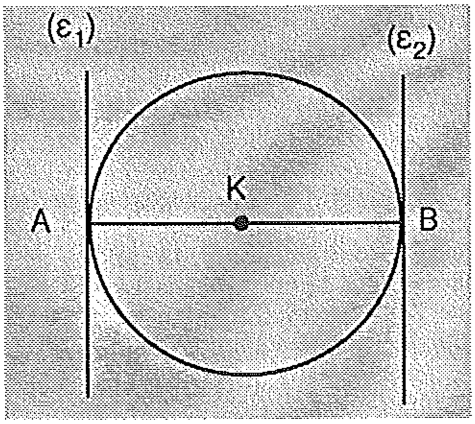
Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τους δύο κύκλους (Α, 9 cm) και (Β, 12 cm). Ονομάζουμε Γ και Δ τα σημεία που τέμνονται οι δύο κύκλοι. Φέρουμε τη ΓΔ και παρατηρούμε ότι είναι η χορδή που μας ζητά το πρόβλημα γιατί ανήκει και στους δύο κύκλους. Η χορδή αυτή λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Με τη βοήθεια του γνώμονα βλέπουμε ότι αυτή η κοινή χορδή είναι κάθετη στο ΑΒ.



4. Δίνεται ένας κύκλος (Κ, 10 cm). Να κατασκευάσετε δυο παράλληλες εφαπτόμενες του κύκλου αυτού. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Κ, 10 cm) και φέρουμε μια διάμετρό του ΑΒ. Στη συνέχεια φέρνουμε δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 στην ΑΒ στα σημεία Α και Β. Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες εφαπτόμενες γιατί είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα και άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους.



5. Δίνεται κύκλος (Κ, 2 cm) και μια εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α. Να σχεδιάσετε τον κύκλο (Λ, 1 cm) ο οποίος να εφάπτεται ταυτόχρονα και στον κύκλο (Κ, 2 cm) και στην ευθεία ε.

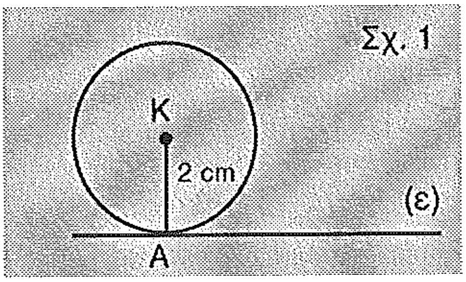
Λύση

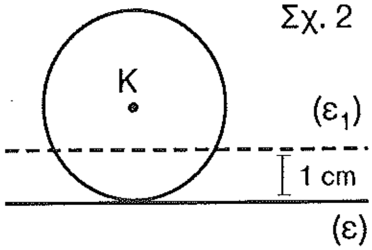
Αφού γνωρίζουμε την ακτίνα του ζητουμένου κύκλου μένει να προσδιορίσουμε που θα βρίσκεται το κέντρο του Λ.

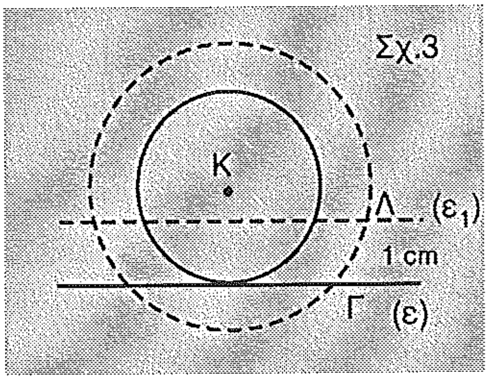
Σε απόσταση 1 cm από την ευθεία ε κατασκευάζουμε μια άλλη ευθεία ε_1 ώστε: $\varepsilon_1 // \varepsilon$. Κατασκευάζουμε τώρα τον κύκλο (Κ, 3 cm), που τέμνει την ε_1 σε ένα σημείο Λ. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο του κύκλου που ζητούσαμε.

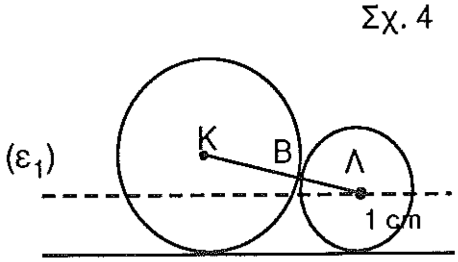
Σχεδιάζουμε λοιπόν τον κύκλο (Λ, 1 cm) που εφάπτεται και στον κύκλο (Κ, 2 cm) και στην ευθεία ε.

Ο κύκλος αυτός είναι ο ζητούμενος γιατί έχει ακτίνα 1 cm. Ενώ η ευθεία ε και ο κύκλος (Κ, 2 cm) εφάπτονται σ' αυτόν στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα.





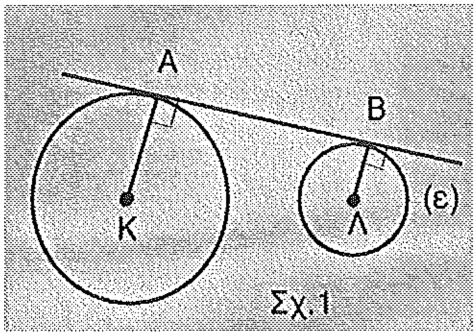


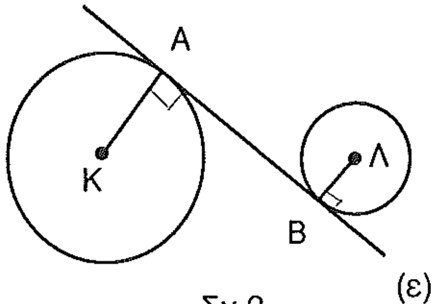


6. Μας δίνεται ένας κύκλος. Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε με κανόνα και διαβήτη έναν άλλο κύκλο που να έχει κοινή εφαπτόμενη με τον πρώτο;

Λύση

Σχεδιάζουμε ένα κύκλο με κέντρο Κ και φέρουμε μια τυχαία ακτίνα ΚΑ (σχ.1). Φέρουμε την ε κάθετη στην ακτίνα αυτή στο σημείο Α. Γνωρίζουμε ότι η ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου. Πάνω στην ε παίρνουμε ένα άλλο σημείο Β και φέρουμε μια ευθεία κάθετη σ' αυτήν.
Εκλέγουμε ένα τυχαίο σημείο Λ πάνω σ' αυτήν και κατασκευάζουμε τον κύκλο (Λ, ΛΒ). Ο κύκλος αυτός έχει την ε εφαπτομένη του, αφού αυτή είναι κάθετη στην ακτίνα του ΛΒ.
Δηλαδή η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων και λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη.**





Σχ.2

Παρατήρηση:

Μπορούμε να εκλέξουμε το σημείο Λ και όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στην περίπτωση αυτή η ε λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη.**

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με κέντρο ένα σημείο Κ και ακτίνα 10 cm. Να πάρετε δύο σημεία του Α και Β και να φέρετε δύο εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά που να μην είναι παράλληλες. Να ονομάσετε Μ το σημείο της τομής τους. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ.

Λύση

Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Κ, 10 cm) και παίρνουμε δύο σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις ακτίνες ΚΑ, ΚΒ και μετά τις κάθετες ε_1, ε_2 πάνω σ' αυτές...

2. Δίνεται ένας κύκλος (Κ, ρ) και μια χορδή του ΑΒ. Να σχεδιάσετε μια εφαπτομένη του κύκλου αυτού παράλληλη προς τη χορδή ΑΒ.

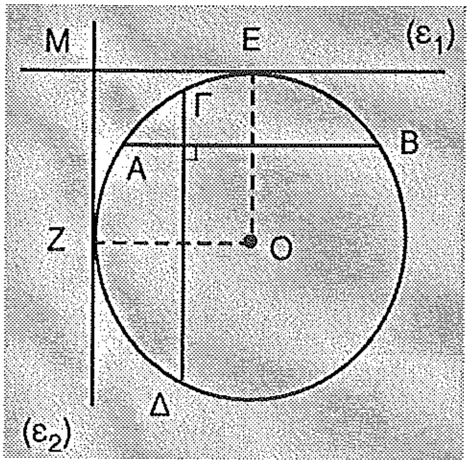
Λύση

Φέρουμε από το κέντρο του κύκλου, μια κάθετη πάνω στη χορδή ΑΒ, και την προεκτείνουμε μέχρι να συναντήσει τον κύκλο σε ένα σημείο Γ...

3. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (Ο, ρ) και να φέρετε δύο κάθετες χορδές του ΑΒ και ΓΔ. Να φέρετε μετά δύο εφαπτόμενες του κύκλου ε_1, ε_2 παράλληλες προς τις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα στα σημεία Ε και Ζ του κύκλου. Ονομάστε Μ το σημείο της τομής τους. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ, ΜΖ. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

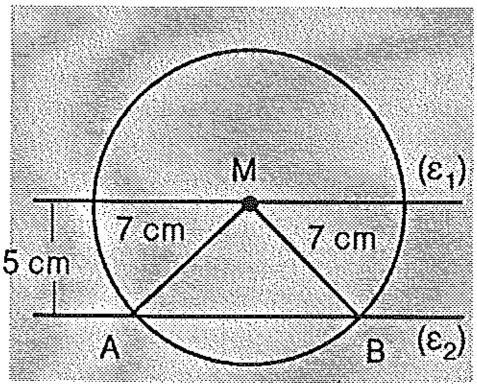
Φέρουμε τις ακτίνες ΟΕ και ΟΖ κάθετες στις χορδές ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Μετά φέρουμε τις κάθετες $ε_1$, $ε_2$ πάνω στις ΟΕ και ΟΖ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ είναι....



4. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που έχουν απόσταση 5 cm. Έστω ένα σημείο Μ στην $ε_1$. Να βρείτε τα σημεία της $ε_2$ που απέχουν απόσταση 7 cm από το Μ.

Λύση

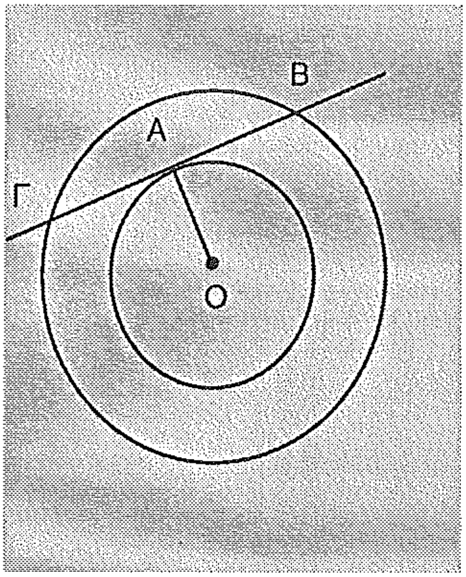
Κατασκευάζουμε τις δύο παράλληλες ευθείες και παίρνουμε ένα σημείο Μ πάνω στην $ε_1$. Αφού ζητάμε τα σημεία της $ε_2$ που να απέχουν 7 cm από το Μ, πρέπει αυτά να βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο (Μ, 7 cm), αλλά ταυτόχρονα και πάνω στην $ε_2$ ...



5. Να κατασκευάσετε δύο ομόκεντρους κύκλους με διαφορετικές ακτίνες και να φέρετε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να είναι εφαπτόμενο του μικρότερου κύκλου και χορδή του μεγαλύτερου ταυτόχρονα.

Λύση

Κατασκευάζουμε τους δύο ομόκεντρους κύκλους και παίρνουμε ένα σημείο Α πάνω στο μικρότερο. Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ του μικρότερου κύκλου και κατασκευάζουμε μια ευθεία κάθετη στην ΟΑ στο σημείο Α. Η ευθεία αυτή...



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε δύο κύκλους (Κ, 2 cm), (Λ, 3 cm) που να εφάπτονται μεταξύ τους.

2. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 που απέχουν 4 cm μεταξύ τους. Να κατασκευάσετε ένα κύκλο που να εφάπτεται στις παράλληλες αυτές.

3. Να κατασκευάσετε δύο κάθετες εφαπτόμενες ενός κύκλου.

4. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm. Να σχεδιάσετε τους κύκλους (Α, 6 cm), (Β, 6 cm). Έστω Γ και Δ τα σημεία της τομής τους. Να σχεδιάσετε την κοινή χορδή ΓΔ των δύο κύκλων.

5. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 που απέχουν 6 cm μεταξύ τους. Να πάρετε ένα σημείο Μ της ε_1. Υπάρχουν σημεία της ε_2 που να απέχουν απόσταση 3 cm από το Μ;

6. Δίνονται δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Κ, 5 cm). Μπορείτε να κατασκευάσετε δύο εφαπτόμενες παράλληλες στις χορδές αυτές που να τέμνονται μεταξύ τους;

7. Δύο κύκλοι (Κ, 8 cm), (Λ, 4 cm) τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να φέρετε την κοινή χορδή τους ΑΒ και να κατασκευάσετε μια ευθεία κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Β. Ονομάστε Γ και Δ τα σημεία που τέμνει η ευθεία αυτή τους δύο κύκλους, (Κ, 8 cm) και (Λ, 4 cm) αντίστοιχα. Φέρτε τις χορδές ΑΓ και ΑΔ. Περνούν αυτές από τα κέντρα των δύο κύκλων; Να φέρετε μετά την ΚΛ και να τη συγκρίνετε με την ΓΔ.

5.12 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

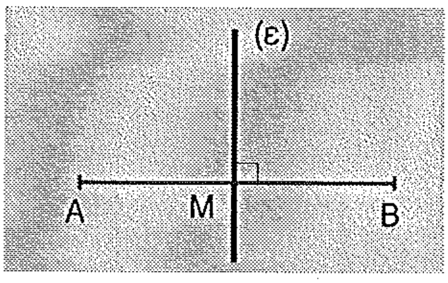
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος;

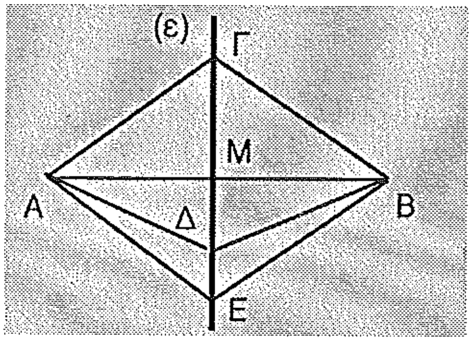
Απαντήσεις

1. Μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που είναι κάθετη στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.



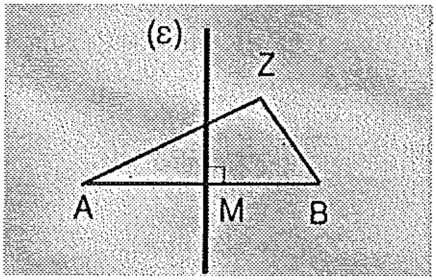
Π.χ. Αν ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα και Μ είναι το μέσο του, τότε η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

2. Ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος;

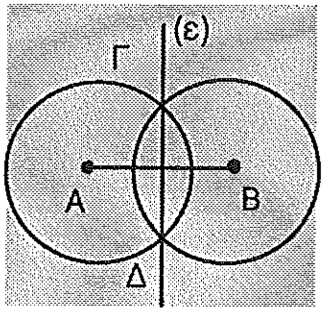


2. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει ίσες αποστάσεις (ισαπέχει) από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

Πραγματικά, αν πάνω στη μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ πάρουμε τα τυχαία σημεία Γ, Δ, Ε και συγκρίνουμε τις αποστάσεις των σημείων αυτών από τα άκρα Α και Β, θα βρούμε ότι:
ΓΑ = ΓΒ, ΔΑ = ΔΒ, ΕΑ = ΕΒ
Αν πάρουμε ένα σημείο Ζ που να μην βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ και συγκρίνουμε τις αποστάσεις του Ζ από τα άκρα Α και Β θα δούμε ότι δεν είναι ίσες. Έχουμε π.χ. ΖΑ > ΖΒ.
Δηλαδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα Α και Β και κανένα άλλο.
Άρα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος.



3. Πώς μπορούμε να χαράξουμε τη μεσοκάθετο ε ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ χρησιμοποιώντας κανόνα (χάρακα) και διαβήτη;



3. Η χάραξη της μεσοκαθέτου ε ενός ευθυγράμμου τμήματος, με κανόνα και διαβήτη γίνεται ως εξής:
Γράφουμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα Α και Β και ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό μήκος του ΑΒ. Οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Γ, Δ. Τα σημεία αυτά αφού ανήκουν και στους δύο (ίσους) κύκλους θα απέχουν ίσες αποστάσεις από τα κέντρα τους Α και Β. Άρα τα Γ και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Δηλαδή η ευθεία ΓΔ είναι η μεσοκάθετος που ζητάμε.

<u>Παρατήρηση:</u>

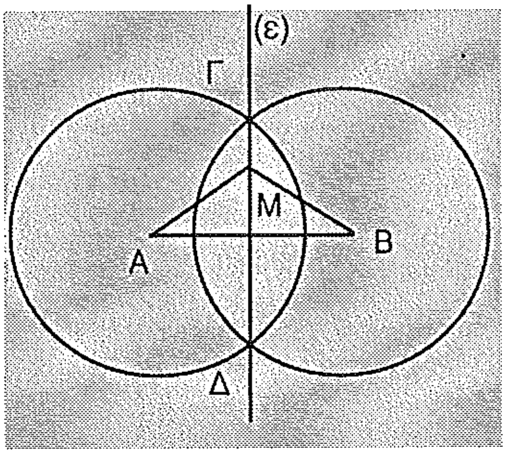
Μπορούμε να βρίσκουμε τα Γ και Δ χωρίς να σχεδιάζουμε ολόκληρους τους κύκλους.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ = 9 cm. Να πάρετε ένα σημείο της Μ και να φέρετε τις αποστάσεις ΜΑ, ΜΒ. Να τις συγκρίνετε. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

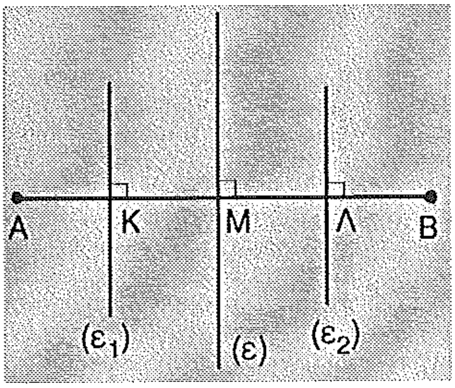
Σύμφωνα με τη θεωρία, σχεδιάζουμε δύο κύκλους με κέντρα Α και Β με ακτίνες ίσες μεταξύ τους και μεγαλύτερες από το μισό του ΑΒ. Ονομάζουμε Γ και Δ τα σημεία τομής τους. Φέρουμε την ευθεία (ε) που περνά από τα Γ και Δ. Η ευθεία αυτή είναι η μεσοκάθετος που ζητούσαμε. Παίρνουμε ένα σημείο Μ της μεσοκαθέτου ε και φέρουμε τις αποστάσεις ΜΑ, ΜΒ. Οι αποστάσεις αυτές είναι ίσες γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



2. Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τέσσερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Λύση

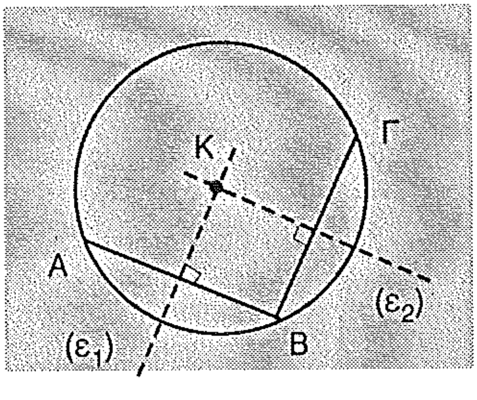
Κατασκευάζουμε όπως προηγουμένως τη μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, οπότε βρίσκουμε το μέσο του Μ. Κατασκευάζουμε μετά με όμοιο τρόπο τις μεσοκαθέτους ε_1, ε_2 των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΜ και ΜΒ αντίστοιχα. Ορίζουμε έτσι τα μέσα Κ και Λ των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΜ και ΜΒ αντίστοιχα. Τώρα έχουμε: ΑΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΒ. Δηλαδή τα σημεία Κ, Μ, Λ χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα μέρη.



3. Αν έχουμε ένα κύκλο, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε σε ποιο σημείο βρίσκεται το κέντρο του;

Λύση

Παίρνουμε τρία τυχαία σημεία Α, Β, Γ του κύκλου και φέρουμε τις χορδές του ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους ε_1, ε_2 των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα και ονομάζουμε Κ το σημείο τομής τους.
Το Κ είναι το κέντρο του κύκλου γιατί απέχει ίσες αποστάσεις από τα Α, Β, Γ, αφού ανήκει στις μεσοκαθέτους των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ.

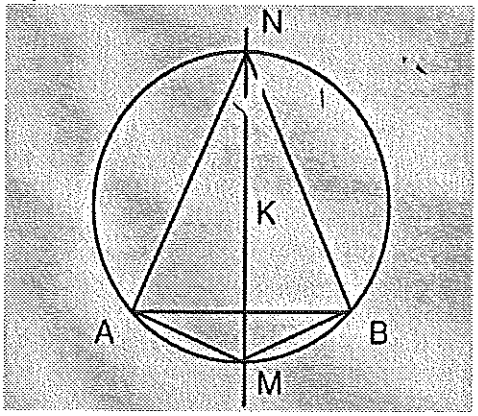


4. Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο μιας χορδής ΑΒ ενός κύκλου (Κ, ρ). Ονομάστε Μ και Ν τα σημεία που τέμνει η μεσοκάθετος τον κύκλο (Κ, ρ). Να συγκρίνετε τις χορδές ΜΑ και ΜΒ καθώς και τις χορδές ΝΑ και ΝΒ. Τι παρατηρείτε;

Περνά η μεσοκάθετος από το κέντρο του κύκλου Κ; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση

Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ με το γνωστό τρόπο. Οι χορδές ΜΑ και ΜΒ είναι ίσες, γιατί είναι οι αποστάσεις του Μ από τα άκρα του ΑΒ. Το ίδιο συμβαίνει και για το Ν, γι' αυτό ΝΑ = ΝΒ. Η μεσοκάθετος αυτή περνά και από το κέντρο Κ του κύκλου, γιατί και το Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου, άρα απέχει ίσες αποστάσεις από το Α και το Β που είναι δύο σημεία του κύκλου, οπότε απέχουν εξίσου από το κέντρο του.

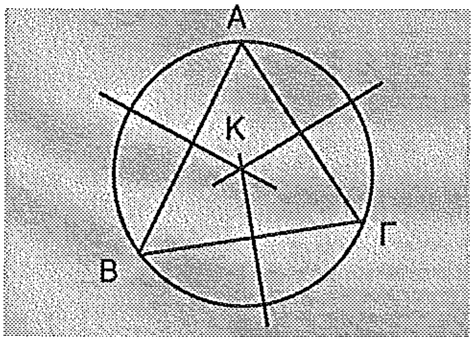


5. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να σχεδιάσετε τον κύκλο που περνά από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Λύση

Κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τριγώνου και παρατηρούμε ότι περνούν από το ίδιο σημείο Κ. Το σημείο αυτό είναι το κέντρο του κύκλου. Με κέντρο, λοιπόν, το σημείο Κ και ακτίνα ΚΑ ή ΚΒ ή ΚΓ σχεδιάζουμε τον κύκλο που περνά από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

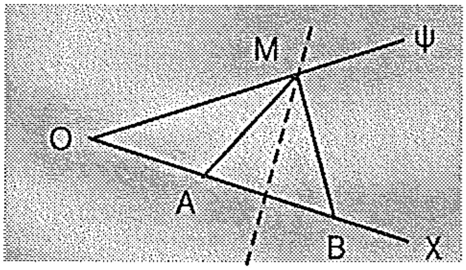
Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγγεγραμμένος κύκλος.**



6. Να σχεδιάσετε δύο ημιευθείες Οχ και Οψ με κοινή αρχή το σημείο Ο, έτσι ώστε να μην είναι παράλληλες. Πάνω στην Οχ να πάρετε δύο σημεία Α και Β. Να βρείτε ένα σημείο της Οψ που να απέχει ίσες αποστάσεις από τα Α και Β.

Λύση

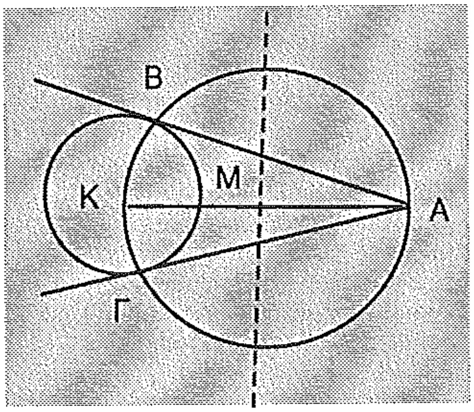
Αφού το σημείο που ζητάμε ισαπέχει από τα Α και Β, θα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Θέλουμε όμως να ανήκει και πάνω στην ημιευθεία Οψ. Άρα θα βρίσκεται τελικά εκεί που τέμνει η μεσοκάθετος του ΑΒ την Οψ. Κατασκευάζουμε λοιπόν τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και ονομάζουμε Μ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου και της Οψ. Το Μ είναι το σημείο που ζητάμε.



7. Δίνεται ένας κύκλος (Κ, ρ) και ένα σημείο Α έξω από αυτόν. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, δύο εφαπτόμενες του κύκλου που να περνούν από το Α.

Λύση

Φέρουμε το κάθετο τμήμα ΚΑ και με τη κατασκευή της μεσοκαθέτου βρίσκουμε το μέσο του Μ. Γράφουμε τον κύκλο (Μ, ΚΑ/2) που τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στα Β και Γ. Φέρουμε τις ευθείες ΑΒ, ΑΓ οι οποίες είναι και οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

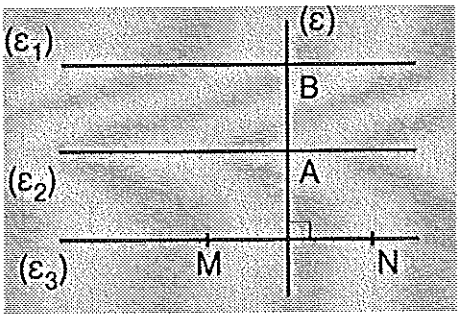


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3. Πάνω στην ε_3 παίρνουμε δύο σημεία Μ και Ν.
α) Να βρείτε ένα σημείο της ε_2 που να απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Μ και Ν.
β) Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 που να απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Μ και Ν.

Λύση

Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ, που τέμνει την ε_2 στο σημείο Α και την ε_1 στο σημείο Β. Τότε...



2. Να σχεδιάσετε ένα τετράγωνο με πλευρά 6 cm. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε ένα κύκλο που να εφάπτεται στις τέσσερεις πλευρές του.

Λύση

Φέρουμε τις μεσοκαθέτους δύο διαδοχικών πλευρών του και ονομάζουμε Κ το σημείο στο οποίο τέμνονται...

3. Δίνεται ένας κύκλος (Κ, ρ) και ένα σημείο Α έξω απ' αυτόν. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν ίσες αποστάσεις από το κέντρο Κ και το σημείο Α.

Λύση

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΑ και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετό του. Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος. Άρα...

4. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε. Στη συνέχεια να πάρετε δύο τυχαία σημεία Α και Β που να μην ανήκουν στην ε αλλά να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος αυτής. Να βρείτε ένα σημείο της ε που να ισαπέχει από τα Α και Β.

Λύση

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετό του. Ονομάζουμε Μ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου και της ευθείας ε. Τότε...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα
α) σε τέσσερα ίσα μέρη
β) σε οκτώ ίσα μέρη.

2. Μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τρία ίσα μέρη, με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου;

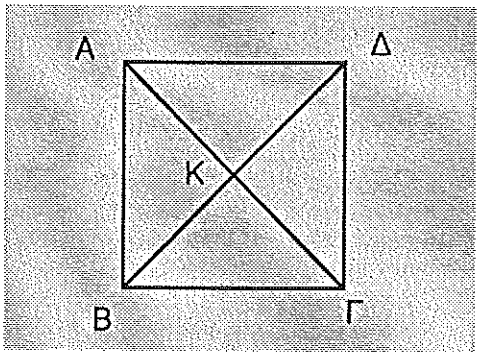
3. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Κ, 4 cm), (Λ, 4 cm) που τέμνονται στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε την ΚΛ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Μ. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις ΜΚ, ΜΛ καθώς και τις αποστάσεις ΒΚ, ΒΛ και τις ΓΚ, ΓΛ. Τι συμπέρασμα προκύπτει για την ΒΓ;

4. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ, 3 cm), (Λ, 5 cm) που τέμνονται μεταξύ τους, και μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους ε. Να βρείτε ένα σημείο της ε που να απέχει ίσες αποστάσεις από τα Κ και Λ.

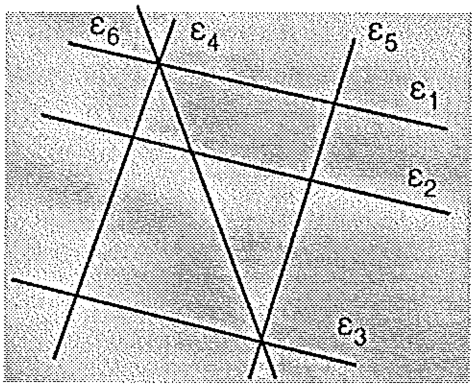
5. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 10 cm. Να κατασκευάσετε τον κύκλο (Α, 4 cm). Χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη να φέρετε τις δυο εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο Β. Να συγκρίνετε τις δυο αυτές εφαπτόμενες.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να βρείτε τις παράλληλες και τις κάθετες που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα:



2. Με τη βοήθεια του σχήματος συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας με // τις παραλλήλους, με ⊥ τις κάθετες και με Χ τις τεμνόμενες ευθείες.



	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_1						
ε_2	//					
ε_3						
ε_4						
ε_5		⊥				Χ
ε_6						

3. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα να χαράξετε τις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα με τα κατάλληλα σύμβολα.

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_1						$\perp$
ε_2			$\perp$			
ε_3					$\perp$	
ε_4	$\perp$					
ε_5				X		
ε_6				//		

4. Να κατασκευαστεί ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) αν γνωρίζουμε:
α) τη βάση του και το αντίστοιχο ύψος του,
β) το ύψος του και το μήκος μιας των ίσων πλευρών του.

5. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με κανόνα και διαβήτη, αν γνωρίζετε τις πλευρές του $\alpha = 4$ cm, $\beta = 3$ cm και $\gamma = 5$ cm.

6. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ αν γνωρίζετε τις πλευρές του α, γ και τη διάμεσό του μ_α (προς την πλευρά α).

7. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη έναν κύκλο που να διέρχεται από τα 3 αυτά σημεία.

8. Φέρουμε δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 που τέμνονται στο Α. Πέρνουμε αντίστοιχα στις ε_1, ε_2 τα σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ = 3 cm. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα Α, Β και Γ. Τι παρατηρείτε;

9. Σ' ένα κύκλο (Κ, 3 cm) να φέρετε 2 διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ κάθετες μεταξύ τους. Στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ να πάρετε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΑΚ = 2 cm. Να φέρετε τις αποστάσεις των Γ και Δ από την κάθετη της ΑΒ στο Κ και να βρείτε το μήκος τους.

10. Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = 4 cm και ΒΓ = 5 cm. Να βρείτε το μέσο Μ του ΑΒ και να κατασκευάσετε τους κύκλους (Μ, 2 cm) και (Γ, 2 cm). Να φέρετε κατόπιν τις ευθείες που βρίσκονται σε απόσταση 2 cm από την (ε). Τι σχέση έχουν με τους δύο κύκλους;

11. Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι δύο πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες με μήκη 7 cm και 4 cm αντίστοιχα. Οι δύο άλλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ να είναι ίσες, με μήκος 5 cm η κάθε μια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

BASIC 8

Όπως όλοι γνωρίζετε στον υπολογιστή, μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφικές εικόνες από τις πιο απλές ως τις πιο σύνθετες. Οι εντολές που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι PLOT (για το σημείο), DRAW (για χάραξη ευθειών) και CIRCLE (για τη δημιουργία κύκλων).

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι από υπολογιστή σε υπολογιστή υπάρχουν διαφορές ως προς τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι εντολές αυτές. Για το λόγο αυτό θα ήταν χρήσιμο να συμβουλευτείτε το βιβλίο οδηγιών του υπολογιστή σας.

Η εντολή PLOT συνοδεύεται από δυο αριθμούς x, y (συντεταγμένες). Ο x δηλώνει την οριζόντια απόσταση και ο y την κάθετη.

Από τους δυο αριθμούς x, y συνοδεύεται και η εντολή DRAW αλλά η σημασία τους εξαρτάται από τον υπολογιστή σας.

Η εντολή CIRCLE συνοδεύεται από 3 αριθμούς x, y, z εκ των οποίων οι δυο πρώτοι δηλώνουν το σημείο του κέντρου και ο τρίτος την ακτίνα του κύκλου. Ας προσπαθήσουμε να πληκτρολογήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα.

```
10 PLOT  20,30    (↵)
20 DRAW  70,30    (↵)
30 DRAW  70,80    (↵)
40 DRAW  20,80    (↵)
50 DRAW  20,30    (↵)
   RUN            (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκε ένα τετράγωνο.

Έστω το πρόγραμμα:

```
10 CIRCLE 80,100,30    (↵)
20 CIRCLE 80,100,50    (↵)
30 CIRCLE 80,100,70    (↵)
   RUN                 (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκαν τρεις ομόκεντροι κύκλοι.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει έξι ομόκεντρους κύκλους που η ακτίνα τους να διαφέρει κατά 10 ξεκινώντας από το 20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο κύκλους που εφάπτονται στην ίδια ευθεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Οι γωνίες

6.1 Η έννοια της γωνίας

Θεωρία

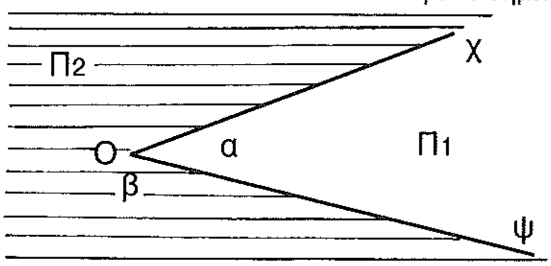
Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε γωνία, ποιες λέμε πλευρές της γωνίας και ποια κορυφή της;

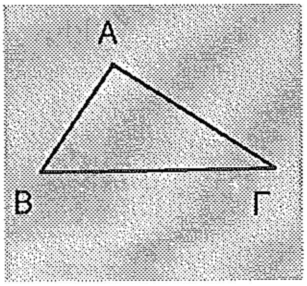
1. Γωνία ονομάζουμε την περιοχή του επιπέδου (σύνολο σημείων) που περιέχει τα σημεία δυο ημιευθειών με κοινή αρχή καθώς και τα σημεία που περικλείονται ανάμεσα στις ημιευθείες αυτές. Οι ημιευθείες που δημιουργούν τη γωνία λέγονται **πλευρές** της, ενώ η κοινή αρχή τους λέγεται **κορυφή** της γωνίας.

2. Πώς μπορούμε να ονομάσουμε μια γωνία;

2. Η γωνία μπορεί να ονομαστεί από τα γράμματα των ημιευθειών που αποτελούν τις πλευρές της. Δηλαδή λέμε «γωνία χΟψ ή γωνία ψΟχ» προσέχοντας να τοποθετούμε το γράμμα της κορυφής στη μέση. Μερικές φορές διαβάζουμε τη γωνία μόνο με το γράμμα της κορυφής. Δηλαδή λέμε «γωνία Ο». Επειδή δύο ημιευθείες με κοινή κορυφή ορίζουν δυο γωνίες, για να διευκρινίσουμε ποια εννοούμε, γράφουμε μέσα στη γωνία ένα τόξο και το ονομάζουμε με ένα μικρό γράμμα. Στο σχήμα μας έχουμε: «γωνία α» και εννοούμε το σημειοσύνολο $П_1$, «γωνία β» και εννοούμε το σημειοσύνολο $П_2$.



3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και να ονομάσετε τις γωνίες του.



3. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες:

Τη γωνία $\widehat{A}$ που έχει πλευρές τις ημιευθείες ΑΒ, ΑΓ και περιέχει το τρίγωνο.

Τη γωνία $\widehat{B}$ που έχει πλευρές τις ημιευθείες ΒΑ, ΒΓ και περιέχει το τρίγωνο και

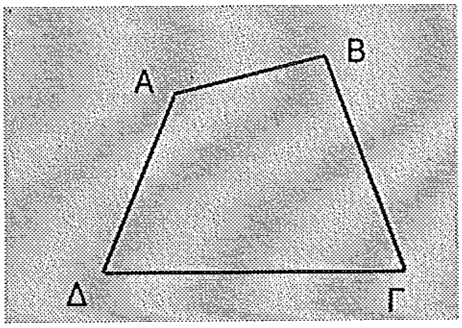
τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ που έχει πλευρές τις ημιευθείες ΓΑ, ΓΒ και περιέχει το τρίγωνο.

Η γωνία $\widehat{A}$ λέγεται **περιεχόμενη** στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενώ οι γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ λέγονται **προσκείμενες** στην πλευρά ΒΓ. Ακόμα η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι απέναντι από την πλευρά ΑΒ.

4. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο και να ονομάσετε τις γωνίες.

4. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τέσσερεις γωνίες. Είναι οι:

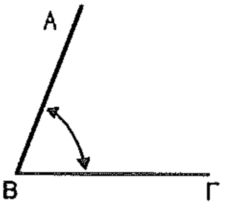
$\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Gamma\Delta A}$ που ονομάζονται συντομότερα $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$ αντίστοιχα.



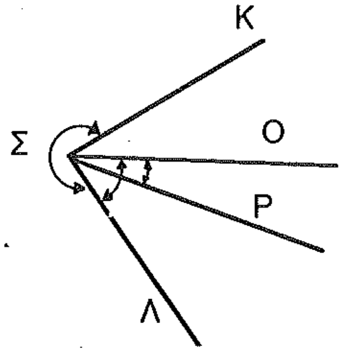
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις γωνίες που είναι σημειωμένες στα παρακάτω σχήματα.

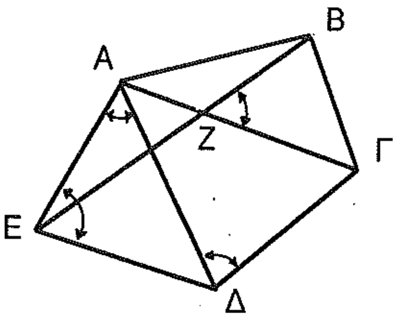
(α)



(β)



(γ)



Λύση

α) Έχουμε γωνία $\widehat{AB\Gamma}$.

β) Έχουμε τις γωνίες $\widehat{\Lambda\Sigma O}$, $\widehat{P\Sigma O}$, $\widehat{K\Sigma\Lambda}$.

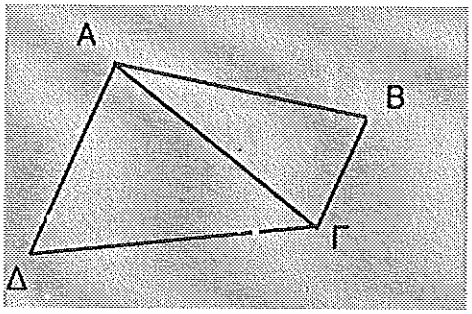
γ) Στο σχήμα αυτό είναι σημειωμένες οι οι γωνίες :$\widehat{AE\Delta}$, $\widehat{EA\Delta}$, $\widehat{A\Delta\Gamma}$, $\widehat{BZ\Gamma}$.

2. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να φέρετε την ΑΓ. Να ονομάσετε όλες τις γωνίες που βρίσκονται μέσα στο τετράπλευρο αυτό.

Λύση

Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και φέρουμε την ΑΓ. Οι γωνίες που βρίσκονται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου είναι οι:

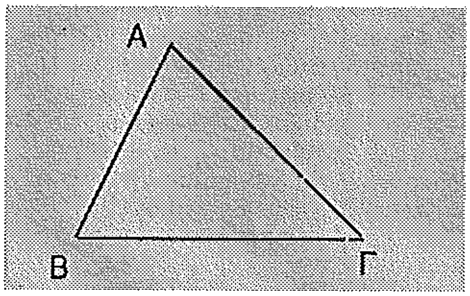
$\widehat{\Delta AB}$, $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Gamma\Delta A}$, $\widehat{\Delta A\Gamma}$, $\widehat{\Gamma AB}$, $\widehat{B\Gamma A}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$.



3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Ποιες γωνίες του τριγώνου είναι:
α) προσκείμενες στην ΒΓ;
β) απέναντι από την πλευρά ΑΒ και απέναντι από την πλευρά ΑΓ;
γ) ποια γωνία είναι περιεχόμενη στις πλευρές ΑΓ, ΒΓ;

Λύση

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ.



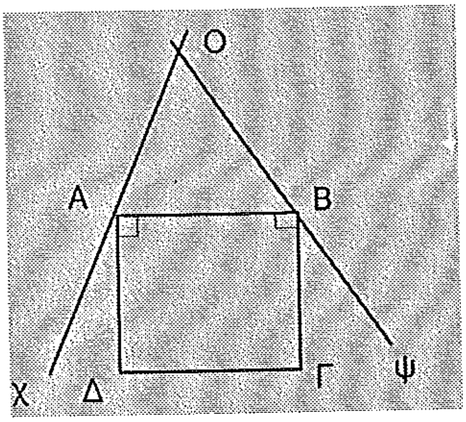
α) Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στη πλευρά ΒΓ.

β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ και η γωνία $\widehat{B}$ απέναντι από την πλευρά ΑΓ.

γ) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι περιεχόμενη στις πλευρές ΑΓ, ΒΓ.

4. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xO\psi}$ και να πάρετε πάνω στις πλευρές της Οχ και Οψ δύο σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με πλευρά το ΑΒ που να βρίσκεται μέσα στη γωνία $\widehat{xO\psi}$.

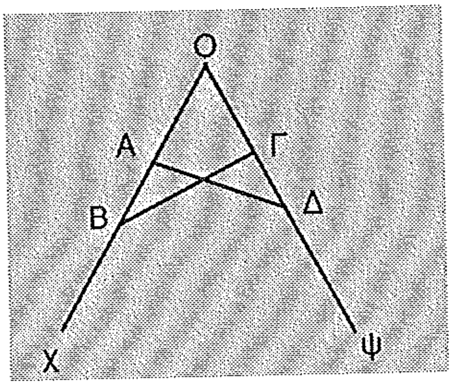
Λύση



Σχεδιάζουμε τη γωνία $\widehat{xO\psi}$ και παίρνουμε δυο σημεία Α και Β πάνω στις πλευρές της Οχ και Οψ αντίστοιχα. Φέρουμε την ΑΒ και κατασκευάζουμε δύο κάθετες ευθείες στην ΑΒ στα σημεία Α και Β. Πάνω σ' αυτές ορίζουμε τα σημεία Δ και Β αντίστοιχα ώστε: ΑΒ = ΑΔ = ΒΓ. Φέρουμε τη ΔΓ και σχηματίζεται έτσι το τετράγωνο ΑΒΓΔ που περιέχεται στη γωνία $\widehat{xO\psi}$

5. Δίνεται μια γωνία $\widehat{xO\psi}$. Να πάρετε δύο σημεία Α και Β πάνω στην Οχ και δύο σημεία Γ και Δ πάνω στην Οψ, ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Να φέρετε τις ΑΔ και ΒΓ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και τα ΑΔ και ΒΓ.

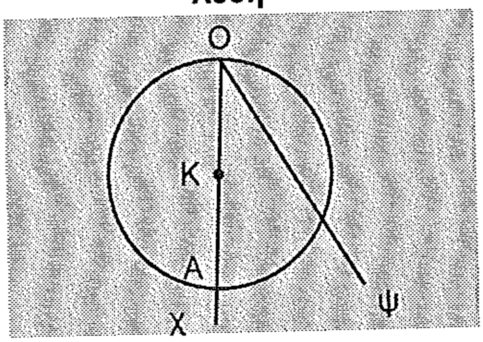
Λύση



Κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{xO\psi}$ και πάνω στις πλευρές της Οχ , Οψ παίρνουμε με το διαβήτη τα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα έτσι ώστε: ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Φέρουμε τις ΑΔ και ΒΓ. Με το υποδεκάμετρο ή το διαβήτη συγκρίνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και τα ΑΔ και ΒΓ και παρατηρούμε ότι: ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ.

6. Δίνεται μια γωνία $\widehat{xO\psi}$. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο που να περνά από το Ο και μια διάμετρό του να βρίσκεται πάνω στην πλευρά Οχ.

Λύση



Πάνω στην πλευρά Οχ της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Κ. Με κέντρο το Κ και ακτίνα ΚΟ γράφουμε ένα κύκλο.

Αυτός είναι ο κύκλος που ζητάμε γιατί περνά από το Ο και η διάμετρός του ΟΑ βρίσκεται πάνω στην Οχ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να ονομάσετε με τρία γράμματα και με ένα γράμμα τις γωνίες ενός πενταγώνου ΑΒΓΔΕ.

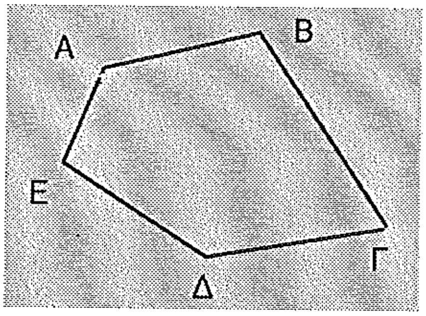
Λύση

Σχεδιάζουμε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και παρατηρούμε ότι έχει πέντε γωνίες. Αυτές είναι:

$\widehat{EAB}$ ή γωνία $\hat{A}$

$\widehat{AB\Gamma}$ ή γωνία $\hat{B}$

....

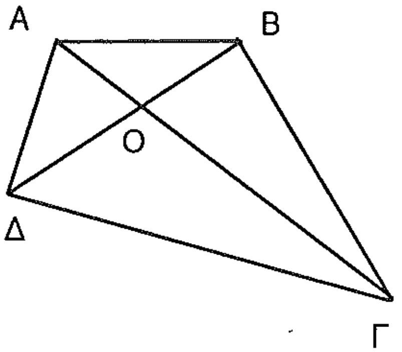


2. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να φέρετε τις ΑΓ και ΒΔ. Ονομάστε Ο το σημείο της τομής τους.
Ποια γωνία είναι περιεχόμενη στις πλευρές ΟΒ, ΟΑ;
Ποια γωνία είναι περιεχόμενη στις ΟΔ, ΟΑ;
Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΔΓ στο τρίγωνο ΟΔΓ;

Λύση

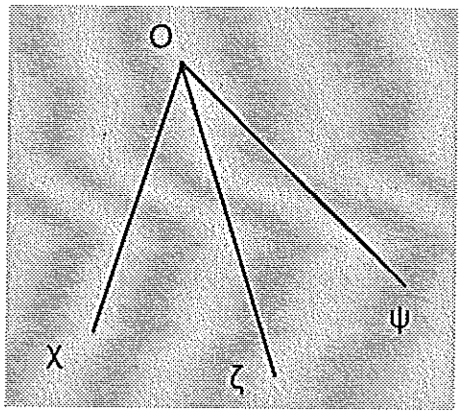
Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και φέρουμε τις ΑΓ και ΒΔ. Ονομάζουμε Ο το σημείο που αυτές τέμνονται. Η γωνία

$\widehat{AOB}$ είναι περιεχόμενη στις ΟΒ, ΟΑ ...



3. Δίνεται μια γωνία $\widehat{\chi O \psi}$. Να κατασκευάσετε μια άλλη γωνία που να έχει κοινή κορυφή με την $\widehat{\chi O \psi}$, κοινή πλευρά την Οχ και να περιέχεται στη γωνία $\widehat{\chi O \psi}$.

Λύση



Στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ φέρνουμε μια ημιευθεία Οζ με αρχή το σημείο Ο. Τότε...

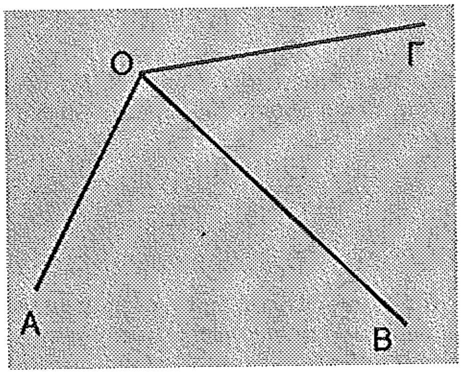
4. Να ονομάσετε όλες τις γωνίες που ορίζονται στο διπλανό σχήμα.

Λύση

Οι γωνίες που σχηματίζονται είναι συνολικά 6. Είναι οι εξής:

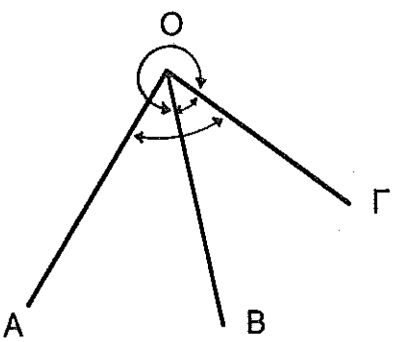
$\widehat{AOB}$ δυο γωνίες

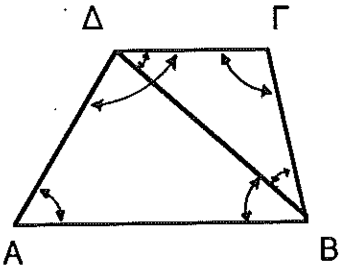
$\widehat{BO\Gamma}$ δυο γωνίες ....



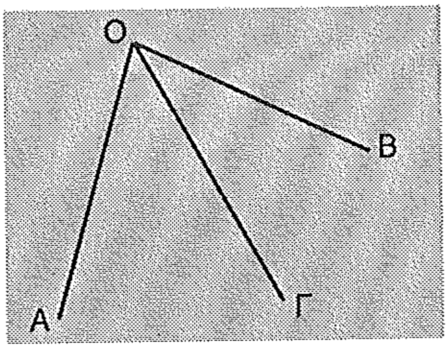
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να ονομάσετε με τρία γράμματα τις γωνίες των παρακάτω σχημάτων.





2. Πόσες συνολικά γωνίες σχηματίζονται στο παρακάτω σχήμα; Να τις ονομάσετε.



3. Δίνεται μια γωνία $\widehat{x O \psi}$. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο που να έχει κέντρο του τη κορυφή της γωνίας αυτής.

4. Δίνεται μια γωνία $\widehat{x O \psi}$. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο που να περνά από το O και ένα τμήμα των πλευρών της να είναι χορδές του κύκλου.

5. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να βρείτε ποιες είναι οι προσκείμενες γωνίες του στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να βρείτε μετά σε ποιες πλευρές περιέχονται οι γωνίες του Α, Β, Γ αντίστοιχα.

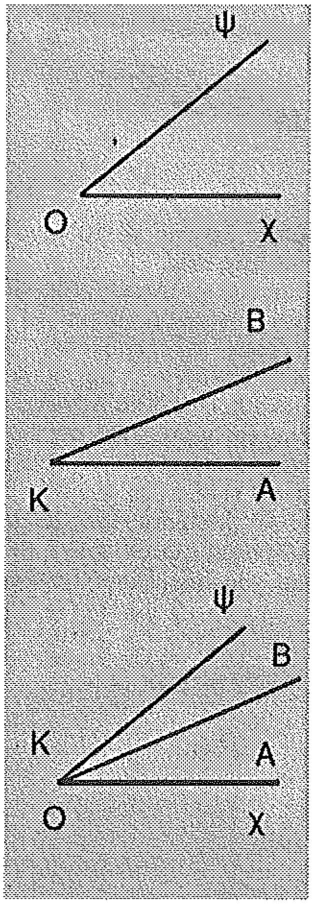
6. 2 Σύγκριση γωνιών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε δύο γωνίες $\widehat{xO\psi}$ και $\widehat{AKB}$.

Τι συμπεράσματα μπορεί να προκύψουν απο τη σύγκριση αυτή;



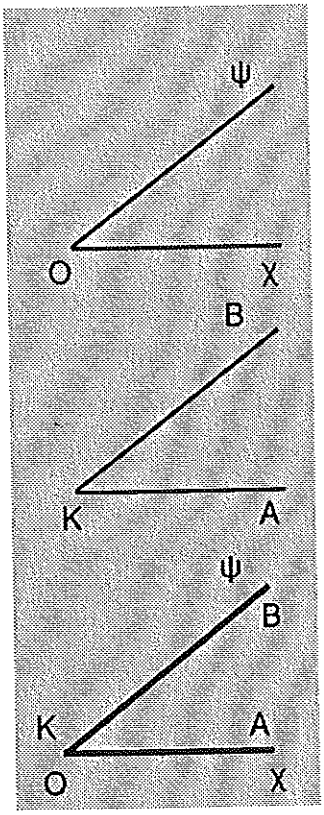
Απαντήσεις

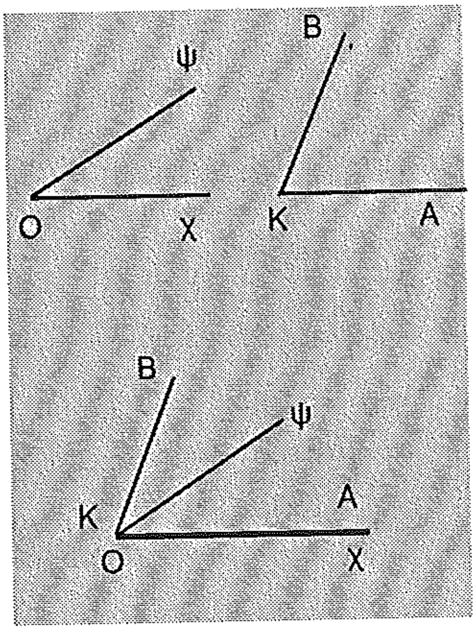
1. Για να συγκρίνουμε δυο γωνίες π.χ. τις $\widehat{xO\psi}$ και $\widehat{AKB}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αποτυπώνουμε σε διαφανές χαρτί μια από τις δυο γωνίες π.χ. την $\widehat{AKB}$ και τοποθετούμε το αποτύπωμα πάνω στην $\widehat{xO\psi}$ ώστε το Κ να συμπέσει με το Ο και η ΚΑ με την Οx. Αν η πλευρά ΚΒ βρεθεί μέσα στη γωνία $\widehat{xO\psi}$ λέμε ότι η γωνία $\widehat{AKB}$ είναι μικρότερη από την $\widehat{xO\psi}$ και γράφουμε : $\widehat{AKB} < \widehat{xO\psi}$ ή λέμε ότι η γωνία $\widehat{xO\psi}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{AKB}$ και γράφουμε: $\widehat{xO\psi} > \widehat{AKB}$.

Αν η πλευρά ΚΒ συμπέσει με την Οψ λέμε οτι οι γωνίες είναι **συμπτώσιμες** ή **ίσες** και γράφουμε: $\widehat{AKB} = \widehat{xO\psi}$.

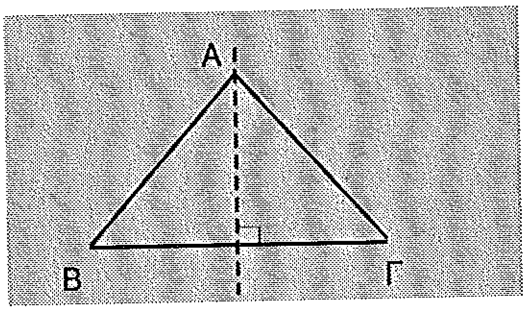
Αν η πλευρά ΚΒ δεν είναι μέσα στη γωνία $\widehat{xO\psi}$ λέμε ότι η γωνία $\widehat{AKB}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{xO\psi}$ και γράφουμε $\widehat{AKB} > \widehat{xO\psi}$ ή λέμε ότι η γωνία $\widehat{xO\psi}$ είναι μικρότερη από την $\widehat{AKB}$ και γράφουμε: $\widehat{xO\psi} < \widehat{AKB}$.





2. Ποιο τρίγωνο λέγεται ισοσκελές; Πώς μπορούμε να το κατασκευάσουμε;

2. Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δυο πλευρές ίσες.
Η κατασκευή του γίνεται ως εξής: Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετό του. Πάνω στη μεσοκάθετο παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει απο τα σημεία Β και Γ, άρα: ΑΒ = ΑΓ.
Οι ΑΒ και ΑΓ λέγονται **ίσες πλευρές** του ισοσκέλους τριγώνου, ενώ η ΒΓ λέγεται **βάση** του ισοσκελούς τριγώνου.



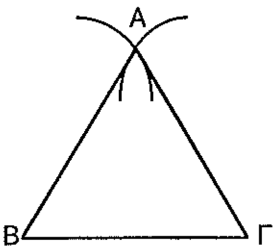
3. Τι συμπεραίνουμε από τη σύγκριση των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου;

3. Με τη βοήθεια του διαφανούς χαρτιού συγκρίνουμε τις γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου και βρίσκουμε ότι:

Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

4. Ποιο τρίγωνο λέγεται ισόπλευρο; Πώς μπορούμε να το κατασκευάσουμε;

4. Ισόπλευρο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
Η κατασκευή του γίνεται ως εξής: Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Γράφουμε τους κύκλους (Β, ΒΓ) και (Γ, ΒΓ) που τέμνονται σε ένα σημείο Α. Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, γιατί οι πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ είναι ίσες αφού είναι ακτίνες ίσων κύκλων.



5. Τι συμπεραίνουμε για τις γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ;

5. Επειδή ΑΒ=ΑΓ το ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ισοσκελές με βάση την ΒΓ καθώς και ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$,

στην δεύτερη $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Δηλαδή **οι γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.**

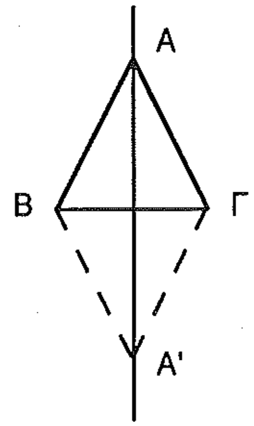
6. Ποιο τρίγωνο λέγεται σκαληνό;

6. Σκαληνό λέγεται το τρίγωνο που έχει άνισες τις πλευρές του.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που να έχει τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ ίσες με 6 cm κάθε μία και τη βάση του ΒΓ ίση με 4 cm.

Λύση



Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = 4 cm και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετό του. Μετά γράφουμε τον κύκλο (Β, 6 cm) που συναντά τη μεσοκάθετο σε ένα σημείο Α. Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ, οπότε το ΑΒΓ είναι το ισοσκελές τρίγωνο που ζητάμε, γιατί ΑΒ = ΑΓ = 6 cm αφού το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ και ΑΒ είναι ακτίνα του κύκλου (Β, 6 cm).

Παρατήρηση:

Το πρόβλημα έχει και δεύτερη λύση, γιατί ο κύκλος (Β, 6 cm) συναντά τη μεσοκάθετό του ΑΒ και σε δεύτερο σημείο Α', οπότε και το Α'ΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ = 4 cm και τις πλευρές Α'Β = Α'Γ = 6 cm.

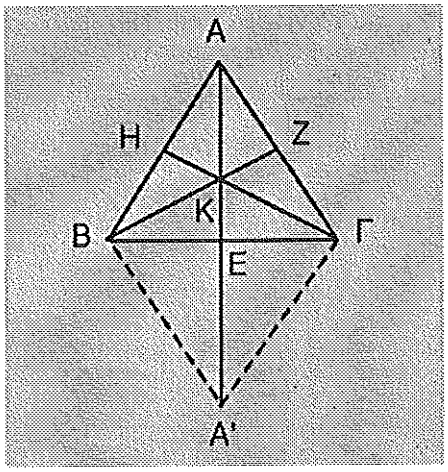
2. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που να έχει περίμετρο 25 cm και το μήκος κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του να είναι διπλάσιο από το μήκος της βάσης του.

Λύση

Ονομάζουμε x το μήκος της βάσης του ΒΓ. Τότε το μήκος κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του θα είναι 2x αφού σύμφωνα με το πρόβλημα είναι διπλάσιο από το μήκος της βάσης. Έτσι έχουμε για την περίμετρο του:
$x + 2x + 2x = 25$ ή $5x = 25$ δηλαδή $x = 5$ cm.
Άρα η ΒΓ = 5 cm και οι ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ θα έχουν μήκος 10 cm η κάθε μια τους. Η κατασκευή γίνεται όπως στην προηγούμενη άσκηση. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη παρατήρηση.

3. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 5 cm και με τη βοήθεια του γνώμονα να φέρετε τα τρία ύψη του. Να τα συγκρίνετε με το διαβήτη. Τι παρατηρείτε;

Λύση

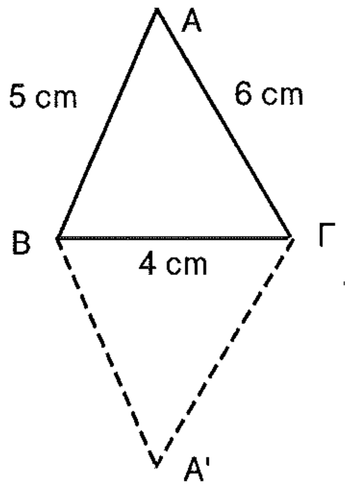


Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα 5 cm με άκρα τα Β και Γ. Κατασκευάζουμε τους κύκλους (Β, 5 cm) και (Γ, 5 cm) που τέμνονται σε ένα σημείο Α. Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ισόπλευρο που ζητούσαμε, γιατί η ΒΓ = 5 cm και οι ΑΒ, ΑΓ είναι ίσες με

5 cm σαν ακτίνες ίσων κύκλων.
Με τη βοήθεια του γνώμονα φέρουμε τα τρία ύψη ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ. Τα συγκρίνουμε με το διαβήτη και παρατηρούμε ότι είναι ίσα. Παρατηρούμε ακόμα ότι τέμνονται στο ίδιο σημείο Κ. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις γιατί οι κύκλοι (Β, 5 cm), (Γ, 5 cm) τέμνονται και σε δεύτερο σημείο το Α', οπότε το τρίγωνο Α'ΒΓ είναι επίσης ισόπλευρο, οπότε ισχύουν και σε αυτό τα ίδια συμπεράσματα.

4. Να κατασκευάσετε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ που να έχει ΑΒ = 5 cm, ΒΓ = 4 cm, ΑΓ = 6 cm. Να συγκρίνετε τις γωνίες του Τι παρατηρείτε;

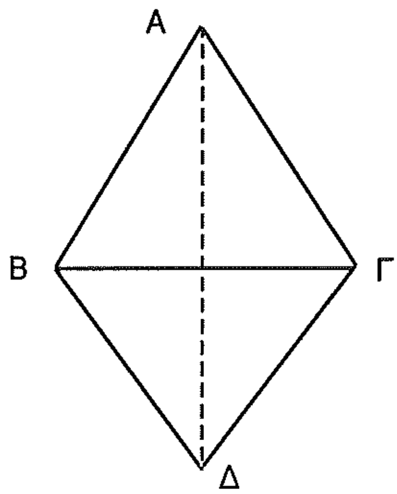
Λύση



Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = 4 cm. Γράφουμε τους κύκλους (Β, 5 cm) και (Γ, 6 cm) οι κύκλοι αυτοί τέμνονται σε ένα σημείο Α. Φέρουμε τις ΑΒ και ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το τρίγωνο που ζητάμε γιατί: ΑΒ = 5 cm, ΒΓ = 4 cm και ΑΓ = 6 cm. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις γιατί οι κύκλοι (Β, 5 cm), (Γ, 6 cm) τέμνονται και στο σημείο Α', άρα και το τρίγωνο Α'ΒΓ είναι σκαληνό με πλευρές 5 cm, 6 cm και 4 cm.
Συγκρίνουμε με διαφανές χαρτί τις γωνιες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ και βρίσκουμε ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} > \hat{A}$. Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη γωνία που είναι η $\hat{B}$ βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, που είναι η ΑΓ = 6 cm. Επίσης η μικρότερη γωνία του τριγώνου που είναι η $\hat{A}$ βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη πλευρά που είναι η ΒΓ = 4 cm.

5. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές και ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κοινή βάση ΒΓ, ώστε οι κορυφές τους Α και Δ αντίστοιχα να βρίσκονται από τη μια και από την άλλη πλευρά της ΒΓ.

Λύση



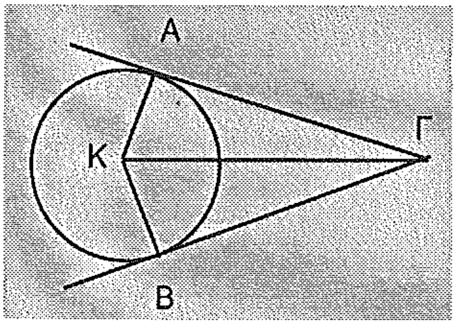
Γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετό του. Γράφουμε τους κύκλους (Β, ρ), όπου το ρ είναι τυχαίο μήκος, και (Β, ΒΓ) που τέμνουν τη μεσοκάθετο, ο πρώτος στο σημείο Α και ο δεύτερος στο σημείο Δ. Φέρουμε τις ΑΒ, ΑΓ και ΔΒ, ΔΓ οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ισοσκελές και ισόπλευρο αντίστοιχα.

<u>**Παρατήρηση:**</u> Η ακτίνα ρ του κύκλου με κέντρο το Β έχει τυχαίο μήκος αλλά μεγαλύτερο ή ίσο από το μισό της ΒΓ, γιατί αλλιώς δεν θα συναντούσε τη μεσοκάθετο του ΒΓ. Αν ρ = ΒΓ το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισόπλευρο και το πρόβλημα θα ήταν σωστό επίσης γιατί γνωρίζουμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο είναι οπωσδήποτε ισοσκελές.

6. Να γράψετε ένα κύκλο (Κ, ρ) όπου ρ τυχαίο μήκος και να πάρετε δύο σημεία Α και Β πάνω σ' αυτόν. Να φέρετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά που να τέμνονται στο σημείο Γ.

Να φέρετε την ΚΓ και να συγκρίνετε τις γωνίες $\widehat{A\Gamma K}$ και $\widehat{B\Gamma K}$. Να συγκρίνετε επίσης τις γωνίες $\widehat{KA\Gamma}$ και $\widehat{KB\Gamma}$.

Λύση

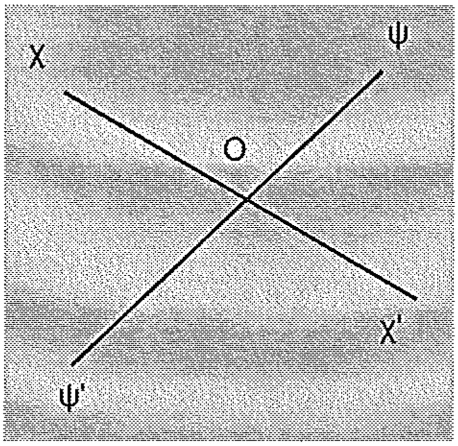


Φέρουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β του κύκλου όπως γνωρίζουμε (§ 5.11). Ονομάζουμε Γ το σημείο της τομής τους και φέρουμε την ΚΓ. Συγκρίνουμε με διαφανές χαρτί τις γωνίες $\widehat{A\Gamma K}$ και $\widehat{B\Gamma K}$ και βρίσκουμε ότι : $\widehat{A\Gamma K}=\widehat{B\Gamma K}$. Όμοια συγκρίνουμε τις γωνίες $\widehat{KA\Gamma}$ και $\widehat{KB\Gamma}$ και βρίσκουμε πάλι ότι: $\widehat{KA\Gamma}=\widehat{KB\Gamma}$

7. Να χαράξετε δύο ευθείες χχ' και ψψ' που να τέμνονται σε ένα σημείο Ο. Να συγκρίνετε τις γωνίες $\widehat{\chi O\psi}$ και $\widehat{\chi' O\psi'}$ καθώς και τις $\widehat{\chi O\psi'}$ και $\widehat{\chi' O\psi}$.

Λύση

Με το διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις γωνίες $\widehat{\chi O\psi}$ και $\widehat{\chi' O\psi'}$ και βρίσκουμε ότι : $\widehat{\chi O\psi}=\widehat{\chi' O\psi'}$. Συγκρίνουμε επίσης τις $\widehat{\chi O\psi'}$ και $\widehat{\chi' O\psi}$ και βρίσκουμε ότι : $\widehat{\chi O\psi'}=\widehat{\chi' O\psi}$.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα σκαληνό τρίγωνο και να συγκρίνετε τις γωνίες του. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Γράφουμε ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και μετά τους κύκλους με κέντρα Β και Γ και ακτίνες τυχαίες.
Προσέχουμε όμως οι ακτίνες αυτές να μην είναι μικρότερες από το μισό του ΒΓ γιατί τότε δεν θα τέμνονται. Ονομάζουμε Α το σημείο της τομής τους...

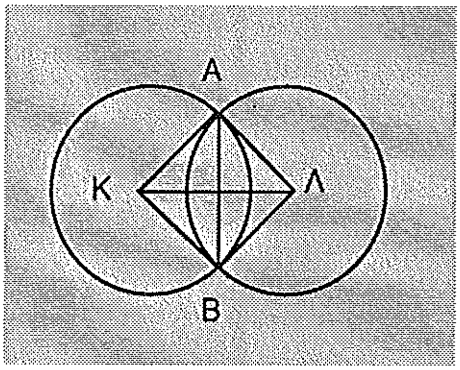
2. Δυο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρουμε τις ΚΑ, ΛΑ και τις ΒΚ, ΒΛ. Να συγκρίνετε τις γωνίες

$\widehat{KAB}$, $\widehat{\Lambda AB}$, $\widehat{KBA}$, $\widehat{AB\Lambda}$.

Λύση

Κατασκευάζουμε το σχήμα όπως φαίνεται παρακάτω και με διαφανές χαρτί

ʹκρίνουμε τις γωνίες που μας ζητά το όβλημα...



3. Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και να φέρετε τη διαγώνιο του ΑΓ.

Να συγκρίνετε τις γωνίες $\widehat{\Gamma A B}$ και $\widehat{\Delta A \Gamma}$ καθώς και τις γωνίες $\widehat{\Gamma A \Delta}$ και $\widehat{A \Gamma B}$.

Λύση

Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και φέρουμε την ΑΓ. Συγκρίνουμε τις γωνίες που ζητά το πρόβλημα με διαφανές χαρτί και βρίσκουμε ότι...

4. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο που να έχει περίμετρο 18 cm.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα τις ίσες πλευρές του. Ονομάζουμε x το μήκος της κάθε μιας, οπότε:
$x + x + x = 18$ cm ή $3x = 18$ cm ή
$x =$...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και να βρείτε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ. Να φέρετε τις ΒΝ και ΓΜ και να συγκρίνετε τις γωνίες $\widehat{N B \Gamma}$ και $\widehat{M \Gamma B}$. Να συγκρίνετε επίσης τις γωνίες $\widehat{A B N}$ και $\widehat{A \Gamma M}$ καθώς και τις $\widehat{\Gamma M A}$ και $\widehat{A N B}$.

2. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και μετά το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τις πλευρές του νέου τριγώνου. Τι παρατηρείτε; Χωρίς να χρησιμοποιήσετε διαφανές χαρτί δικαιολογήστε γιατί και οι γωνίες του είναι ίσες.

3. Ένα σκαληνό τρίγωνο έχει περίμετρο 15 cm και οι πλευρές του, ανά δύο, διαφέρουν κατά 2 cm. Να το κατασκευάσετε.

4. Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και να βρείτε το μέσο Μ της ΑΒ. Να φέρετε τις ΜΔ και ΜΓ. Να συγκρίνετε τις πλευρές ΜΔ και ΜΓ του τριγώνου ΜΔΓ. Να δικαιολογήσετε ότι οι γωνίες $\widehat{M \Delta \Gamma}$ και $\widehat{M \Gamma \Delta}$ είναι ίσες χωρίς να τις συγκρίνετε με διαφανές χαρτί.

6.3 Είδη γωνιών

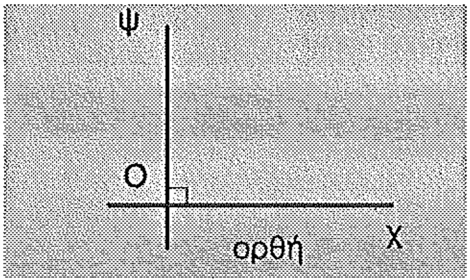
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποια γωνία ονομάζεται ορθή;

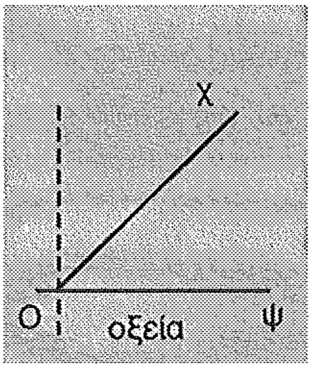
Απαντήσεις

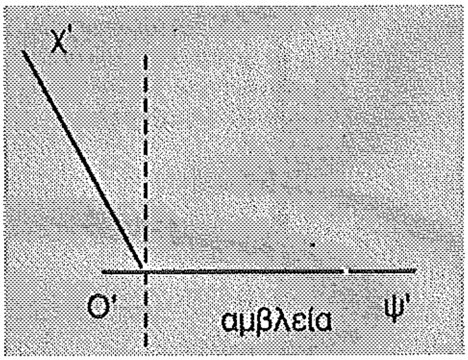
1. **Ορθή γωνία** ονομάζεται μια γωνία της οποίας οι πλευρές είναι κάθετες ημιευθείες.
Εύκολα με διαφανές χαρτί διαπιστώνεται ότι:
Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.



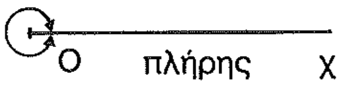
2. Ποια γωνία ονομάζεται οξεία και ποια αμβλεία; Τι σχέση έχουν όταν τις συγκρίνουμε;

2. **Οξεία γωνία** ονομάζεται η γωνία που είναι μικρότερη από μια ορθή γωνία, ενώ **αμβλεία** ονομάζεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη από μια ορθή.
Όπως διαπιστώνετε από τα παρακάτω σχήματα:
Μια οξεία γωνία είναι μικρότερη από μια αμβλεία.

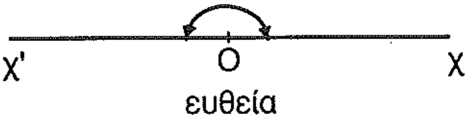




3. Ποια γωνία ονομάζεται ευθεία γωνία και ποια πλήρης;

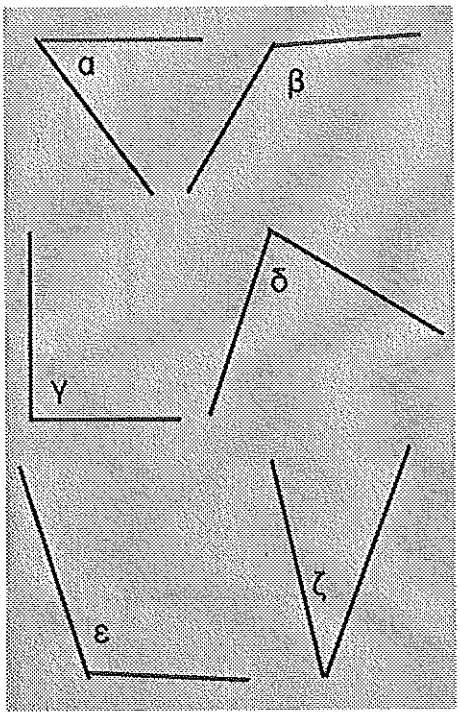


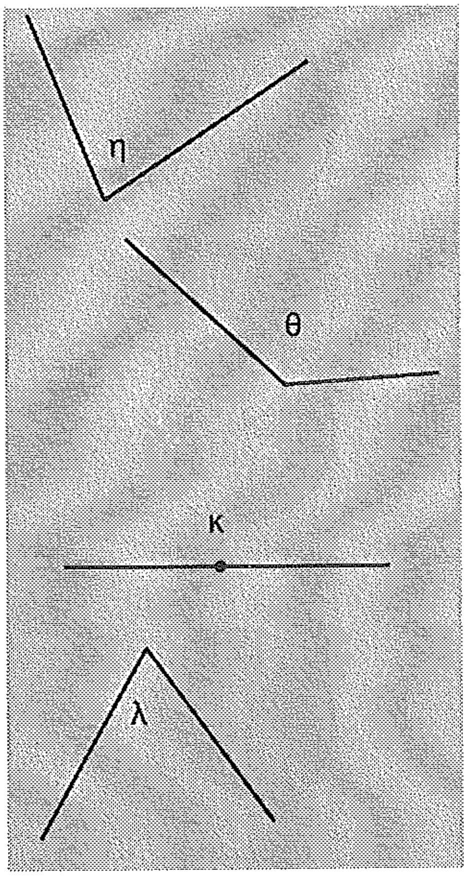
3. Ευθεία γωνία ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την περιστροφή μιας ημιευθείας Οx γύρω από την αρχή της Ο μέχρι που να συμπέσει με την αντικείμενη ημιευθεία της Οx', ενώ αν περιστραφεί μέχρι που να συμπέσει πάλι με την αρχική της θέση τότε η γωνία που σχηματίζεται ονομάζεται **πλήρης γωνία** και περιλαμβάνει ολόκληρο το επίπεδο.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να ονομάσετε τις παρακάτω γωνίες ως προς το άνοιγμα τους και να τις γράψετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη.





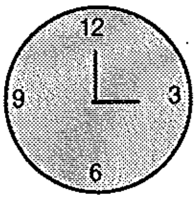
Λύση

Οι γωνίες $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\delta}$, $\widehat{\zeta}$, $\widehat{\eta}$, $\widehat{\lambda}$ είναι οξείες. Η γωνία $\widehat{\gamma}$ είναι ορθή, ενώ οι γωνίες $\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{\theta}$, $\widehat{\beta}$ είναι αμβλείες. Η γωνία $\widehat{\kappa}$ είναι ευθεία. Με διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις γωνίες και βρίσκουμε

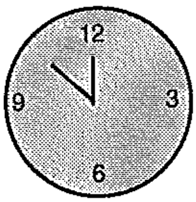
$\widehat{\zeta} < \widehat{\alpha} < \widehat{\lambda} < \widehat{\delta} < \widehat{\eta} < \widehat{\gamma} < \widehat{\varepsilon} < \widehat{\beta} < \widehat{\theta} < \widehat{\kappa}$.

2. Αν ο δείκτης ενός ρολογιού βρίσκεται στο 12 που πρέπει να βρίσκεται ο άλλος δείκτης ώστε η γωνία που σχηματίζεται να είναι α) ορθή, β) οξεία, γ) αμβλεία, δ) ευθεία, ε) πλήρης.

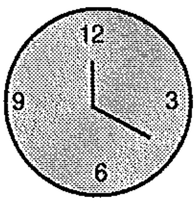
Λύση



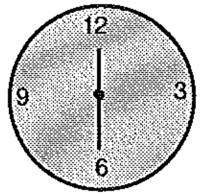
ορθή



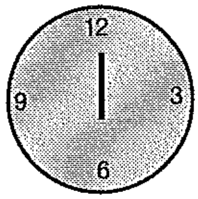
οξεία



αμβλεία



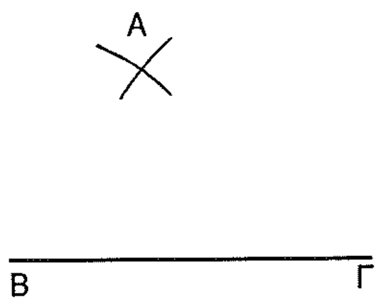
ευθεία

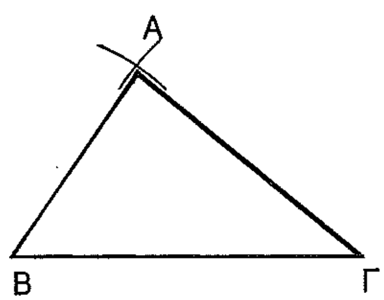


πλήρης

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 4 cm και ΒΓ = 5 cm. Χαρακτηρίστε ως προς το άνοιγμα τις γωνίες του.

Λύση





Κατασκευάζουμε μια πλευρά του έστω τη ΒΓ = 5 cm. Με κέντρο το Β και ακτίνα 3 cm γράφουμε ένα κύκλο. Με κέντρο Γ και ακτίνα 4 cm γράφουμε έναν άλλο κύκλο. Οι δύο κύκλοι τέμνονται στο Α. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ και κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ. Με το γνώμονα διαπιστώνουμε ότι η γωνία Α είναι ορθή. Με σύγκριση με τη γωνία Α βρίσκουμε ότι οι γωνίες Β και Γ είναι οξείες.

4. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά μήκους 3 cm και να φέρετε τη διάμεσό του ΑΔ.

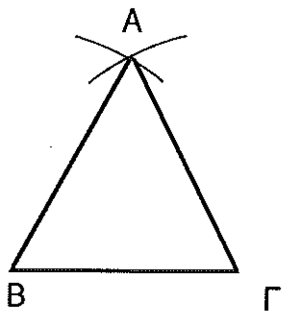
Τι είδους γωνίες είναι οι $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma}$;

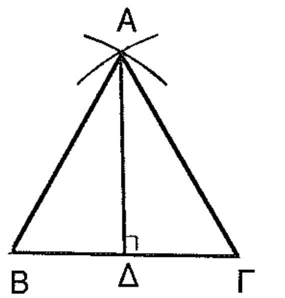
Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη διάμεσο ισοπλεύρου τριγώνου;

Λύση

Γράφουμε πάνω στο επίπεδο τη πλευρά ΒΓ = 3 cm. Με ακτίνα 3 cm φέρουμε δύο κύκλους με κέντρα Β και Γ. Έστω Α το ένα κοινό τους σημείο. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ και μετά κατασκευάζουμε το μέσο Δ του ΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ και παρατηρούμε ότι το Α ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Άρα το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου. Συνεπώς η διάμεσος ΑΔ είναι και μεσοκάθετος του ΒΓ και οι γωνίες

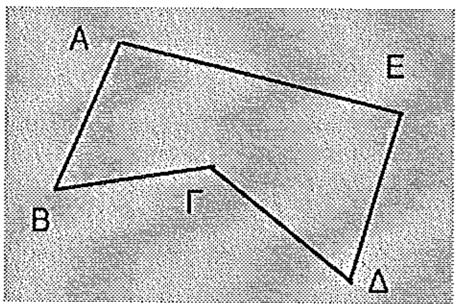
$\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma}$ ειναι ορθές.





Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να ονομάσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος ανάλογα με το άνοιγμά τους.

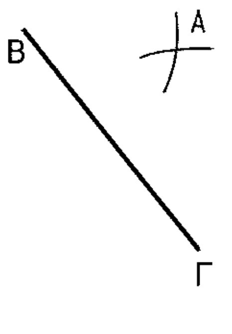


Λύση

Η γωνία $\widehat{A}$ είναι αμβλεία, η γωνία $\widehat{B}$ είναι οξεία, η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι μη κυρτή ...

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 4 cm και ΒΓ = 6 cm. Χαρακτηρίστε ως προς το άνοιγμα τις γωνίες του.

Λύση

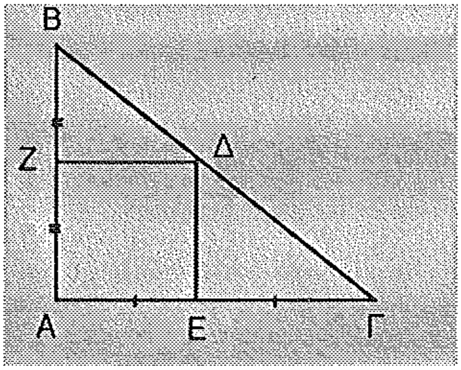


Κατασκευάζουμε την πλευρά ΒΓ = 6 cm. Με κέντρο Β και ακτίνα 3 cm γράφουμε κύκλο και με κέντρο Γ και ακτίνα 4 cm γράφουμε κύκλο. Το σημείο που τέμνονται οι κύκλοι είναι το Α...

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ, το μέσο Ε της ΑΓ και το μέσο Ζ της ΑΒ. Σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΕΔΖ. Χαρακτηρίστε τις γωνίες του.

Λύση

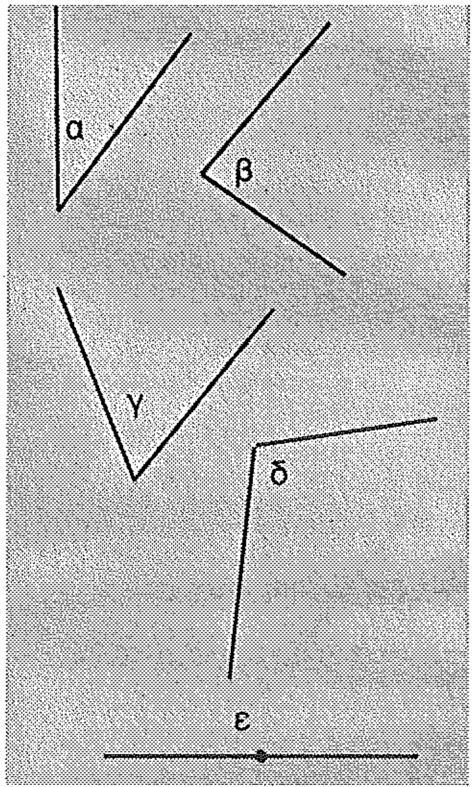
Παίρνουμε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και κατασκευάζουμε το τετράπλευρο ΑΕΔΖ. Με το γνώμονα βρίσκουμε ότι η γωνία Ε είναι ορθή...



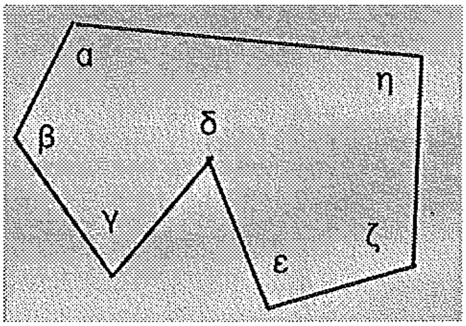
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε μια οξεία, μια αμβλεία και μια ορθή γωνία.

2. Να ονομάσετε τις παρακάτω γωνίες ως προς το άνοιγμά τους.



3. Να ονομάσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος και να τις διατάξετε από τη μεγαλύτερη πρός τη μικρότερη.



4. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 4 cm και ΒΓ = 4,5 cm. Να ονομάσετε τις γωνίες του ως προς το άνοιγμά τους.

5. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 3 cm και ΒΓ = 2 cm Να φέρετε τη διάμεσο του ΑΔ. Τι είδους γωνίες είναι οι $\widehat{ΑΔΒ}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$; Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη διάμεσο ισοσκελούς τριγώνου;

6.4 Μέτρηση γωνιών

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποια είναι η μονάδα μέτρησης των γωνιών;

1. Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μία μοίρα (1°)**. Η μία μοίρα (1°) είναι το 1/90 της ορθής. Δηλαδή αν χωρίσουμε μια ορθή γωνία σε 90 ίσα μέρη παίρνουμε 90 ίσες μεταξύ τους γωνίες που η κάθε μια έχει άνοιγμα 1°.

2. Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις της μοίρας;

2. Μία μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (60') και κάθε πρώτο λεπτό υποδιαιρείται σε εξήντα δεύτερα λεπτά (60'').

3. Με ποιο όργανο γίνεται η μέτρηση των γωνιών;

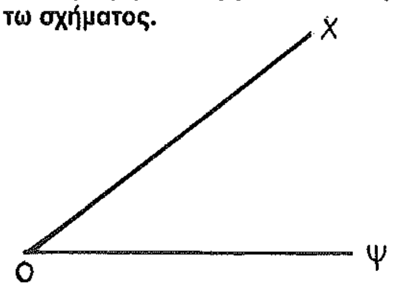
3. Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο. Συνδυασμός του μοιρογνωμόνιου και του γνώμονα που είδαμε στο κεφάλαιο 5 είναι ο σύνθετος γνώμονας.

4. Πόσες μοίρες είναι μία ορθή, μία ευθεία, μία πλήρης, μία οξεία, και μία αμβλεία γωνία;

4. Μία ορθή γωνία είναι 90°. Μία ευθεία γωνία είναι 180° δηλαδή 2 ορθές. Μία πλήρης γωνία είναι 360° δηλαδή 4 ορθές. Μία οξεία γωνία είναι λιγότερο από 90° και μία αμβλεία είναι περισσότερο από 90° και λιγότερο από 180°.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να μετρήσετε τη γωνία του παρακάτω σχήματος.

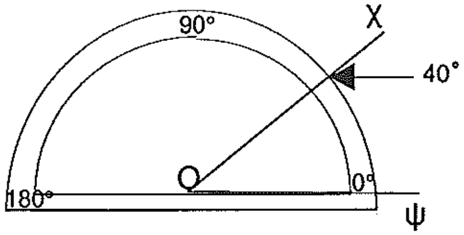


Λύση

Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο ώστε η ευθεία πλευρά του να εφάπτεται με τη μια πλευρά της γωνίας έστω την Οψ και η κορυφή Ο της γωνίας χΟψ να συμπίπτει με το σημάδι που έχει το μέσο της ευθείας πλευράς του μοιρογνωμόνιου. Η άλλη πλευρά της γωνίας, η Οχ τέμνει το μοιρογνωμόνιο στην ένδειξη 40°.

Άρα η γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ είναι 40°.

Οι εργασίες αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

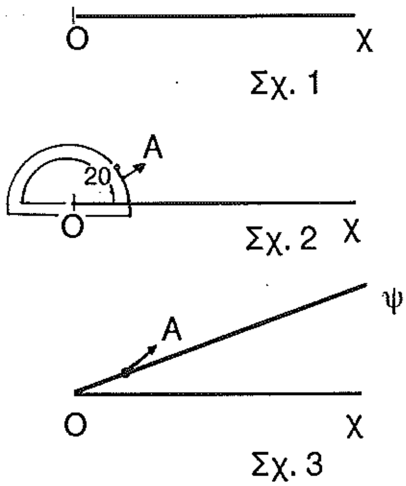


2. Να κατασκευάσετε γωνία 20°.

Λύση

Παίρνουμε μια ημιευθεία Οχ (σχ. 1) και τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το σχήμα 2. Σημειώνουμε το σημείο Α στην ένδειξη 20 του μοιρογνωμόνιου, και απομακρύνουμε το μοιρογνωμόνιο. Με τον κανόνα φέρουμε την ημιευθεία Οψ σχ.3 που διέρχεται από το Α.

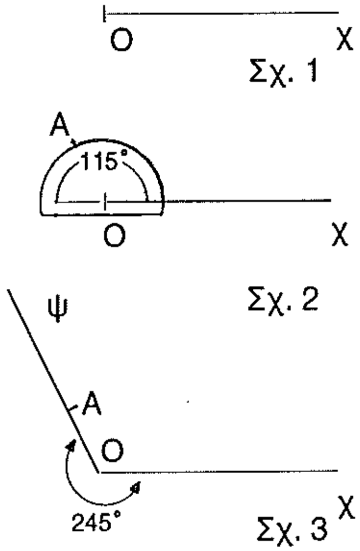
Η γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ είναι 20°.



3. Να κατασκευάσετε γωνία 245 °.

Λύση

Μια γωνία 245° είναι μια μη κυρτή γωνία. Το μοιρογνωμόνιο δεν έχει ένδειξη για γωνίες μεγαλύτερες από 180°. Κάνουμε την αφαίρεση 360° – 245° = 115°. Θα κατασκευάσουμε επομένως μία γωνία 115° ώστε αυτή που θα περισσέψει μέχρι να συμπληρωθεί η πλήρης γωνία θα είναι η ζητούμενη γωνία 245°. Παίρνουμε λοιπόν μία ημιευθεία Οχ (Σχ.1) και τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το Σχ.2. Στην ένδειξη του μοιρογνωμίου 115 σημειώνουμε το σημείο Α και απομακρύνουμε το μοιρογνωμόνιο. Φέρουμε την ημιευθεία Οψ που περνά από το Α όπως στο Σχ.3. Η γωνία που δείχνει το σχήμα είναι 245°.

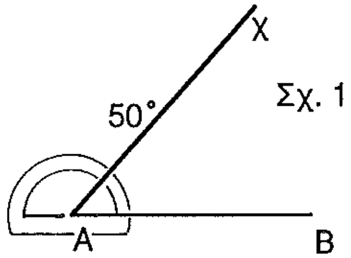


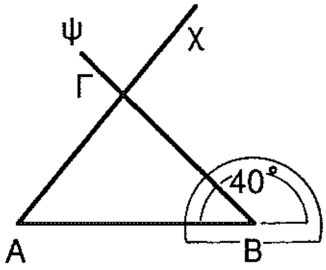
4. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

$\widehat{A}$ = 50 °, $\widehat{B}$ = 40 °, AB =3 cm.

Λύση

Γράφουμε την πλευρά ΑΒ = 3 cm και τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το Σχ.1 κατασκευάζοντας γωνία Α = 50°. Μετά τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το Σχ.2 κατασκευάζοντας γωνία Β = 40°. Στο σημείο που τέμνονται οι ημιευθείες Αχ και Βψ γράφουμε το γράμμα Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο γιατί έχει τη γωνία Α = 40°, τη γωνία Β = 40° και την πλευρά του ΒΓ = 3 cm.





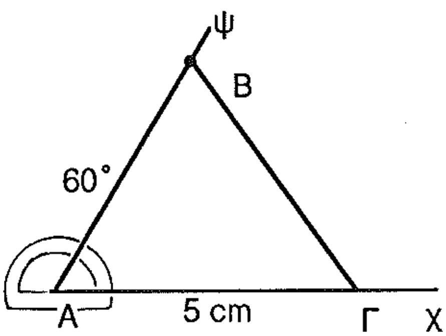
Σχ. 2

5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

$\widehat{A} = 60^\circ$, ΑΒ = 4 cm , ΑΓ = 5 cm .

Λύση

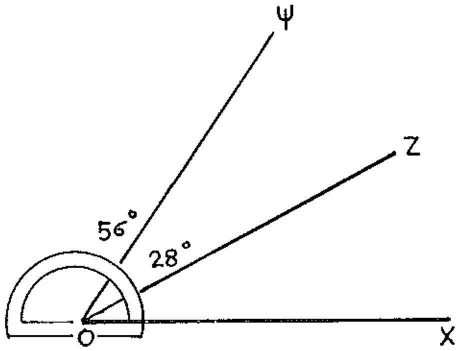
Φέρουμε μία ημιευθεία Αχ και με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου όπως δείχνει το σχήμα κατασκευάζουμε μία γωνία χΑψ = 60°. Στην ημιευθεία Αχ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ = 5 cm και στην ημιευθεία Αψ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm. Ενώνουμε το Β με το Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο γιατί Α = 60°, ΑΒ = 4 cm και ΑΓ = 5 cm.



6. Να κατασκευάσετε γωνία 56° και μετά να γράψετε τη διχοτόμο της.

Λύση

Με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου κατασκευάζουμε γωνία χΟψ = 56°. Η διχοτόμος της θα είναι η ημιευθεία που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες. Η κάθε μία από αυτές θα είναι 56° : 2 = 28°. Κατασκευάζουμε λοιπόν μία γωνία 28° με κορυφή το Ο και μία πλευρά την Οχ. Η ημιευθεία Οz είναι η ζητούμενη διχοτόμος.

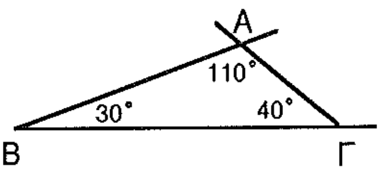


7. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=2,4 cm , ΓΑ=2,3 cm και ΒΓ = 3,9 cm. Να μετρήσετε τις γωνίες του. Τι παρατηρείτε;

Λύση

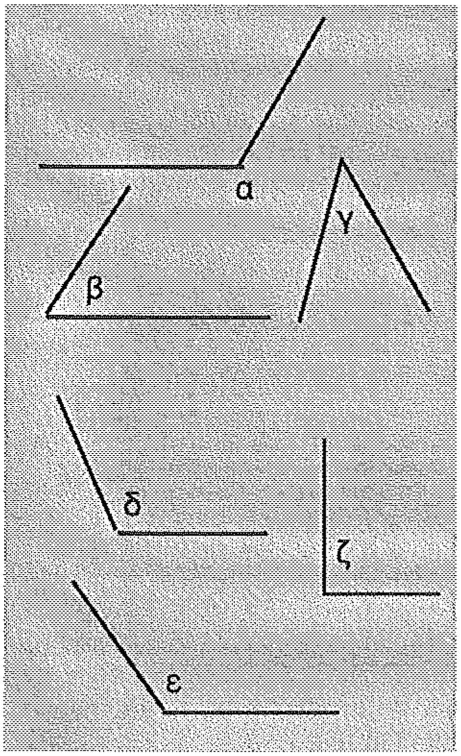
Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2,4 cm , ΑΓ = 2,3 cm και ΒΓ =3,9 cm . Με το μοιρογνωμόνιο μετρούμε τις γωνίες του και βρίσκουμε ότι $\widehat{A} = 110^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 40^\circ$.

Παρατηρούμε ότι απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και απέναντι από τη μικρότερη πλευρά βρίσκεται η μικρότερη γωνία.



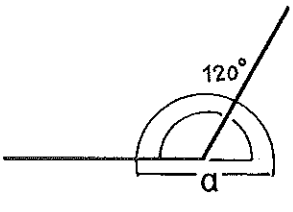
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να μετρήσετε τις παρακάτω γωνίες.



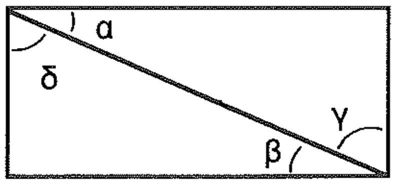
Λύση

α) Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το σχήμα και μετρούμε την κυρτή γωνία η οποία είναι 120°. Άρα η ζητούμενη γωνία είναι 360° − 120° = 240°.



β) Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το σχήμα και βρίσκουμε ότι ...

2. Να μετρήσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες στο παρακάτω σχήμα. Τι παρατηρείτε;



Λύση

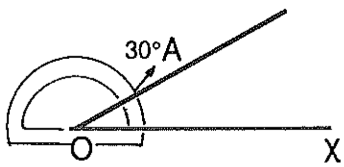
Με το το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι:

$\hat{\alpha} = 24°$, $\hat{\beta} = 24°$, ...

3. Να κατασκευάσετε γωνίες 30°, 70°, 105°.

Λύση

Γράφουμε την ημιευθεία Οχ και τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο όπως γνωρίζουμε. Σημειώνουμε με το σημείο Α στην ένδειξη 35 του μοιρογνωμόνιου και φέρουμε την ημιευθεία ΟΑ. Άρα ....



4. Στον παρακάτω πίνακα είναι σημειωμένες μερικές γωνίες. Να συμπληρώσετε στη διπλανή στήλη το όνομα της γωνίας.

γωνία	όνομα γωνίας
50°	οξεία
70°	
135°	
290°	
180°	
120°	
90°	
15°	
360°	
179°	

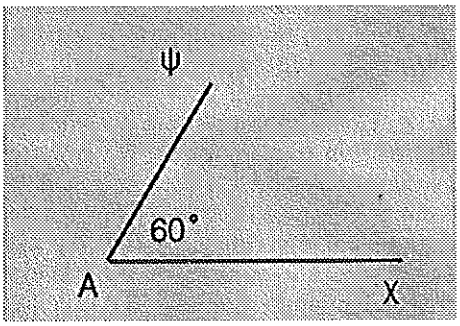
5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

$\hat{A} = 60°$, ΑΓ = 3 cm, ΑΒ = 1,9 cm.

Λύση

Γράφουμε μια ημιευθεία Αχ και με την βοήθεια του μοιρογνωμόνιου κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{\chi A \psi} = 60°$.

Στην ημιευθεία Αχ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ = 3 cm .....



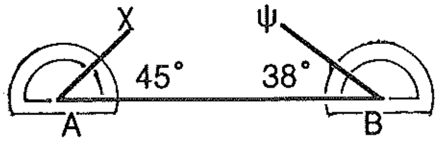
6. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

ΑΒ = 4 cm, $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 38°$.

Λύση

Γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm και με το μοιρογνωμόνιο όπως δείχνει το σχήμα κατασκευάζουμε γωνίες

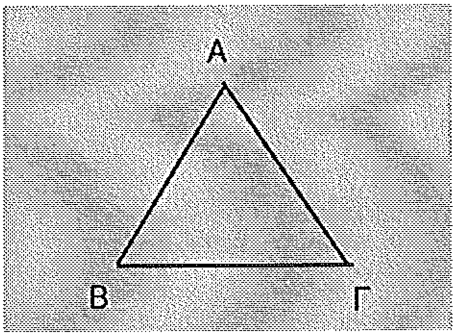
$\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 38°$. ...



7. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = 2,5 cm. Να μετρήσετε τις γωνίες του. Τι παρατηρείτε;

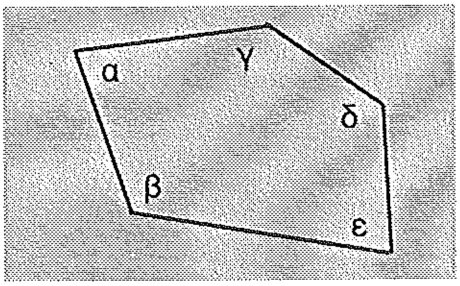
Λύση

Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 2,5 cm ως εξής: Γράφουμε την πλευρά ΒΓ = 2,5 cm και με κέντρα Β, Γ και ακτίνες 2,5 cm γράφουμε τους κύκλους που τέμνονται στο Α. Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τις γωνίες και βρίσκουμε ότι ....

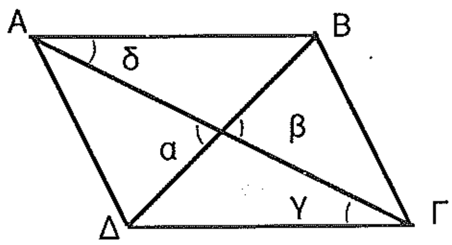


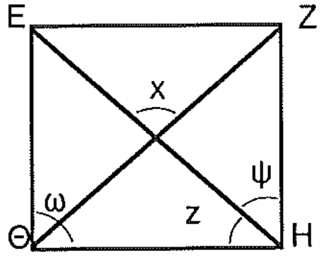
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να μετρήσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος.



2. Να μετρήσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες στα παρακάτω σχήματα.





3. Να σχεδιάσετε γωνίες:
α) 30° και 330°, β) 45° και 315°,
γ) 28° και 152°, δ) 15° και 75°.

4. Να φέρετε μία ευθεία xx' και από ένα σημείο της O να φέρετε την ημιευθεία Oz. Να μετρήσετε τις γωνίες

$\widehat{xOz}$ και $\widehat{x'Oz}$. Τι παρατηρείτε;

5. Να φέρετε μία ημιευθεία Ox και μία ημιευθεία Oz. Να μετρήσετε την κυρτή

γωνία $\widehat{xOz}$ και τη μη κυρτή γωνία $\widehat{xOz}$.

Τι παρατηρείτε;

6. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

$\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 20°$ και AB = 6 cm.

7. Να σχεδιάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με

AB = 1,5 cm, AΓ = 3 cm και $\hat{A} = 90°$.

8. Να κατασκευάσετε γωνία 80° και να φέρετε τη διχοτόμο της.

9. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά 5 cm. Να φέρετε τη διάμεσο ΑΔ και να μετρήσετε τις

γωνίες $\widehat{BA\Delta}$ και $\widehat{\Gamma A\Delta}$. Τι παρατηρείτε;

10. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με AB = AΓ = 3,5 cm και ΒΓ = 2,8 cm. Να μετρήσετε τις γωνίες του. Τι παρατηρείτε;

11. Σε ευθεία xx' να φέρετε μία κάθετο ψψ' σε ένα σημείο της O. Να πάρετε ένα σημείο A στην Ox έτσι ώστε OA = 4 cm, ένα σημείο B στην Ox' έτσι ώστε: OB = 6 cm, ένα σημείο Γ στην Oψ και ένα σημείο Δ στην Oψ'. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΑ και ΓΒ καθώς και τα ΑΔ και ΒΔ. Να μετρήσετε

γωνίες $\widehat{OA\Gamma}$, $\widehat{OB\Gamma}$, $\widehat{OA\Delta}$ και $\widehat{OB\Delta}$.

Τι παρατηρείτε;

6. 5 Εφεξής γωνίες

Θεωρία

Ερωτήσεις

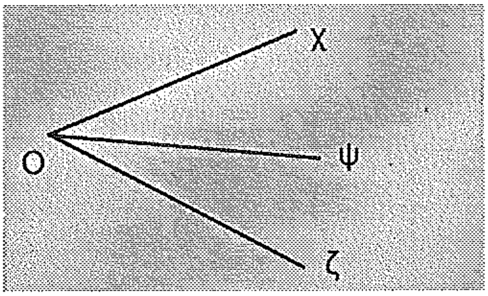
Απαντήσεις

1. Ποιες γωνίες ονομάζονται εφεξής;

1. Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο ονομάζονται **εφεξής γωνίες**. Παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα

ότι οι γωνίες $\widehat{x O \psi}$ και $\widehat{\psi O \zeta}$ έχουν την ίδια

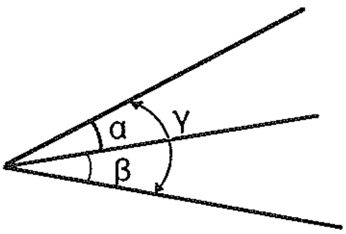
κορυφή Ο, μία κοινή πλευρά την Οψ και κανένα άλλο κοινό σημείο.



2. Τι ονομάζουμε άθροισμα δύο εφεξής γωνιών;

2. **Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών** ονομάζουμε τη γωνία που έχει πλευρές τις μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών και στο εσωτερικό της βρίσκεται η κοινή πλευρά τους.

Στο παρακάτω σχήμα, άθροισμα των εφεξής γωνιών $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι η γωνία $\hat{\gamma}$.



3. Για να προσθέσουμε δύο γωνίες είναι απαραίτητο να είναι εφεξής;

3. Για να προσθέσουμε δύο γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι εφεξής. Αρκεί να μετρήσουμε την $\hat{\alpha}$ και τη $\hat{\beta}$, να προσθέσουμε τα μέτρα τους και να κατασκευάσουμε την γωνία $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ που έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

6. 6 Παραπληρωματικές γωνίες

Θεωρία

Ερωτήσεις

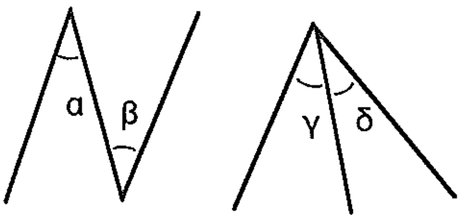
1. Ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;

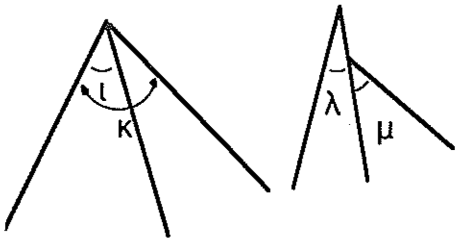
Απαντήσεις

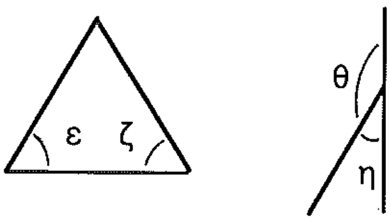
1. Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δυο γωνίες που έχουν άθροισμα 180°. Επειδή μία ευθεία γωνία είναι 180° έπεται ότι όταν δύο εφεξής γωνίες είναι παραπληρωματικές τότε σχηματίζουν ευθεία γωνία.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εξακριβώσετε αν τα παρακάτω ζεύγη γωνιών είναι εφεξής γωνίες.







Λύση

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δεν είναι εφεξής γιατί παρόλο που έχουν μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο δεν έχουν κοινή κορυφή.

Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ είναι εφεξής.

Οι γωνίες $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\zeta}$ δεν είναι εφεξής γιατί δεν έχουν κοινή κορυφή και έχουν κοινά σημεία.

Οι γωνίες $\hat{\eta}$ και $\hat{\theta}$ είναι εφεξής.

Οι γωνίες $\hat{\iota}$ και $\hat{\kappa}$ δεν είναι εφεξής γιατί ενώ έχουν κοινή κορυφή και μία κοινή πλευρά, έχουν κοινά σημεία.

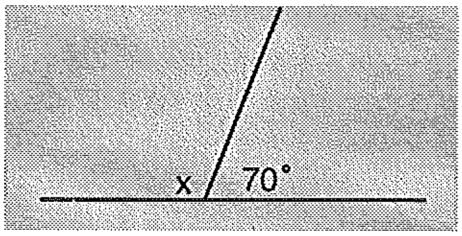
Οι γωνίες $\hat{\lambda}$ και $\hat{\mu}$ δεν είναι εφεξής γιατί δεν έχουν κοινή κορυφή.

2. Να βρείτε την παραπληρωματική μιας γωνίας 70°.

Λύση

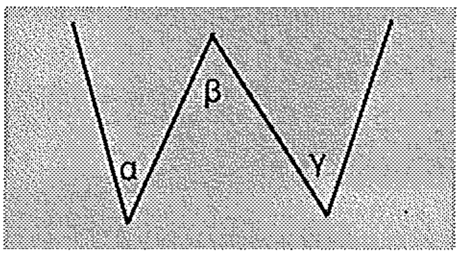
Η παραπληρωματική μιας γωνίας 70° είναι μια γωνία $\hat{x}$ τέτοια ώστε:

$\hat{x} + 70° = 180°$ ή $\hat{x} = 180° - 70°$ ή $\hat{x} = 110°$.



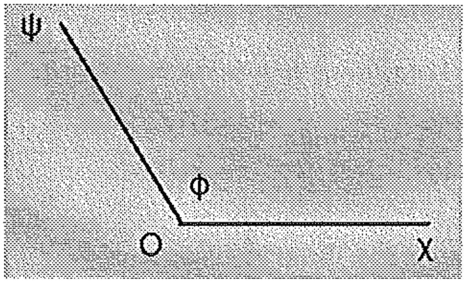
Η γεωμετρική κατασκευή της γίνεται όπως στο σχήμα. Δηλαδή παίρνουμε μια γωνία 70° και προεκτείνουμε τη μια πλευρά της. Η γωνία που σχηματίζεται από την προέκταση αυτή και τη δεύτερη πλευρά είναι η ζητούμενη γιατί σχηματίζει με την πρώτη ευθεία γωνία.

3. Να μετρήσετε τις γωνίες του σχήματος και να κατασκευάσετε το άθροισμά τους.

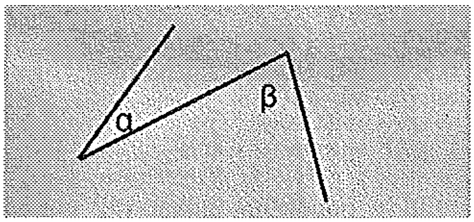


Λύση

Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι 40°, η $\hat{\beta}$ είναι 55° και η $\hat{\gamma}$ είναι 50°. Το άθροισμά τους είναι μια γωνία $\hat{\varphi} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 40° + 55° + 50° = 145°$. Παίρνουμε μια ημιευθεία Οχ και με το μοιρογνωμόνιο κατασκευάζουμε μία γωνία 145°. Αυτή η γωνία είναι το άθροισμα των $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.



4. Να μετρήσετε τις γωνίες του σχήματος και να κατασκευάσετε μία γωνία που να ισούται με τη διαφορά της μεγαλύτερης από τη μικρότερη.



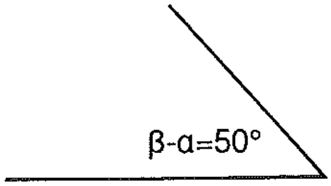
Λύση

Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι 28° και η γωνία $\hat{\beta}$ είναι 78°. Άρα μεγαλύτερη είναι η $\hat{\beta}$.

Η διαφορά τους θα είναι η γωνία

$\hat{\varphi} = \hat{\beta} - \hat{\alpha} = 78° - 28° = 50°$.

Με το μοιρογνωμόνιο κατασκευάζουμε μία γωνία 50° που θα ισούται με τη διαφορά $\hat{\beta} - \hat{\alpha}$.



5. Με ένα όργανο ακριβείας μετρήθηκε μία γωνία και βρέθηκε ότι είναι 78° 40' 35". Να υπολογίσετε την παραπληρωματική της.

Λύση

Η παραπληρωματική της θα είναι μια

γωνία $\hat{\varphi}$ τέτοια ώστε:

$\hat{\varphi} = 180° - (78°\ 40'\ 35'')$.

Κάνουμε την αφαίρεση.

$$\begin{array}{rrrr} & 180° & 0' & 0'' \\ - & 78° & 40' & 35'' \\ \hline \end{array}$$

Η αφαίρεση δεν γίνεται οπότε παίρνουμε μια μοίρα από τις 180° και τη μετατρέπουμε σε 59' και 60" και έχουμε:

$$\begin{array}{rrrr} & 179° & 59' & 60'' \\ - & 78° & 40' & 35'' \\ \hline & 101° & 19' & 25'' \end{array}$$

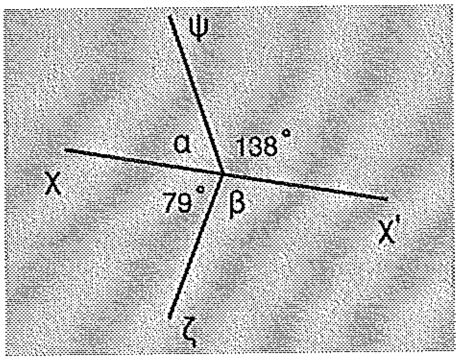
Άρα η παραπληρωματική της γωνίας 78° 40 ' και 35" είναι η γωνία 101° 19 ' 25".

6. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες, ώστε η μια να είναι τετραπλάσια της άλλης.

Λύση

Εφόσόν η μια είναι τετραπλάσια της άλλης, τότε αν αυτή είναι x μοίρες η άλλη θα είναι 4x μοίρες, και επειδή είναι παραπληρωματικές τότε:
$x + 4x = 180°$ ή $5x = 180°$ ή
$x = 180° : 5$ ή $x = 36°$.
Άρα η μία θα είναι 36° και η άλλη 144°.

7. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ του σχήματος, αν λάβετε υπόψη ότι χχ' είναι ευθεία.



Λύση

Η γωνία 138° και η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές γιατί σχηματίζουν ευθεία γωνία. Επομένως:

$\hat{\alpha} = 180° - 138°$ ή $\hat{\alpha} = 42°$.
Για τον ίδιο λόγο $\hat{\beta} = 180° - 79°$ ή
$\hat{\beta} = 101°$.

8.Να κατασκευάσετε δύο εφεξής γωνίες $\widehat{\chi O\psi} = 48°$ και $\widehat{\psi O\zeta} = 34°$ και να σχεδιάσετε τις διχοτόμους τους Οχ' και Οz '. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\chi' O z'}$.

Λύση

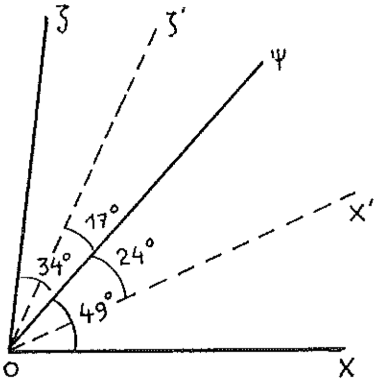
Κατασκευάζουμε τις γωνίες και παίρνουμε τις διχοτόμους τους όπως στο σχήμα. Η διχοτόμος της μιας γωνίας έχει την ιδιότητα να χωρίζει μια γωνία σε δυο ίσα μέρη. Άρα:

$\widehat{\chi O\chi'} = \widehat{\chi' O\psi} = 24°$ και $\widehat{\psi O z'} = \widehat{z' O z} = 17°$.

Επομένως:

$\widehat{\chi' O z'} = \widehat{\chi' O\psi} + \widehat{\psi O z'} = 24° + 17° = 41°$

Άρα η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι είναι 41°.



9. Να κατασκευάσετε δύο γωνίες $\widehat{\chi O\chi'} = 50°$ και $\widehat{\psi O\psi'} = 50°$ με κοινή κορυφή το O , έτσι ώστε η Οχ και Οψ να είναι αντικείμενες ημιευθείες. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\chi' O\psi'}$.

Λύση

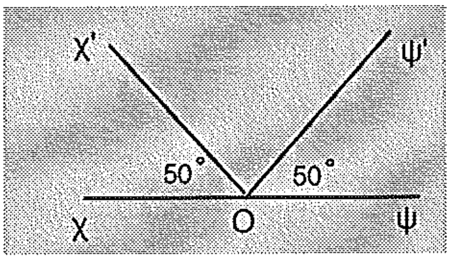
Εφόσον η Οχ και η Οψ είναι αντικείμενες ημιευθείες η γωνία $\widehat{\chi O\psi}$ είναι ευθεία γωνία και επειδή οι γωνίες $\widehat{\chi O\chi'}$, $\widehat{\chi' O\psi'}$ και $\widehat{\psi' O\psi}$ είναι διαδοχικές και σχηματίζουν ευθεία γωνία, έχουμε:

$\widehat{\chi O\chi'} + \widehat{\chi' O\psi'} + \widehat{\psi' O\psi} = 180°$ ή

$50° + \widehat{\chi' O\psi'} + 50° = 180°$

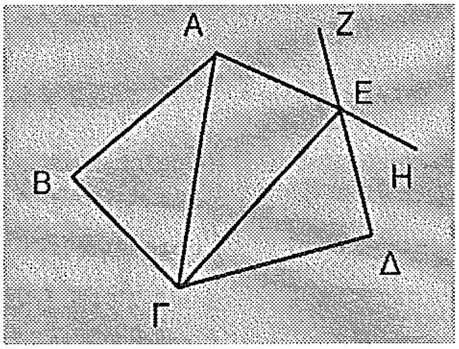
$100° + \widehat{\chi' O\psi'} = 180°$ ή

$\widehat{\chi' O\psi'} = 180° - 100°$ ή $\widehat{\chi' O\psi'} = 80°$.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Στο παρακάτω σχήμα ποιες είναι οι εφεξής γωνίες;



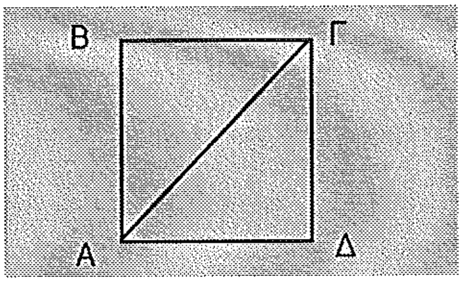
Λύση

Τα παρακάτω ζεύγη γωνιών είναι εφεξής γωνίες:

$(\widehat{ZEA}, \widehat{ZEH})$,$(\widehat{ZEH}, \widehat{HE\Delta})$, $(\widehat{HE\Delta}, \widehat{\Delta E\Gamma})$...

2. Να κατασκευάσετε τετράγωνο ΑΒΓΔ και να φέρετε τη διαγώνιο του ΑΓ. Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Delta A\Gamma}$. Στη συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των γωνιών $\widehat{B\Gamma A}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$.

Λύση

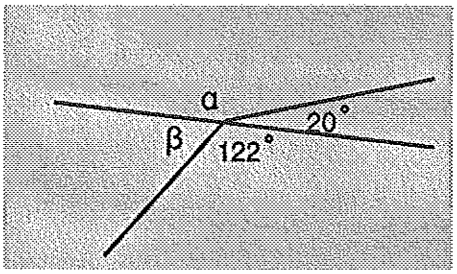


Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$\widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{BA\Delta} = 90^\circ$.

Για το δεύτερο είναι : $\widehat{B\Gamma A} + \widehat{A\Gamma\Delta} = ...$

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του σχήματος.



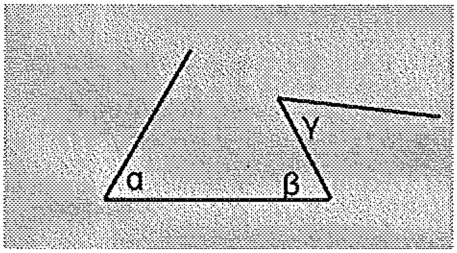
Λύση

Η γωνία 20° και η γωνία $\hat{\alpha}$ σχηματίζουν

ευθεία γωνία, άρα είναι παραπληρωματικές. Συνεπώς:

$\hat{\alpha} + 20^\circ = 180^\circ$ ...

4. Να μετρήσετε τις γωνίες του σχήματος και να κατασκευάσετε το άθροισμά τους.



Λύση

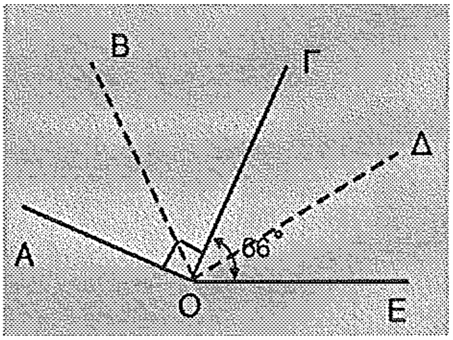
Το άθροισμα των γωνιών είναι η γωνία:

$\hat{\varphi} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ οπότε μετράμε τις γωνίες

και είναι $\hat{\alpha} = 61^\circ$ ...

5. Να κατασκευάσετε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες 66° και 90° και να γράψετε τις διχοτόμους τους. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι.

Λύση



Η ΟΒ χωρίζει την $\widehat{AO\Gamma}$ σε δύο ίσα μέρη ,

άρα : $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = 45^\circ$ και η ΟΔ χωρίζει

την $\widehat{\Gamma OE}$ σε δύο ίσα μέρη , άρα :

$\widehat{EO\Delta} = \widehat{\Delta O\Gamma} = 33^\circ$.

Οπότε : $\widehat{BO\Delta} = ...$

6. Να βρείτε δυο παραπληρωματικές γωνίες, έτσι ώστε το τριπλάσιο της μιας να ισούται με την άλλη σύν 60°.

Λύση

Έστω x μοίρες η μια από τις δυο γωνίες, οπότε η άλλη είναι 180° - x.
Άρα: $3x = (180^\circ - x) + 60^\circ$ δηλαδή ....

7. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες που έχουν διαφορά 30°.

Λύση

Αν x μοίρες η μεγαλύτερη, τότε η άλλη είναι $180^\circ - x$ οπότε:
$x = 180^\circ - x + 30^\circ$ ...

8. Μια γωνία είναι 36° 11' 43". Να βρείτε την παραπληρωματική της.

Λύση

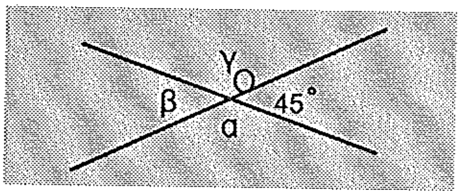
Θα αφαιρέσουμε τη γωνία 36° 11' 43" από τις 180° για να βρούμε την παραπληρωματική της.

Οπότε: 180° 0' 0"

- 36° 11' 43"

....

9. Δυο ευθείες που τέμνονται στο Ο όπως στο σχήμα σχηματίζουν γωνία 45°. Να βρείτε τις υπόλοιπες γωνίες. Τι παρατηρείτε;



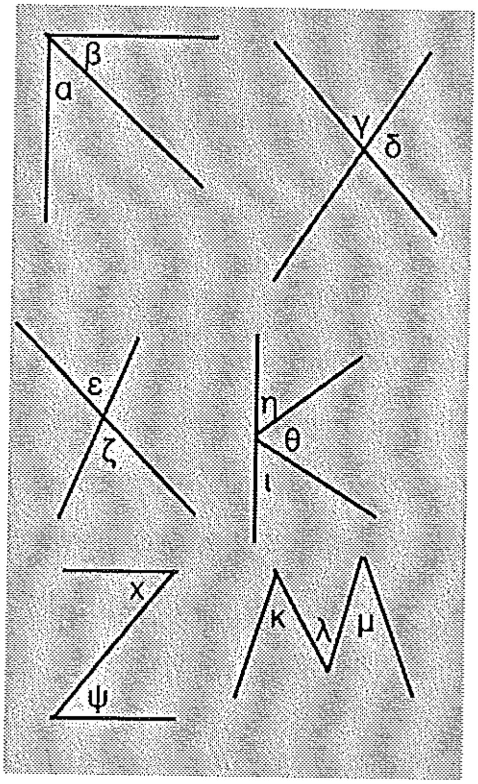
Λύση

Η γωνία $\widehat{\alpha}$ είναι εφεξής της γωνίας 45°

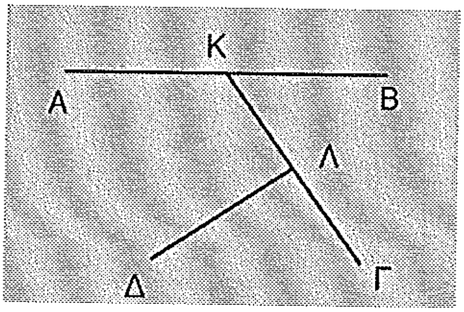
και σχηματίζουν ευθεία γωνία. Άρα είναι παραπληρωματικές ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να εξακριβώσετε αν υπάρχουν εφεξής γωνίες στα παρακάτω σχήματα και ποιες είναι αυτές;



2. Να βρείτε στο παρακάτω σχήμα ποιες γωνίες είναι παραπληρωματικές;



3. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και να φέρετε τη διαγώνιο ΒΔ να βρείτε

το άθροισμα των γωνιών $\widehat{ΑΒΔ}$ και $\widehat{ΔΒΓ}$.

4. Να κατασκευάσετε δύο εφεξής γωνίες $\widehat{xOψ} = 50°$ και $\widehat{ψOz} = 66°$. Να φέρετε τις διχοτόμους τους και να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι.

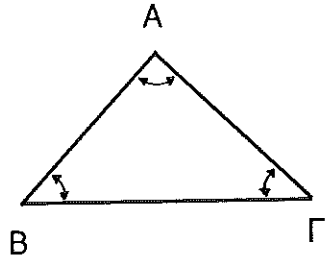
5. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες ώστε:

α) Η μια να είναι το μισό της άλλης.

β) Η μια να ισούται με την άλλη συν 90°
γ) Το διπλάσιο της μιας να ισούται με την άλλη συν 60°.

6. Δυο ευθείες χχ' και ψψ' τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία χ'Οψ είναι 25°, να βρεθούν οι υπόλοιπες γωνίες.

7. Να μετρήσετε τις γωνίες του σχήματος και να κατασκευάσετε το άθροισμά τους.



8. Να δείξετε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι ορθή.

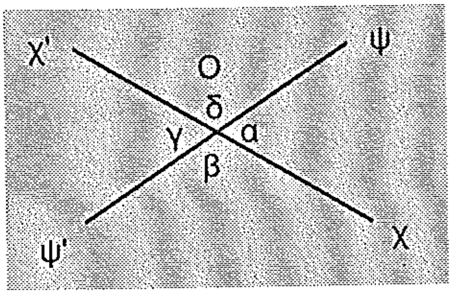
9. Να δείξετε ότι από δυο παραπληρωματικές γωνίες, όχι ορθές, η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

6. 7 Κατακορυφήν γωνίες

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιες γωνίες λέγονται κατακορυφήν γωνίες;



Απαντήσεις

1. Δυο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν γωνίες**, όταν οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες χχ' και ψψ' τέμνονται σ' ένα σημείο Ο και σχηματίζουν τέσσερεις διαδοχικές γωνίες

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ που έχουν κοινή κορυφή το σημείο Ο. Αν παρατηρήσουμε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ βλέπουμε ότι οι πλευρές κάθε μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.
Όμοια συμβαίνει και για τις γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$.
Είναι φανερό ότι οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν γωνίες.

2. Τι γνωρίζετε για τις κατακορυφήν γωνίες;

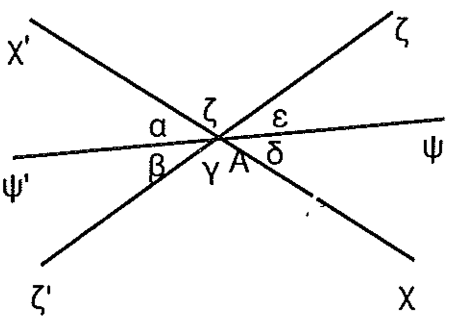
2. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. Αυτό το διαπιστώνουμε ως εξής:

Αν αποτυπώσουμε την γωνία $\hat{\alpha}$ του προηγούμενου σχήματος σε διαφανές χαρτί και την τοποθετήσουμε πάνω στην κατακορυφήν της την $\hat{\gamma}$ θα δούμε ότι οι δύο γωνίες ταυτίζονται. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και για τις γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$.

Η σύγκριση των κατακορυφήν γωνιών μπορεί να γίνει και με το μοιρογνωμόνιο.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γράψετε τρεις ευθείες που να περνούν από το σημείο Α και να σημειώσετε όλα τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών που σχηματίζονται.



Λύση

Στο σχήμα οι πλευρές της γωνίας $\hat{\alpha}$ είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της γωνίας $\hat{\delta}$, άρα οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν γωνίες.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα υπόλοιπα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών είναι τα:

$\hat{\beta}$ και $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\zeta}$

2. Δυο ευθείες τέμνονται στο σημείο Ο ώστε η μια από τις τέσσερις γωνίες να είναι τα 3/5 της ορθής γωνίας. Να υπολογίσετε κάθε μία από τις τρεις άλλες γωνίες (σε μοίρες).

Λύση

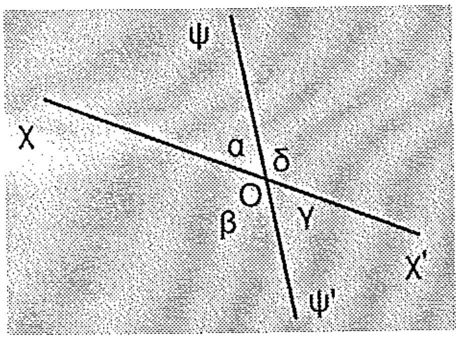
Τα 3/5 της ορθής γωνίας είναι:

$$\frac{3}{5}\cdot 90^\circ = \frac{3\cdot 90^\circ}{5} = \frac{270^\circ}{5} = 54^\circ$$

Αν λοιπόν η γωνία $\hat{\alpha} = 54^\circ$ τότε και η κατακορυφήν της $\hat{\gamma}$ είναι ίση με 54°, δηλαδή $\hat{\gamma} = 54^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές άρα : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$ ή $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha}$ δηλαδή $\hat{\beta} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$.

Η $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν της $\hat{\beta}$, άρα $\hat{\delta} = 126^\circ$. Επομένως : $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 54^\circ$ και $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 126^\circ$.



3. Να χαράξετε δυο κατακορυφήν γωνίες και να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι τους σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.

Λύση

Φέρουμε με τον χάρακα δύο ευθείες χχ' και ψψ', οι οποίες τέμνονται στο Ο. Φέρουμε τις ημιευθείες Οz και Οz ', ώστε να διχοτομούν τις κατακορυφήν γωνίες

$\widehat{\chi O\psi}$ και $\widehat{\chi' O\psi'}$ αντίστοιχα . Θα δείξουμε

ότι η γωνία $\widehat{zOz'}$ είναι μια ευθεία γωνία,

δηλαδή : $\widehat{zOz'} = 180°$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι:

$\widehat{zOz'} = \widehat{zO\chi} + \widehat{\chi O\psi'} + \widehat{\psi' Oz'}$ και ότι

$\widehat{\psi O\psi'} = 180°$ (γιατί η ψψ' είναι ευθεία).

Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι κατακορυφήν

γωνίες $\widehat{\chi O\psi}$ και $\widehat{\chi' O\psi'}$ είναι ίσες , άρα και

τα μισά των γωνιών αυτών θα είναι ίσα,

δηλαδή $\widehat{zO\psi} = \widehat{\psi' Oz'}$. Ύστερα από τα

παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι:

$\widehat{zOz'} = \widehat{zO\chi} + \widehat{\chi O\psi'} + \widehat{\psi' Oz'}$ ή

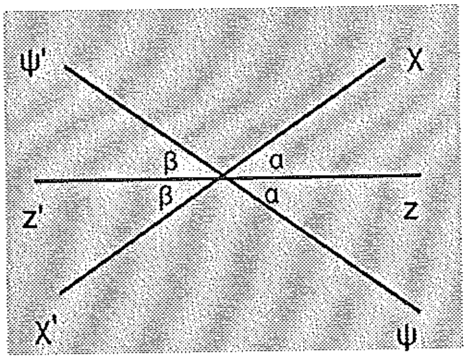
$\widehat{zOz'} = \widehat{zO\chi} + \widehat{\chi O\psi'} + \widehat{zO\psi}$

(γιατί $\widehat{zO\psi} = \widehat{\psi' Oz'}$)

Όμως: $\widehat{zO\chi} + \widehat{\chi O\psi'} + \widehat{zO\psi} = \widehat{\psi O\psi'} = 180°$.

Άρα και $\widehat{zOz'} = 180°$.

Επομένως οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών σχηματίζουν μία ευθεία

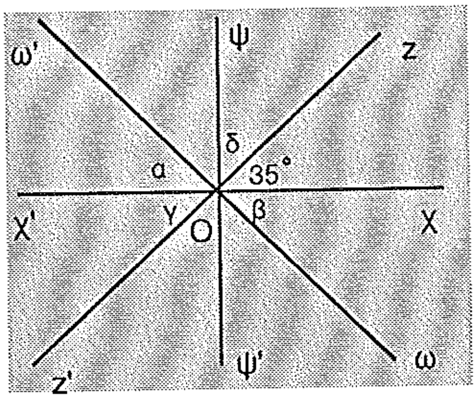


γωνία.

4. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία χ'χ είναι κάθετη στην ευθεία ψψ' και η ευθεία z'z είναι κάθετη στην ευθεία ωω'.

Αν η $\widehat{\chi Oz} = 35°$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\alpha}$. Ποια άλλη γωνία είναι ίση με την $\hat{\alpha}$;

Λύση



Παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{\chi Oz}$ και η γωνία $\widehat{\chi' Oz'}$ είναι κατακορυφήν γωνιες .

Άρα $\widehat{\chi Oz} = \widehat{\chi' Oz'} = \hat{\gamma} = 35°$.

Οι ευθείες zz' και ωω' είναι κάθετες οπότε

$\widehat{z'O\omega'} = 90°$ ή $\widehat{z'O\chi'} + \widehat{\chi' O\omega'} = 90°$ ή

$\hat{\gamma} + \hat{\alpha} = 90°$ ή $35° + \hat{\alpha} = 90°$ ή

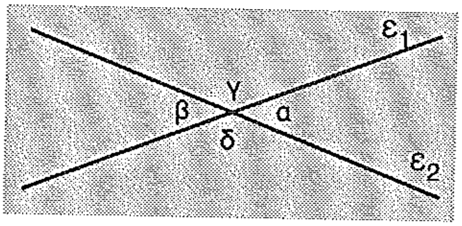
$\hat{\alpha} = 90° - 35°$ ή $\hat{\alpha} = 55°$.

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν

γωνίες, άρα : $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 55°$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος αν $\hat{\alpha} = 25°\ 45'\ 30''$.



Λύση

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν γωνίες, άρα : $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 25°\ 45'\ 30''$.

Παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ σχηματίζουν μια ευθεία γωνία άρα

$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 180°$ ή $\hat{\gamma} = 180° - \hat{\alpha}$ ή

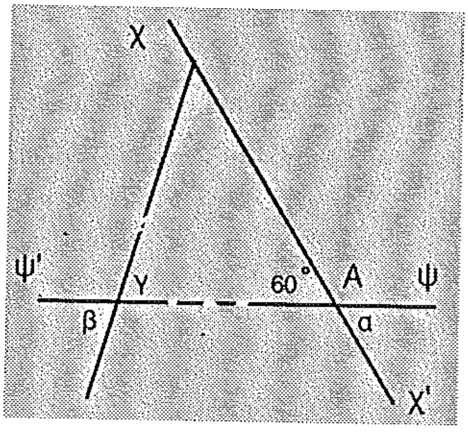
$\hat{\gamma} = 180° - 25°\ 45'\ 30''$

Κάνουμε την αφαίρεση.

$$\begin{array}{r} 180°\ \ 0'\ \ 0'' \\ -\,25°\ 45'\ 30'' \\ \hline \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' \\ -\ \ 25°\ 45'\ 30'' \\ \hline \dots\ \ \dots\ \ 30'' \end{array}$$

κ.λπ.

2. Αν η γωνία $\hat{\beta} = \frac{7}{5}\hat{\alpha}$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\gamma}$ του παρακάτω σχήματος.



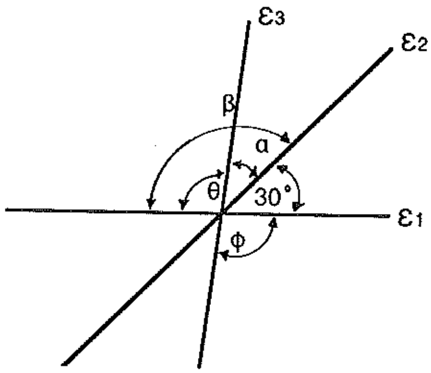
Λύση

Επειδή οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\widehat{\chi A \psi'}$ είναι κατακορυφήν, θα είναι : $\hat{\alpha} = \widehat{\chi A \psi'} = 60°$.

Από την ισότητα $\hat{\beta} = \frac{7}{5}\hat{\alpha}$ υπολογίζουμε ότι $\hat{\beta} = \frac{7}{5}60° = \frac{420°}{5} = 84°$ ....κ.λπ.

3. Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3, όπως στο σχήμα.

Αν $\hat{\alpha} = \frac{1}{3}\hat{\beta}$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\varphi}$.



Λύση

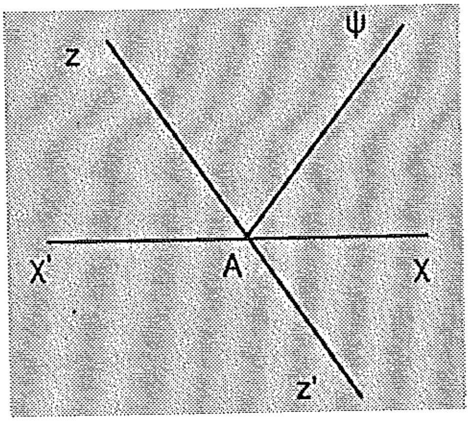
Παρατηρούμε ότι:

$\hat{\beta} + 30° = 180°$ (ευθεία γωνία) ή

$\hat{\beta} = 180° - 30° = 150°$. Εύκολα τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha} = \dots$

4. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\widehat{\chi A \psi}$ και $\widehat{\psi A \chi'}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Αν $\widehat{\psi A \chi'} = 134°$ και η ημιευθεία Αz είναι η διχοτόμος της. Να υπο-

λογίσετε τη γωνία $\widehat{z'A\psi}$, όπου Az' είναι αντικείμενη ημιευθεία της Az.



Λύση

Επειδή οι γωνίες $\widehat{xA\psi}$ και $\widehat{\psi Ax'}$ είναι παραπληρωματικές θα είναι:

$\widehat{xA\psi} + \widehat{\psi Ax'} = 180°$ ή $\widehat{xA\psi} = 180° - \widehat{\psi Ax'}$

ή $\widehat{xA\psi} = 180° - 134° = 46°$.

Η Az είναι διχοτόμος της $\widehat{\psi Ax'}$ άρα:

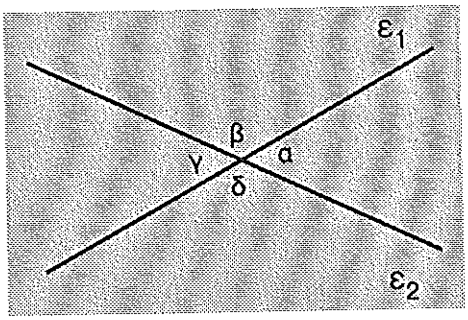
$$\widehat{zAx'} = \frac{\widehat{\psi Ax'}}{2} = \frac{134°}{2} = 67°.$$

Οι πλευρές της $\widehat{xAz'}$ είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της $\widehat{zAx'}$, άρα ειναι κατακορυφήν γωνίες. Συνεπώς:

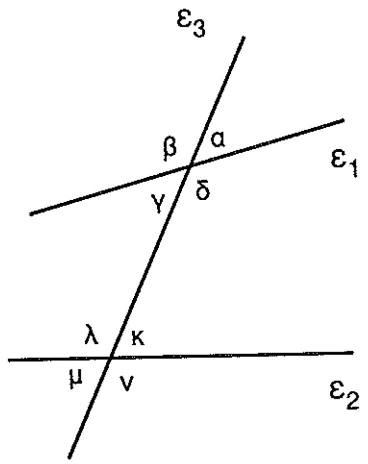
$\widehat{zAx'} = \widehat{xAz'} = \ldots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

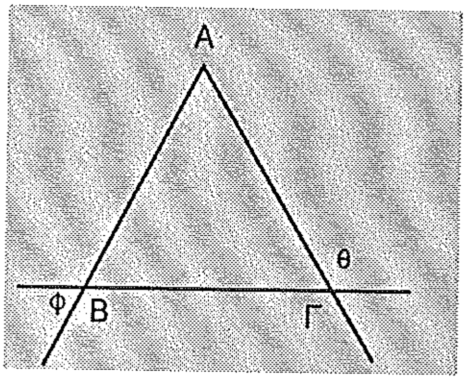
1. Οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 σχηματίζουν τέσσερις γωνίες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \widehat{\delta}$. Αν $\widehat{\alpha} = 36°\ 7'\ 46''$, να υπολογιστούν οι υπόλοιπες τρεις.



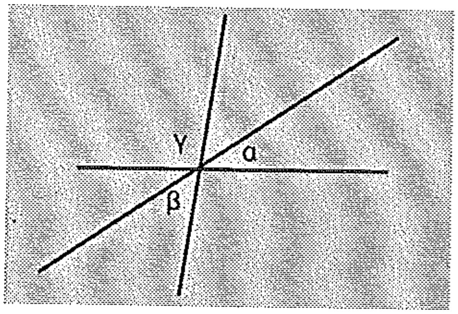
2. Να γράψετε όλα τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.



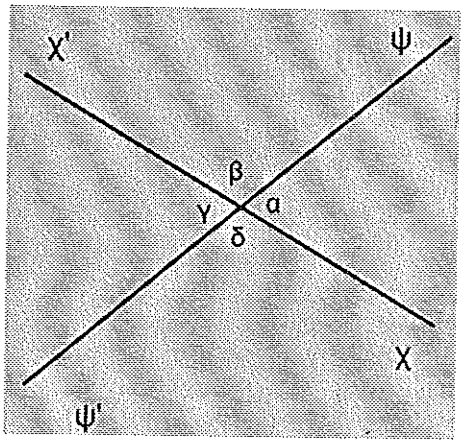
3. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Αν $\widehat{\varphi} = 48°$, να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{\theta}$.



4. Αν $\widehat{\alpha} = 29^\circ\ 48'\ 59''$ και $\widehat{\beta} = 53^\circ$ να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{\gamma}$ του παρακάτω σχήματος.



5. Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες χχ' και ψψ'. Αν η γωνία $\widehat{\beta}$ είναι τριπλάσια από την γωνία $\widehat{\alpha}$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\gamma}$ και $\widehat{\delta}$, καθώς και το άθροισμα $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$.



6. ε Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία

Θεωρία

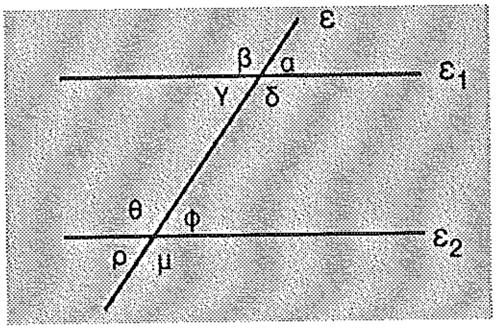
Ερωτήσεις

1. Όταν δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από μια άλλη ευθεία ε σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Ποιες από αυτές λέγονται εντός και ποιες εκτός;

Απαντήσεις

1. Όσες γωνίες βρίσκονται μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών ε_1, ε_2, λέγονται **εντός**, ενώ όσες βρίσκονται έξω από τις δυο παράλληλες λέγονται **εκτός**.

Π.χ. οι γωνίες $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\delta}$, $\widehat{\varphi}$ και $\widehat{\theta}$ βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2, γι' αυτό και λέγονται εντός, ενώ οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\rho}$ και $\hat{\mu}$ βρίσκονται έξω από τις δύο παράλληλες γι' αυτό λέγονται εκτός.



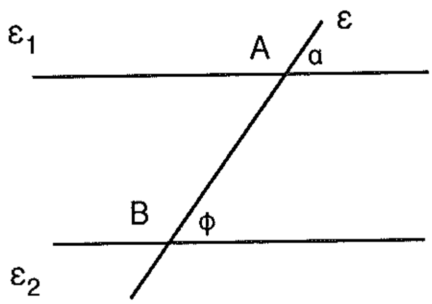
2. Ποιες από τις παραπάνω οκτώ γωνίες λέγονται επί τα αυτά και ποιες λέγονται εναλλάξ;

2. Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε λέγονται **επί τα αυτά**, ενώ οι γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ε λέγονται **εναλλάξ.**

3. Στο παρακάτω σχήμα βρείτε δυο γωνίες που να είναι εντός εκτός και επί τα αυτά. Ποια σχέση τις συνδέει;

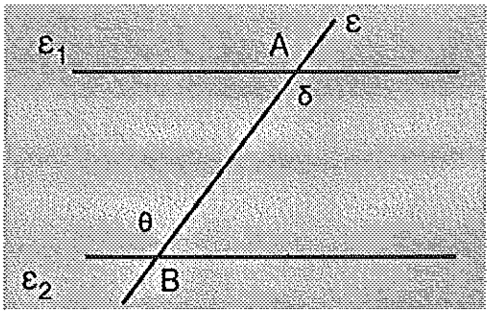
3. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε στα σημεία Α και Β.

Οι γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\alpha}$ λόγω της θέσεώς τους λέγονται γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά. **Δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.**



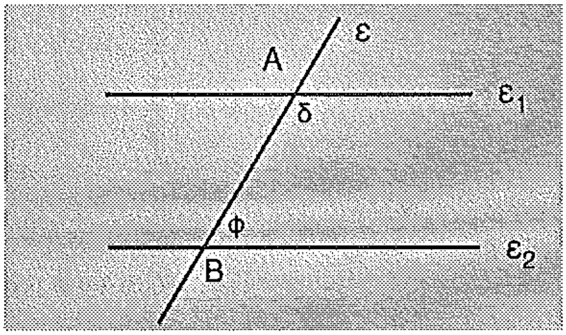
4. Στο παρακάτω σχήμα βρείτε δυο γωνίες που να είναι εντός εναλλάξ. Ποια σχέση τις συνδέει;

4. Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\theta}$ λόγω της θέσεώς τους λέγονται γωνίες εντός εναλλάξ. **Δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.**



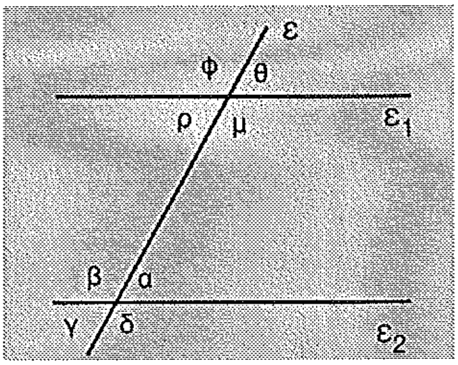
5. Στο παρακάτω σχήμα βρείτε δυο γωνίες που να είναι εντός και επί τα αυτά. Ποια σχέση τις συνδέει;

5. Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\varphi}$ λόγω της θέσεώς τους λέγονται γωνίες εντός και επί τα αυτά.
Δυο γωνίες εντός και επί τα αυτά είναι παραπληρωματικές, δηλαδή έχουν άθροισμα 180°.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από την ε και σχηματίζουν γωνία $\hat{\theta}=57^\circ$. Να βρεθούν οι υπόλοιπες γωνίες του σχήματος.



Λύση

Παρατηρούμε ότι $\hat{\theta} = \hat{\rho}$ ως κατακορυφήν γωνίες, άρα : $\hat{\rho} = 57°$.

Επειδή $\hat{\theta} + \hat{\varphi} = 180°$ ή $57° + \hat{\varphi} = 180°$ έχουμε $\hat{\varphi} = 180° - 57° = 123°$.

Επίσης $\hat{\varphi} = \hat{\mu}$ ως κατακορυφήν.

Άρα : $\hat{\mu} = 123°$.

Ακόμη:

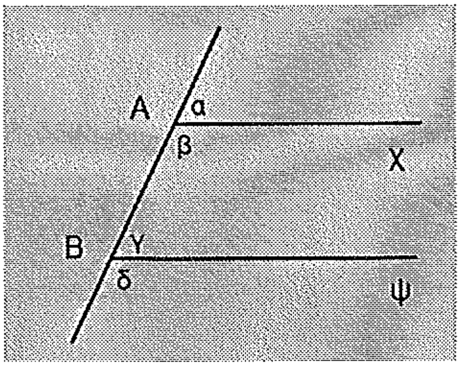
$\hat{\theta} = \hat{\alpha} = 57°$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

$\hat{\mu} = \hat{\delta} = 123°$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

$\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 57°$ ως κατακορυφήν

$\hat{\beta} = \hat{\delta} = 123°$ ως κατακορυφήν

2. Οι ημιευθείες Αχ και Βψ είναι παράλληλες. Αν $\hat{\alpha} = 63°$, να βρεθούν οι υπόλοιπες γωνίες του σχήματος.



Λύση

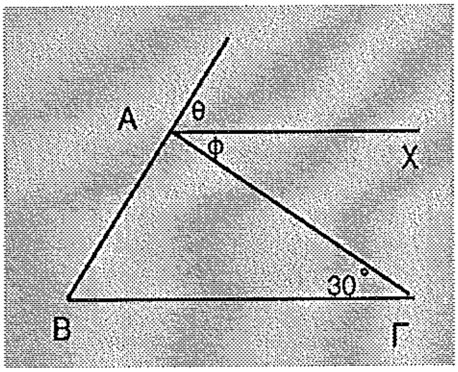
Από το παραπάνω σχήμα έχουμε ότι:

$\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\gamma} = 63°$.

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές άρα $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$ ή $63° + \hat{\beta} = 180°$ οπότε $\hat{\beta} = 180° - 63° = 117°$.

$\hat{\beta} = \hat{\delta} = 117°$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

3 . Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 30°$. Αν η ημιευθεία Αχ είναι παράλληλη με πλευρά ΒΓ και $\hat{B} = \frac{3}{2}\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε την γωνία $\hat{\theta} + \hat{\varphi}$.



Λύση

Επειδή $\hat{B} = \frac{3}{2}\hat{\Gamma}$, έχουμε :

$\hat{B} = \frac{3}{2} \cdot 30° = \frac{90°}{2} = 45°$.

Παρατηρούμε ότι : $\hat{B} = \hat{\theta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα : $\hat{\theta} = 45°$.

Ακόμη $\hat{\Gamma} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ, άρα $\hat{\varphi} = 30°$.

Επομένως $\hat{\theta} + \hat{\varphi} = 45° + 30° = 75°$.

4. Να σχεδιάσετε δυο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 οι οποίες να τέμνονται από δυο άλλες παράλληλες ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι : $\hat{\varphi} = \hat{\theta}$ και $\hat{\rho} = \hat{\mu}$.

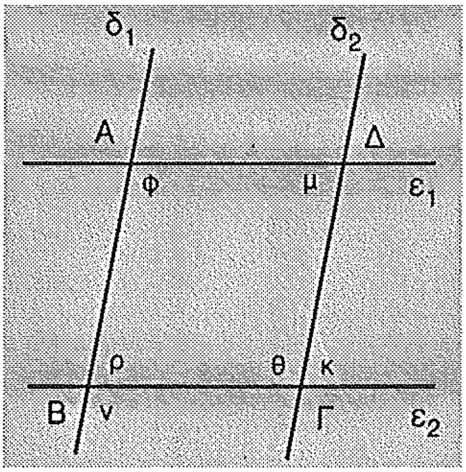
Λύση

Είναι $\hat{\varphi} = \hat{\nu}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, $\hat{\nu} = \hat{\theta}$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα $\hat{\varphi} = \hat{\theta}$. Όμοια :

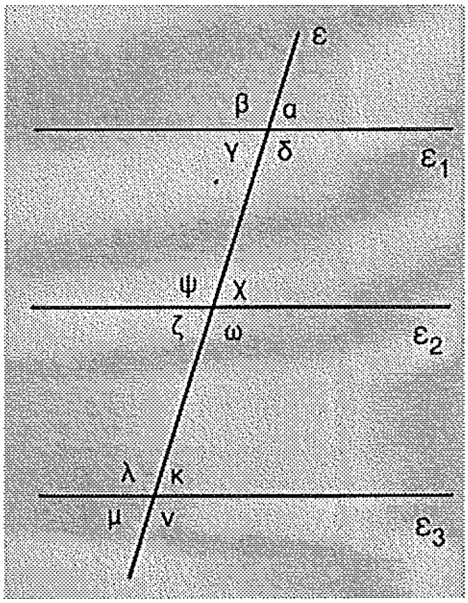
$\hat{\rho} = \hat{\kappa}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά,

$\hat{\kappa} = \hat{\mu}$ ως εντός εναλλάξ. Άρα $\hat{\rho} = \hat{\mu}$.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, και ε_3 οι οποίες τέμνονται από την ευθεία ε. Να σημειώσετε όλα τα ζεύγη:
α) των εντός εναλλάξ γωνιών.
β) των εντός εκτός και επί τα αυτά γωνιών.
γ) των εντός και επί τα αυτά γωνιών.



Λύση

α) Τα ζεύγη των εντός εναλλάξ γωνιών είναι:

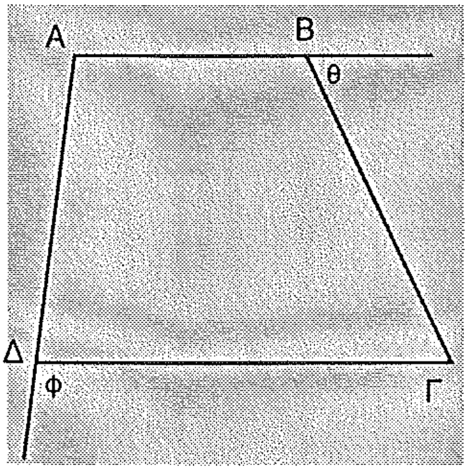
$\hat{\gamma}$ και $\hat{\chi}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\kappa}$, $\hat{\delta}$ και $\hat{\psi}$,
$\hat{\delta}$ και $\hat{\lambda}$, $\hat{\zeta}$ και $\hat{\kappa}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\lambda}$,

β) Τα ζεύγη των εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνιών είναι:

$\hat{\alpha}$ και $\hat{\chi}$, $\hat{\alpha}$ και $\hat{\kappa}$, κλπ.....

2. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις πλευρές του ΑΒ και ΓΔ παράλληλες.

Αν $\widehat{\varphi} = 110°$ και $\widehat{\theta} = 60°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\Delta}$.



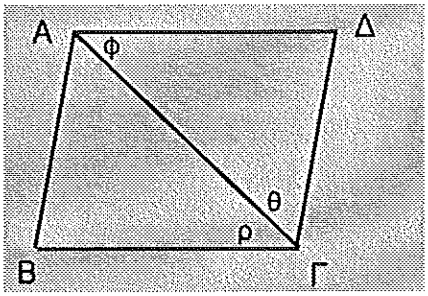
Λύση

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\varphi}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\widehat{A} = \widehat{\varphi} = 110°$.
Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, άρα $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180°$ ή
$110° + \widehat{\Delta} = 180°$, οπότε
$\widehat{\Delta} = 180° - 110° = 70°$.
Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\theta}$ είναι ...

3. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

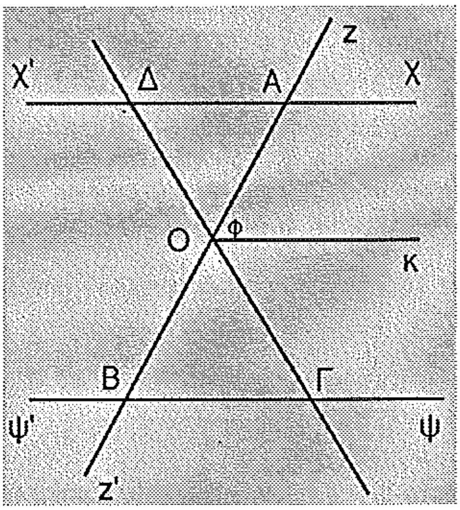
Αν $\widehat{\varphi} = 36°$ και $\widehat{\theta} = 89°$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\rho}$ και $\widehat{B}$.

Λύση



Οι γωνίες $\widehat{\rho}$ και $\widehat{\varphi}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ, (η πλευρά ΑΔ είναι παράλληλη με την ΒΓ). Άρα $\widehat{\rho} = 36°$.
Παρατηρούμε ότι η γωνία $\widehat{B}$ και η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, άρα ...

4. Αν οι ευθείες χχ', ψψ' και η ημιευθεία ΟΚ είναι παράλληλες, να βρεθούν όλες οι γωνίες του σχήματος οι οποίες είναι ίσες με την $\widehat{\varphi}$.



Λύση

Έχουμε $\widehat{\varphi} = \widehat{\chi A z}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά, $\widehat{\varphi} = \widehat{\chi' A z'}$ ως εντός εναλλάξ.
(Θα μπορούσαμε να γράψουμε $\widehat{\chi A z} = \widehat{\chi' A z'}$ ως κατακορυφήν άρα και $\widehat{\varphi} = \widehat{\chi' A z'}$).
Επίσης $\widehat{\varphi} = \widehat{zB\psi}$ ως ...

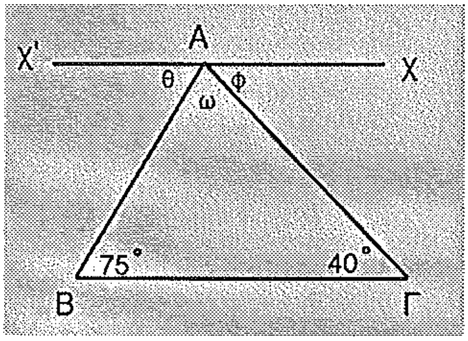
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Αν η ευθεία χχ' είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες $\widehat{\varphi}$ και $\widehat{\theta}$.

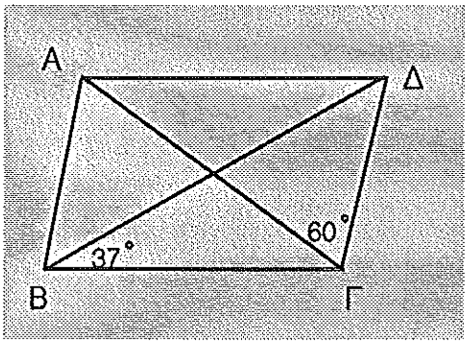
β) το άθροισμα $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} + \widehat{\theta}$.

Τι παρατηρείτε;

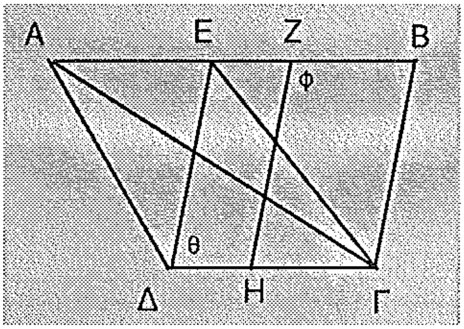


2. Αν οι απέναντι πλευρές ΑΒ, ΓΔ και ΑΔ, ΒΓ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις γωνίες

$\widehat{ΒΑΓ}$ και $\widehat{ΑΔΒ}$.

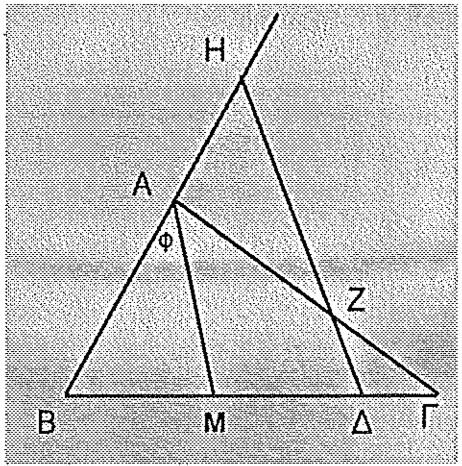


3. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η ΑΒ είναι παράλληλη με τη ΓΔ. Αν η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΖΗ. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{\theta}$ και $\widehat{\varphi}$ είναι παραπληρωματικές

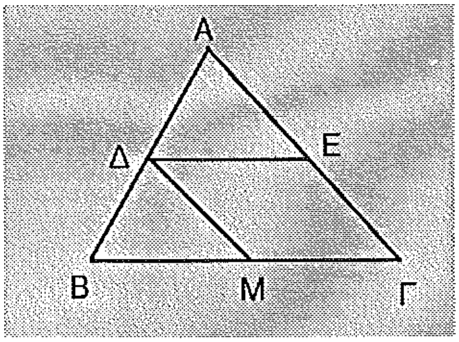


4. Αν ΑΜ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$

του τριγώνου ΑΒΓ και η ΔΗ είναι παράλληλη στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΗΖ είναι ισοσκελές.

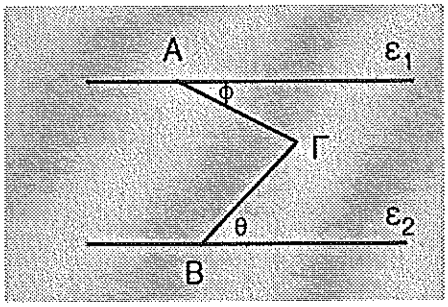


5. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και το ΔΜ είναι παράλληλο με την πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΒΜ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.



6. Στο επόμενο σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και $\hat{\varphi} = 28°$, $\hat{\theta} = 63°$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΑΓΒ}$.

(Υπόδειξη: Από το σημείο Γ να φέρετε παράλληλη ευθεία προς τις ε_1, ε_2).



6. 9 Άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με τι ισούται το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου;

Απαντήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες δηλαδή 180°.

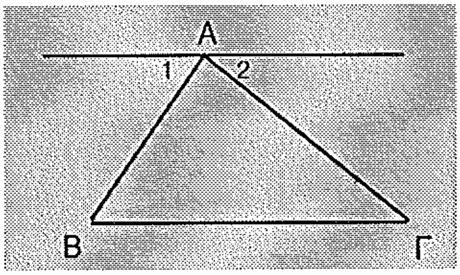
Πράγματι στο παρακάτω σχήμα αν φέρουμε την ευθεία ε που διέρχεται από το Α, παράλληλη προς την ΒΓ, τότε:

$\hat{B} = \hat{A}_1$ και $\hat{Γ} = \hat{A}_2$ σαν εντός εναλλάξ.

Όμως από το σχήμα είναι:

$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180°$ οπότε αν στη θέση των $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ βάλουμε τις ίσες τους $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα θα έχουμε:

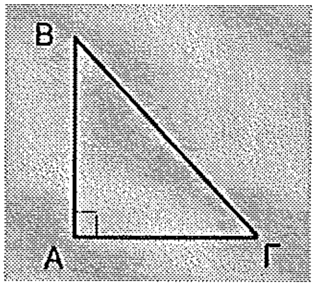
$\hat{B} + \hat{A} + \hat{Γ} = 180°$.



2. Πότε ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο;

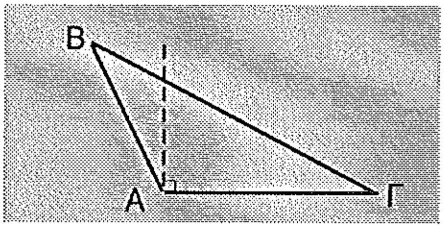
2. Ένα τρίγωνο λέγεται **ορθογώνιο** όταν μία γωνία του είναι ορθή.
Π.χ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α γιατί:

$\hat{A} = 90°$



3. Πότε ένα τρίγωνο λέγεται αμβλυγώνιο;

3. Ένα τρίγωνο λέγεται **αμβλυγώνιο** όταν μια γωνία του είναι αμβλεία.



Π.χ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο

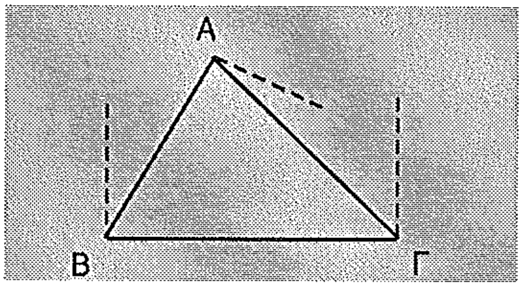
γιατί η γωνία $\hat{A}$ είναι αμβλεία, δηλαδή

μεγαλύτερη από μια ορθή (90°).

4. Πότε ένα τρίγωνο λέγεται οξυγώνιο;

4. Ένα τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** όταν και οι τρεις γωνίες του είναι οξείες.
Π.χ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο γιατί κάθε μία από τις τρεις γωνίες του

$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες, δηλαδή μικρότερες κάθε μια από την ορθή.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνετε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Γ. Στη συνέχεια να γράψετε την ημιευθεία Γψ, η οποία είναι παράλληλη με την πλευρά ΑΒ. Με τη βοήθεια αυτών των βοηθητικών γραμμών, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες (180°).

Λύση

Φέρουμε την ημιευθεία Γχ αντικείμενη της ΓΒ και την ημιευθεία Γψ παράλληλη στην πλευρά ΑΒ.

Τότε : $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ και

$\widehat{B} = \widehat{\theta}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

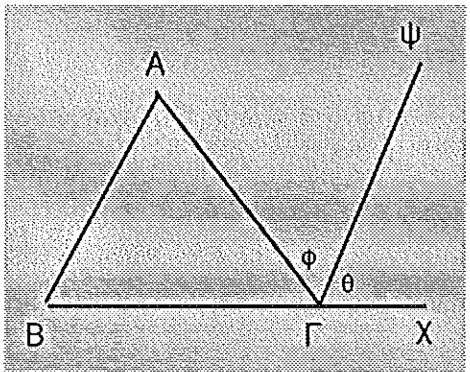
Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η γωνία

$\widehat{B\Gamma\chi}$ είναι μια ευθεία γωνία, δηλαδή

$\widehat{B\Gamma\chi} = 180°$. Όμως: $\widehat{B\Gamma\chi} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$.

Άρα και $\widehat{\Gamma} + \widehat{\varphi} + \widehat{\theta} = 180°$ ή

$\widehat{\Gamma} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180°$.



2. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A}$ είναι ίση με 30° και η γωνία $\widehat{B}$ ίση με 72°. Να βρεθεί η γωνία $\widehat{\Gamma}$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°. Δηλαδή:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$

Οπότε θα έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ ή $30° + 72° + \widehat{\Gamma} = 180°$

$102° + \widehat{\Gamma} = 180°$ ή $\widehat{\Gamma} = 180° - 102° = 78°$

3. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Αν $\widehat{\Gamma} = 54°$, να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B}$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με

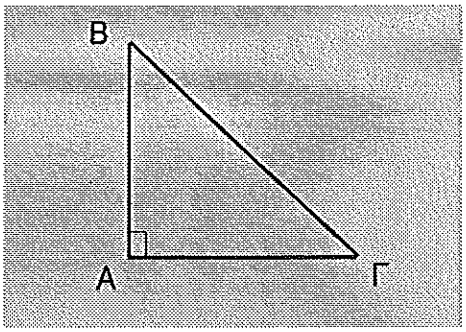
$\widehat{A} = 90°$. Επειδή : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$,

θα είναι : $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180° - 90° = 90°$

ή $\widehat{B} = 90° - \widehat{\Gamma} = 90° - 54° = 36°$.

Από την ισότητα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90°$

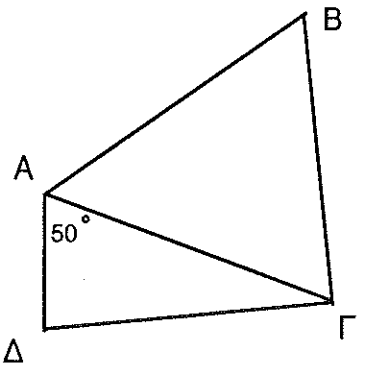
συμπεραίνουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι δυο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°.



4. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΒΓ. Αν

$\widehat{ΒΑΔ} = 130°$ και $\widehat{ΔΑΓ} = 50°$, να

αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Ποιες είναι οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου;



Λύση

Εφ' όσον $\widehat{ΒΑΔ} = 130°$ και $\widehat{ΔΑΓ} = 50°$

θα είναι $\widehat{ΒΑΓ} = 130° - 50° = 80°$.

Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και τέμνονται από την ΑΓ.

Άρα $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΔΑΓ} = 50°$ ως εντός εναλλάξ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$\widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΑΓΒ} + \hat{Β} = 180°$ ή

$80° + 50° + \hat{Β} = 180°$

Τελικά $\hat{Β} = 180° - 130° = 50°$.

Αποδείξαμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο οξείες γωνίες ίσες με 50°, άρα είναι ισοσκελές. Οι ίσες πλευρές του είναι οι ΑΒ και ΑΓ.

5. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{Α}$ είναι 60° και η γωνία $\hat{Β}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{Γ}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.

Λύση

Εφ' όσον η $\hat{Β}$ είναι τριπλάσια της $\hat{Γ}$ και η $\hat{Α} = 60°$, τότε $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$ οπότε από τη σχέση $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ έχουμε:

$60° + 3\hat{Γ} + \hat{Γ} = 180°$ ή $60° + 4\hat{Γ} = 180°$

ή $4\hat{Γ} = 180° - 60°$ ή $4\hat{Γ} = 120°$ ή

$\hat{Γ} = 120° : 4$ ή $\hat{Γ} = 30°$

οπότε η $\hat{Β} = 3 \cdot 30° = 90°$.

6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) η $\hat{Β}$ είναι 40° μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.

Λύση

Εφ' όσον η $\hat{Β}$ είναι 40° μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$, τότε $\hat{Β} = \hat{Γ} + 40°$, οπότε από τη σχέση $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ έχουμε:

$90° + \hat{Γ} + 40° + \hat{Γ} = 180°$ ή

$130° + 2\hat{Γ} = 180°$ ή $2\hat{Γ} = 180° - 130°$

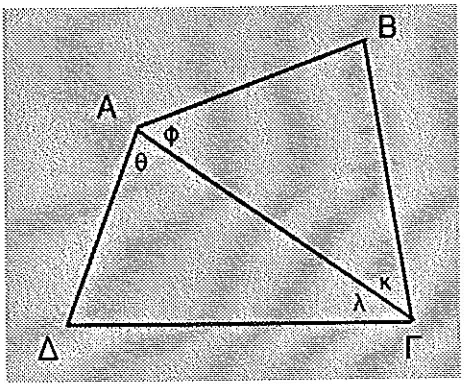
ή $2\hat{Γ} = 50°$ ή $\hat{Γ} = 50° : 2$

ή $\hat{Γ} = 25°$.

Άρα $\hat{Β} = 25° + 40° = 65°$.

1. Αν μετρήσουμε προσεκτικά τις τέσσερις γωνίες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με ένα μοιρογωμόνιο και αθροίσουμε τις μετρήσεις μας θα διαπιστώσουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι 360°. Να αποδείξετε ότι το ίδιο θα ισχύει σε κάθε τετράπλευρο.

Λύση



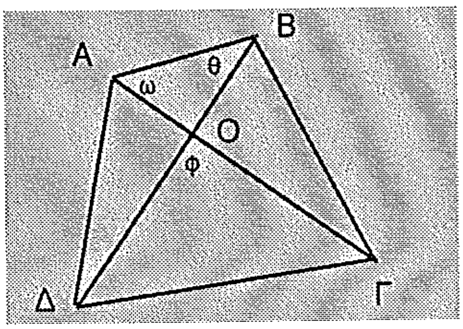
Σχεδιάζουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Φέρουμε το τμήμα ΑΓ (διαγώνιο) έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να χωρίζεται σε δύο τρίγωνα. Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{\varphi} + \hat{\kappa} + \hat{B} = 180°$.

Όμοια από το τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\hat{\theta} + \hat{\lambda} + \hat{\Delta} = ...$

2. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η $\hat{\varphi} = 107°$ και η $\hat{\theta} = 30°$. Να βρεθεί η γωνία $\hat{\omega}$.

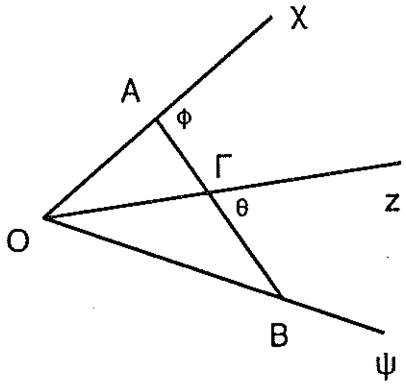


Λύση

Στο τρίγωνο ΑΟΒ η $\widehat{AOB}$ είναι κατακορυφήν με την $\hat{\varphi} = 107°$, άρα $\widehat{AOB} = 107°$

οπότε...

3. Δίνεται η γωνία $\widehat{xO\psi} = 84°$. Αν η ημιευθεία Οz είναι η διχοτόμος της και $\hat{\varphi} = 102°$, να βρεθεί η γωνία $\hat{\theta}$.



Λύση

Επειδή Οz διχοτόμος της $\widehat{xO\psi}$ θα είναι $\widehat{AO\Gamma} = 42°$. Στο τρίγωνο ΑΟΓ η $\widehat{OA\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της $\hat{\varphi}$, άρα

$\widehat{OA\Gamma} = 180° - \hat{\varphi}$ ή

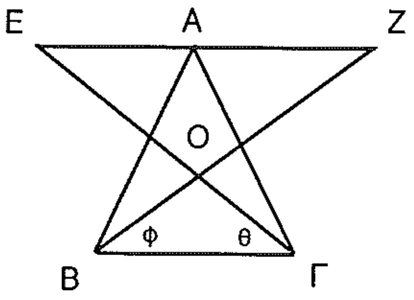
$\widehat{OA\Gamma} = 180° - 102° = 78°$

Οπότε ...

4. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 76°$.

Αν η ευθεία ΕΖ είναι παράλληλη στη βάση ΒΓ και οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΟ = ΖΟ.

Λύση



Οι γωνίες $\widehat{\varphi}$ και $\widehat{\theta}$ είναι $\widehat{\varphi} = \widehat{\theta} = 38°$ (ΒΖ, ΓΕ διχοτόμοι).

$\widehat{\varphi} = \widehat{Z}$ ως εντός εναλλάξ, άρα $\widehat{Z} = 38°$

$\widehat{\theta} = \widehat{E}$ ως εντός εναλλάξ, άρα $\widehat{E} = 38°$

Στο τρίγωνο ΕΟΖ .....

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{B}$ είναι 30° και η γωνία $\widehat{A}$ είναι τετραπλάσια της της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση

Αφού η $\widehat{B} = 30°$ και η $\widehat{A} = 4\widehat{\Gamma}$, από τη σχέση $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ έχουμε:

$4\widehat{\Gamma} + 30° + \widehat{\Gamma} = 180°$ ...

6. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι 45° και η γωνία $\widehat{A}$ είναι 25° μεγαλύτερη από τη γωνία $\widehat{B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

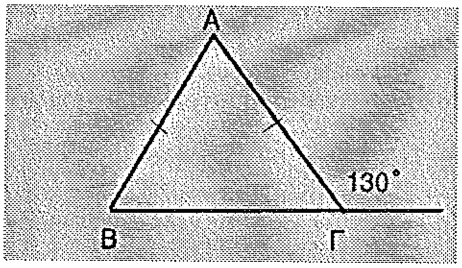
Λύση

Αφού η $\widehat{\Gamma} = 45°$ και η $\widehat{A} = \widehat{B} + 25°$, από τη σχέση $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$ έχουμε ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{B}$ είναι 25° και η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι 65°. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.



3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A}$ είναι 30° μεγαλύτερη από τη $\widehat{B}$ και η $\widehat{B}$ είναι 15° μεγαλύτερη από τη $\widehat{\Gamma}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

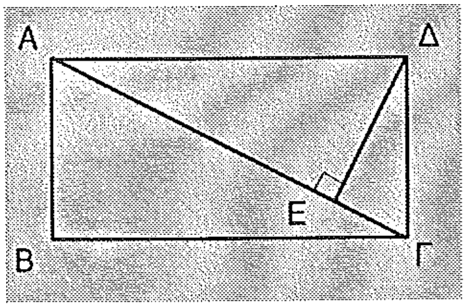
4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A}$ είναι διπλάσια από την γωνία $\widehat{B}$, ενώ η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι τριπλάσια από την γωνία $\widehat{A}$. Να βρεθεί το συμπλήρωμα της $\widehat{B}$.

5. Να χαράξετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και μία τρίτη ευθεία ε (όχι κάθετη σε αυτές) που τις τέμνει στα σημεία Α και Β. Αν οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται στο Κ, να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{AKB} = 90°$.

6. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ η ΔΕ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Αν $\widehat{ΑΓΒ} = 38°$, να βρεθεί η γωνία $\widehat{ΑΔΕ}$

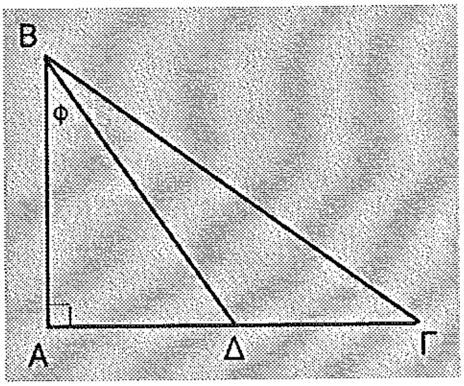
αν ΑΔ παράλληλη με τη ΒΓ.



7. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία

$\widehat{ΒΔΓ}$ είναι ίση με $90° + \hat{Γ}$.

Να αποδείξετε ότι $\hat{φ} = \hat{Γ}$.



8. Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$

ενός τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Γ να χαράξετε μία ευθεία ε, παράλληλη στην πλευρά ΑΒ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι ίσα.
[Δείξετε ότι το τριγ. ΑΓΕ είναι ισοσκελές]

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Αν η γωνία $\hat{φ} = 73° \, 41' \, 54''$, να βρεθεί η παραπληρωματική της.

2. Από τυχαίο σημείο Ο ευθείας χ'χ να χαράξετε μια ημιευθεία Οψ ώστε να σχηματιστούν δύο άνισες εφεξής γωνίες,

$\widehat{χΟψ}$ και $\widehat{ψΟχ'}$. Αν Οz είναι η διχοτόμος της $\widehat{χΟψ}$ και Οz' η διχοτόμος της $\widehat{ψΟχ'}$ να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{zΟz'}$.

3. Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Να χαράξετε το ύψος ΑΔ από την κορυφή Α στη βάση ΒΓ και να αποδείξετε ότι το ύψος

ΑΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.

4. Να χαράξετε και τα τρία ύψη στα παρακάτω τρίγωνα:
α) οξυγώνιο
β) αμβλυγώνιο
γ) ορθογώνιο.
Τι παρατηρείτε;

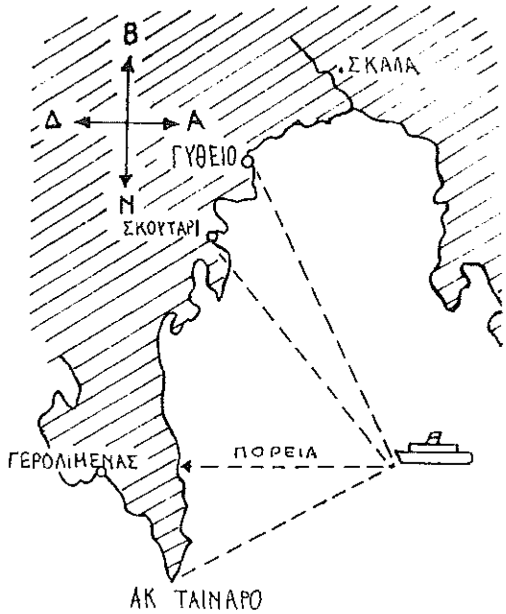
5. Στην προέκταση της πλευράς ΑΓ ενός σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ και προς το μέρος του Α να πάρετε ένα τμήμα ΑΕ = ΑΒ. Στη συνέχεια να ενώσετε το Ε με το Β. Από την κορυφή Α να φέρετε παράλληλη προς το τμήμα ΕΒ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος

της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Ο καπετάν Γιάννης θέλει να αράξει το ψαροκάικό του στο Γύθειο.
α) Πόσες μοίρες Βόρεια πρέπει να στρέψει το τιμόνι του;

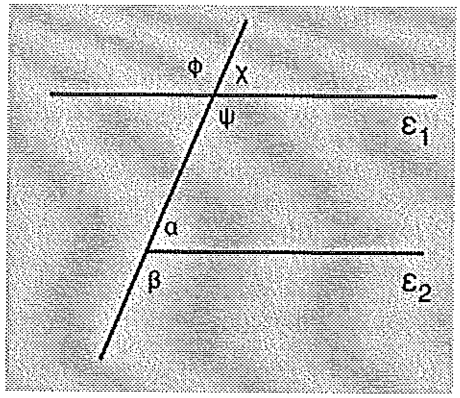
β) Αν ήθελε να αράξει στο λιμάνι του Σκουταρίου, πόσες μοίρες πρέπει να στρεψει τότε το τιμόνι του;

γ) Για να παρακάμψει το ακρωτήριο Ταίναρο, τι πρέπει να κάνει;



7. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι το $\frac{1}{5}$ της ευθείας γωνίας και η $\hat{B}$ είναι διπλάσια από την $\hat{Γ}$. Να υπολογίσετε τις τρεις γωνίες του τριγώνου.

8. Στο επόμενο σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του σχήματος αν $\hat{φ} = 115°$.



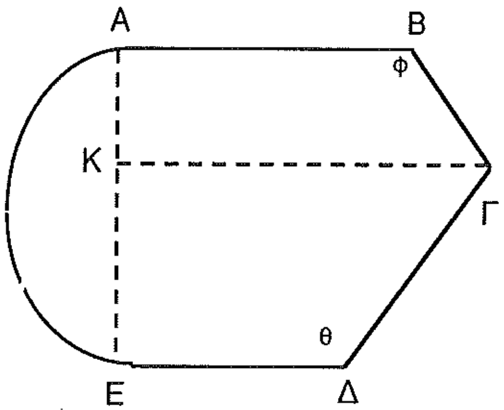
9. Να κατασκευάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με κορυφή Α και με μία πλευρά την ΑΓ να χαράξετε μία γωνία

$\widehat{BAχ} = 20°$ έτσι ώστε η πλευρά της Αχ

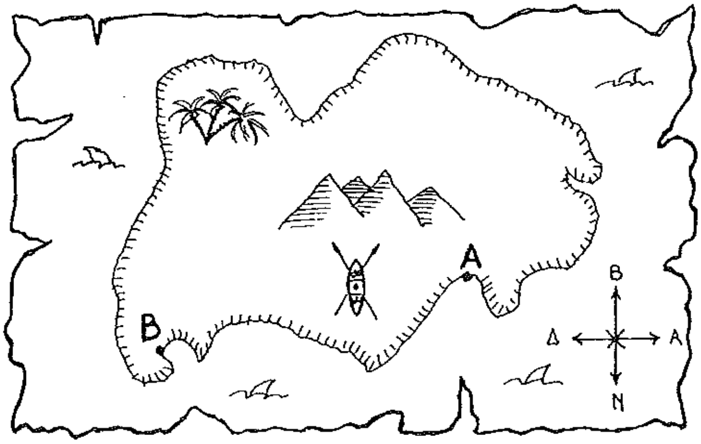
να τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ, προς το μέρος του Β, στο Δ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΓΔ.

10. Στο παρακάτω σχήμα οι πλευρές ΑΒ και ΕΔ είναι παράλληλες. Αν η ευθεία ΓΚ

είναι παράλληλη μ' αυτές και $\hat{φ} = 140°$, $\hat{θ} = 135°$, να υπολογίσετε την γωνία $\hat{Γ}$.



11. Ο Μενέλαος βρήκε στο παλαιό μπαούλο του παππού του το χάρτη ενός νησιού. Στο πίσω μέρος του χάρτη είναι γραμμένα τα εξής: «Στο Α αν πατήσεις και 23° Βορειοδυτικά περπατήσεις την τύχη σου, μια φορά θα συναντήσεις, μα σαν από το Β ξεκινήσεις και 45° Βορειοανατολικά τραβήξεις, την τύχη σου για δεύτερη φορά θα συναντήσεις». Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρεί τον κρυμμένο θησαυρό;



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

BASIC 9

Πληκτρολογήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

```
10 PLOT 30,40      (↵)
20 DRAW 120,40     (↵)
30 PLOT 30,40      (↵)
40 DRAW 120,60     (↵)
   RUN             (↵)
```

Παρατηρούμε ότι σχηματίστηκε μια γωνία.

Αν συνεχίσουμε με τις:

```
50 PLOT 30,40      (↵)
60 DRAW 30,120     (↵)
   RUN             (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχηματίζονται τώρα δυο εφεξής γωνίες και μάλιστα συμπληρωματικές.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο εφεξής γωνίες και παραπληρωματικές αν η κορυφή είναι το σημείο 60,20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Ευθύγραμμα τμήματα

7.1 Ίσα σχήματα

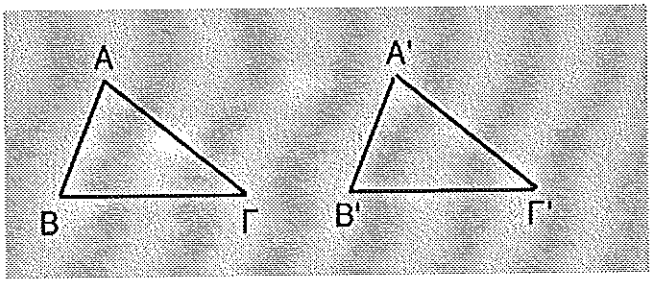
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς συγκρίνουμε δύο γεωμετρικά σχήματα, και πότε δύο γεωμετρικά σχήματα είναι ίσα;

Απαντήσεις

1. Για να συγκρίνουμε δύο γεωμετρικά σχήματα του επιπέδου χρησιμοποιούμε το διαφανές χαρτί. Δηλαδή αποτυπώνουμε το ένα σχήμα στο διαφανές χαρτί και μετά προσπαθούμε να το μετακινήσουμε πάνω στο άλλο σχήμα ώστε να διαπιστώσουμε αν τα δύο σχήματα συμπίπτουν. Εάν όλα τα σημεία του σχήματος πάνω στο διαφανές χαρτί συμπίπτουν με όλα τα σημεία του άλλου σχήματος, τότε τα δύο σχήματα είναι ίσα.



2. Τι ονομάζονται αντίστοιχα σημεία, αντίστοιχες πλευρές και αντίστοιχες γωνίες δύο ίσων σχημάτων;

2. **Αντίστοιχα σημεία** δύο ίσων σχημάτων ονομάζονται τα σημεία εκείνα των δύο σχημάτων που κατά τη σύγκρισή τους με το διαφανές χαρτί συμπίπτουν. Το ίδιο συμβαίνει και για τις πλευρές και για τις γωνίες, οπότε τις πλευρές που συμπίπτουν τις λέμε **αντίστοιχες πλευρές** και τις γωνίες **αντίστοιχες γωνίες.**

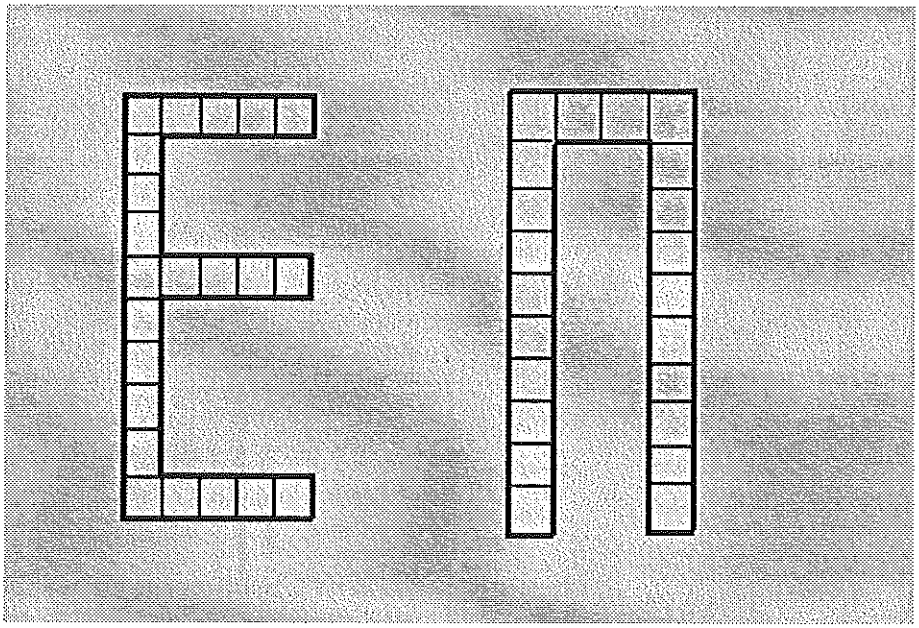
Στο παραπάνω σχήμα τα σημεία Α και Α', Β και Β', Γ και Γ' είναι αντίστοιχα σημεία. Οι πλευρές ΑΒ και Α'Β', ΒΓ και Β'Γ', ΑΓ και Α'Γ' είναι αντίστοιχες πλευρές και οι

και οι γωνίες $\hat{A}$ και $\widehat{A'}$, $\hat{B}$ και $\widehat{B'}$, $\hat{\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma'}$

είναι αντίστοιχες γωνίες.

3. Δύο σχήματα που έχουν ίσο εμβαδό είναι ίσα;

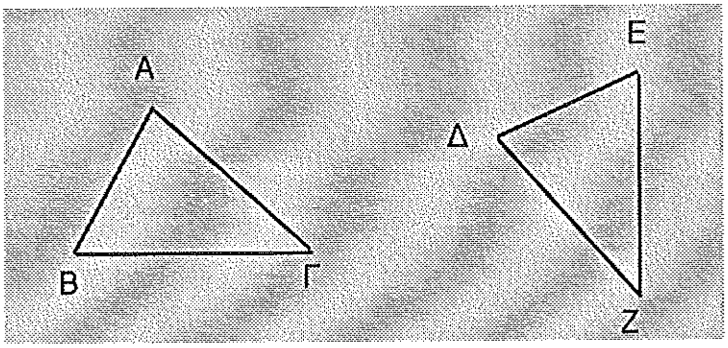
3. Είναι λογικό ότι δύο σχήματα που είναι ίσα να έχουν και ίδιο εμβαδό. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι, δύο σχήματα που έχουν ίσο εμβαδό είναι και ίσα.
Όπως παρατηρούμε, τα παρακάτω σχήματα έχουν ίσο εμβαδό αλλά δεν είναι ίσα.



7. 2 Ίσα τρίγωνα

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;	1. Δύο τρίγωνα είναι **ίσα**, όταν, κατά τη σύγκρισή τους με το διαφανές χαρτί, συμπίπτουν.



<u>Παρατήρηση:</u> Από την παραπάνω σύγκριση διαπιστώνουμε ότι αν δυο τρίγωνα είναι ίσα, έχουν τις αντίστοιχες γωνίες και τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες.

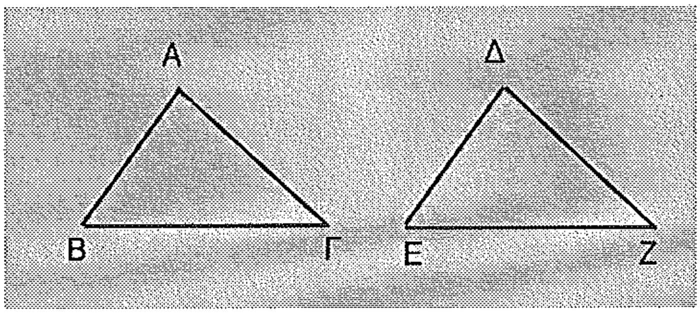
Δηλαδή αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, τότε:

Αν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $B\Gamma = EZ$, $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
2. Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα χωρίς την βοήθεια του διαφανούς χαρτιού;	**2. Για να διαπιστώσουμε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, αρκεί να διαπιστώσουμε μόνο ότι οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες, μία προς μία, με τις πλευρές του άλλου τριγώνου.** Αν διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές $AB = \Delta E$, $B\Gamma = EZ$ και $A\Gamma = \Delta Z$ τότε μπορούμε να πούμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Κατά συνέπεια θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

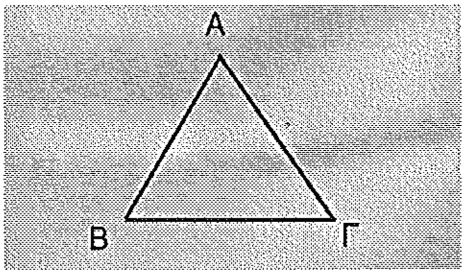
Δηλαδή : $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσα.



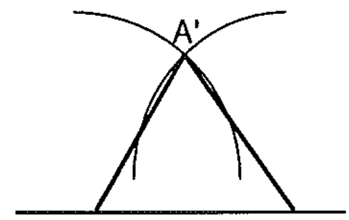
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε τρίγωνο Α'Β'Γ' ίσο με το παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ.



Λύση

Κατασκευάζουμε μία ευθεία ε και με το διαβήτη παίρνουμε πάνω στην ε ευθύγραμμο τμήμα Β'Γ' ίσο με ΒΓ. Με κέντρο το Β' και ακτίνα ίση με ΒΑ γράφουμε ένα κύκλο. Με κέντρο το Γ' και ακτίνα το ΓΑ γράφουμε έναν άλλο κύκλο που τέμνει τον πρώτο στο Α'.

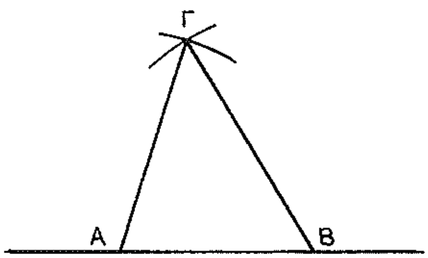


Το τρίγωνο Α'Β'Γ' που κατασκευάσαμε είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες με τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

2. Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3cm, ΑΓ = 4cm και ΒΓ = 4,5 cm.

Λύση

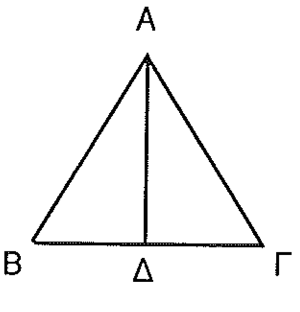
Πάνω σε ευθεία ε παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3 cm. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ = 4 cm και με κέντρο Β και ακτίνα ΒΓ = 4,5 cm χαράζουμε δύο κύκλους που τέμνονται στο Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο, γιατί όλες οι πλευρές του είναι ίσες με τις δοσμένες.



3. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ της γωνίας Α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα;

Λύση

Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Το σημείο Α του ύψους απέχει εξίσου από τα άκρα του τμήματος ΒΓ, γιατί ΑΒ = ΑΓ. Άρα το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ, οπότε το Δ είναι μέσο του ΒΓ, δηλαδή: ΒΔ = ΔΓ.

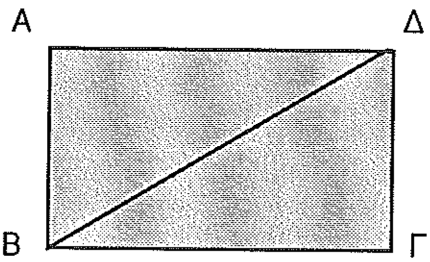


Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, γιατί έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΒΔ = ΔΓ και την ΑΔ κοινή, δηλαδή όλες τι πλευρές τους ίσες μία προς μία.

4. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και να φέρετε τη διαγώνιο ΑΓ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ.

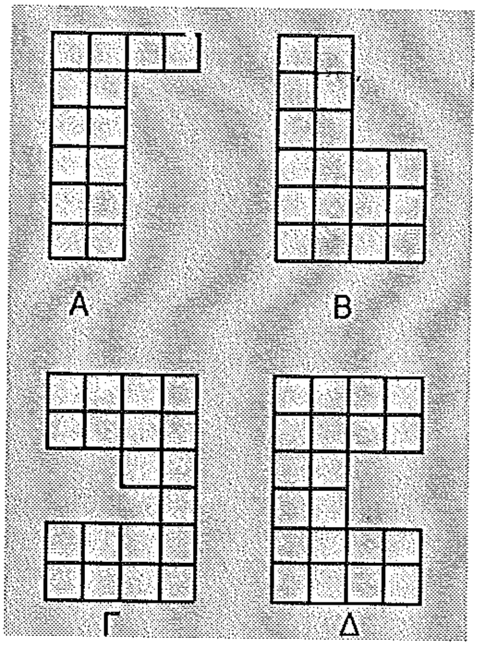
Λύση

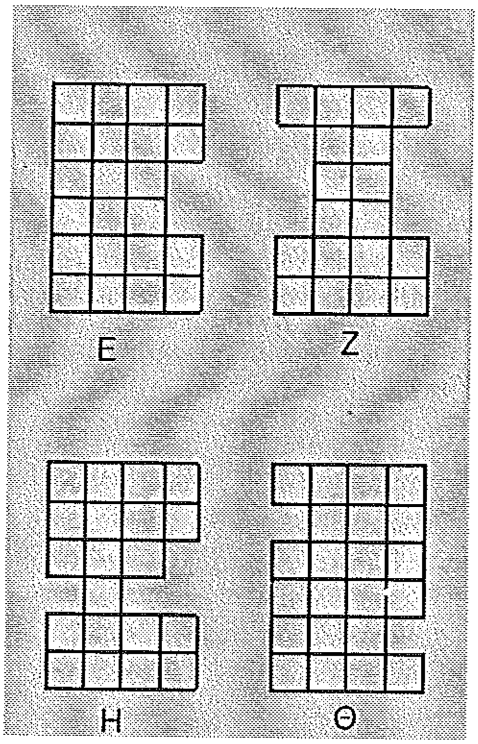
Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ καθώς και ΑΔ και ΒΓ είναι μεταξύ τους ίσες. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ είναι ίσα, γιατί έχουν όλες τις πλευρές του ίσες μία προς μία. (Είναι ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ= ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά).

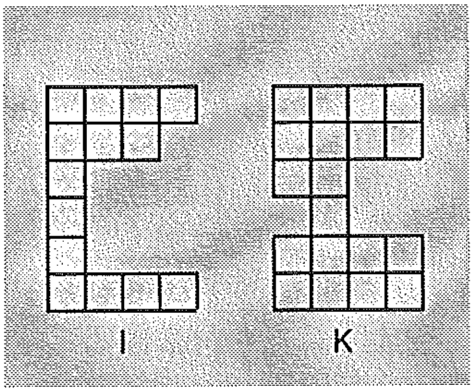


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να συγκρίνετε τα σχήματα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ και να βρείτε τα ζευγάρια που έχουν ίσο εμβαδό.







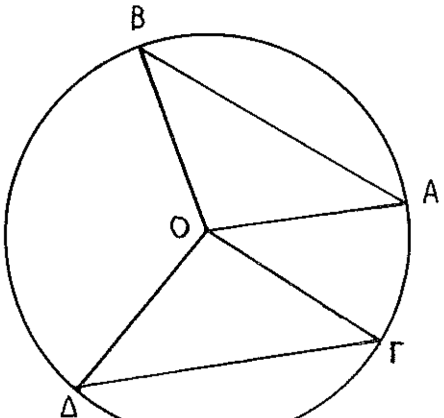
Λύση

Τα σχήματα Α και Ι έχουν ίσο εμβαδό, γιατί αποτελούνται από 14 τετραγωνάκια .....

2. Να κατασκευάσετε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3 cm. Να πάρετε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ ίσες με 4cm η καθεμία. Να σχηματίσετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ. Είναι ίσα;

Λύση

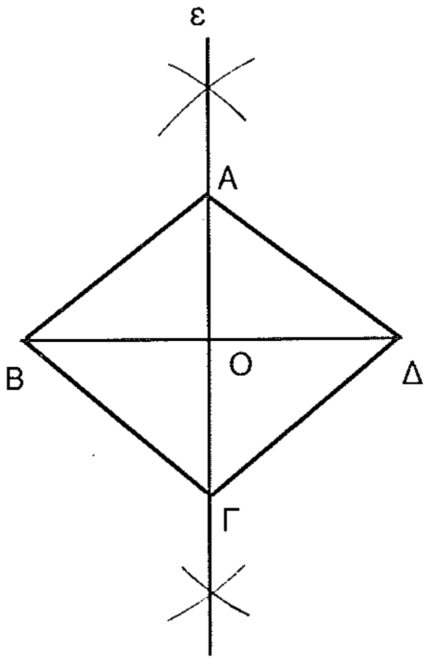
Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3 cm και παίρνουμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ ίσες με 4 cm. Οι πλευρές ΟΒ, ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ είναι ίσες, γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ ....



3. Να γράψετε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ = 4 cm και ΒΔ = 5 cm, έτσι ώστε το ένα να είναι μεσοκάθετος του άλλου. Έστω ότι τέμνονται στο Ο. Να γράψετε το τετράπλευρο που ορίζεται από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΒΟΓ, και ΓΟΔ.

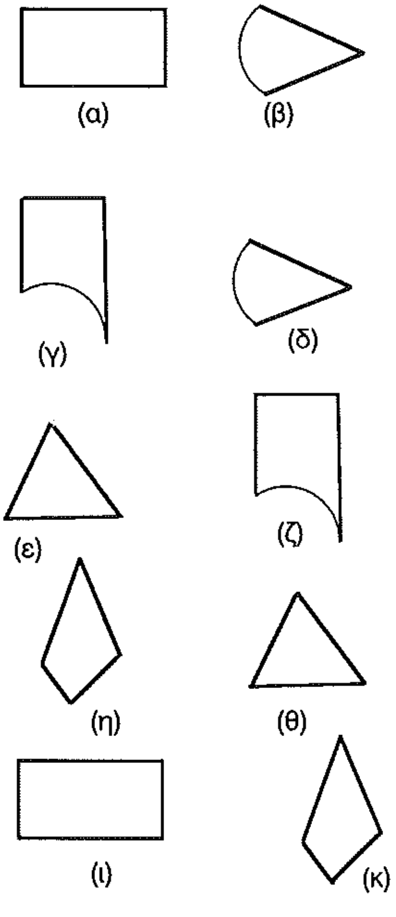
Λύση

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ και φέρουμε τη μεσοκάθετο ευθεία, που τέμνει το ΒΔ στο Ο. Παίρνουμε τμήματα ΟΑ και ΟΓ πάνω στην ε και ίσα με 2 cm, από τη μία και την άλλη πλευρά του Ο. Τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι μεσοκάθετα το ένα στο άλλο. Σχηματίζουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΔ, ΟΒΓ, και ΟΓΔ. Με το διαβήτη συγκρίνουμε τα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΓΔ και ΒΓ...



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Με διαφανές χαρτί να συγκρίνετε τα παρακάτω σχήματα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων σχημάτων, αν υπάρχουν.



2. Να κατασκευάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ, ΑΒ > ΓΔ και με ΑΔ = ΒΓ. Φέρτε τις καθέτους ΑΕ και ΒΖ προς τη ΓΔ. Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ.

3. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και να φέρετε τις διαγωνίους του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ο. Να βρείτε αν υπάρχουν στο σχήμα ίσα τρίγωνα.

4. Να γράψετε κύκλο με ακτίνα ρ και να πάρετε πάνω σ' αυτόν τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, έτσι ώστε οι χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ να είναι ίσες κάθε μια με ρ. Να σχηματίσετε τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΔΖ. Είναι ίσα;

5. Παίρνουμε δύο εφεξής και ίσες μεταξύ τους γωνίες $\widehat{\chi O\psi}$ και $\widehat{\psi Oz}$. Πάνω στην Οχ και στην Οz παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ και ΟΓ ίσα με 4 cm το καθένα. Στην Οψ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ = 3 cm. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΒ. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις υπόλοιπες γωνίες των τριγώνων;

7.3 Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μία γωνία, η οποία να είναι ίση με μία άλλη δοσμένη $\chi O \psi$, με κανόνα και διαβήτη;

Απαντήσεις

1. Έστω ότι μας δίνεται μια γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε μια άλλη γωνία ίση με αυτή. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη ως εξής:

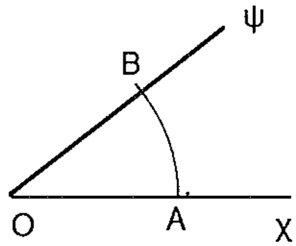
Με κέντρο O και ακτίνα οποιαδήποτε γράφουμε έναν κύκλο που τέμνει τις πλευρές της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ στα σημεία A και B. (σχήμα α)

Γράφουμε μια ημιευθεία O'χ'. Με κέντρο O' και ακτίνα ίδια με την προηγούμενη γράφουμε κύκλο που τέμνει την O'χ' στο σημείο Γ. (σχήμα β)

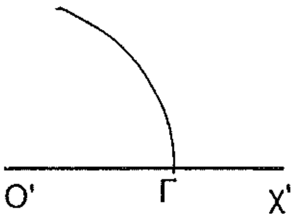
Με κέντρο το Γ και ακτίνα ίση με την χορδή AB γράφουμε κύκλο που τέμνει τον προηγούμενο στο σημείο Δ. (σχήμα δ).

Φέρουμε την ημιευθεία O'Δ. Η γωνία $\widehat{\Gamma O' \Delta}$ είναι η ζητούμενη γωνία. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $\widehat{\Gamma O' \Delta}$ είναι ίση με $\widehat{\chi O \psi}$.

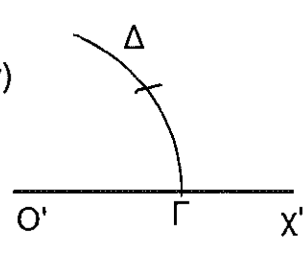
α)



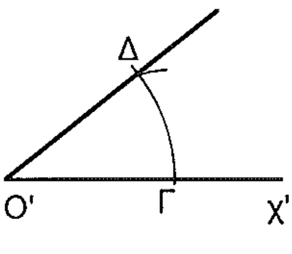
β)



γ)

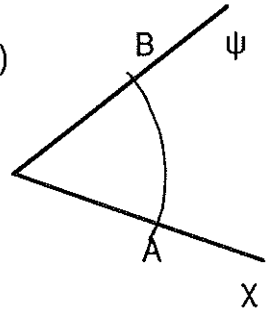


δ)

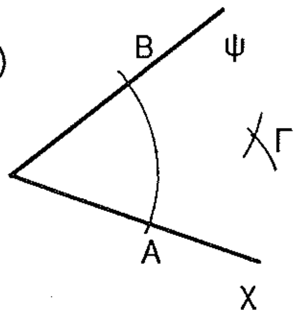


2. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο μιας γωνίας, με κανόνα και διαβήτη;

α)

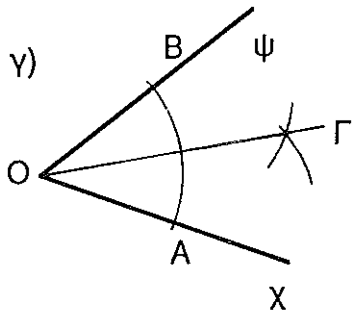


β)



2. Έστω ότι μας ζητούν να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ με κανόνα και διαβήτη. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει ως εξής:
Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα οποιαδήποτε γράφουμε ένα κύκλο. Ονομάζουμε Α και Β τα σημεία στα οποία τέμνει ο κύκλος αυτός τις πλευρές Οχ και Οψ (σχήμα α). Με κέντρα τα σημεία Α και Β και με ακτίνα, η οποία να είναι μεγαλύτερη από το μισό της χορδής ΑΒ γράφουμε δύο κύκλους. Ονομάζουμε Γ το ένα από τα σημεία στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι (σχήμα β). Φέρουμε την ευθεία ΟΓ που βρίσκεται στη γωνία χΟψ. Η ΟΓ είναι η ζητούμενη διχοτόμος. (σχήμα γ).

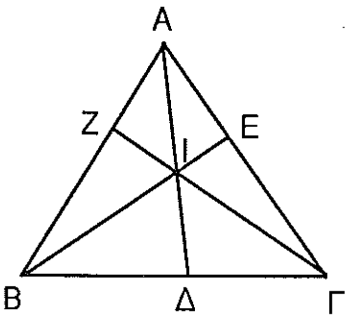
γ)



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και να κατασκευάσετε τις τρεις διχοτόμους των γωνιών Α, Β, Γ. Τι παρατηρείτε;

Λύση



Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ των γωνιών Α, Β, και Γ αντίστοιχα όπως περιγράφουμε στη θεωρία. Αν η σχεδίαση γίνει με προσοχή, οι τρεις διχοτόμοι θα περάσουν από το ίδιο σημείο.

Παρατήρηση

Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε τις τρεις διχοτόμους των γωνιών ενός τριγώνου, αρκεί να κατασκευάσουμε τις δύο από αυτές. Η τρίτη διχοτόμος υποχρεωτικά θα περάσει από το σημείο τομής αυτών.

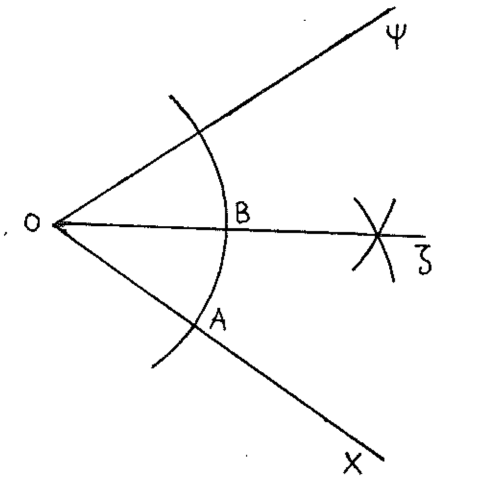
2. Με το μοιρογνωμόνιο να σχεδιάσετε μία γωνία $\widehat{\chi O \psi} = 70^\circ$. Στη συνέχεια με τον κανόνα και το διαβήτη σας να κατασκευάσετε μία γωνία που να είναι ίση με το μισό της $\widehat{\chi O \psi}$.

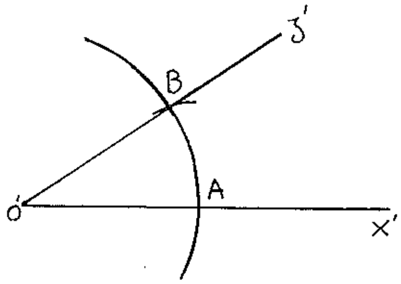
Λύση

Με το μοιρογνωμόνιό μας σχεδιάζουμε μια γωνία $\widehat{\chi O \psi} = 70^\circ$. Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τη διχοτόμο της Οζ.

Η γωνία $\widehat{\chi O \zeta}$ (ή $\widehat{\psi O \zeta}$) είναι ίση με το μισό της $\widehat{\chi O \psi}$.

Στη συνέχεια με κορυφή το σημείο Ο' της ημιευθείας Ο'χ' κατασκευάζουμε με τον γνωστό τρόπο μια γωνία $\widehat{\chi' O' \zeta'}$ ίση με την $\widehat{\chi O \zeta}$ Η γωνία $\widehat{\chi' O' \zeta'}$ είναι η ζητού μενη γωνία.
Αν η σχεδίαση γίνει με προσοχή η γωνία $\widehat{\chi' O' \zeta'}$ πρέπει να είναι ίση με $\frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$.



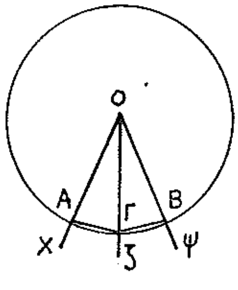


3. Με κορυφή το κέντρο Ο ενός κύκλου (Ο, 2 cm) να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{\chi O \psi} = 46^\circ$. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της Οζ. Αν οι πλευρές Οχ και Οψ της γωνίας τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η διχοτόμος Οζ στο Γ, α) να συγκρίνετε μεταξύ τους τα τμήματα ΑΓ και ΒΓ, β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΓ είναι ίσα.

Λύση

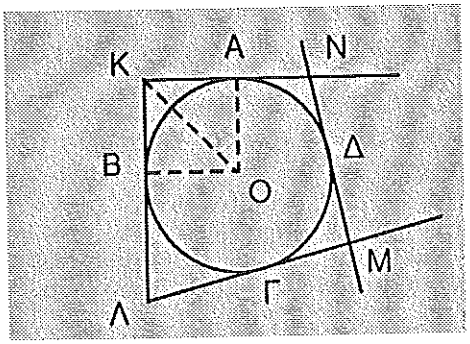
α) Φέρουμε μία ημιευθεία Οχ η οποία τέμνει τον κύκλο (Ο, 2 cm) στο Α. Με κορυφή Ο σχεδιάζουμε τη γωνία $\widehat{\chi O \psi} = 46^\circ$. Έστω ότι η πλευρά Οψ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Β. Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τη διχοτόμο Οζ της γωνίας. Έστω η διχοτόμος Οζ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Αν η κατασκευή έχει γίνει με προσοχή και συγκρίνουμε τα τμήματα ΑΓ και ΒΓ πρέπει να τα βρούμε ίσα , δηλ. ΑΓ = ΒΓ.

β) Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν:
1. Την πλευρά τους ΟΓ κοινή.
2. ΟΑ = ΟΒ = 2 cm (γιατί είναι ακτίνες του κύκλου)
3. ΑΓ = ΒΓ (από προηγούμενη σύγκριση).



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (Ο, ρ) και πάνω σε αυτόν να πάρετε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να κατασκευάσετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά. Τότε σχηματίζεται ένα τετράπλευρο ΚΛΜΝ. Να κατασκευάσετε τις διχοτόμους των γωνιών Κ, Λ, Μ και Ν. Τι παρατηρείτε;



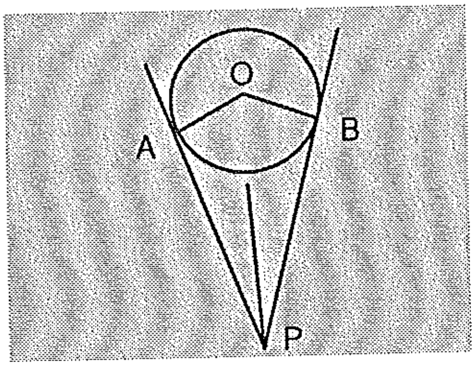
Λύση

Έστω Α, Β, Γ και Δ τέσσερα σημεία του κύκλου (Ο, ρ). Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ. Από τα άκρα Α, Β, Γ, Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στις ακτίνες. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα τετράπλευρο που το ονομάζουμε ΚΛΜΝ. Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τη διχοτόμο της Κ. Αν η κατασκευή έχει γίνει με προσοχή παρατηρούμε ότι η διχοτόμος αυτή περνά από το κέντρο Ο του κύκλου (Ο, ρ). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις διχοτόμους των....

2. Να κατασκευάσετε έναν κύκλο (Ο, 2,5 cm) και δύο ακτίνες του ΟΑ και ΟΒ, οι οποίες δεν είναι αντικείμενες. Από τα άκρα Α και Β να κατασκευάσετε τις εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες τέμνονται στο Ρ. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας ΑΡΒ. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Φέρουμε δύο ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου (Ο, 2,5) οι οποίες δεν είναι αντικείμενες. Για να κατασκευάσουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β αρκεί να φέρουμε τις κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ στα Α και Β ....



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και μία τρίτη ευθεία ε που να τις τέμνει πλάγια. Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε δύο εφεξής γωνίες, οι οποίες να είναι αντίστοιχα ίσες με τις δυο γωνίες που έχουν θέση εντός και επί τα αυτά, στο σχήμα σας.

2. Να σχεδιάσετε με το μοιρογνωμόνιο μια γωνία $\widehat{xO\psi} = 58^\circ$. Με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της Οζ. Από τυχαίο σημείο Α της διχοτόμου Οζ να φέρετε τις κάθετες ΑΒ και ΑΓ στις πλευρές Οχ και Οψ αντίστοιχα. Με μέτρηση να διαπιστώσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα.

3. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xA\psi} = 35°$.

Στη συνέχεια με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της Αζ. Στις ημιευθείες Αχ και Αψ να πάρετε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΒ = ΑΓ = 5 cm. Να φέρετε την ΑΓ η οποία τέμνει την Αζ στο Δ. Με το μοιρογνωμόνιο να μετρήσετε τις γωνίες $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να το αποδείξετε;

4. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\hat{\varphi} = 60°$.

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3 cm να κατασκευάσετε μια γωνία $\widehat{xO\psi} = \hat{\varphi}$.

Αν οι πλευρές της Οχ και Οψ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

5. Με το μοιρογνωμόνιό σας να σχεδιάσετε μια γωνία $\widehat{xA\psi} = 40°$. Να φέρετε μία τυχαία ευθεία ε η οποία τέμνει την Αχ στο Β και την Αψ στο Γ. Να κατασκευάσετε προσεκτικά τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{xA\psi}$, $\widehat{xB\Gamma}$ και $\widehat{\psi\Gamma B}$.

Αν η κατασκευή γίνει με προσοχή, οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο. Ονομάστε το σημείο αυτό Ι. Από το Ι να φέρετε την κάθετη στην ΒΓ. Έστω ότι την τέμνει στο Δ. Με κέντρο το Ι και ακτίνα όση το τμήμα ΙΔ να σχεδιάσετε έναν κύκλο. Τι παρατηρείτε;

7.4 Είδη τετραπλεύρων

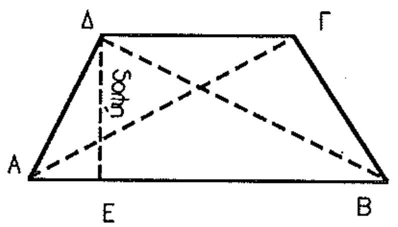
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται τραπέζιο, τι βάσεις και τι ύψος του τραπεζίου;

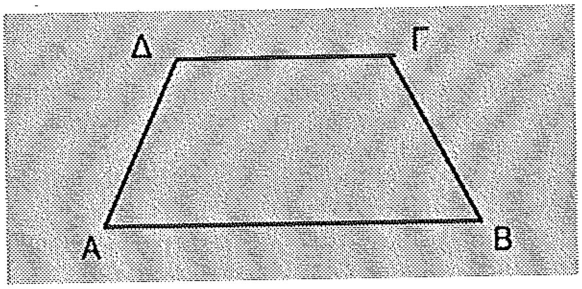
Απαντήσεις

1. **Τραπέζιο** λέγεται το τετράπλευρο το οποίο έχει δύο πλευρές παράλληλες. Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου λέγονται και **βάσεις**. Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.



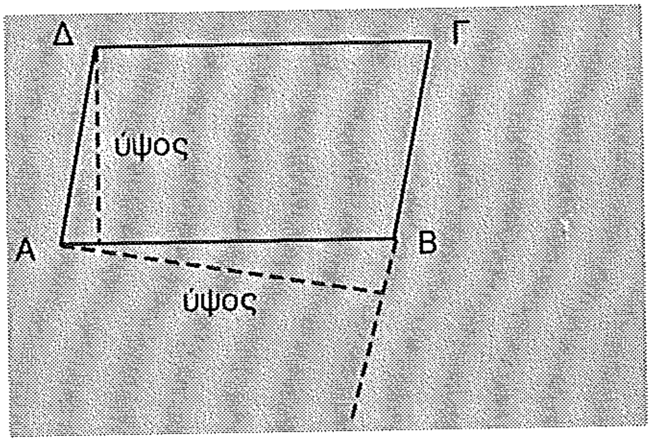
2. Ποιο τραπέζιο λέγεται ισοσκελές;

2. **Ισοσκελές** λέγεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.



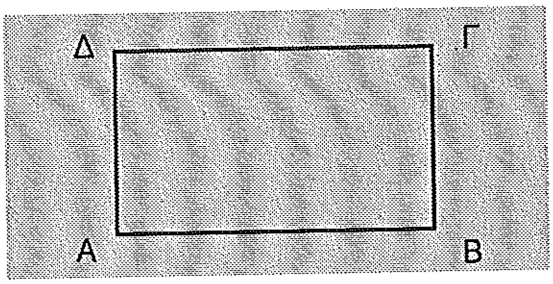
3. Ποιο τετράπλευρο ΑΒΓΔ λέγεται παραλληλόγραμμο; Ποια πλευρά του λέγεται βάση; Τι ονομάζουμε ύψος του παραλληλογράμμου;

3. **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να θεωρηθεί ως βάση του. Η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



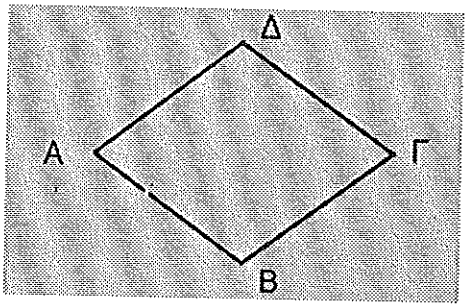
4. Ποιο παραλληλόγραμμο λέγεται ορθογώνιο;

4. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.



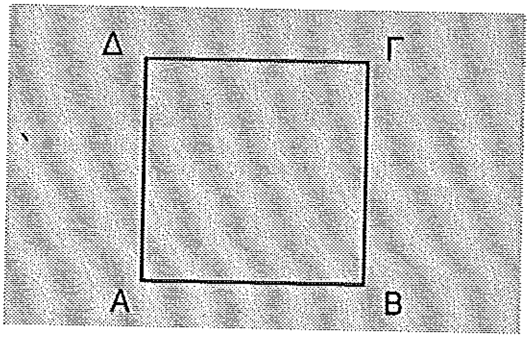
5. Ποιο παραλληλόγραμμο λέγεται ρόμβος;

5. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες.



6. Ποιο παραλληλόγραμμο λέγεται τετράγωνο;

6. Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές.

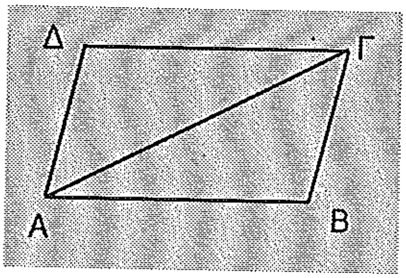


7.5 Ιδιότητες του παραλληλόγραμμου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να αναφέρετε τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

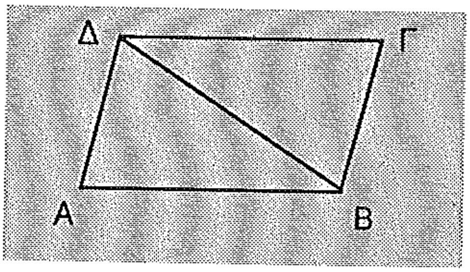


τριγ. ΑΔΓ = τριγ.ΑΒΓ

Απαντήσεις

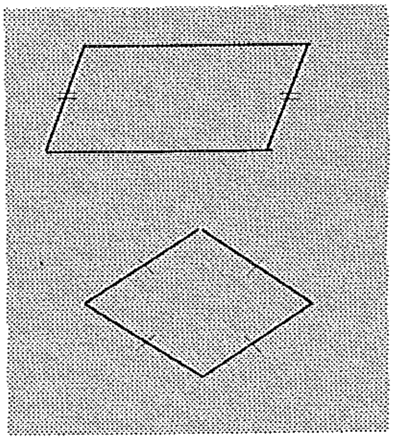
1. Γενικά σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν:

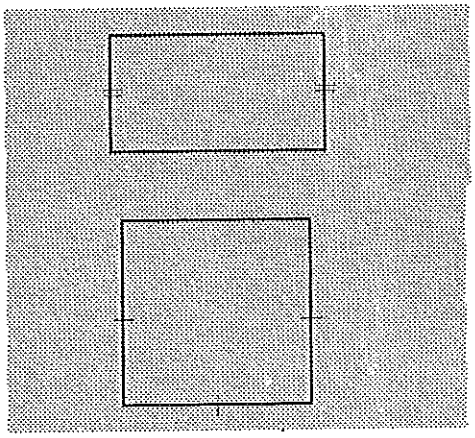
α) Κάθε διαγώνιος το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.



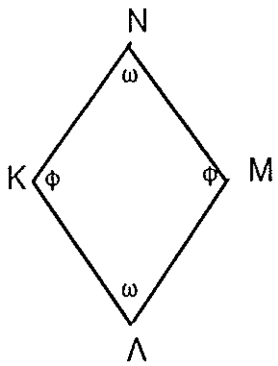
τριγ. ΑΒΔ = τριγ. ΒΓΔ

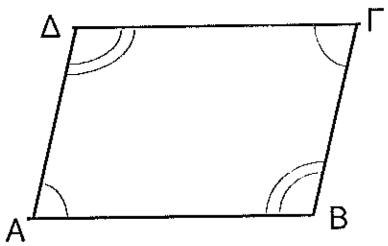
β) Οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες.





γ) Οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες.





δ) Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται (δηλαδή τέμνονται στο μέσον τους).

2. Πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

2. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
β) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
γ) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.
δ) Όταν δύο πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ όταν Α= 40° , ΑΒ= 2 cm και ΑΔ = 4 cm. Αν οι διαγώνιες τέμνονται στο Ο, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ, ΔΟ. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

Λύση

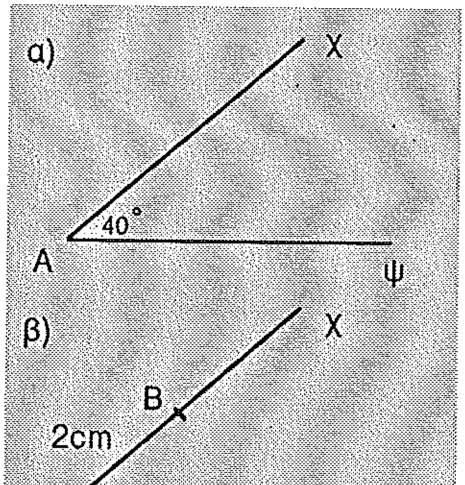
Για την κατασκευή του ζητούμενου παραλληλογράμμου κάνουμε τα παρακάτω:

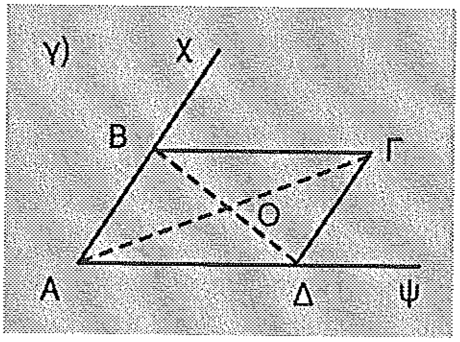
α) Κατασκευάζουμε με το μοιρογνωμόνιο μας μια γωνία $\widehat{\chi A \psi} = 40^\circ$

β) Πάνω στις πλευρές Αχ και Αψ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΒ = 2 cm και ΑΔ = 4 cm.

γ) Από το σημείο Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αψ και από το σημείο Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ. Έστω ότι οι δύο αυτές παράλληλες τέμνονται στο σημείο Γ. Το ζητούμενο παραλληλόγραμμο είναι το ΑΒΓΔ.

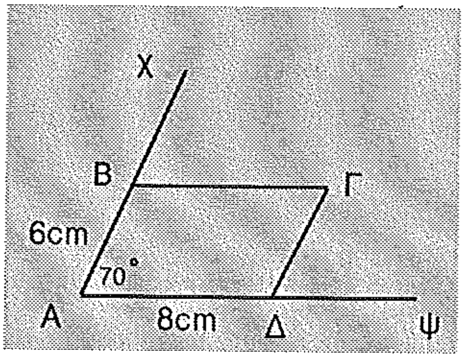
Φέρουμε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου και έστω ότι τέμνονται στο Ο. Με σύγκριση παρατηρούμε ότι: ΑΟ = ΓΟ και ΒΟ = ΔΟ. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι **οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.**





2. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο που να έχει δύο διαδοχικές του πλευρές 6 cm και 8 cm και την περιεχόμενη γωνία στις πλευρές αυτές ίση με 70°.

Λύση



Κατασκευάζουμε μια γωνία $\widehat{\chi A \psi} = 70^\circ$

και πάνω στις πλευρές της Οχ και Οψ παίρνουμε δύο τμήματα ΑΒ και ΑΔ ίσα με 6 και 8 cm αντίστοιχα. Μετά φέρουμε από το Β παράλληλη προς την ΑΔ και από το Δ παράλληλη προς την ΑΒ. Οι δύο αυτές παράλληλες τέμνονται στο σημείο Γ. Το ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο.

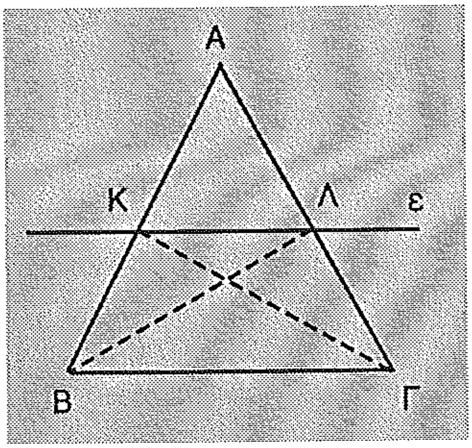
3. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ = ΑΓ). Να φέρετε μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ η οποία τέμνει τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΛΚ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να φέρετε τις διαγώνιες ΒΛ και ΓΚ του τραπεζίου και να τις συγκρίνετε. Τι παρατηρείτε;
γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΒΓΛ είναι ίσα.

Λύση

Έστω ΑΒΓ το ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ = ΑΓ. Φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ και έστω ότι τέμνει την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ.

α) Το τετράπλευρο ΒΓΛΚ είναι τραπέζιο, γιατί δυο πλευρές του, (ΒΓ και ΚΛ), είναι παράλληλες.



Παρατηρούμε ότι $\hat{B} = \widehat{AK\Lambda}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ και ΚΛ που τέμνονται από τη ΒΚ.

Όμοια $\hat{\Gamma} = \widehat{A\Lambda K}$

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι γωνίες

$\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες άρα και $\widehat{AK\Lambda} = \widehat{A\Lambda K}$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές με ΑΚ = ΑΛ.
Έτσι έχουμε:
ΒΚ = ΑΒ − ΑΚ και ΓΛ = ΑΓ − ΑΛ.
Όμως ΑΒ = ΑΓ, (ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο), και ΑΚ = ΑΛ, άρα ΒΚ = ΓΛ. Επομένως το τραπέζιο ΒΓΛΚ είναι ισοσκελές.

β) Φέρουμε τις διαγώνιες ΒΛ και ΓΚ του ισοσκελούς τραπεζίου. Με σύγκριση παρατηρούμε ότι είναι ίσες. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι **οι διαγώνιες ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.**

γ) Τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΒΓΛ είναι ίσα γιατί έχουν:
1. ΒΓ πλευρά κοινή.
2. ΒΚ = ΓΛ (μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου)
3. ΒΛ = ΓΚ (από προηγούμενη σύγκριση).

4. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (Ο, ρ) και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΑ, ΟΒ. Από τα άκρα Α και Β των ακτίνων να φέρετε τις εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες τέμνονται στο Γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τετράγωνο.

Λύση

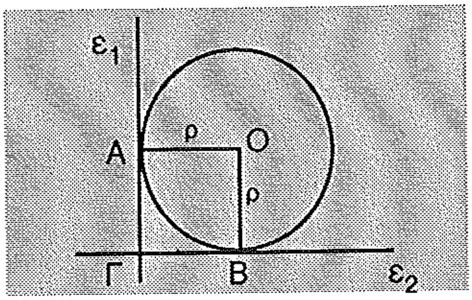
Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο, ρ) στα άκρα Α και Β των κάθετων ακτίνων ΟΑ και ΟΒ. Ως γνωστό η ε_1 είναι κάθετη στην ΟΑ και η ε_2 κάθετη στην ΟΒ.

Άρα $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = 90°$. Οι ευθείες

ΟΑ και ΒΓ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΟΒ. Όμοια και οι ευθείες ΟΒ και ΑΓ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΟΑ.

Άρα και $\hat{\Gamma} = 90°$.
Αφού από την υπόθεση είναι $\hat{O} = 90°$,

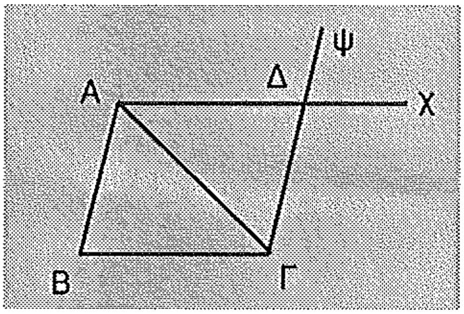
τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο γιατί έχει όλες τις γωνίες του ορθές και επιπλέον οι πλευρές του είναι όλες ίσες με ρ, άρα είναι τετράγωνο.



5. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε από το Α παράλληλη προς τη ΒΓ και από το Γ παράλληλη προς την ΑΒ. Ονομάστε Δ το σημείο τομής των ευθειών αυτών. Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

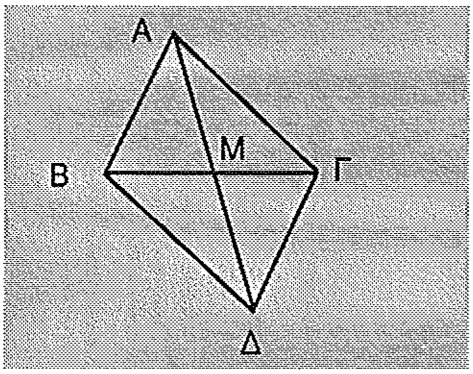
Λύση

Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και φέρουμε την ευθεία Αχ παράλληλη προς την ΒΓ. Μετά φέρουμε από το Γ την ευθεία Γψ παράλληλη προς την ΑΒ.
Οι ευθείες αυτές τέμνονται σε ένα σημείο που το ονομάζουμε Δ. Το τετράπλευρο που σχηματίστηκε είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.



6. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τη διάμεσο του ΑΜ. Να προεκτείνετε τη διάμεσο αυτή προς το μέρος του Μ και να πάρετε ένα τμήμα ΜΔ πάνω στην προέκταση αυτή, ώστε ΜΔ = ΜΑ. Να φέρετε, τέλος, τις ΜΒ και ΜΓ. Τι σχήμα είναι το ΑΒΔΓ;

Λύση



Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και με το υποδεκάμετρο ή με κατασκευή της μεσοκαθέτου βρίσκουμε το μέσο της ΒΓ που το ονομάζουμε Μ. Φέρουμε την ΑΜ και την προεκτείνουμε προς το μέρος του Μ. Πάνω στην προέκταση αυτή παίρνουμε με το διαβήτη μας τμήμα ΜΔ = ΜΑ. Φέρουμε τις ΔΒ και ΔΓ.
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί συγκρίνοντας τις πλευρές του βλέπουμε, ότι οι απέναντι είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα γιατί, ΑΜ = ΜΔ, ΒΜ = ΜΓ και ΑΒ = ΓΔ.

Άρα $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$.

Δηλαδή οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΑΒ, ΓΔ τεμνόμενες από τη ΒΓ είναι ίσες, άρα η ΑΒ // ΓΔ. Ομοίως ΑΓ // ΒΔ. Επομένως το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αν η $\hat{A} = 68°$.

β) Φέρνουμε την ΔΒ. Αν η $\widehat{A\Delta B} = 98°$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Delta B\Gamma}$, $\widehat{AB\Delta}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$.

Λύση

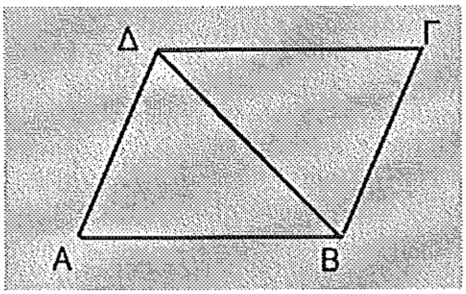
α) Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Άρα η $\hat{\Gamma} = \hat{A}$ δηλαδή $\hat{\Gamma} = 68°$.
Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ.

Άρα $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι παραπληρωματικές.

Οπότε:

$\hat{\Delta} = 180° - \hat{A}$ ή $\hat{\Delta} = 180° - 68° = 112°$
Τότε και η $\hat{B}$ που είναι απέναντι από την $\hat{\Delta}$ θα ισούται με 112°. Άρα έχουμε:
$\hat{A} = 68°$, $\hat{B} = 112°$, $\hat{\Gamma} = 68°$, $\hat{\Delta} = 112°$.



β) Φέρουμε την ΔΒ. Αφού η $\widehat{A\Delta B} = 98°$, η $\widehat{\Delta B\Gamma}$ θα ισούται με 98°, γιατί είναι εντός εναλλάξ με την $\widehat{A\Delta B}$. Η $\widehat{AB\Delta}$ υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε την $\widehat{\Delta B\Gamma}$ από την $\widehat{AB\Gamma}$. Δηλαδή :

$\widehat{AB\Delta} = 112° - 98° = 14°$.

Τέλος και η $\widehat{B\Delta\Gamma} = 14°$ γιατί είναι εντός εναλλάξ με την $\widehat{AB\Delta}$.

8. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 5 cm, ΒΓ = 8cm και γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 110°$. Να προεκτείνετε την ΑΒ προς το μέρος του Β και να πάρετε ένα τμήμα ΒΕ = 5 cm πάνω σ' αυτήν. Από το Ε να φέρετε την ΕΖ κάθετη στην ΒΓ.

Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{BEZ}$.

Λύση

Η γωνία $\widehat{EBZ}$ είναι παραπληρωματική με την $\widehat{AB\Gamma}$. Άρα είναι :

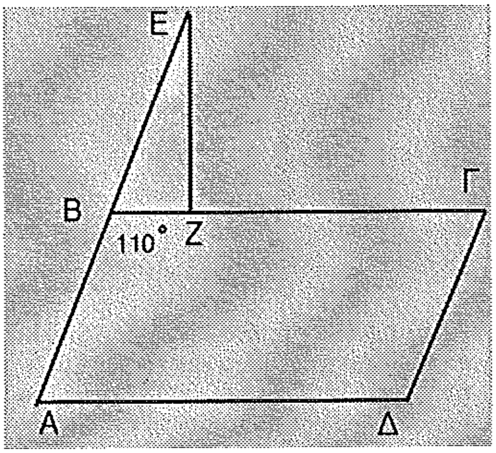
$\widehat{EBZ} = 180° - 110° = 70°$.

Το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο στο Ζ και η μια γωνία του $\widehat{EBZ} = 70°$.

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180° .
Άρα η γωνία:

$\widehat{BEZ} = 180° - (90° + 70°) =$

$= 180° - 160° = 20°$

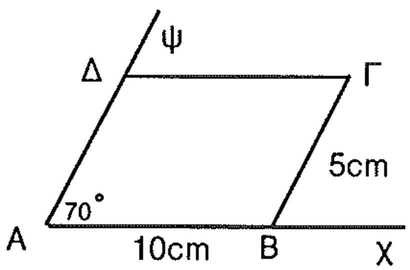


Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ώστε η ΑΒ = 10 cm, η ΒΓ = 5 cm και η γωνία Α = 62°. Μετά να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του.

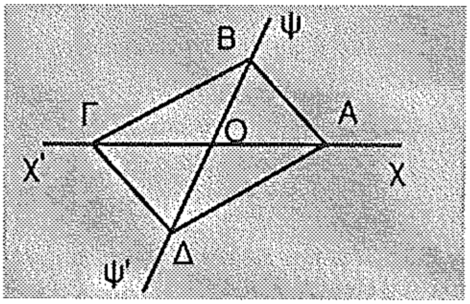
Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Άρα αφού η ΒΓ = 5 cm θα είναι και η απέναντί της ΑΔ = 5 cm. Κατασκευάζουμε λοιπον γωνία $\widehat{\chi A\psi} = 62°$ και στις πλευρές της Οχ, Οψ παίρνουμε τμήματα ΑΒ = 10 cm και ΑΔ = 5cm. Από το Δ φέρουμε παράλληλη ....



2. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο που οι διαγώνιές του να έχουν μήκη 12 cm και 8 cm και να σχηματίζουν γωνία 65°.

Λύση



Γράφουμε μια γωνία $\widehat{xOψ} = 65°$ και

προεκτείνουμε τις πλευρές της Οχ, Οψ προς το μέρος του Ο, και ονομάζουμε Οχ' και Οψ' τις προεκτάσεις αυτές αντίστοιχα. Πάνω στην Οχ παίρνουμε τμήμα ΟΑ = 6 cm και πάνω στην Οχ' τμήμα ΟΓ = 6 cm επίσης. Η ΑΓ είναι 12 cm. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε πάνω στην Οψ, τμήμα ΟΒ = 4 cm και πάνω στην Οψ' τμήμα ΟΔ = 4 cm. Η ΒΔ = 8 cm. Αυτές είναι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου...

3. Ένα παραλληλόγραμμο και ένα τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 7 cm και η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι 6 cm, να βρεθεί η άλλη πλευρά του παραλληλογράμμου.

Λύση

Ονομάζουμε x την άγνωστη πλευρά του παραλληλογράμμου. Τότε η περίμετρός του είναι: $2x + 2 \cdot 6 = (2x + 12)$ cm.
Η περίμετρος όμως του τετραγώνου είναι: $4 \cdot 7 = 28$ cm, αφού η πλευρά του είναι 7 cm. Οι δύο περίμετροι όμως είναι ίσοι. Άρα: $2x + 12 = 28$ ...

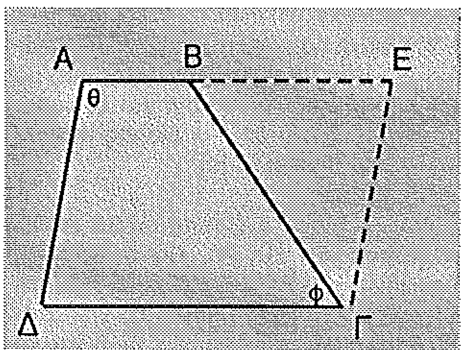
4. Οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι 4,5 cm και 7,5 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του ρόμβου, που έχει την ίδια περίμετρο με το ορθογώνιο.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι:
$4{,}5 + 7{,}5 + 4{,}5 + 7{,}5 = 24$ cm.
Άρα και η περίμετρος του ρόμβου είναι 24 cm ....

5. Στο παρακάτω σχήμα το τεράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Από την κορυφή Γ φέραμε τη ΓΕ παράλληλη στην πλευρά ΑΔ, που τέμνει τη μικρή βάση ΑΒ στο σημείο Ε. Αν φ = 55° και θ = 110° να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΕΓ.

Λύση



Οι βάσεις ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες. Το τετράπλευρο λοιπόν ΑΕΓΔ που σχηματίζεται είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Έτσι έχουμε...

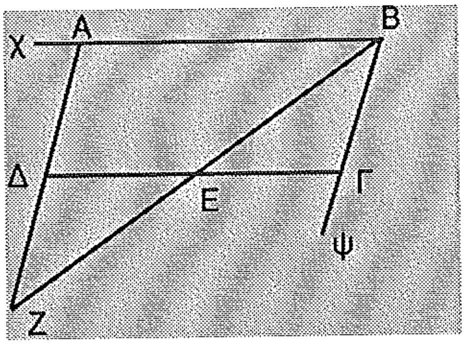
6. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Β = 76°, ΒΑ = 5 cm και ΒΓ = 2, 5 cm. Αν η διχοτόμος της Β τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΔ στο σημείο Ζ, να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του σχήματος.

Λύση

Πρώτα κατασκευάζουμε μία γωνία

$\widehat{\chi B\psi} = 76^\circ$ και πάνω στις πλευρές της

Bχ και Bψ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα BA = 5 cm και BΓ = 2,5 cm. Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά Bψ και από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά Bχ. Έστω ότι οι δυο παράλληλες τέμνονται στο σημείο Δ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο. Φέρνουμε και τη διχοτόμο BE της B η οποία τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς ΑΔ στο σημείο Z.
Τότε:



$\widehat{EB\Gamma} = \widehat{EBA} = 38^\circ$

$\widehat{ABE} = \widehat{BE\Gamma} = 38^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ...

$\widehat{BE\Gamma} = \widehat{\Delta EZ} = 38^\circ$ ως κατακορυφήν ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές 5 cm και 12 cm και περιεχόμενη γωνία ίση με 130°.

2. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο που να έχει διαγώνιες ίσες με 6 cm η καθεμιά και να σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι αυτό;

3. Να σχεδιάσετε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις AB και ΓΔ. Να φέρετε τις διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ και έστω, ότι τέμνονται στο E. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα μέσα M, N των βάσεων AB και ΓΔ αντίστοιχα. Να προεκτείνετε τις μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, και ΒΓ. Να φέρετε και την ευθεία MN. Τι παρατηρείτε;

4. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ = 6 cm και να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετό του. Να ονομάσετε M το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με το ΑΓ. Εκατέρωθεν του M και πάνω στη μεσοκάθετο να πάρετε τμήματα MB = MΔ =4 cm. Να συγκρίνετε τα τμήματα AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΒΓΔ;

5. Να κατασκευαστεί ρόμβος ΑΒΓΔ, όταν γνωρίζουμε ότι η ΒΔ είναι διπλάσια από τη διαγώνιο ΑΓ = 2 cm.

6. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με ακτίνα ρ = 3 cm. Να κατασκευάσετε δύο κάθετες διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ. Με μέτρηση να επαληθεύσετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τις διαγώνιές του;

7. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με A = 4,2 cm, AB = 3,4 cm και ΑΓ = 5,3 cm. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο

ΚΛΜΝ με $\widehat{K} = \widehat{A}$, ΚΛ = AB και KN = ΑΓ.

8. Με το μοιρογνωμόνιο να σχεδιάσετε μία γωνία φ = 56°. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με μεγάλη βάση AB = 4,5 cm και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\varphi}$.

Αν το ύψος του τραπεζίου είναι 2,5 cm, να συγκρίνετε μεταξύ τους τις μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Τι παρατηρείτε; Να σχεδιάσετε και τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του τραπεζίου που κατασκευάσατε και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

9. Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου ισούται με την περίμετρο ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 8 cm και 16 cm. Να βρεθούν οι πλευρές του παραλληλογράμμου, αν η μία είναι τριπλάσια από την άλλη.

10. Τέσσερα πολεμικά πλοία Α, Β, Γ, Δ πλέουν σε σχηματισμό έτσι ώστε, το Α απέχει 100 m από τα Β, Γ και Δ και οι γωνίες $\widehat{ΔΑΓ}$ και $\widehat{ΓΑΒ}$ είναι από 60°.

Ένα εχθρικό πλοίο Ε που βρίσκεται στην προέκταση της ΒΑ και σε απόσταση 100 m από το Α ρίχνει προς το σχηματισμό μια τορπίλλη που η τροχιά της συμπίπτει με τη διχοτόμο της γωνίας ΑΕΔ. Ποιο πλοίο του σχηματισμού θα πλήξει η τορπίλλη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

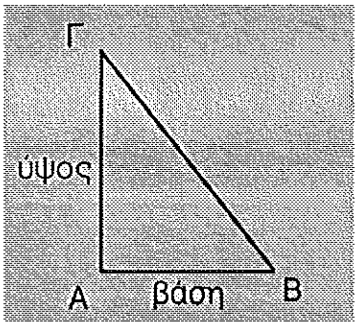
7. 6 Εμβαδό τριγώνου

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Με τι είναι ίσο το εμβαδό Ε ενός ορθογωνίου τριγώνου;

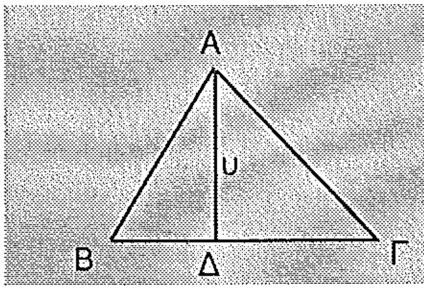
1. Το εμβαδό Ε ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των καθέτων πλευρών του.



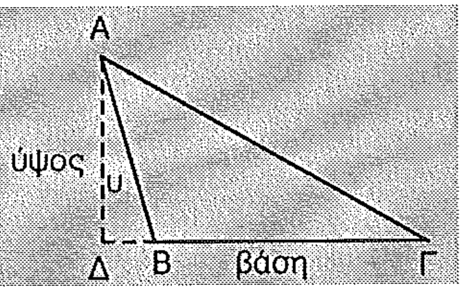
$$Ε = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ$$

2. Με τι είναι ίσο το εμβαδό Ε ενός τυχαίου τριγώνου;

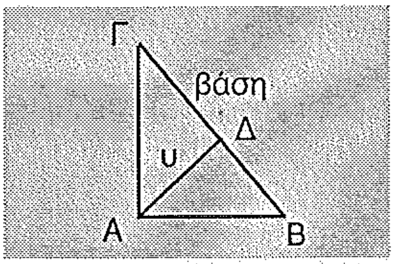
2. Το εμβαδό Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



$E = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot υ$



$E = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot υ$



$E = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot υ$

Σημείωση:

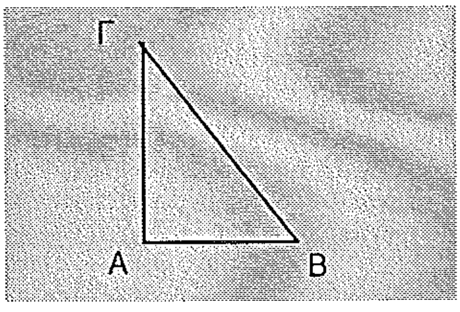
Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ίδιο ανεξάρτητα από τη βάση και το αντίστοιχο ύψος που θα διαλέξουμε για να το υπολογίσουμε.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 3 cm και 4 cm. Να βρείτε το εμβαδό του.

Λύση

$$E = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} 3cm \cdot 4cm = 6 \ cm^2$$

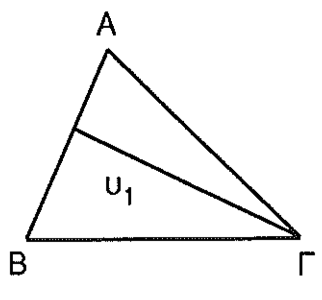


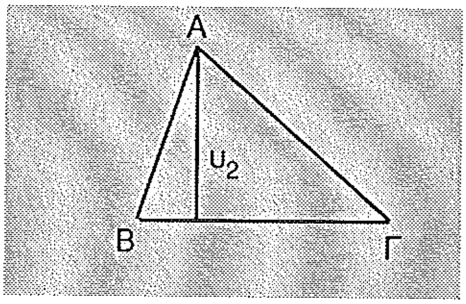
2. Να υπολογίσετε το εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ αν:

α) ΑΒ = 4 cm και το αντίστοιχο ύψος $υ_1$ = 7 cm.

β) ΑΓ = 8 cm και το αντίστοιχο ύψος $υ_2$ = 6 cm.

Λύση



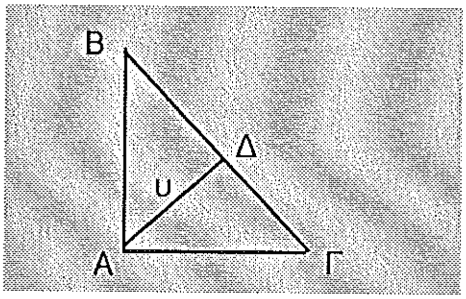


α) $E_1 = \frac{1}{2}\ AB \cdot u_1 = \frac{1}{2}\ 4\ cm \cdot 7\ cm = 14\ cm^2$

β) $E_2 = \frac{1}{2}\ B\Gamma \cdot u_2 = \frac{1}{2}\ 8\ cm \cdot 6\ cm = 24\ cm^2$

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 6 cm, υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm . Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ.

Λύση



Αν πάρουμε σαν βάση την πλευρά ΑΒ και σαν ύψος την ΑΓ τότε, το εμβαδό του τριγώνου είναι:

$$E = \frac{1}{2}\ 8\ cm \cdot 6\ cm = 24\ cm^2$$

Αν πάρουμε σαν βάση την υποτείνουσα ΒΓ, τότε το ύψος θα είναι το ΑΔ = υ. Επομένως το εμβαδό θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}\ 10 \cdot u \text{ ή } 24 = \frac{10}{2} \cdot u$$

$$24 = 5 \cdot u \text{ ή } u = \frac{24}{5} \text{ ή } u = 4{,}8\ cm$$

4. Να βρεθεί το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η μία κάθετη πλευρά είναι 12 dm και η άλλη κάθετη πλευρά είναι τα 4/3 της πρώτης.

Λύση

Αφού η μία κάθετη πλευρά είναι 12 dm, η άλλη θα είναι:

$$\frac{4}{3} \cdot 12 = 16\ dm$$

Άρα το εμβαδό θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96\ dm^2$$

5. Να βρεθεί το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η μία κάθετη πλευρά είναι 4,5 m και ότι η άλλη είναι τα 40/9 αυτής.

Λύση

Αφού η μία κάθετη πλευρά είναι 4,5 m η άλλη θα είναι:

$$4{,}5 \cdot \frac{40}{9} = 20\ m$$

Άρα το εμβαδό του τριγώνου θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4{,}5 = 45\ m^2$$

6. Να βρεθεί το εμβαδό ενός τριγώνου βάσης 38 cm και ύψους 7/19 της βάσης.

Λύση

Το ύψος του τριγώνου θα είναι:

$$u = \frac{7}{19} \cdot 38 = 14\ cm$$

Άρα το εμβαδό του τριγώνου θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot u = \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 14 = 266\ cm^2$$

7. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 128 cm και η βάση του είναι 8 cm. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος που αντιστοιχεί σ' αυτήν είναι 59,8 cm, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου και τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές.

Λύση

Το εμβαδό του τριγώνου θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$$

Αν πάρουμε σαν βάση β = 8 cm και ύψος υ = 59,8 cm, τότε το εμβαδό θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 59{,}8 = 239{,}2 \quad cm^2$$

Αν x είναι οι ίσες πλευρές του τριγώνου τότε η περίμετρος θα είναι:
$x + x + 8 = 128$ ή
$2x + 8 = 128$ ή
$2x = 128 - 8$ ή
$2x = 120$ ή $x = 120 : 2$ ή $x = 60$ cm.
Αν πάρουμε λοιπόν σαν βάση β = 60 cm και το ύψος υ που αντιστοιχεί σ' αυτήν, τότε το εμβαδό θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \upsilon \text{ ή } 239{,}2 = \frac{60}{2} \cdot \upsilon \text{ ή}$$

$$239{,}2 = 30 \cdot \upsilon \text{ ή } \upsilon = \frac{239{,}2}{30} \text{ ή}$$

$$\upsilon = 7{,}97 \text{ cm}$$

8. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδό του είναι 540 dm² και τα ύψη που αντιστοιχούν σε κάθε πλευρά α, β, γ είναι αντίστοιχα:

$\upsilon_\alpha = 27$ dm , $\upsilon_\beta = 18$ dm , $\upsilon_\gamma = 36$ dm .

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$$

Αν πάρουμε σαν βάση την πλευρά α και σαν ύψος το υ_α, έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\, \alpha \cdot \upsilon_\alpha \text{ ή } 540 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 27 \text{ ή}$$

$$540 = \frac{27 \cdot \alpha}{2} \text{ ή } \alpha = \frac{540 \cdot 2}{27} \text{ ή}$$

α = 40 dm.
Ομοίως για τις άλλες πλευρές β και γ έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\, \beta \cdot \upsilon_\beta \text{ ή } 540 = \frac{18 \cdot \beta}{2} \text{ ή}$$

$$\beta = \frac{540 \cdot 2}{18} \text{ ή } \beta = 60 \text{ dm}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \upsilon_\gamma \text{ ή } 540 = \frac{36 \cdot \gamma}{2} \text{ ή}$$

$$\gamma = \frac{540 \cdot 2}{36} \text{ ή } \gamma = 30 \text{ dm}$$

Άρα η περίμετρος είναι:
40 + 60 + 30 = 130 dm.

9. Υπολογίστε την περίμετρο ενός ισοσκελούς τριγώνου αν γνωρίζετε ότι έχει εμβαδό 622,08 m² και ύψη 28,8 m, 36 m και 36 m.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon \quad \text{ή} \quad 622{,}08 = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot 28{,}8$$

$$\text{ή } \beta = \frac{2}{28{,}8} \cdot 622{,}08 \quad \text{ή} \quad \beta = 43{,}2 \text{ m.}$$

Επίσης θα έχουμε αν πάρουμε σαν βάση β' μια από τις ίσες πλευρές:

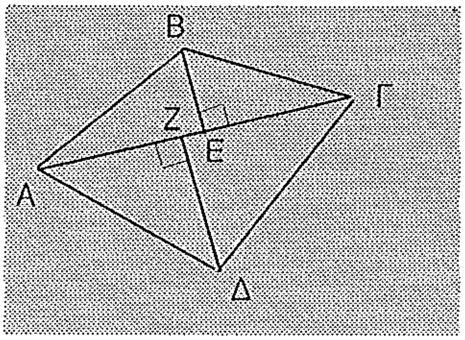
$$622{,}08 = \frac{1}{2} \cdot \beta' \cdot 36 \quad \text{ή}$$

$$\beta' = 622{,}08 \cdot \frac{2}{36} \text{ ή } \beta' = 34{,}56 \text{ m.}$$

Επομένως η κάθε μια από τις ίσες πλευρές θα είναι 34,56 m.
Άρα η περίμετρος θα είναι:
34,56 + 34,56 + 43,2 = 112,32 m.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος, αν ΑΓ = 8 cm, ΒΕ = 5 cm, ΔΖ = 3 cm.

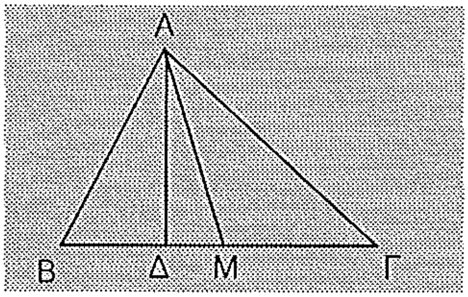


Λύση

Το εμβαδό του σχήματος βρίσκεται αν προσθέσουμε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ, στα οποία γνωρίζουμε τα ύψη και τις βάσεις. Δηλαδή....

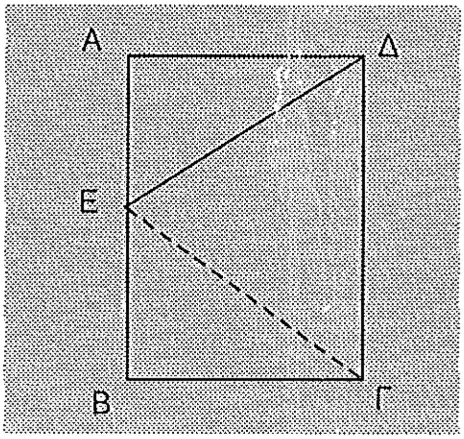
2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΓ και ΑΜΒ και να τα συγκρίνετε.

Λύση



Φέρουμε τα ύψη των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΜΓ και παρατηρούμε ότι.....

3.Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του πολυγώνου ΒΓΔΕ, αν ΑΔ = 15 cm, ΑΒ = 24 cm και ΑΕ = 1/2 ΑΒ.



Λύση

Φέρουμε την ΕΓ. Το ζητούμενο εμβαδό θα υπολογιστεί από το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΕΒΓ, ΕΔΓ.
Έχουμε: ...

4. Να υπολογίσετε τις πλευρές ενός τριγώνου με εμβαδό 96 cm² του οποίου τα ύψη είναι: $υ_1$ = 16 cm, $υ_2$ = 12 cm, $υ_3$ = 6 cm.

Λύση

Έστω $α_1$, $α_2$, $α_3$ οι τρεις πλευρές του τριγώνου. Τότε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot α_1 \cdot υ_1 \text{ ή } 96 = \frac{1}{2} \cdot α_1 \cdot 16 \text{ ή}$$

$$96 \cdot 2 = 16 \cdot α_1 \text{ ή } α_1 = 12 \text{ cm.}$$

Επίσης:

$$E = \frac{1}{2} \cdot α_2 \cdot υ_2 \text{ ή } 96 = \frac{1}{2} \cdot α_2 \cdot 12 \text{ ή ...}$$

5. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τριγώνου του οποίου το ύψος είναι 14 cm και η βάση που αντιστοιχεί σ' αυτό είναι τα 3/2 του ύψους του.

Λύση

Η βάση που αντιστοιχεί στο ύψος αυτό είναι: $\frac{3}{2} \cdot 14 = 21$ cm. Άρα το εμβαδό είναι..

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η βάση του που είναι 42 dm είναι τα 7/6 του αντίστοιχου προς αυτήν ύψους.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τριγώνου, του οποίου το ύψος είναι 28 m και η βάση που αντιστοιχεί σ' αυτό είναι τα 9/4 του ύψους του. Στη συνέχεια να υπολογίσετε και το ύψος που αντιστοιχεί σε μια πλευρά του που είναι 36 cm.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η μία κάθετη πλευρά είναι τα 3/5 του αθροίσματος των καθέτων πλευρών που είναι 20,5 m.

4. Υπολογίστε τη μεγαλύτερη κάθετο ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν ξέρετε ότι έχει εμβαδό 1920 cm² και η μικρότερη κάθετη είναι 40 cm.

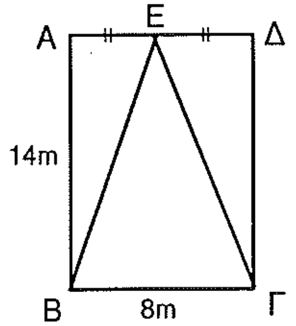
5. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός τριγώνου για το οποίο γνωρίζετε ότι:
- έχει εμβαδό 3024 cm²,
- τα ύψη που αντιστοιχούν στις τρεις πλευρές του είναι αντίστοιχα 72 cm, 56 cm και 112 cm.

6. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η βάση είναι 40 m και το ύψος που αντιστοιχεί σ' αυτήν 21 m. Δίνεται ότι τα ύψη των άλλων πλευρών είναι 28, 965 m.

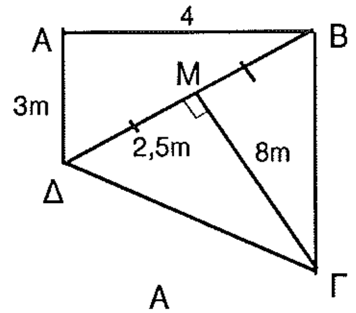
7. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 2169 m και η βάση του είναι τα 2/9 της περιμέτρου. Αν το εμβαδό του είναι 203.283,5 m², να βρεθούν τα ύψη του τριγώνου.

8. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:
α) ΒΕΓ , β) ΑΔΓΒ , γ) ΑΔΕ, ΗΚΖ

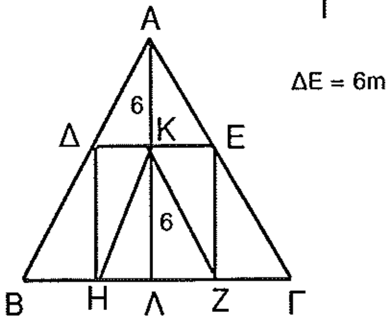
α)



β)



γ)



7. 7 Εμβαδό παραλληλογράμμου

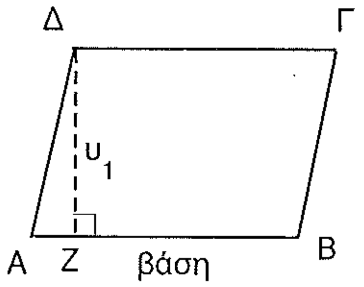
Θεωρία

Ερωτήσεις

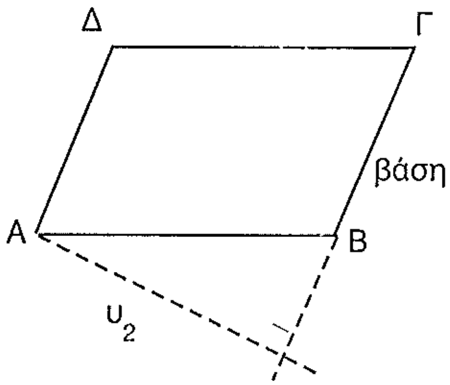
1. Με τι είναι ίσο το εμβαδό Ε ενός παραλληλογράμμου;

Απαντήσεις

1. Το εμβαδό Ε ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.



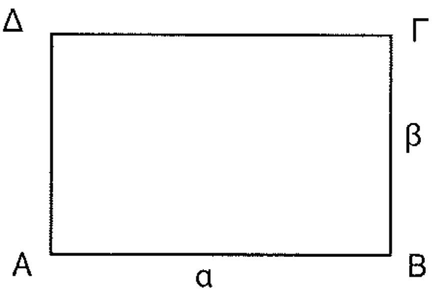
$E = AB \cdot υ_1$



$E = BΓ \cdot υ_2$

2. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό Ε ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου;

2. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό Ε ενός ορθογώνιου, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις δύο διαστάσεις του.



$$E = α \, . \, β$$

7.8 Εμβαδό τραπεζίου

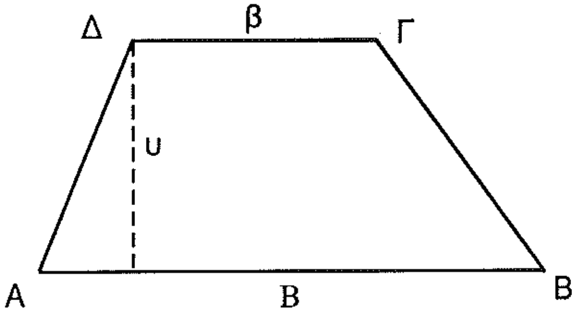
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με τι είναι ίσο το εμβαδό Ε ενός τραπεζίου;

Απαντήσεις

1. Το εμβαδό Ε ενός τραπεζίου είναι ίσο με το ημιάθροισμα των βάσεων του επί το ύψος του.



Ονομάζουμε Β το μήκος της μεγάλης βάσης ΑΒ και β το μήκος της μικρής βάσης ΓΔ. Τότε το εμβαδό Ε του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot u}{2}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ένα παραλληλόγραμμο έχει βάση 27 cm και ύψος τα 4/9 της βάσης. Να βρεθεί το εμβαδό του.

Λύση

Το ύψος του παραλληλογράμμου είναι:

$\frac{4}{9} \cdot 27 = 12$ cm

Άρα το εμβαδό του είναι:
$E = \beta \cdot u$ ή $E = 12 \cdot 27 = 324$ cm².

2. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 66 cm και η μία πλευρά του είναι διπλάσια της άλλης. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου, αν γνωρίζετε ότι το ύψος προς τη μεγαλύτερη πλευρά είναι 9,8 cm.

Λύση

Αν x η μικρότερη πλευρά, η μεγαλύτερη θα είναι 2x και η περίμετρος είναι:
$x + x + 2x + 2x = 6x$.
Άρα $6x = 66$ ή $x = 66 : 6$ ή $x = 11$ cm
οπότε η μεγαλύτερη πλευρά είναι:
$2 \cdot 11 = 22$ cm,
και το εμβαδό του παραλληλογράμμου είναι:
$E = \beta \cdot u$ ή $E = 22 \cdot 9{,}8 = 215{,}6$ cm².

3. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός παραλληλογράμμου, αν γνωρίζετε ότι: έχει εμβαδό 201,60 cm^2 , το ύψος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά είναι 10,5 cm και το ύψος που αντιστοιχεί στη μικρότερη πλευρά είναι τα 32/21 του προηγούμενου ύψους.

Λύση

Το εμβαδό είναι: Ε = β · υ. Αν πάρουμε σαν ύψος το 10,5 cm έχουμε:
201,60 = β · 10,5. Άρα:

$$\beta = \frac{201,6}{10,5} = 19,2 \text{ cm}$$

Το άλλο ύψος είναι:

$$\frac{32}{21} \cdot 10,5 = 16 \text{ cm}$$

Για να υπολογίσουμε την άλλη βάση έχουμε: 201,6 = β · 16

$$\text{ή } \beta = \frac{201,6}{16} = 12,6 \text{ cm}$$

Άρα η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι:
2 · 19,2 + 2 · 12,6 = 38,4 + 25,2 = 63,6 cm.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου, αν γνωρίζετε ότι: Η βάση είναι τα 7/41 της πλευράς ενός τετραγώνου περιμέτρου 82 m. Το ύψος του είναι τα 5/6 του ύψους ενός τριγώνου εμβαδού 34,56 m^2 και βάσης 7,2 m.

Λύση

Εφ' όσον η περίμετρος του τετραγώνου είναι 82 m η πλευρά του, θα είναι:
82 : 4 = 20,5 m.
Άρα η βάση του παραλληλογράμμου θα είναι:

$$\frac{7}{41} \cdot 20,5 = 3,5 \text{ m}$$

Το ύψος του τριγώνου βρίσκεται:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon \text{ ή } 34,56 = \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot \upsilon \text{ ή}$$

$$\upsilon = \frac{34,56 \cdot 2}{7,2} = 9,6 \text{ m}$$

Άρα το ύψος του παραλληλογράμμου θα είναι:

$$\frac{5}{6} \cdot 9,6 = 8 \text{ m}$$

Άρα το εμβαδό του παραλληλογράμμου θα είναι:
Ε = β · υ ή Ε = 3,5 · 8 = 28 cm^2.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τραπεζίου όταν δίνονται: Β = 3,5 m , β = 2,4 m , υ = 3 m.

Λύση

Έχουμε ότι το εμβαδό τραπεζίου είναι:

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2} \text{ ή}$$

$$E = \frac{(3,5 + 2,4) \cdot 3}{2} = 8,85 \text{ m}^2$$

6. Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τραπεζίου, αν γνωρίζετε ότι η μικρή βάση είναι 12,6 dm, η μεγάλη βάση είναι τα 5/3 της μικρής και το ύψος είναι τα 4/7 της μεγάλης.

Λύση

Έχουμε: β = 12,6 dm, άρα

$$B = \frac{5}{3} \cdot 12,6 = 5 \cdot 4,2 = 21 \text{ dm}$$

$$\text{και } \upsilon = \frac{4}{7} \cdot 21 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ dm}$$

Άρα το εμβαδό είναι:

$$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(12,6 + 21) \cdot 12}{2} =$$

$$= \frac{33,6 \cdot 12}{2} = 201,6 \text{ cm}^2$$

7. Να υπολογισθούν οι βάσεις ενός τραπεζίου, αν γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδό 279 dm^2, η μία βάση είναι διπλά-

σια της άλλης και έχει ύψος $υ = 15,5$ dm.

Λύση

Αν x το μήκος της μικρής πλευράς, η μεγάλη θα είναι 2x.
Αντικαθιστούμε στον τύπο του εμβαδού $Β = 2x$, $β = x$, $υ = 15,5$ και $Ε = 279$ dm^2. Έτσι έχουμε:

$$279 = \frac{(2x + x) \cdot 15,5}{2}$$

ή $279 = (2x + x) \cdot 7,75$
ή $2x + x = 279 : 7,75$
ή $3x = 36$
ή $x = 36 : 3$ ή $x = 12$.
Άρα η μικρή βάση είναι: $β = 2$ dm και η μεγάλη βάση είναι: $Β = 2 \cdot 12 = 24$ dm.

8. Να υπολογιστεί το ύψος ενός τραπεζίου, του οποίου το εμβαδό είναι 600 cm^2, η μεγάλη βάση είναι 56 cm και η μικρή βάση είναι τα 5/7 της μεγάλης.

Λύση

Έχουμε ότι: $Β = 56$ cm,

$$β = \frac{5}{7} \cdot 56 \text{ ή } β = 5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}$$

και $Ε = 600$ cm^2.
Αντικαθιστούμε στον τύπο:

$$Ε = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$$

και έχουμε:

$$600 = \frac{(56 + 40) \cdot υ}{2} \text{ ή } 600 = \frac{96 \cdot υ}{2}$$

ή $600 = 48 \cdot υ$ ή $υ = 600 : 48$
ή $υ = 12,5$ m.

9. Ένα τραπέζιο έχει εμβαδό 330 m^2 και ύψος 12 m. Να βρείτε τις βάσεις του, αν γνωρίζετε ότι η μεγαλύτερη είναι τα 7/4 της μικρότερης.

Λύση

Έχουμε λοιπόν:

$$Β = \frac{7}{4} β \quad \text{άρα}$$

$$Β + β = \frac{7}{4} β + β = \frac{7}{4} β + \frac{4}{4} β = \frac{11}{4} β$$

και αντικαθιστούμε στον τύπο:

$$Ε = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$$

$$330 = \frac{\frac{11}{4} β \cdot 12}{2} \text{ ή } 330 = \frac{11}{4} \cdot β \cdot 6$$

$$\text{ή } 330 = \frac{66}{4} \cdot β \text{ ή } β = \frac{330 \cdot 4}{66}$$

ή $β = 20$ m

$$\text{Άρα } Β = \frac{7}{4} \cdot 20 \text{ ή } Β = 35 \text{ m}$$

10. Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι τριπλάσια από τη μικρότερη. Αν το εμβαδό του τραπεζίου είναι 4800 cm^2 και το ύψος του είναι 24 cm, να υπολογίσετε τις βάσεις.

Λύση

Αν η μικρή βάση είναι $β = x$, η μεγάλη είναι $Β = 3x$. Άρα:

$$Ε = \frac{(Β + β) \cdot υ}{2} \text{ ή}$$

$$4800 = \frac{(3x + x) \cdot 24}{2} \text{ ή}$$

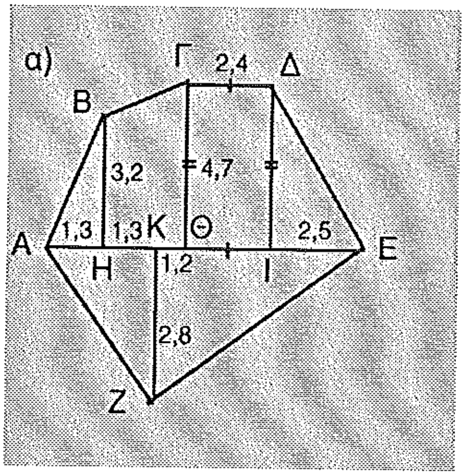
$$4.800 = 4x \cdot 12 \text{ ή}$$

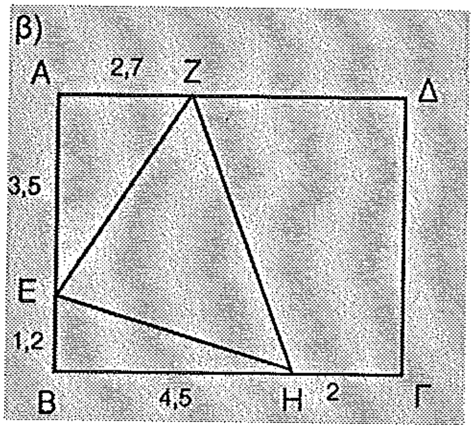
$$4x = \frac{4800}{12} \text{ ή } 4x = 400 \text{ ή}$$

$$x = \frac{400}{4} \text{ ή } x = 100 \text{ cm}$$

Άρα η μικρή βάση είναι $β = 100$ cm και η μεγάλη είναι $Β = 3 \cdot 100 = 300$ cm.

11. Να υπολογίσετε το εμβαδό των σχημάτων:
α) ΑΒΓΔΕΖ
β) ΕΖΗ





Λύση

α) Το εμβαδό του σχήματος ΑΒΓΔΕΖ βρίσκεται σαν το άθροισμα των εμβαδών των ΑΒΗ, ΒΓΘΗ, ΓΔΙΘ, ΔΙΕ και ΑΖΕ. Οπότε έχουμε:

$$\text{Εμβ (ΑΒΗ)} = \frac{3,2 \cdot 1,3}{2} = 2,08 \text{ τετρ. μονάδ.}$$

$$\text{Εμβ (ΒΓΘΗ)} = \frac{(\text{ΒΗ} + \text{ΓΘ}) \cdot \text{ΗΘ}}{2} =$$

$$\frac{(3,2 + 4,7) \cdot 2,5}{2} = 9,875 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Εμβ (ΓΔΘΙ)} = 4,7 \cdot 2,4 = 11,28 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Εμβ (ΔΕΙ)} = \frac{4,7 \cdot 2,5}{2} = 5,875 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Εμβ (ΑΖΕ)} = \frac{\text{ΑΕ} \cdot \text{ΖΚ}}{2} =$$

$$= \frac{(1,3 + 1,3 + 1,2 + 2,4 + 2,5) \, . \, 2,8}{2} =$$

$$= 12,18 \text{ τ.μ.}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:
Ε = Εμβ (ΑΒΗ) + Εμβ (ΒΓΘΗ) + Εμβ(ΓΔΘΙ) + Εμβ (ΔΕΙ) + Εμβ (ΑΖΕ)
= 2,08 + 9,875 + 11,28 + 5,875 + +12,18 = 41,29 τ.μ.

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΕΖΗ βρίσκεται, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ΑΕΖ και ΒΕΗ καθώς και του τραπεζίου ΖΔΓΗ.
Έχουμε λοιπόν ότι:

Εμβ (ΑΒΓΔ) = ΑΒ · ΒΓ =
(3,5 + 1,2) · (4,5 + 2) = 4,7 · 6,5 = 30,55 τ.μ.

$$\text{Εμβ (ΑΖΕ)} = \frac{\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΕ}}{2} = \frac{2,7 \cdot 3,5}{2} =$$

$$= \frac{9,45}{2} = 4,725 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Εμβ (ΒΕΗ)} = \frac{\text{ΒΕ} \cdot \text{ΒΗ}}{2} = \frac{1,2 \cdot 4,5}{2} =$$

$$= \frac{5,4}{2} = 2,7 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Εμβ (ΖΔΓΗ)} = \frac{(\text{ΖΔ} + \text{ΓΗ}) \cdot \text{ΔΓ}}{2}$$

η ΖΛ = ΑΔ - ΑΖ = 6,5 - 2,7 = 3,8
και ΔΓ = ΑΒ = 3,5 + 1,2 = 4,7
Άρα:

$$\text{Εμβ (ΖΔΓΗ)} = \frac{(3,8 + 2) \cdot 4,7}{2} =$$

$$= \frac{5,8 \cdot 4,7}{2} = 13,63 \text{ τ.μ.}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

Εμβ (ΖΕΗ) = Εμβ (ΑΒΓΔ) - [Εμβ (ΑΕΖ) + Εμβ (ΒΕΗ) + Εμβ (ΖΔΓΗ)]=
= 30,55 - (4,725 + 2,7 +13,63)
= 30,55 - 21,055 =
= 9,495 τ.μ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το εμβαδό παραλληλογράμμου, αν:
α) η βάση του είναι 8,2 cm και το ύψος του 7 cm.
β) η βάση του είναι 3,4 dm και το ύψος του 2,5 dm.
γ) η βάση του είναι 8,25 cm και το ύψος 3,75 cm.

Λύση

Έχουμε ότι Ε = β · υ, άρα:
α) Ε = 8,2 · 7 = ...
β) Ε = 3,4 · 2,5 = ...
γ) Ε = ...

2. Να βρεθεί το εμβαδό ενός τραπεζίου, όταν δίνονται:
α) Β = 7,9 cm, β = 3,5 cm και υ = 3,9 cm.
β) Β = 27 mm, β = 1,2 cm και υ = 2,3 cm.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

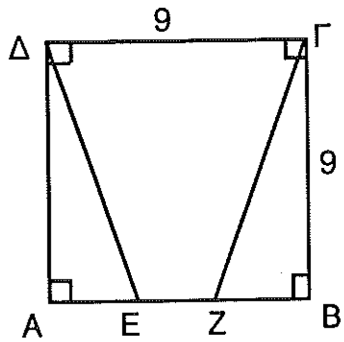
$$E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$$

α) Άρα αντικαθιστούμε στον τύπο και έχουμε:

$$E = \frac{(7{,}9+3{,}5)\cdot 3{,}9}{2} = \dots$$

β) Μετατρέπουμε τα cm σε mm και αντικαθιστούμε στον τύπο....

3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του σχήματος ΓΔΕΖ, αν γνωρίζετε ότι ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ = 3 cm.



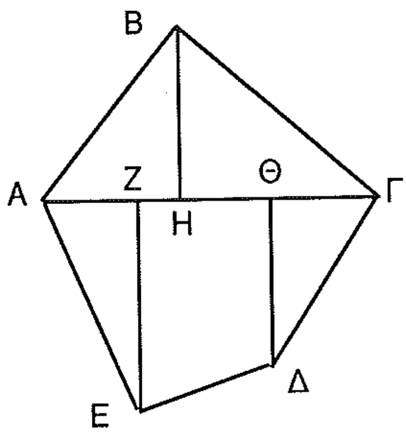
Λύση

<u>α) τρόπος:</u>
Υπολογίζουμε το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ).
Ε = (ΑΒ)² = 9² = 81 cm²
και από αυτό αφαιρούμε τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ....

<u>β) τρόπος:</u>
Υπολογίζουμε απ' ευθείας το εμβαδό του τραπεζίου ΔΕΖΓ όταν:
Β = ΔΓ = 9 cm,
β = ΕΖ = 3 cm, **υ** = 9 cm και αντικαθιστούμε στον τύπο:

$$E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$$

4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος:

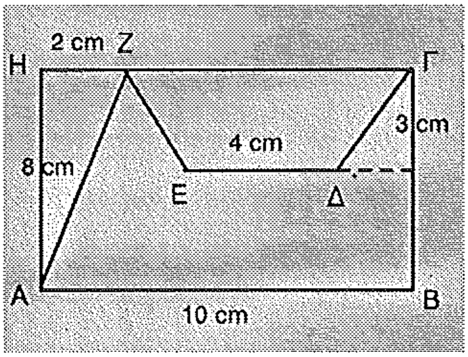


όπου: ΑΓ = 24 cm, ΒΗ = 7,5 cm,
ΔΘ = 8 cm, ΕΖ = ΔΘ + 2 cm,
ΘΓ = 6 cm και ΑΖ = 1/2 ΘΓ

Λύση

Υπολογίζουμε το εμβαδό του σχήματος σαν το άθροισμα των εμβαδών των ΑΒΗ, ΒΗΓ, ΑΖΕ, ΖΕΔΘ, και ΒΓΔ, των οποίων βρίσκουμε τις πλευρές που χρειαζόμαστε....

5. Να υπολογιστεί το εμβαδό του σχήματος ΑΒΓΔΕΖ.

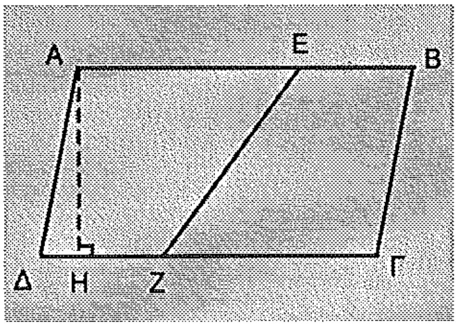


Λύση

Υπολογίζουμε το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΗ, το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΗΖΑ και του τραπεζίου ΖΓΔΕ...

6. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με βάση ΑΒ = 18 cm και ύψος 7 cm. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΕ = 12 cm και ΔΖ = 6 cm. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΔ και ΕΒΓΖ.

Λύση



Βρίσκουμε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΕΖΔ του οποίου γνωρίζουμε όλα τα στοιχεία. Κατόπιν υπολογίζουμε τα στοιχεία του άλλου τραπεζίου.
Έχουμε:
ΖΓ = ΔΓ - ΔΖ = ...
και ΕΒ = ΑΒ - ΑΕ = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθεί το εμβαδό παραλληλογράμμου αν είναι γνωστό ότι:
α) η βάση του είναι 3,4 cm και το ύψος του 2,9 cm,
β) η βάση του είναι 5,3 dm και το ύψος του 17,8 cm,
γ) η βάση του είναι 28 cm και το ύψος του 125 mm.

2. Να βρεθεί το εμβαδό τραπεζίου όταν δίνονται:
α) Β = 8,9 cm β = 3,4 cm υ = 2 cm
β) Β = 5,2 cm β = 45,3 mm υ = 6 cm
γ) Β = 6,3 mm β = 0,5 cm υ = 3 cm

3. Ένα τρίγωνο και ένα παραλληλόγραμμο έχουν την ίδια βάση και ίσα εμβαδά. Το ύψος του παραλληλογράμμου είναι 8 cm. Πόσο είναι το ύψος του τριγώνου;

4. Ένα παραλληλόγραμμο έχει μια πλευρά τριπλάσια από την άλλη και περίμετρο 16cm. Αν η απόσταση των μεγαλύτερων πλευρών είναι 1,5 cm, πόση είναι η απόσταση των μικρότερων;

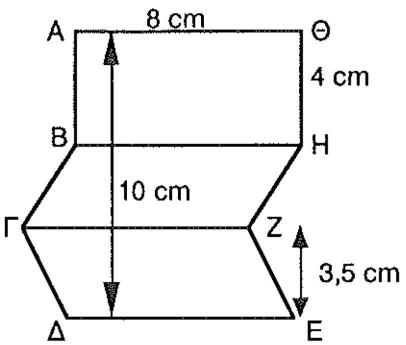
5. Ένα τραπέζιο έχει εμβαδό 60 cm² ενώ η μεγαλύτερη βάση του είναι τριπλάσια από τη μικρότερη. Αν ξέρετε

ότι η διαφορά των βάσεων είναι 20 cm, να υπολογίσετε το ύψος του.

6. Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι 64 cm και η μια από τις ίσες πλευρές του είναι 15 cm. Αν το ύψος του είναι 10 cm, να υπολογίσετε το εμβαδό του.

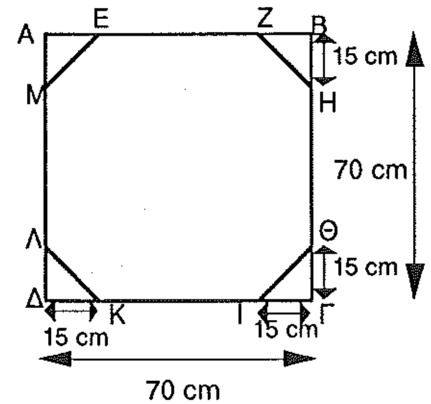
7. Ενός παραλληλογράμμου η μια πλευρά είναι τα 3/4 της άλλης και η περίμετρός του είναι 49 cm. Αν το εμβαδόν του είναι 78 cm², να βρείτε το ύψος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά του.

8. Να βρείτε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος.

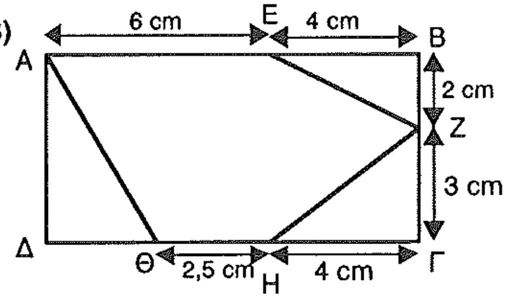


9. Να υπολογίσετε το εμβαδό των σχημάτων:
α) ΕΖΗΘΙΚΛΜ
β) ΑΕΖΗΘ

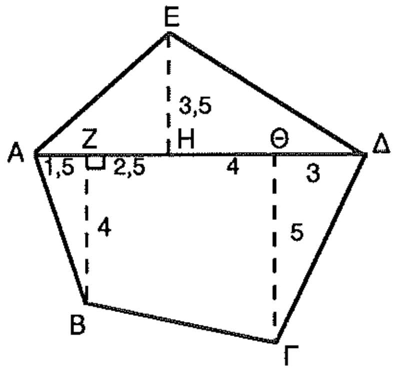
α)



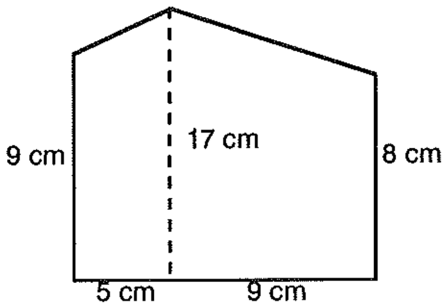
β)



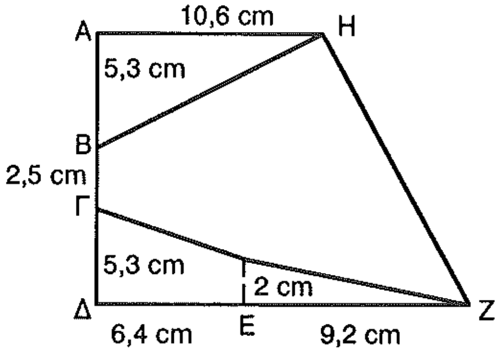
10. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος ΑΒΓΔΕ.



11. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος:



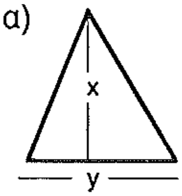
12. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παρακάτω σκιασμένου σχήματος:



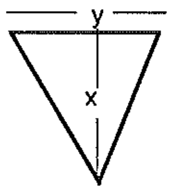
Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι ίσα και ποια έχουν το ίδιο εμβαδό;

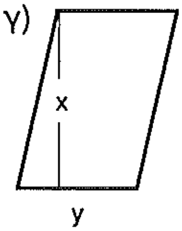
α)



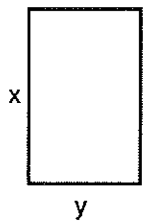
β)



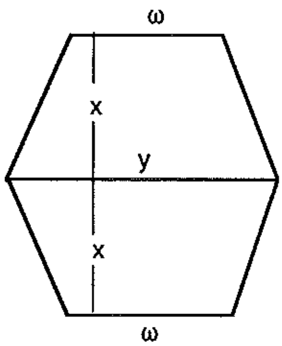
γ)



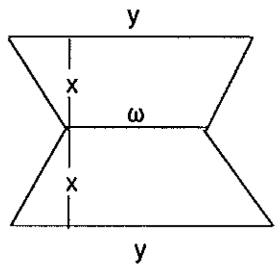
δ)



ε)



ζ)



2. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο να έχει ΑΓ = 4 cm, ΒΓ = 5,2 cm και $\hat{\Gamma} = 30°$.

3. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ορθογώνιο τρίγωνο, που να έχει ΒΓ = 5 cm, $\widehat{A} = 90°$ και $\widehat{B} = 45°$.

4. Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με (ΑΒ = ΑΓ). Παίρνουμε στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ δύο σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

5. Να χαράξετε τα ύψη προς τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και με σύγκριση των τριγώνων να αποδείξετε ότι αυτά είναι ίσα.

6. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, που να έχει $\widehat{A} = 60°$, ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 6 cm.

7. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, το οποίο να έχει $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$, βάσεις ΑΒ = 4 cm, ΔΓ = 5 cm και ΑΔ = 3,5 cm.

8. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός ισόπλευρου τριγώνου, του οποίου το εμβαδό είναι 816 dm^2 και η βάση του είναι 34 dm.

9. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός ισόπλευρου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του είναι 345,60 cm^2 και η βάση του είναι τα 5/6 του ύψους του.

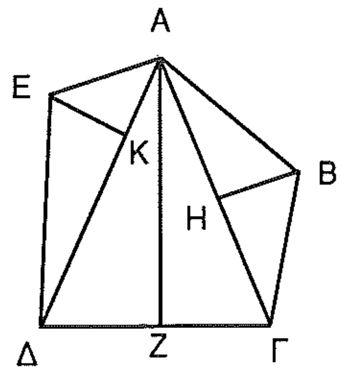
10. Να βρείτε την περίμετρο ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι η κάθετη πλευρά είναι 117 cm και το ύψος προς την υποτείνουσα είναι 50 cm.

11. Σ' ένα τραπέζιο ισοσκελές (οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες) το ύψος είναι 10 m, το άθροισμα των βάσεων είναι 39 m και η μία είναι τα 9/4 της άλλης. Να υπολογίσετε το εμβαδό του.

12. Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει εμβαδό 240 cm^2 και ύψος 12 cm που είναι τα 4/5 της μικρότερης βάσης. Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη βάση του.

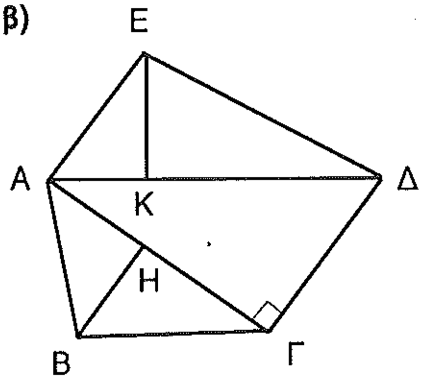
13. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:

α)



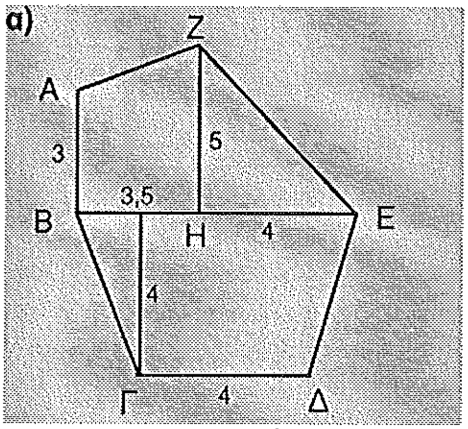
ΑΓ = ΑΔ = 17 cm
ΔΓ = 16 cm
ΒΗ = 4,5 cm
ΕΚ = 3,2 cm
ΑΖ = 15 cm

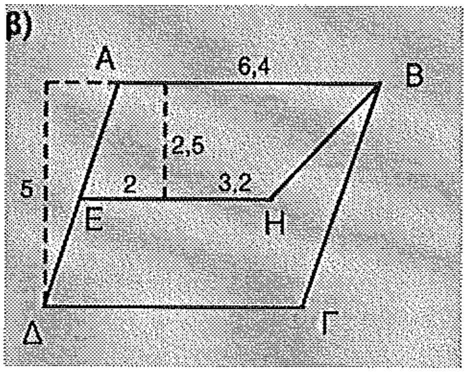
β)

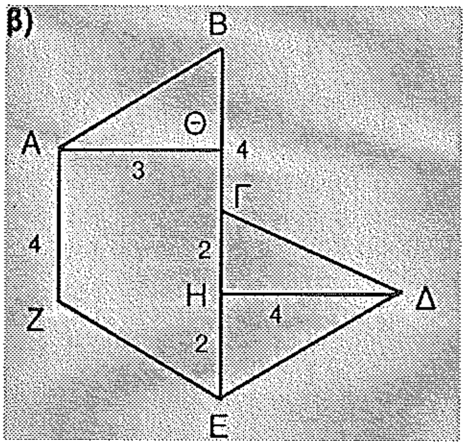


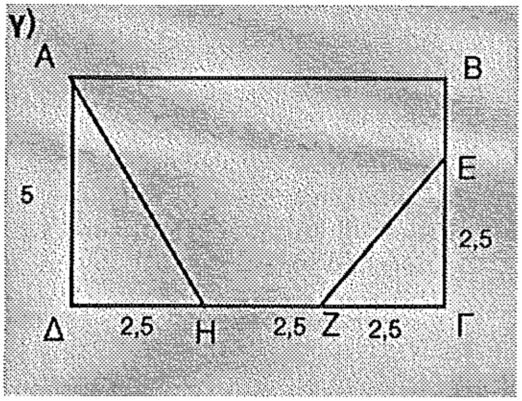
ΒΗ = 8,4 cm , ΓΔ = 21 cm
ΑΓ = 28 cm , ΕΚ = 5,6 cm
ΑΔ = 35 cm

14. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:

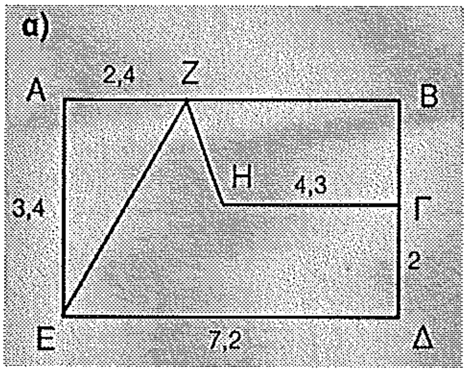








15. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων
α) ΓΔΕΖΗ
β) ΒΓΔΕΗ
γ) ΑΒΕΖΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

BASIC 10

Μελετήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

```
10 INPUT A        (↵)
20 INPUT B        (↵)
30 PRINT A*B/2    (↵)
40 END            (↵)
```

Όπως ήδη θα καταλάβατε δώσαμε τους αριθμους Α και Β. Ο υπολογιστής τους πολλαπλασίασε και το αποτέλεσμα το διαίρεσε διά 2.

Δηλαδή αν το Α και το Β ήταν η βάση και το ύψος ενός τριγώνου τότε προφανώς μας υπολόγισε το εμβαδόν του.
Αν αντικαταστήσουμε τη γραμμή 40 με την

```
40 GO TO 10       (↵)
```

τότε το πρόγραμμα θα ζητά συνεχώς δυο αριθμούς που θα τους θεωρεί βάση και ύψος τριγώνου και θα υπολογίζει το εμβαδόν του.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε παρόμοια προγράμματα που να υπολογίζουν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και του τραπεζίου και αποθηκεύστε τα στο αρχείο σας. (χρησιμοποιώντας SAVE)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

Οι ρητοί αριθμοί

8.1 Οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποιοι αριθμοί λέγονται θετικοί, ποιοι αρνητικοί και πώς συμβολίζονται;

1. Θετικοί λέγονται οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν (0). **Αρνητικοί** λέγονται οι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το 0.
Για να γίνεται φανερός ο διαχωρισμός ενός θετικού από έναν αρνητικό, τοποθετούμε μπροστά από το θετικό το σύμβολο «+» ενώ μπροστά από τον αρνητικό το σύμβολο «–». Τα σύμβολα «+» και «–» λέγονται **πρόσημα**. Ειδικά ένα θετικό μπορούμε να το γράψουμε και χωρίς το σύμβολο «+».
Π.χ. θετικός 5 → + 5 ή 5
αρνητικός 5 → - 5

2. Ποιες ανάγκες της ζωή επιβάλλουν τον ορισμό και τη χρήση των αρνητικών αριθμών;

2. Οι διάφορες ανάγκες της ζωής, όπως η μέτρηση θερμοκρασιών κάτω από το μηδέν, ή η μέτρηση βάθους κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας κ.λπ., επιβάλλουν τον ορισμό και τη χρήση αρνητικών αριθμών.

3. Ποιο είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών;

3. Το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το σύνολο που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς και τους αρνητικούς αριθμούς, που προκύπτουν από τους φυσικούς, με την προσθήκη του συμβόλου « – ». Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με το **Z**. Δηλαδή είναι:
$\mathbf{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

4. Ο αριθμός 0 είναι θετικός ή αρνητικός;

4. Ο αριθμός 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός. Συμφωνούμε τα σύμβολα + 0 και − 0 να παριστάνουν τον αριθμό 0.

5. Ποιο είναι το σύνολο των ρητών αριθμών;

5. Το σύνολο που περιέχει τους κλασματικούς αριθμούς μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους λέγεται **σύνολο των ρητών αριθμών** και συμβολίζεται με **Q.**

<u>Παρατήρηση:</u> Επειδή κάθε κλάσμα είναι ίσο με ένα ακέραιο ή ένα δεκαδικό αριθμό, μπορούμε τελικά να πούμε ότι το σύνολο Q περιέχει όλους τους γνωστούς μέχρι τώρα αριθμούς δηλαδή ακέραιους, κλάσματα, δεκαδικούς, καθώς και τους αντίστοιχους αρνητικούς τους.

6. Ποιοι αριθμοί λέγονται ομόσημοι και ποιοί ετερόσημοι;

6. Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί, εκτός του μηδέν, που έχουν το ίδιο πρόσημο. **Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί, εκτός του μηδέν, που έχουν διαφορετικά πρόσημα.

7. Μπορούμε να παραστήσουμε ένα ρητό αριθμό με μία μεταβλητή; Η μεταβλητή αυτή εκφράζει θετικό ή αρνητικό αριθμό;

7. Ένας ρητός αριθμός, θετικός ή αρνητικός, μπορεί να παρασταθεί με μία μεταβλητή, επομένως αυτή δεν μας καθορίζει αν εκφράζει θετικό ή αρνητικό αριθμό.
Π.χ. αν η μεταβλητή α παίρνει τιμές από το σύνολο $\{ -1, +\frac{1}{2}, -2, +10 \}$ δεν μπορούμε να ξέρουμε όταν τη χρησιμοποιούμε, αν εκφράζει θετικό ή αρνητικό αριθμό.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται οι παρακάτω ακέραιοι αριθμοί:
-1, + 7, - 14, - 18, - 9, + 11, 12, 1, - 20 και + 2.
Σημειώστε ποιοί από αυτούς είναι θετικοί και ποιοί αρνητικοί;

Λύση

Θετικοί είναι οι αριθμοί:
+ 7, + 12, 12, 1, + 2.
Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι και οι αριθμοί που δεν έχουν πρόσημο είναι θετικοί.

Αρνητικοί είναι οι αριθμοί:
- 1, - 14, - 18, - 9, - 20.

2. Δίνονται οι παρακάτω ρητοί αριθμοί:

$-\frac{1}{4}, +7{,}51, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, +\frac{3}{4}, -5{,}25$

Σημειώστε ποιοί από αυτούς είναι θετικοί και ποιοί αρνητικοί.

Λύση

Θετικοί είναι οι αριθμοί:

$+ 7{,}51 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , + \frac{3}{4}$

Αρνητικοί είναι οι αριθμοί:

$- \frac{1}{4} , - \frac{6}{7} , - \frac{2}{3} , - 5{,}25$

3. Να γράψετε όλους τους ακέραιους αριθμούς που βρίσκονται ανάμεσα στους - 5,7 και + 7/2.

Λύση

Οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ του - 5,7 και του + 7/2 είναι οι:
- 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3.

4. Με τη βοήθεια των θετικών και των αρνητικών αριθμών να εκφράσετε τις παρακάτω ποσότητες:
α) Χρέος 40.000 δρχ.
β) 60 μ. πάνω από τη θάλασσα.
γ) 70°C κάτω από το μηδέν.
δ) Έσοδα 55.000 δρχ.
ε) 10°C πάνω από το μηδέν.
στ) Κατάθεση 17.000 δρχ.

Λύση

α) - 40.000 δρχ.
β) + 60 μέτρα.
γ) - 70°C.
δ) + 55.000 δρχ.
ε) + 10°C.
στ) + 17.000 δρχ.

5. Να βρείτε σε ποια από τα σύνολα N, Q, Z ανήκουν οι αριθμοί:
- 5,2 , 7, - 6, + 3,2 - 1/2 , + 9/8 , 8

Λύση

Στο σύνολο N ανήκουν οι αριθμοί 7, 8.
Στο σύνολο Z ανήκουν οι αριθμοί -6, 7, 8.
Στο Q ανήκουν όλοι.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται οι παρακάτω ακέραιοι:
- 2, + 7, + 6, - 13, + 13, + 4, - 6.
Ποιοι απ' αυτούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί;

Λύση

Θετικοί είναι οι: + 7, + 13 ...
Αρνητικοί είναι οι: - 2, - 13,......

2. Ποιοι από τους παρακάτω ρητούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί;

$- \frac{1}{2} , 2 , + \frac{4}{3} , - \frac{6}{7} , + \frac{3}{5} , - \frac{3}{5} , - 6 , - 7{,}3$

Λύση

Θετικοί είναι οι: 2 , + 4 / 3 , ...
Αρνητικοί είναι οι: - 1 / 2 , - 6 / 7 , ...

3. Γράψτε όλους τους ακέραιους που βρίσκονται μεταξύ των ρητών - 7,2 και 1,2.

Λύση

Μεταξύ των ρητών - 7,2 και 1,2 βρίσκονται οι εξής ακέραιοι:
- 7, - 6, ...

4. Να περιγράψετε τι συμβολίζουν οι αριθμοί + 7, - 6, + 100, - 15.
α) σε ένα θερμόμετρο.
β) σε αποστάσεις από την επιφάνεια της θάλασσας.

Λύση

Ο αριθμός + 7 συμβολίζει:
α) 7°C πάνω από το μηδέν.
β) 7 μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.
Ο αριθμός - 6 συμβολίζει: ....

5. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ζεύγη περιέχουν ομόσημους αριθμούς και ποια ετερόσημους:
(- 7, + 3), (- 1 / 2 , - 1 / 3), (7, 6), (6,3 , - 7,1), (- 4 / 5, + 6 / 7), (- 8, - 99), (+ 10, - 11), (- 2, + 3 / 4) .

Λύση

Ομόσημους αριθμούς περιέχουν τα ζεύγη:
(- 1 / 2, - 1 / 3), ...

Ετερόσημους αριθμούς περιέχουν τα ζεύγη:
(- 7, + 3) ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ακέραιους είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί:
- 7, - 17, + 21, 100, - 35, + 66, - 305, 1, + 77, - 18.

2. Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω ρητούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί:
- 1 / 2 , + 6,7 - 0,5 - 9, + 31,5 + 7 / 6, - 10 / 9, - 3,9.

3. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ζεύγη περιέχουν ομόσημους αριθμούς και ποια ετερόσημους:
(7, - 6), (- 0,5, - 3,1), (+ 1 / 2, - 6), (+ 6 / 8, + 4 / 3), (- 7, -6), (+ 10,1 , -11), (+ 5, - 3), (- 6, - 0,3), (- 43, + 1,2).

4. Να βρείτε ποιοι ακέραιοι αριθμοί περιέχονται μεταξύ του - 9,9 και του + 5, 738.

5. Να εκφράσετε τι συμβολίζουν οι αριθμοί: - 3, + 80, - 36, + 2
α) σε ένα θερμόμετρο.
β) σε αποστάσεις απο την επιφάνεια της θάλασσας.

6. Να βρείτε οι αριθμοί:
- 7, + 6,5 , 8, - 1 / 2, + 4,7 , 0, - 8, + 3 / 2, 5
σε ποια από τα σύνολα N, Q, Z ανήκουν;

8. 2 Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

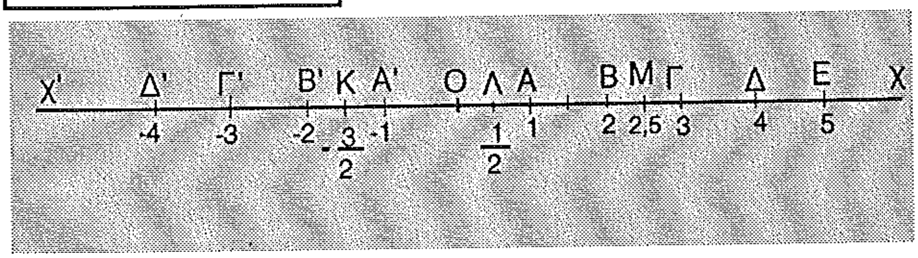
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με ποιο τρόπο μπορούμε να παραστήσουμε τους ρητούς αριθμούς με σημεία μιας ευθείας;

Απαντήσεις

1. Ας πάρουμε την ευθεία χχ' και ένα σημείο Ο αυτής, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Το σημείο Α ας παριστάνει τον αριθμό 1. Τότε τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε θα παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, 5 αντίστοιχα, **αν** τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ είναι **ίσα** μεταξύ τους. Το σημείο Α' θα παριστάνει τον αριθμό - 1 αν ΟΑ' = ΟΑ και τα σημεία Β', Γ', Δ' που βρίσκονται αριστερά του Α', θα παριστάνουν τους αριθμούς - 2, - 3, - 4, αν Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ' = ΟΑ. Με αυτό τον τρόπο, το σημείο Λ θα παριστάνει τον αριθμό +1/2 , το σημείο Κ τον αριθμό - 3/2 = - 1,5 , το σημείο Μ τον αριθμό + 2,5 κ.ο.κ .

Συνεπώς για να παραστήσουμε έναν ρητό αριθμό μ' ένα σημείο μιας ευθείας, αρκεί να πάρουμε ένα σημείο της ευθείας που θα το θεωρήσουμε σαν το σημείο μηδέν και ένα άλλο σημείο Α, έτσι ώστε ΟΑ = 1.
Το ζητούμενο σημείο θα το βρούμε με σύγκριση του αριθμού με το ΟΑ.

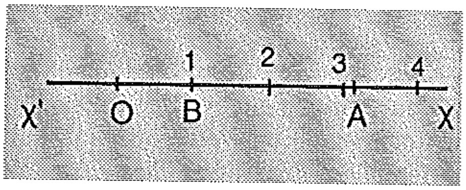
<u>**Παρατήρηση:**</u> Η παραπάνω ευθεία λέγεται και **άξονας**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

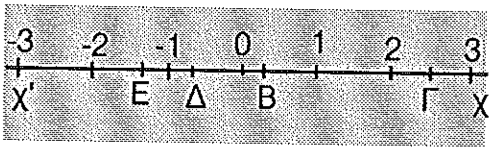
1. Να παραστήσετε τον αριθμό 3,2 με ένα σημείο Α μιας ευθείας χ'χ.

Λύση

Έστω η ευθεία χ'χ και το σημείο Ο που παριστάνει τον αριθμό μηδέν.
Ορίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σαν μονάδα, οπότε με σύγκριση θα βρούμε το σημείο Α, που παριστάνει τον αριθμό 3,2.



2. Να βρείτε ποιους αριθμούς παριστάνουν τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, Ζ στον άξονα χ'χ.



Λύση

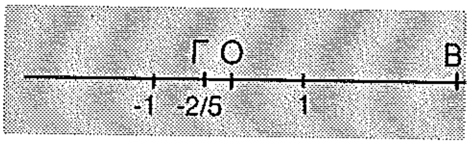
Το σημείο Β παριστάνει τον αριθμό +0,25.
Το σημείο Γ παριστάνει τον αριθμό + 2,5.
Το σημείο Δ παριστάνει τον αριθμό - 0,8.
Το σημείο Ε παριστάνει τον αριθμό - 1,3.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να παραστήσετε με σημεία μιας ευθείας τους αριθμούς:

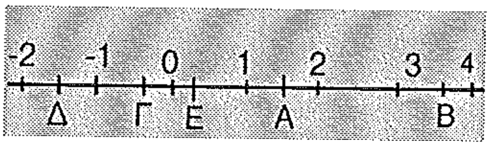
$-\frac{2}{5}$, + 3 , + 0,75 , $-\frac{3}{4}$, - 1,5 , -3

Λύση



Το σημείο Β παριστάνει τον αριθμό + 3,
το σημείο Γ τον αριθμό - 2 / 5 ...

2. Ποιους αριθμούς παριστάνουν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, στο παρακάτω σχήμα;



Λύση

Το σημείο Α παριστάνει τον αριθμό + 1,5,
το σημείο Β τον αριθμό + 3,6 ....

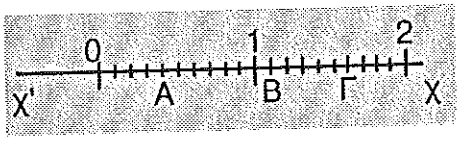
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να παρασταθούν με σημεία του άξονα οι αριθμοί:

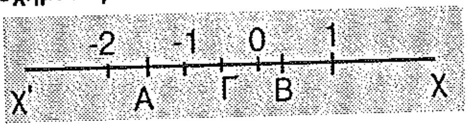
$-2\,,\ -\frac{4}{5}\,,\ +0{,}6\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ +3$

2. Να παρασταθούν με σημεία του άξονα οι αριθμοί:
$-3,\ -1{,}3\,,\ +0{,}9\,,\ +1{,}6\,,\ -2{,}1.$

3. Να βρείτε σε ποιους ρητούς αντιστοιχούν τα σημεία Α, Β, Γ του παρακάτω σχήματος.



4. Να βρείτε σε ποιους ρητούς αντιστοιχούν τα σημεία Α, Β, Γ του παρακάτω σχήματος.

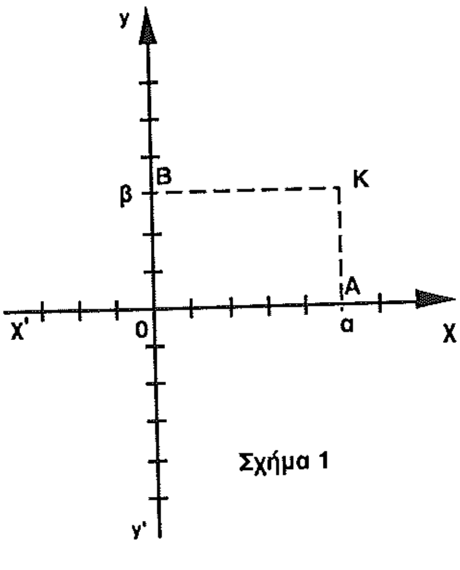


8. 3 Συντεταγμένες σημείου

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το σημείο Κ με συντεταγμένες (α, β);



Σχήμα 1

Απαντήσεις

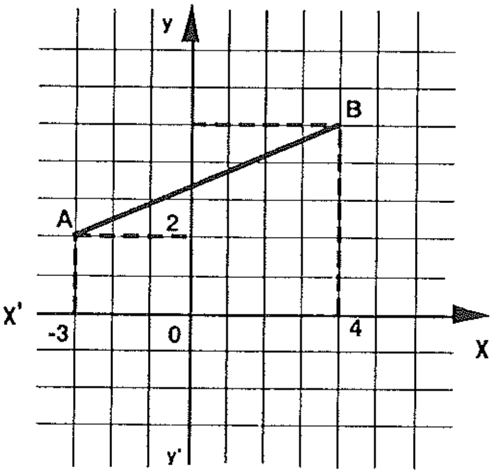
1. Για να παραστήσουμε γραφικά το σημείο Κ με συντεταγμένες (α, β) κάνουμε τα εξής:
Κατασκευάζουμε δύο άξονες χ'χ και y'y που τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο. Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο Α στον άξονα χ'χ που αντιστοιχεί στον αριθμό **α** και το σημείο Β στον άξονα y'y που αντιστοιχεί στον αριθμό **β**. Από τα σημεία Α, Β φέρουμε κάθετες στους άξονες χ'χ και y'y αντιστοίχως που τέμνονται στο σημείο Κ. Το σημείο Κ είναι το ζητούμενο σημείο με **τετμημένη α** και **τεταγμένη β**. Ο άξονας χ'χ ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο y'y **άξονας των τεταγμένων.**
Π.χ. Για α = 5 και β = 3 το ζητούμενο σημείο είναι το Κ(5, 3) (σχήμα 1).

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που οι συντεταγμένες των άκρων του είναι: Α(- 3, 2) και Β(4, 5).

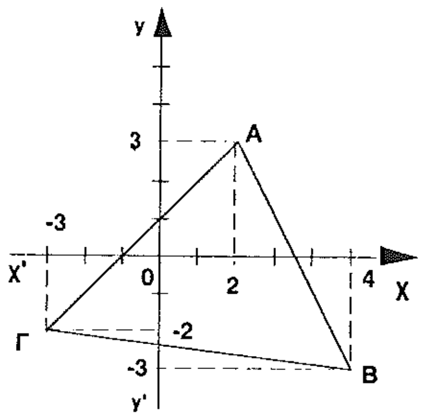
Λύση

Σε ένα τετραγωνισμένο χαρτί κατασκευάζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Προσδιορίζουμε τα σημεία Α(- 3, 2) και Β(4, 5) όπως αναφέραμε στη θεωρία και κατόπιν τα συνδέουμε. Το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ στο παρακάτω σχήμα.

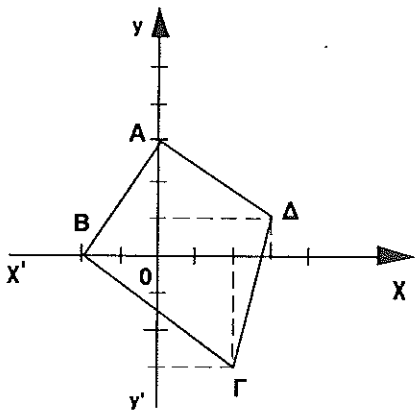
Λύση



Από το σημείο Α φέρουμε κάθετη προς τον άξονα χ'χ που τον τέμνει σε σημείο που αντιστοιχεί ο αριθμός 2 (τετμημένη). Στη συνέχεια από το Α φέρουμε κάθετη προς τον άξονα y'y που τον τέμνει σε σημείο που αντιστοιχεί ο αριθμός 3 (τεταγμένη). Οπότε οι συντεταγμένες του Α είναι (2, 3). Εργαζόμαστε ομοίως και για τα σημεία Β, Γ και βρίσκουμε ότι Β(4, -3) και Γ(- 3, - 2).

3. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ και Δ στο παρακάτω σχήμα.

Λύση



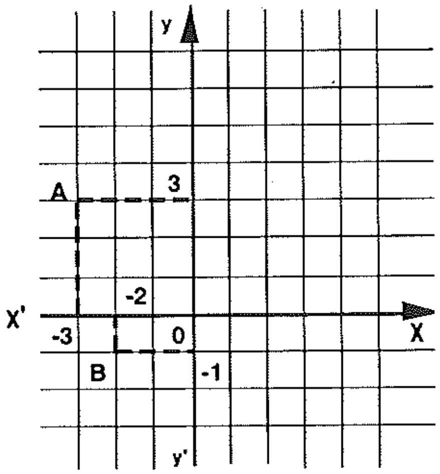
Από το σημείο Α φέρουμε κάθετη προς τον άξονα χ'χ που τον τέμνει στο σημείο Ο. Ως γνωστόν οι συντεταγμένες του Ο είναι (0, 0). Άρα η τετμημένη του Α είναι ο αριθμός 0. Επειδή το Α βρίσκεται πάνω στον άξονα y'y στον αριθμό 3, η τεταγμένη του είναι ο αριθμός 3. Άρα οι συντεταγμένες του Α είναι (0, 3).
Εργαζόμαστε ομοίως και για τα σημεία Β, Γ, Δ και βρίσκουμε ότι:
Β(- 2, 0), Γ(2, - 3) και Δ(3, 1).

Β. Μισολυμένες ασκήσεις

1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι Α(- 3, 3), Β(- 2, - 1), Γ(0, - 1), Δ(3, 0).

Λύση

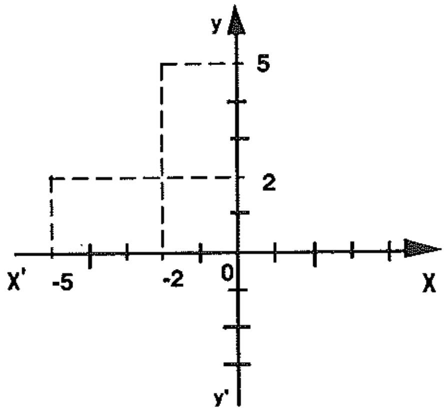
Στο τετραγωνισμένο χαρτί σχεδιάζουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων x'x, y'y που τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο (0, 0). Βρίσκουμε κατόπιν το σημείο εκείνο του άξονα x'x που αντιστοιχεί στον αριθμό - 3 (τετμημένη) και το σημείο εκείνο του άξονα y'y που αντιστοιχεί στον αριθμό 3 (τεταγμένη). Από τα σημεία αυτά φέρουμε κάθετες στους άξονες x'x και y'y αντιστοίχως που τέμνονται στο ζητούμενο σημείο Α(- 3, 3). Εργαζόμαστε ομοίως για τα ...



2. Βρείτε τα σημεία με τις παρακάτω συντεταγμένες και συνδέστε τα διαδοχικά:
(- 2, 5), (- 5, 2), (- 5, - 2), (- 2, - 5), (2, - 5), (5, - 2), (5, 2), (2, 5).

Λύση

Προσδιορίζουμε διαδοχικά τα σημεία (- 2, 5), (- 5, 2) κ.λπ. όπως αναφέραμε στη θεωρία και τα ενώνουμε διαδοχικά.



.....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

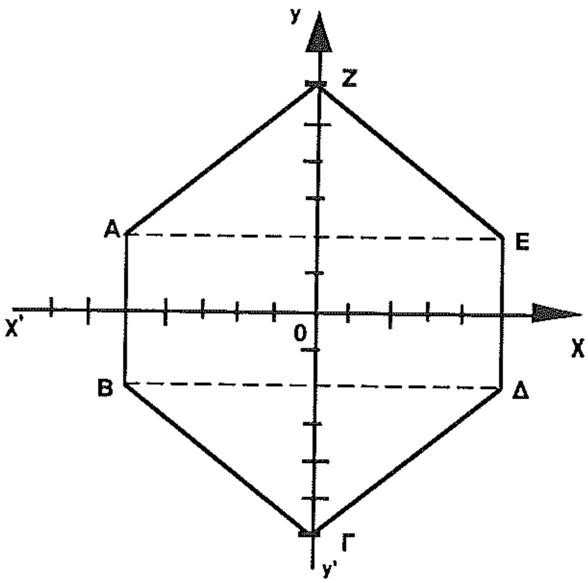
1. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ που οι συντεταγμένες των κορυφών του είναι τα σημεία Α(6, - 1), Β(- 3, 2), Γ(- 4, - 5).

2. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων βρείτε τα σημεία με τις παρακάτω συντεταγμένες και συνδέστε τα όπως δείχνουν τα βέλη.

α) (- 5, 0) → (- 7, 4) → (6, 2) → (5, 0) → (- 5, 0)

β) (- 7, 5) → (0, 10) → (5, 5) → (- 7, 5)

3. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ στο παρακάτω σχήμα.



8. 4 Απόλυτη τιμή ρητού αριθμού Αντίθετοι αριθμοί

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού και πώς συμβολίζεται; Αναφέρατε παραδείγματα.

2. Ποιοι αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

Απαντήσεις

1. Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού λέγεται η απόσταση του από το 0 πάνω στον άξονα. Η απόλυτη τιμή του αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$.
Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι πάντοτε **θετικός** αριθμός.
Για το μηδέν ισχύει : $|0| = 0$.
Παραδείγματα: $|-6| = 6$, $|+6| = 6$.

2. Αντίθετοι λέγονται δυο αριθμοί που έχουν την **ίδια** απόλυτη τιμή και **διαφορετικό** πρόσημο.
Ο αντίθετος του 0 είναι το ίδιο το 0.
Για να σημειώνουμε τον αντίθετο ενός αριθμού βάζουμε μπροστά στον αριθμό, το πρόσημο « — ».
Δηλαδή ο αντίθετος του ρητού x είναι ο $-x$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των αριθμών:

$-13\ ,\ +7\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ -0{,}25\ ,\ +6\ ,\ -\frac{3}{4}\ ,\ +13$

Λύση

Είναι $|-13| = 13$. Ο αντίθετος του -13 είναι ο $-(-13) = 13$ και $|+7| = 7$.

Παρατηρούμε ότι:
α) Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
β) Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του αριθμού.

Ομοίως:

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ ,\ |-0{,}25| = 0{,}25\ ,\ |+6| = 6$$

$$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}\ ,\ |+13| = 13$$

2. Ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή:

$3\ ,\ 0{,}28\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 6\ ,\ 0\ ,\ 5{,}27$

Λύση

Είναι $|-3| = 3$ και $|+3| = 3$. Άρα οι αριθμοί -3, $+3$ έχουν απόλυτη τιμή τον αριθμό 3. Ομοίως οι αριθμοί $-0{,}28$ και $+0{,}28$ έχουν απόλυτη τιμή τον αριθμό 0,28, οι αριθμοί $-2/3$, $+2/3$ τον αριθμό $2/3$, οι αριθμοί -6, $+6$ τον αριθμό 6, ο αριθμός 0 έχει απόλυτη τιμή τον αριθμό 0, και τέλος οι αριθμοί $-5{,}27$ και $+5{,}27$ έχουν απόλυτη τιμή τον αριθμό 5,27.

3. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει: $|x| = |y|$;

Λύση

Εφόσον οι αριθμοί x, y έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, τότε οι αριθμοί θα είναι ίσοι ή αντίθετοι.

4. Να βρείτε για ποιους ακέραιους ισχύει:
α) $|x| < 3$, β) $|x| > 3$,
γ) $|x| \leq 3$, δ) $|x| \geq 3$.

Λύση

α) Όπως ορίσαμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού, αυτή εκφράζει την απόστασή του από το 0.
Άρα $|x| < 3$ σημαίνει:
οι αριθμοί που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη του 3.
Επειδή θέλουμε ακέραιους αυτοί είναι, οι $-2, -1, 0, +1, +2$.
β) Ομοίως βρίσκουμε ότι οι αριθμοί για τους οποίους $|x| > 3$ είναι οι:
$-4, -5, -6, -7, \ldots$ και $+4, +5, +6, +7, \ldots$
γ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την $|x| \leq 3$ είναι οι:
$-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.
δ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την $|x| \geq 3$ είναι οι:
$-3, -4, -5, -6, -7, \ldots$ και οι $+3, +4, +5, +6, +7, \ldots$

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $|-3| + |-7| - |+5| + |-8|$
β) $|+10| - |-3| - |+1| + |-7|$

Λύση

α) Έχουμε:
$|-3| + |-7| - |+5| + |-8| =$
$3 + 7 - 5 + 8 =$
$10 - 5 + 8 =$
$5 + 8 = 13$.

β) Έχουμε:
$|+10| - |-3| - |+1| + |-7| =$
$10 - 3 - 4 + 7 =$
$7 - 4 + 7 =$
$3 + 7 = 10$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η απόλυτη τιμή των αριθμών:

$-4, -\frac{5}{7}, +\frac{3}{8}, -6{,}25, +2$

Λύση

Είναι : $|-4| = 4, \left|-\frac{5}{7}\right| = ...$

2. Να βρείτε ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή τους αριθμούς:

$4, 7, \frac{8}{4}, \frac{5}{6}, 1{,}32, 9{,}1$

Λύση

Οι αριθμοί που έχουν απόλυτη τιμή 4 είναι οι αριθμοί + 4, - 4.
Οι αριθμοί που έχουν απόλυτη τιμή 7 είναι οι αριθμοί ....

3. Να βρείτε για ποιους ακέραιους ισχύει:

α) $|x| < 2$ β) $2 < |x| < 5$
γ) $2 \leq |x| \leq 5$ δ) $|x| > 10$

Λύση

α) Οι ακέραιοι που απέχουν από το μηδέν απόσταση μικρότερη του 2 είναι οι αριθμοί: - 1, 0, + 1.
β) Οι ακέραιοι που απέχουν από το μηδέν απόσταση μικρότερη του 5 και μεγαλύτερη του 2 είναι οι αριθμοί:
- 4, - 3, + 4, + 3.
γ) Οι ακέραιοι που απέχουν από το μηδέν απόσταση μικρότερη ή ίση του 5 και μεγαλύτερη ή ίση του 2 είναι οι αριθμοί ...

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $|+17| - |-11| + |+20| - |-13| - |-1|$
β) $|-8| + |-11| + |+3| - |-20| + |-1| - |-2|$
γ) $|+10| + |-29| - |-19| + |+14| - |-27|$

δ) $\left|+\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{7}{3}\right| - \left|-\frac{4}{3}\right| - \left|-\frac{2}{4}\right|$

Λύση

α) $|+17| - |-11| + |+20| - |-13| - |-1| =$
$17 - 11 + 20 - 13 - 1 = ...$
β) $|-8| + |-11| + |+3| - |-20| + |-1| - |-2|$
$= ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η απόλυτη τιμή των αριθμών:

$-\frac{3}{2}, +\frac{11}{8}, -7{,}28, -100, +\frac{5}{3}, -0{,}02,$
$+\frac{41}{2}, -\frac{41}{2}, +19$

2. Να βρεθεί ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή:

$8, \frac{3}{8}, 6{,}25, 5, \frac{3}{4}$

3. Να βρεθεί για ποιους ακέραιους x ισχύουν οι σχέσεις:

α) $|x| < 5$ β) $|x| > 5$
γ) $|x| \leq 5$ δ) $|x| \geq 5$
ε) $3 < |x| \leq 5$ στ) $3 \leq |\chi| < 6$.

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\left|-\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{3}{4}\right| - \left|+\frac{2}{3}\right| + \left|+\frac{5}{6}\right|$

β) $|-19| + |-21| - |+31| - |-2|$

γ) |+ 10 | - | - 2 | + |+ 51 | - | - 27 |

5. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) | - 6,35 | + |+ 3,1 | - |+ 7,64 | - | - 1,2 |

β) |+ 18,3 | + | - 20,8 | - |+ 30,63 | + | - 13,37 |

γ) | - 8,9 | - | - 5,1 | + | - 6 | - |+ 1,8 |

6. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) | - 7,4 | + |+ 3,1 | + |+ 7,75 | - | -10,43 |

β) $\left|-\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{7}{6}\right| - \left|-\frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{3}\right|$

γ) $\left|+\frac{4}{3}\right| - \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{9}{4}\right| - \left|+\frac{7}{3}\right|$

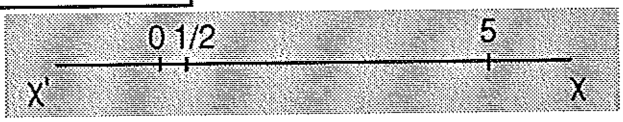
8. 5 Σύγκριση των ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Μεταξύ δύο ρητών αριθμών ποιος είναι ο μεγαλύτερος;

1. Μεταξύ δύο ρητών μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών.



Π.χ. Ας τοποθετήσουμε τους ρητούς αριθμούς ½ , 5 επάνω στον άξονα των ρητών αριθμών. Παρατηρούμε ότι ο 5, που είναι μεγαλύτερος, βρίσκεται δεξιότερα από τον ½ .

2. Μεταξύ δύο θετικών αριθμών, ποιος είναι μεγαλύτερος;

2. Μεταξύ δύο θετικών αριθμών, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

3. Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών ποιος είναι μεγαλύτερος;

3. Μεταξύ δύο αρνητικών, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

4. Ποιος είναι μεγαλύτερος, ένας θετικός αριθμός ή ένας αρνητικός;

4. Ένας θετικός αριθμός είναι πάντα μεγαλύτερος από ένα αρνητικό αριθμό.

5. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ θετικών αριθμών και του μηδέν και μεταξύ αρνητικών και του μηδέν;

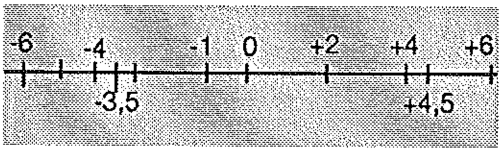
5. Οι θετικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν, ενώ οι αρνητικοί είναι μικρότεροι από το μηδέν.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραστήσετε πάνω στον άξονα τους αριθμούς:
- 4, + 6, - 6, - 3,5 , + 4,5 , + 4, + 2, - 1.
α) Να βρείτε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από αυτούς.
β) Ποιοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι από τον - 3,5;
γ) Ποιοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι από τον - 5 και μικρότεροι από τον + 2;

Λύση

Έχουμε:



α) Ο μεγαλύτερος είναι ο + 6, ενώ ο μικρότερος είναι ο - 6.
β) Οι μεγαλύτεροι από τον - 3,5 είναι οι αριθμοί: - 1, + 2, + 4,5 , + 6 , γιατί βρίσκονται δεξιότερα από αυτόν στον άξονα.
γ) Μεγαλύτεροι από τον - 5 και μικρότεροι από τον + 2 είναι οι αριθμοί:
- 4, - 3, 5, -1.

2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς, τοποθετώντας τα σύμβολα $<$ ή $>$:
α) - 2 και - 4 δ) + 3 και + 7
β) - 6 και + 7 ε) 0 και - 5
γ) - 3 και - 2 στ) - 6 και - 9

Λύση

α) $-2 > -4$ δ) $+3 < +7$
β) $-6 < +7$ ε) $0 > -5$
γ) $-3 < -2$ στ) $-6 > -9$

3. Δίνονται οι αριθμοί:
- 4, + 7,5 , - 6, + 3,1 , - 2,21 , 0 .
Να τους τοποθετήσετε σε μία σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.

Λύση

Έχουμε:
$+7{,}5 > +3{,}1 > 0 > -2{,}21 > -4 > -6$.

4. Να βρείτε ποιες τιμές μπορούν να πάρουν οι ακέραιοι x, y ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:
$-3 < x < +2$ και $-2{,}5 < y < +2{,}9$.

Λύση

Οι ακέραιοι x που βρίσκονται μεταξύ του - 3 και του + 2 είναι οι αριθμοί:
- 2, - 1, 0, + 1.
Οι ακέραιοι y που βρίσκονται μεταξύ του - 2,5 και του 2,9 είναι οι αριθμοί:
- 2, - 1, 0, + 1, + 2.

5. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες, είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς:
α) $-3 < -4$ γ) $-8 < +6$
β) $-4 > -5$ δ) $+3 < 0$

Λύση

α) $-3 < -4$ ψευδής, γιατί:
$|-3| = 3$, $|-4| = 4$ και μεταξύ δύο αρνητικών, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.
β) $-4 > -5$ αληθής, γιατί:
$|-4| = 4$ και $|-5| = 5$.
γ) $-8 < +6$ αληθής, γιατί:
οι θετικοί είναι μεγαλύτεροι από τους αρνητικούς.
δ) $+3 < 0$ ψευδής, γιατί:
οι θετικοί είναι μεγαλύτεροι του μηδενός.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς $+8{,}3$, $-1{,}2$, $+3$, $-7{,}6$, $-7{,}5$, $+4{,}5$ από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο.

Λύση

Είναι:
$+8{,}3 > +4{,}5 > \ldots$

2. Να τοποθετήσετε τα σύμβολα $>$, $<$ στα παρακάτω ζεύγη αριθμών.

α) $+3{,}7 \ldots -6{,}3$ δ) $-3{,}7 \ldots -6{,}3$
β) $-7{,}5 \ldots -2{,}4$ ε) $+6{,}35 \ldots +6{,}3$
γ) $-2 \ldots 0$ στ) $-7{,}1 \ldots -1{,}2$
ώστε να προκύπτουν αληθείς ανισότητες.

Λύση

α) $+3{,}7 > -6{,}3$
β) $-7{,}5 < -2{,}4 \ldots$

3. Να βρείτε τους ακέραιους ω, x, y που εκπληρώνουν τις ανισότητες
α) $-4{,}1 < ω < 7{,}3$
β) $-0{,}35 < x < +2{,}1$
γ) $-6{,}3 < y < -1{,}2$

Λύση

α) Το ω μπορεί να είναι κάποιος από τους ακέραιους:
$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7$.
β) Το x μπορεί να είναι κάποιος από τους ακέραιους 0, ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών τους αριθμούς: $+4$, $+7{,}2$, $-6{,}3$, $-5{,}2$, $+2{,}5$, $+4{,}1$.
α) Να βρείτε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από αυτούς.
β) Ποιοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι από τον $-6{,}3$ και μικρότεροι από τον $+4{,}1$.

2. Να τοποθετήσετε τα σύμβολα $<$ και $>$ ώστε να προκύψουν από τα παρακάτω ζεύγη αριθμών αληθείς ανισότητες.
α) $+7 \ldots +6$
β) $+3 \ldots -6$
γ) $+4 \ldots 0$
δ) $+4 \ldots -3$
ε) $-1 \ldots -0{,}5$
στ) $-5 \ldots 0$
ζ) $-\frac{1}{2} \ldots -\frac{3}{2}$
η) $-\frac{6}{7} \ldots -\frac{5}{7}$
θ) $+\frac{1}{3} \ldots +\frac{5}{3}$
ι) $-\frac{7}{3} \ldots -\frac{7}{4}$

3. Να βρείτε ποιοι ακέραιοι x, y εκπληρώνουν τις σχέσεις:
α) $-5{,}7 < x < +2{,}5$
β) $+1{,}2 > y > -3{,}8$.

4. Να γράψετε έξι ρητούς που να είναι μεγαλύτεροι από τον -1 και μικρότεροι από τον $+1$.

5. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ανισότητες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α) $-7{,}6 < -5{,}3$
β) $-6 < +2$
γ) $-3 < -7$
δ) $0 < -6$
ε) $-3{,}1 > -2$
στ) $-4 > +7{,}3$
ζ) $-0{,}3 > -0{,}03$
η) $-\frac{3}{2} < -\frac{6}{7}$

8. 6 Πρόσθεση ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους ακέραιους αριθμούς;	1. Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** ακέραιους αριθμούς, κάνουμε τις εξής ενέργειες: α) Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους. β) Στο άθροισμα που βρήκαμε, βάζουμε το κοινό πρόσημο που έχουν οι αριθμοί.
2. Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους ακέραιους αριθμούς;	2. Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** ακέραιους αριθμούς, κάνουμε τις εξής ενέργειες: α) Συγκρίνουμε τις απόλυτες τιμές τους. β) Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη. γ) Στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο που είχε ο αριθμός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
3. Ποιο είναι το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών;	3. **Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.** Αυτό συμβαίνει γιατί δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, οπότε η διαφορά των απολύτων τιμών τους είναι 0.
4. Ποιο είναι το άθροισμα ενός ακέραιου με το μηδέν;	4. Το άθροισμα ενός ακέραιου α με το μηδέν είναι ο αριθμός α. Δηλαδή: $\alpha + 0 = \alpha$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+3) + (+4)$

β) $(+0,75) + (+1,25)$

γ) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right)$

δ) $(+13) + (+6)$

ε) $(+1,37) + (+0,75)$

στ) $\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right)$

Λύση

α) $(+3) + (+4) = +7$

β) $(+0,75) + (+1,25) = +2$

γ) $(+\frac{2}{3}) + (+\frac{5}{3}) = +\frac{7}{3}$

δ) (+ 13) + (+ 6) = + 19
ε) (+ 1,37) + (+ 0,75) = + 2,12

στ) $(+\frac{1}{4}) + (+\frac{2}{3}) =$
$= (+\frac{3}{12}) + (+\frac{8}{12}) = +\frac{11}{12}$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 4) + (- 7)
β) (- 6,2) + (- 7,3)
γ) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{5}{2})$
δ) (- 21) + (- 18)
ε) (- 5,25) + (- 0,3)
στ) $(-\frac{7}{3}) + (-\frac{5}{2})$

Λύση

α) (- 4) + (- 7) = - 11
β) (- 6,2) + (- 7,3) = - 13,5
γ) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{5}{2}) = -\frac{6}{2} = -3$

δ) (- 21) + (- 18) = - 39
ε) (- 5,25) + (- 0,3) = - 5,55
στ) $(-\frac{7}{3}) + (-\frac{5}{2}) = (-\frac{14}{6}) + (-\frac{15}{6}) = -\frac{29}{6}$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 8) + (+ 10)
β) (- 6,7) + (+ 8,3)
γ) $(-\frac{3}{4}) + (+\frac{7}{4})$
δ) (+ 13) + (- 17)
ε) (- 21) + (+ 14)
στ) (+ 15,2) + (- 20)

Λύση

α) Έχουμε:
|- 8 | = 8 και |+ 10 | = 10. Είναι 10 > 8. Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Άρα έχουμε:
(- 8) + (+ 10) = + (10 - 8) = + 2 .
β) Ομοίως:
(- 6,7) + (+ 8,3) = + (8,3 - 6,7) = + 1,6
γ) $(-\frac{3}{4}) + (+\frac{7}{4}) = +(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}) = +\frac{4}{4} =$
$= +1$

δ) (+ 13) + (- 17) = - (17 - 13) = - 4
ε) (- 21) + (+ 14) = - (21 - 14) = - 7
στ) (+ 15,2) + (- 20) = - (20 - 15,2) =
= - 4,8

4. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε:
α) στον + 6 για να βρούμε άθροισμα + 8
β) στον - 7 για να βρούμε άθροισμα - 13
γ) στον - 10 για να βρούμε άθροισμα +15
δ) στον + 11 για να βρούμε άθροισμα - 45

Λύση

α) Πρέπει να προσθέσουμε τον ακέραιο + 2 γιατί:
(+ 6) + (+ 2) = + 8.
β) Πρέπει να προσθέσουμε τον - 6 γιατί:
(- 7) + (- 6) = - 13.
γ) Πρέπει να προσθέσουμε τον + 25 γιατί: (- 10) + (+ 25) = + 15.
δ) Πρέπει να προσθέσουμε τον - 56 γιατί: (+ 11) + (- 56) = - 45.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 7) + (+13) + (- 21) + (-10) + + (+29)
β) (+ 21) + (- 105) + (- 3) + (+ 138) + + (- 26)
γ) (- 0,78) + (- 6,37) + (+ 5,3) + + (+ 8,71) + (- 12,1)

Λύση

Παρατήρηση:

Όταν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερους από δύο ακέραιους μαζί, τότε προσθέτουμε όλους τους θετικούς μαζί και όλους τους αρνητικούς μαζί και μετά έχουμε να κάνουμε μια πρόσθεση μεταξύ δύο ετερόσημων αριθμών.

α) $(-7) + (+13) + (-21) + (-10) + (+29) =$
$= [(+13) + (+29)] + [(-7) + (-21) + (-10)] =$
$= (+42) + (-38) = +4.$

β) $(+21) + (-105) + (-3) + (+138) + (-26) =$
$= [(+21) + (+138)] + [(-105) + (-3) +$
$+ (-26)] =$
$= (+159) + (-134) = +25.$

γ) $(-0{,}78) + (-6{,}37) + (+5{,}3) + (+8{,}71) +$
$+ (-12{,}1) =$
$= [(+5{,}3) + (+8{,}71)] + [(-0{,}78) + (-6{,}37)$
$+ (-12{,}1)] =$
$= (+14{,}01) + (-19{,}25) = -5{,}24.$

6. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, όταν:
$\alpha = -7$, $\beta = +10$, $\gamma = -6$, $\delta = -3$.

Λύση

Είναι:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta =$
$= (-7) + (+10) + (-6) + (-3) =$
$= (+10) + [(-7) + (-6) + (-3)] =$
$= (+10) + (-16) = -6.$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $(-3) + (-7)$
β) $(+0{,}85) + (-4)$
γ) $(-3) + (-7) + (-6)$
δ) $(+1{,}2) + (2{,}4) + (+4{,}8)$

ε) $(-\frac{1}{2}) + (+\frac{9}{2})$

στ) $(+1{,}87) + (-2{,}4)$

Λύση

α) $(-3) + (-7) = -10$
β) $(+0{,}85) + (-4) = -3{,}15$ ...

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{4}) + (-\frac{5}{6}) + (-\frac{4}{3}) + (+\frac{7}{2})$
β) $(+\frac{3}{5}) + (-\frac{6}{4}) + (-2) + (+\frac{5}{2})$

γ) $(-0{,}35) + (-6{,}5) + (+4{,}75) + (+5{,}1)$
$+ (-2{,}8)$

Λύση

α) $(+\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{4}) + (-\frac{5}{6}) + (-\frac{4}{3}) + (+\frac{7}{2}) =$

$(+\frac{6}{12}) + (-\frac{9}{12}) + (-\frac{10}{12}) + (-\frac{16}{12}) + (+\frac{42}{12}) =$

$[(+\frac{6}{12}) + (+\frac{42}{12})] + [(-\frac{9}{12}) + (-\frac{10}{12}) +$

$+ (-\frac{16}{12})] =$

$(+\frac{48}{12}) + (-\frac{35}{12}) = \ldots$

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) $(-7) + (+8) + (-26) + (+45) +$
$+ (-23)$
β) $(+17{,}4) + (-21{,}83) + (-19{,}38) +$
$+ (+16{,}38)$

γ) $(+\frac{5}{8}) + (-\frac{6}{3}) + (-\frac{6}{8}) + (-\frac{5}{6}) + (+\frac{7}{2})$

Λύση

α) $(-7) + (+8) + (-26) + (+45) + (-23) =$
$= [(+8) + (+45)] + [(-7) + (-26) +$
$+ (-23)] = \ldots$

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, όταν:

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = +\frac{3}{4}$, $\gamma = +\frac{3}{2}$, $\delta = -\frac{5}{6}$

Λύση

Είναι:

$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta =$

$= (-\frac{1}{2}) + (+\frac{3}{4}) + (+\frac{3}{2}) + (-\frac{5}{6}) = ...$

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι το 12...

5. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε:

α) στον - 1 για να βρούμε + 3
β) στον + 4,5 για να βρούμε + 7
γ) στον + 2 για να βρούμε - 13
δ) στον - 6 για να βρούμε - 17

Λύση

α) Πρέπει να προσθέσουμε τον + 4 γιατί: (- 1) + (+ 4) = + 3.
β) Πρέπει να προσθέσουμε τον ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 4) + (- 27)   β) (- 7) + (+ 35)
γ) (+ 19) + (- 36)   δ) (+ 51) + (+ 24)
ε) (+ 21) + (- 37)   στ) (- 13) + (- 22)

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 7,5) + (- 6,7)
β) (- 10,35) + (+ 6)
γ) (- 19,437) + (- 21,2)
δ) (+ 11,3) + (- 9,1)
ε) (+ 0,03) + (+ 0,97)
στ) (+ 1,37) + (- 5,8)

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(-\frac{3}{7}) + (-\frac{4}{7})$
β) $(-\frac{4}{3}) + (+\frac{3}{4})$
γ) $(+\frac{5}{6}) + (-\frac{5}{12})$
δ) $(-\frac{7}{15}) + (+\frac{1}{3})$
ε) $(-\frac{5}{2}) + (+1)$
στ) $(-\frac{8}{3}) + (-\frac{4}{7})$

4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
α) (- 7) + (- 1,2) + (3,8) + (+ 6,3)
β) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{6}{7}) + (+\frac{11}{4}) + (+\frac{3}{7})$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(-5,8) + (+\frac{3}{4}) + (+\frac{5}{10}) + (+\frac{35}{10})$
β) $(-\frac{431}{100}) + (-\frac{73}{10}) + (+\frac{47}{100}) + (+\frac{1538}{1000})$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $(+\frac{7}{2}) + ... = -\frac{11}{2}$

β) (- 4,7) + ... = + 5
γ) ... + (+ 3) = - 18
δ) ... + (- 4) = + 10,3

7. Δίνονται τα σύνολα:

$A = \{-\frac{3}{4}, +\frac{5}{6}, -1, +7, 6\}$ και

$B = \{-2, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{4}{3}\}$.

Να βρείτε όλα τα αθροίσματα: α + β, όπου α στοιχείο του συνόλου Α και β στοιχείο του συνόλου Β.

8.7 Αφαίρεση ρητών αριθμών

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς αφαιρούμε έναν ρητό αριθμό από έναν άλλο;

Απαντήσεις

1. Για να αφαιρέσουμε έναν ρητό αριθμό από έναν άλλο ρητό κάνουμε τις εξής ενέργειες:
α) Μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση αλλάζοντας συγχρόνως το πρόσημο του αφαιρετέου.
β) Κάνουμε την πρόσθεση
π.χ. $(-3) - (+2) = (-3) + (-2) = -5$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις παρακάτω διαφορές:
α) $(+2) - (+3)$
β) $(-2) - (+3)$
γ) $(-2) - (-3)$
δ) $(+2) - (-3)$

Λύση

α) $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$
β) $(-2) - (+3) = (-2) + (-3) = -5$
γ) $(-2) - (-3) = (-2) + (+3) = +1$
δ) $(+2) - (-3) = (+2) + (+3) = +5$

2. Να λύσετε την εξίσωση:
$x + (-6) = +7$

Λύση

Είναι:
$x + (-6) = +7$ τότε
$x = (+7) - (-6) = (+7) + (+6) = 13$.
Άρα $x = +13$.

3. Αν δίνονται οι αριθμοί $\alpha = -5$, $\beta = +7$, να βρείτε τις διαφορές $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Είναι:
$\alpha - \beta = (-5) - (+7) = (-5) + (-7) = -12$
και $\beta - \alpha = (+7) - (-5) = (+7) + (+5) =$
$= +12$.
Παρατηρούμε ότι οι διαφορές $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ είναι οι αριθμοί -12 και $+12$. **Άρα οι αριθμοί $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ είναι αντίθετοι.**

4. Να βρείτε τους αριθμούς:
$x = (+10) - (-3)$ και $y = (-6) - (+11)$
και μετά να υπολογίσετε τις διαφορές:
$x - y$ και $y - x$.

Λύση

Είναι:
$x = (+10) - (-3) = (+10) + (+3) = +13$
και $y = (-6) - (+11) = (-6) + (-11) = -17$.
Επομένως :
$x - y = (+13) - (-17) = (+13) + (+17) =$
$= +30$.
Άρα ο $y - x$ είναι ο αριθμός -30.

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$A = (-7) + (+6) - (-3) - (+14)$
$B = (+4) - (-10) - (+12) + (-6)$

Λύση

Μετατρέπουμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις, και κάνουμε μόνο προσθέσεις.

$A = (-7) + (+6) - (-3) - (+14) =$
$= (-7) + (+6) + (+3) + (-14) =$
$= (-21) + (+9) = -12.$

$B = (+4) - (-10) - (+12) + (-6) =$
$= (+4) + (+10) + (-12) + (-6) =$
$= (+14) + (-18) = -4.$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι παρακάτω διαφορές:
α)(- 2) - (- 12)
β) (+ 15) - (- 31)
γ) (- 21) - (+ 15)
δ) (- 7,8) - (- 5,6)
ε) (+ 5,3) - (- 7,85)
στ) (- 4,78) - (6,8)

Λύση

Έχουμε:
α) $(-2) - (-12) = (-2) + (+12) = +10$
β) $(+15) - (-31) = (+15) + (+31) = ...$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) x + (- 7,8) = + 5,13
β) x + (+ 1,3) = + 6,7
γ) (- 13,5) + x = - 13,5
δ) x + (+ 33) = - 92,75

Λύση

α) Έχουμε:
$x + (-7,8) = +5,18$ τότε:
$x = (+5,18) - (-7,8) = (+5,18) + (7,8) =$
$= + 12,98$
Άρα $x = 12,98$
β) Έχουμε:
$x + (+1,3) = +6,7$ τότε:
$x = (+6,7) - (+1,3) = (+6,7) + (-1,3) =$
$= ...$

3. Να βρεθούν οι διαφορές α - β και β - α όταν α = + 13,7 και β = - 1,75.

Λύση

Έχουμε: $\alpha - \beta = (+13,7) - (-1,75) = ...$

4. Να βρείτε τους αριθμούς x και y από τις ισότητες:

$$x = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right) \text{ και } y = \left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{7}{12}\right)$$

και μετά να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
1. α = x - y και β = x + y
2. A = α - β και B = β - α

Λύση

Έχουμε:

$$x = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) =$$
$$= \left(-\frac{3}{6}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$
$$y = \left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{7}{12}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{7}{12}\right) =$$
$$= \left(-\frac{20}{12}\right) + \left(+\frac{7}{12}\right) = -\frac{13}{12}$$

1. Τότε: $\alpha = x - y =$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{13}{12}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(+\frac{13}{12}\right) =$$
$$= \left(-\frac{16}{12}\right) + \left(+\frac{13}{12}\right) = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

και $\beta = x + y = ...$

5. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{1}{6}\right)$$
$$B = \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{13}{21}\right) - \left(+\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Λύση

$$A = \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{1}{6}\right) =$$
$$= \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = ...$$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις διαφορές:
α) (- 531) - (- 578)
β) (- 7,85) - (+ 3)
γ) (- 6,37) - (+ 0,43)
δ) (+ 71) - (- 8,63)
ε) $(-\frac{7}{8}) - (+\frac{5}{6})$
στ) $(+\frac{11}{13}) - (+\frac{3}{2})$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $(-\frac{10}{3}) + x = -\frac{7}{8}$
β) x + (- 31) = + 78
γ) x + (+ 10,1) = - 11,33
δ) (- 3,04) + x = - 7,8
ε) $x + (+\frac{3}{7}) = +\frac{1}{3}$
στ) (- 48) + x = + 48

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
Α = α - β + γ
Β = β - γ - α
Γ = γ - α + β
όταν α = - 71, β = + 35, γ = + 36.

4. Να υπολογίσετε τα x και y από τις σχέσεις:
x = (- 47) - (- 48) , y = (+ 35) - (+ 34)
και μετά να υπολογίσετε τα:
1) α = x + y , β = x - y , γ = y - x
2) Α = α + β + γ, Β = α - β - γ,
Γ = β - α + γ
3) Π = Α - Β - Γ

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
Α = (- 7) - (+ 39) - (- 56) + (- 67) - (+ 31)
Β = (- 3,75) + (- 6,23) - (- 47,8) - (+ 3,81)
Γ = (- 15) + (- 37,850) - (- 0,043) - (+ 1,38)

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:
φ + (- 13) = + 32
x + (+ 18) = - 58
y + (- 29) = - 65
(+ 44) + ω = + 39
και να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
Α = φ - x + y - ω
Β = φ + x - y - ω
Γ = ω - x - y - φ

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να παραστήσετε τους αριθμούς: + 3,5 - 6, - 0,5 , + 1,8 , - 2, + 3 με τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, και Ζ αντίστοιχα στην ευθεία των ρητών αριθμών. Μετά να βρείτε τις αποστάσεις: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΔΓ, ΓΔ, ΒΖ, ΒΕ.

2. Δύο σημεία Α και Β τοποθετημένα στον άξονα των ρητών αριθμών απέχουν 4 μονάδες. Αν το Α παριστάνει τον αριθμό - 7,5 , τότε το Β ποιους αριθμούς μπορεί να παριστάνει;

3. Ποιοι αριθμοί έχουν απόλυτη τιμή:
α) 1, β) - 2 , γ) 3,7 , δ) 1,6.

4. Να βρείτε για ποιους ακέραιους ισχύει:
α) $|x| \leq 1$, β) $|x| < 1$,
γ) $2 \leq |x| \leq 7$, δ) $2 < |x| < 7$.

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left|-\frac{1}{2}\right| - \left|+\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{5}{6}\right| - \left|-\frac{3}{8}\right|$$

$$B = |-30| - |+19| + |-45| - |-7|$$

6. Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς και να τους τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

$$-\frac{1}{3}, +\frac{5}{6}, -1, -\frac{7}{5}, -\frac{2}{3}, +\frac{4}{3}, +1$$

7. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = -7$, $\beta = -4$ $\gamma = +13$, $\delta = -9$, $\varepsilon = +11$, $\zeta = +2$.
α) Να τους τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
β) Να αφαιρέσετε από το μικρότερο τον αμέσως μεγαλύτερό του.
γ) Να αφαιρέσετε από το μεγαλύτερο τον αμέσως μικρότερό του.
δ) Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των παραπάνω διαφορών και να τις συγκρίνετε.

8. Κάνουμε το παρακάτω πείραμα: Κάθε φορά που ένα αυτοκίνητο κινείται προς τα εμπρός σημειώνουμε την απόσταση που διανύει με το πρόσημο «+», ενώ κάθε φορά που κινείται προς τα πίσω σημειώνουμε την απόσταση με το πρόσημο «-». Ένα αυτοκίνητο εκτελεί τις επόμενες κινήσεις, ξεκινώντας από τον σταθμό Α 8 km μπροστά, μετά 15 km πίσω, μετά 38 km μπροστά, μετά 43 km πίσω, μετά 11 km μπροστά. Να βρείτε, πόσο απέχει από το Α μετά το τέλος της κίνησης και αν συνολικά κινήθηκε μπρός ή πίσω.

9. Να γίνουν οι παρακάτω προσθέσεις:
α) $(+7) + (-11) + (-7) + (+85) +$
$+ (-38)$
β) $(-8{,}3) + (-17{,}5) + (+38{,}2) +$
$+ (+11{,}1) + (-3{,}7)$

γ) $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{10}{3}\right) +$
$+ \left(+\frac{13}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)$

10. Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:
$A = (-18) - (-35) + (+24) - (+47) -$
$- (-19)$
$B = (+1{,}75) + (-3{,}8) - (-4{,}32) -$
$- (+1{,}93) + (-3{,}1)$
$\Gamma = (+5{,}863) - (+7{,}5) - (+4{,}381) -$
$- (-0{,}93) + (-3{,}7)$

11. Ένας άνθρωπος προσπαθώντας να κάνει δίαιτα σημειώνει στο σημειωματάριό του το βάρος που χάνει κάθε βδομάδα με το πρόσημο «–», και το βάρος που παίρνει με το πρόσημο «+». Την πρώτη εβδομάδα έχασε 2,5 kg, τη δεύτερη 3,1 kg, την τρίτη πήρε 1,2 kg, την τέταρτη πήρε 2,5 kg, την πέμπτη έχασε 3,9 kg και τις δύο υπόλοιπες έχασε 1,5 kg την κάθε εβδομάδα. Μετά το τέλος της δίαιτας έχασε βάρος ή πήρε και πόσο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

BASIC 11

Στη BASIC η απόλυτη τιμή ενός αριθμού x συμβολίζεται με ABS x ή ABS(x) ανάλογα τον υπολογιστή.
Δηλαδή αν πληκτρολογήσουμε:
PRINT ABS (- 3) (↵)
θα εμφανιστεί ο αριθμός 3 αφού:
$|-3| = 3$

Σύμφωνα με το παραπάνω η παράσταση:
$|-3| + 2 \cdot |-4| - 7 \cdot |+2|$
γράφεται στη BASIC:
PRINT ABS (- 3)+2*ABS (- 4) - 7*ABS (+2) (↵)

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε με ένα πρόγραμμα τις παραστάσεις:
α) $2 \cdot |-3| + 5 \cdot |-2| - 4 \cdot |-4|$
β) $|-3|^2 - |-2| \cdot 4 - 7 \cdot (1 - 3 \cdot |+1|)$
γ) $2 \cdot |-2|^3 - 4 \cdot |-3|^2$

2. Αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το σύνολο { -1, -3, -5, 7, 9} και η y από το { 0, -1, +2, -3, -6} τότε να φτιάξετε πρόγραμμα, χρησιμοποιώντας 2 INPUTS, που να υπολογίζει την παράσταση:
$A = 2 \cdot |x| - 3 \cdot |y|$.
Μπορεί να γίνει με READ και DATA;

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β = Μισολυμένες ασκήσεις
Γ = Προτεινόμενες ασκήσεις
Δ = Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 1ο

1.1, 1.2, 1.3 **Β. 3β)** Παρασκευή
Γ. 1) 13, **2)** 14, **3)** 5 - 12 - 19 - 26, **13)** 19
1.5 **Β. 1)** 2x - 1, 2x, 2x + 1, **2)** x · 2x, x + 10, 2x + 8, 2x + 2x + 1, **4)** 3α, **5)** 2α + 10
Γ. 1) 2x, x + 2, 3x - 4, 2 · (x + 8), **2)** x > 5, 2x < 6, x - 6 <10, 3 <x <17, **5)** x · x, **6)** 2x + 2, **7)** 580x, **8)** x · (x - 5), **9)** 55x
1.6 **Β. 1)** Όχι, **2)** Ναι, **3)** 4, **4)** 9, **5)** 650
Γ. 1) 8, **2)** 17 - 9 - κανένας - 13, **3)** 10, **4)** 11 - 8 - 5 - 15 - 11
1.7 **Β. 1)** 28,613 - 1968,3 - 160, **2)** 12,7, **3)** 88 - 97 - 162 - 160
Γ. 1) 680, **2)** 2991,5, **3)** 231 - 265 - 353, **4)** 116 - 174 - 182, **5)** 76,5 - 35,2 -108,5- 123,9
1.8 **Β. 1)** 565, **2)** 907,65 - 4,928 - 0,682 - 12,54, **3)** 14 - 8 - 22 - 51, **4)** 2486 - 35,63 - 26,607 **5)** 17 - 5 - 29,63 - 44,22
Γ. 1) 10750, **2)** 88, **3)** 510.400, **4)** 23 - 10 - 36 - 2, **5)** 51,43 - 18,45 - 0,35 - 53,75, **6)** x =4,6, φ = 6,47, ω = 32,05, z= 1,35, **7)** 119,2 - 118 - 29,16 - 21,46
1.9 **Β. 1)** 25, **2)** 50 - 54 - 26,4 - 20,305, **3)** 10.560 - 241,28 - 73,8072, **4)** 39 - 29 - 8,64, **5)** 0,001 - 0,1 - 10 - 10, **6)** ίσες
Γ. 1) 417,5 - 3997 - 594 - 3780, **2α)** 78 - 780 - 7800, **2β)** 356,5 - 3565 - 35650, **2γ)** 4213 - 42130 - 421300, **3α)** 0,63 - 0,063 - 0,0063, **3β)** 7,643 - 0,7643 - 0,07643, **3γ)** 85,97 - 8,597 - 0,8597, **4)** 66 - 17,87 - 51,83 - 4486,59, **5)** 69 - 709 - 60 - 0 - 16,9 - 101,88, **6)** 75 - 83 - 34 - 28 - 52, **7)** 868, **8)** 0 - 47 - 67 - 37
1.10 **Β. 1)** 24, **2)** 18
Γ. 1) 30, **2)** 12, **3)** 24, **4)** 56, **5)** 72, **6)** 224, **7)** 40 min, A = 10, B = 8, Γ = 5
1.11 **Β. 1)** 1024 - 32 - 32, **2)** 260 - 258, **3)** 15, **4)** 1305, **5)** $5 \cdot 10^3 + 10^2 + 2 \cdot 10$, **6)** 8^2 - 5^2 - 2^2 - 3^1
Γ. 1) 256 - 64 - 1, **2)** 33 - 90, **3)** 6^2 - 8^2 - 12^2 - 10^3 - 10^4, **4)** 0 - 1, **5)** 96 - 62 - 52 - 192, **6)** 1110 - 10010, **7)** 1 - 1
1.12 **Β. 1)** 54 - 81, **2)** 4α - 10x, **3)** 68 -9
Γ. 1) 37,895 - 9,6 - 70,7, **2)** 121 - 3 - 6, **3)** 2x - 0,9x - 0, **4)** 91 - 11,2, **5)** 1.250, **6)** 4.800
1.13 **Β. 2)** 5, **3)** 470
Γ. 1) Λ-Σ-Σ-Σ-Λ-Σ-Σ-Σ, **2)** 4, **3)** 38, **4)** 3 - 6, **5)** 75, **6)** 20 - 6500
1.14 **Β. 2)** 8, **3)** 112
Γ. 1) 2, **2)** 3, **3)** 6, **4)** 1 - πρώτοι μεταξύ τους
1.16 **Β. 1)** $2^5 \cdot 3$ - $2^3 \cdot 3^3$
Γ. 1) $2 \cdot 3^2$ - 5^2 - $1 \cdot 57$ - 3^4 - $2^4 \cdot 7$ - $2^2 \cdot 7^2$ - $2^4 \cdot 3^3$
1.17 **Β. 1)** π=22, υ=2 - π=12, υ=9 - π=112, υ=120, **2)** Ναι - Όχι - Ναι - Όχι, **3)** 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 - 48 ή 49 ή 50 ή 51 ή 52 ή 53
Γ. 1) Παρασκευή, **2)** α - β, **3)** 0 ή 1 ή 2, **4)** 6 ή 8, **5)** 88 ή 89 ή 90 ή 91 ή 92 ή 93 ή 94 ή 95, **6)** 15, **7)** 20
1.18 **Β. 1)** 2,5 - 7,5 - 0,235 - 0,9325 - 1,0053, **2)** 223,75 - 8,96 - 5,7 - 95,6, **3)** Α=122,1 - Β=40,7 - Γ=0,359 - Δ=0,1795, **4)**1,6 - 47,9
Γ. 1) 1225 - 156 - 22,34 - 22,5 - 191,125 - 51,27 - 6,865, **2)** 3,5 - 0,028 - 8,5 - 0,075 - 9,5 - 2,55 - 0,00353 - 0,0885, **3)** 32,4 - 10 - 19,75 - 40 - 1,6 - 2,8 - 20, **4)** 1,875 - 62,5 - 0,125 - 5, **5)** 0,0075 - 0,000702 - 0,0075, **6)** 320 - 7000, **7)** 78,5, **8)** 117,5 - 4,7

1.19 Β. 1α) 8,6 - 8,68 - 8,687, 1β) 272,1 - 272,12 - 272,127, 2) 104
Γ. 1α) 47,9 - 47,97 - 47,972, 1β) 739,1 - 739,11 - 739,114, 1γ) 279,7 - 279,71 - 279,718, 1δ) 113,6 - 113,62 - 113,625, 2α) 20,7 - 20,70 - 20,709, 2β) 273,3 - 273,33 - 273,333, 2γ) 0,2 - 0,22 - 0,228, 2δ) 2,4 - 2,48 - 2,488, 3) 10,28, 4) 184, 5) 11,5 - 33566, 6) 2600
1.20 Β. 1) 41 - 23 - 2 - 4 - 25, 2) 2,16 - 2,16 - 31,49 - 8,89, 3) 13,64, 4) 73, 5) 81 - 36, 6) 1331 - 30, 7) 6 - 4
Γ. 1) 4 - 144 - 24 - 64 - 12 - 6, 2) 0,0256 - 1 - 4,84 - 36 - 16 - 121, 3) 4 - 3 - 25 - 32-1- 6, 4) 0,74 - 8 - 4,92 - 95, 5) 25 - 1 - 1 - 25, 6) 216 - 216 - 8 - 8, 7) 100 - 100 - 36 - 36, 8) 0,73 - 0,73 - 0,728 - 0,728, 9) 9,75 - 9,75 - 40 - 24 - 40 - 15, 10) Α=1,5 - Β=4 - Γ=0,838
1.21 Β. 1) $4{,}3 \cdot 10^7$ - $3{,}173 \cdot 10^{10}$ - $3{,}14 \cdot 10^{11}$ - $9{,}15 \cdot 10^{16}$, 2) 189.900 - 59.000 - 22.300.000, 3) $8{,}609 \cdot 10^4$ - περίπου $5 \cdot 10^9$, 4) A_3, A_2, A_1, A_4 - A_3, A_1, A_2, A_4 - A_1, A_3, A_2, A_4
Γ. 1) $9{,}13 \cdot 10^{12}$ - $6{,}371 \cdot 10^7$ - 10^{10} - $1{,}67 \cdot 10^5$ -$3{,}1 \cdot 10^{18}$, 2) $1{,}913 \cdot 10^7$ - $1913 \cdot 10^4$, $1{,}367 \cdot 10^8$ - $1{,}367 \cdot 10^5$, $5{,}237 \cdot 10^6$ - $5237 \cdot 10^3$, $4{,}444 \cdot 10^{11}$ - $4444 \cdot 10^8$, 3) 38.000.000 - 6.130.000.000 - 1000 - 10.200.000.000 - 4.000.000, 4) $10{,}7 \cdot 10^6$ - $0{,}97 \cdot 10^6$ - $43{,}21 \cdot 10^6$ - $8{,}76 \cdot 10^6$ - $1{,}07 \cdot 10^6$, 5) $2{,}16 \cdot 10^8$, 6) ίδια ηλικία, 7) $A=5{,}4059 \cdot 10^6$, $B=1{,}168 \cdot 10^5$, $Γ=4{,}3045 \cdot 10^5$

Δ. 1α) 23750 - 4780 - 5350 - 7830, 1β) 26 - 36 - 46 - 1, 1γ) 12,5 - 19,8 - 2,5 - 0,1, 2) 277, 3) 2 - 15 - 0 - 3 - 10 - 3 - 15 - 13, 4) 35 - 4 - 21 - 32 - 12 - 10,3 - 2,62 - 10, 5) 10 - 19 - 25 - 9 - 35 - 18, 6) 24 - 27 - 48 - 6,1625 - 7,7 - 79,205, 7) 42 - 30, 8α) 8 - 32 - 64 - 128, 8β) 90 - 144 - 74 - 24 - 4, 9) 280 - 28 - 31 - 3,22 - 33 - 72, 10) 1150 - 85 - 1183, 11) 31.679, 12) {0,1,2,3,4,5} - {42, 43, 44, 45,46,47}, 13) 10 - 141 - 18,5, 14) 0,495 -'507 - 18,36

Κεφάλαιο 2ο

2.1 Β. 2) Α=125 - Χ= 375 - Ψ=500 - Ζ=625 - Ω=750, 4) 6 - 10
Γ. 4) 125 Km/h, 5) α = 25 g β = 75 g, 6) 7 -3, 7) 12 - 5, 8) 3 - 6, 9) 5 - 7 - 9
2.2 Β. 1) (7,6), 2) x=3, y=10 - x=9, y=3
Γ. 2) (6,6), (9,6), (9,9), 4) $x \neq 5$, $y \neq 17$
2.3,2.4 Β. 2) α=32τ
Γ. 1) δ= 1/2 α, β=1/8 α, γ=2/5 α, 2) 25
2.5, 2.6, 2.7 Β. 1) 20,02 km=2002 dam=20020 m=2002000cm, 580.603mm=58060,3 cm = 580,603 m = 0,580603 km, 2) 130,805 m=130805 mm=1308,05 dm= 1,30805 hm = 0,130805 km, 3) 26,6 m
Γ. 1) 11200m - 0,187 km - 9.080dam - 718 cm, 2) 1,5 km, 3) 68,15 m - 4,284 m 4) α. = 6m 28m, β. 4m 96m γ. 1dm, 87mm, 6) ίσα, 7) 1,118 - 3256 - 71869
2.8 Β. 1) Α=22 - Β=2 - Γ=12, 2) Α=44 - Β=4 - Γ=24
Γ. 1) 112, 2) 1/8
2.9, 2.10 Β. 1) 12,6 m^2 - 1,96374 m^2, 3) 1860 cm^2 - 12850 cm^2 - 127,55 cm^2 - 12700 cm^2
Γ. 2) 41.400.000, 3) 781.490, 4) 9,375
2.11 Β. 1) 104 m^2, 2) 168,75 m^2, 3) 61.440, 4) Ε=100
Γ. 1) 10,05 dm^2, 2) 57,6 m^2, 3) 24, 4) 36, 5) 69 m^2, 6) 100 m^2
2.12 Β. 1) 28κ - 25κ - 7λ - 25/4 λ, 2) 14σ - 12,5σ
Γ. 1) 4, 2) 8τ
2.13 Β. 1) 760.000 cm^3 - 126.000.000 cm^3, 2) 3896, 3) 264,2 gal, 4) 0,0759 g, 5) 12 ml
Γ. 1) 1.860.000 mm^3 - 230.000 mm^3 - 12.000 mm^3, 2) 1.920.000 cm^3 - 1,29 m^3, 3) 910 μεγάλα - 1820 μικρά, 4) 11
2.14 Β. 1) 5,168 cm, 2) 72, 3) Ναι, 4) 1728 cm^3
Γ. 1) 25,86 l, 2) 8 dm^3 - 24 dm^2, 3) 64, 4) 39,8, 5) 1m

2.15 **Β.** **3)** 5 h 20 min, **4)** 5 h 25 min - 17.28
Γ. **1)** 78.681,6 min, **3)** 2.011, **4)** 7.22
2.16 **Β.** **2)** 200 - 400, **3)** 4,5 kg, **4)** 9090 ή 8910 kg
Γ. **1)** 17000 g - 1,896 kg, **2)** 180, 20, 180, **3)** 7968 - 8352, **4)** 650 kg
2.17 **Β.** **1)** 52, **2)** 39.772, **3)** 127.268
Γ. **1)** 10 - 1363 - 5, 2) 284 - 310, 3) 150.030 δρχ. - 1.208 DM - 93 δρχ.

Δ. **1)** 18 cm², **2)** 2.592.000, **3)** 172.800, **4)** 11.36 - 32, **5)** 2 m, **6)** 9 m, **7)** 840 - 420, **8)** 8110,77 DM - 2793,6 £, **9)** 54.000.000 m³ - 30 Δεκ., **10)** 2,5 ώρες, **11)** 5 m, **12)** 16 kg 400g - 1 kg 200 g, **13)** 5 ώρες, **14)** 25 h 45 min, **15)** 0,12 m², **16)** 93.914 δρχ. - 3,89 yrd

Κεφάλαιο 3ο

3.1 **Β.** **1)** 960, **2)** α) 4/5, β) 2150, γ) 10750, **3)** α) 1/30, β) 7/30, γ) 14/30
Γ. **1)** 3/8, 2/3, 1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/4, 1/2, 1/4, 1/2, 2/5, 2/6, **2)** Τα α, β, ε, **3)** α) το 1/2, β) τα 5/10, γ) τα 3/4, δ) τα 4/9, **4)** 1050, **5)** 225 - 45, **6)** 25 - 3400, **7)** 8, **8)** 12, **9)** 22750, **10)** 72, **11)** 8000, **12)** α) 1/4, 3/4, β) 4/8, 4/8, γ) 6/12, 6/12, **13)** α) 5/9, β) 4/5, **14)** 200 - 600 - 250
3.2 **Β.** **1)** α) x=2, β) x= 17, γ) x=3, δ) x=20, **2)** α) x=13, β) x=23, **3)** 170/220, **4)** α) 40/8, β) 184/8, γ) 416/8, δ) 144/8, **5)** α) 7 : 9, β) 3 : 25, γ) 45 : 7, δ) 20 : 5
Γ. **1)** α) 8/15, β) 9/53, γ) 3/4, δ) 5/29, **2)** α) 2 : 5, β) 3: 8, γ)1 : 7, δ)49 : 6, ε)1500 : 2370 **3)** α) 245/35, β) 315/35, γ) 875/35, δ) 2415/35, **4)** α) x=12, β) x=17, γ) y=23, δ) y=30, ε) ω=80, στ) λ=15
3.3 **Β.** **1)** α) 6/24, 24/36, 4/6, 2/3, β) 10/16, 15/24, 20/32, 25/40, γ) 6/12, 3/6, 24/48, 36/72, δ) 2/10, 3/15, 4/20, 5/25, **2)** α) 1/2, β) 7/8, γ) 3/5, δ) 5/7, ε) 1/2, **3)** α) 3/4, β) 3/4, γ) 2/11, δ) 14/15, **4)** α) x=2, β) x=32, **5)** α) 31/12, β) 7/5
Γ. **1)** α) ίσα καθένα με 2/5 · 30 = 12 μονάδες, β) ίσα καθένα με 2/3 · 30 = 20 μονάδες, **2)** α) 2/3, 4/6, 16/24, 24/36, 40/60, β) 3/20, 12/80, 18/120, 24/160, 30/200, γ) 14/6, 21/9, 28/12, 35/15, 42/18, δ) 8/2, 12/3, 16/4, 20/5, 24/6, ε) 10/18, 15/27, 20/36, 25/45, 30/54, στ) 26/14, 39/21, 32/28, 65/35, 78/49, **3)** α) (6 : 3)/(12 : 3), β) (5 · 2)/(9 · 2), γ) (18 : 6)/(48 :6), **4)** α) 17/20, 1/2, 5/4, 2/3, 5/6, β) 1/3, 7/6, 2/3, 5/6, γ) 7/4, 10/9, 3/4, 5/6, δ) 11/12, 3/4, 5/9, 3/7, **5)** α) 42/91, 28/35, 21/20, 49/63, β) 35/36, 2/3, 52/195, 12/25, γ) 54/55, 8/11, 1/2, 2/3, **6)** 96 - 80 - 64, **7)** 400 - 480 - 320, **8)** 150 - 200 - 30.250.000, **9)** α) x=2, β) x=40, γ) x=14, δ) x=20, ε) x=10, στ) x=1, **10)** α) y=6, β) ω=8, γ) κ=25, δ) λ=6
3.4 **Β.** **1)** α) 12/20, 35/20, β) 16/18, 2/18, γ) 8/12, 9/12, δ) 2/4, 3/4, ε) 15/21, 8/21, στ) 57/95, 80/95, **2)** α) 12/16, 5/16, 6/16, β) 6/75, 10/75, 15/75, **3)** 18/36, 12/36, 45/36, 12/36, 21/36
Γ. **1)** α) 14/35, 15/35, 2/35, β) 36/48, 20/48, 26/48, 18/48, **2)** α) 16/56, 49/56, β) 33/99, 72/99, γ) 2/6, 5/6, δ) 12/72, 54/72, ε) 105/195, 104/195, στ) 13/30, 14/30, **3)** α)24/36, 32/36, 14/36, 3/36, β) 105/300, 36/300, 260/300, 42/300, γ) 30/840, 378/840, 378/840, 140/840, δ) 96/324, 52/324, 414/324, 63/324, ε) 2142/11424, 3468/11424, 7344/11424, 2520/11424, **4)** α) 3/4 < 7/4, β) 5/6 > 5/7, γ) 9/8 <10/8, δ) 1/3 >2/7, ε) 3/4 = 6/8, στ) 4/9 > 3/7, ζ) 5/8 > 8/15, η) 5/15 = 15/45, **5)** α) <, β) >, γ) <, δ) <, **6)** α) 2/2 = 1, β) 5/8, γ) 11/15, δ) 6/10, ε) 33/45, **7)** 11/12, 5/6, 2/3, 13/24, 1/2, 3/8, 1/4, **8)** α) 17/32 > 25/48, β) 31/36 < 37/40, γ) 13/64 < 0,35, δ) 3/25 < 7/45, ε) 10/15 < 13/45, στ) 9/32 < 10/34, **9)** α) 1/3 <1, 3/4 <1, γ) 7/6 >1, δ) 5/3 >1, ε) 15/17 <1, στ) 25/26 <1, ζ) 35/24 >1, η) 135/78 >1, **10)** α) 10/16, β) 10/15, γ) 9/20, δ) 3/5, ε) 10/18, στ) 46/100, ζ) 25/36, **11)** α) 1/4, 13/40, 3/8, 9/20, 14/25, 7/10, 4/5, β) 1/28, 2/7, 13/42, 5/12, 10/21, 9/14, 3/4, **12)** 8/9, 7/8, 3/4, 11/18, 17/30, 5/10, 1/12, **13)** ο α'
3.5 **Β.** **1)** α) 5/17, β) 12/18, γ) 15/9, **2)** α) 39/60, β) 5/72, γ) 43/90, δ) 11/84, ε) 121/320,

στ) 61/144, **3)** α) 35/30, β) 51/90, γ) 80/72, δ) 18/70, ε) 263/63, **4)** α) 3 2/5, β) 6 1/3, γ) 5 1/4, δ) 7 3/4

Γ. 1) α) 13/24, β) 41/36, γ) 16/48, δ) 11/10, ε) 76/40, **2)** α) 43/60, β) 11/84, γ) 121/320, δ) 53/144, ε) 10/3, στ) 26/5, ζ) 12/7, η) 9/4, **3)** α) 7/8, β) 33/34, γ) 11/18, δ) 11/36, ε) 28/35, στ) 15/49, ζ) 13/6, η) 5/2, **4)** α) 9/7, β) 10/15, γ) 21/14, δ) 19/10, ε) 3/2, στ) 12/13, **5)** δ, α, γ, β, **6)** α) 81/40, β) 127/56, γ) 13/48, δ) 35/50, ε) 89/72, στ) 825/990 = 168/198, ζ) 2013/1320, η) 98042/14784, θ) 3756/12744, ι) 1, **7)** α) A= = 471/60, β) B=462/180, γ) A + B= 1413/180

3.6 **Β. 1)** α) 6/18, β) 1/6, γ) 11/20, **2)** α) 19/18, β) 9/8, **3)** α) x=1/4, β) x=5/60, γ) x=28/21, δ) x=3/6, ε) x=1/4, στ) x=2/3

Γ. 1) α) 9/21, β) 6/24, γ) 15/51, δ) 39/70, ε) 45/120, στ) 5/150, ζ) 14/432, η) 5/4, **2)** α) 1/6, β) 11/60, γ) 98/30, δ) 12/10, ε) 4/28, στ) 7/20, ζ) 31/28, η) 7/6, θ) 1/20, ι) 1/4, **3)** β, γ, α, **4)** α) 907/168, β) 27/18, γ) 77/72, δ) 6/45, ε) 49/180, στ) 23/180, ζ) 11/56, η) 47/180, θ) 42/60, ι) 163/192, **5)** α) 29/10, β) 9/8, γ) 22/102, δ) 14/15, ε) 64/48, στ) 1/120, ζ) 27/72, **6)** α) 29/24, β) 140/42, γ) 7/40, δ) 33/40, ε) 33/24, στ) 84/56, ζ) 360/1080, **7)** 21/8, **8)** 11/12, **9)** 8/21, **10)** α) 5/9, β) 2/5, γ) 1/3, δ) 5/9, ε) 14/15, στ) 3/10, ζ) 1/2, η) 3/4, **11)** 187,5, **12)** α) 5/9, β) 5/11, γ) 13/14, δ) 3/10, ε) 7/16, στ) 1/2

3.7 **Β. 1)** α) 1/16, β) 27/5, γ) 10/21, δ) 50/63, ε) 5, **2)** δ, γ, β, α, **3)** α) 23/27, β) 27/28, **4)** 11/2, **5)** 26/12

Γ. 1) α) 2/35, β) 15/8, γ) 1/14, δ) 5/48, ε) 9/100, στ) 0, **2)** α) 53/10, β) 2175/1450, γ) 1, δ) 6/13, ε) 2/5, στ) 3/2, **3)** α) 25/96, β) 3/10, γ) 1/8, δ) 3/4, **4)** γ, δ, ε, β, α, **5)** α) 1/2, β) 11/5, γ) 1, **6)** 31500, 9000, 6000, **7)** 60000, 8000, 28000, **8)** 51786, 20714, 16072, **9)** 1800, 900, 600, **10)** 360, 135, 210, **11)** 21600, 98400, **12)** 4500, 2500, 500

3.8 **Β. 1)** 5/2, 9/7, 8/3, 5, 27, 1/8, 1/9, 1/25, **2)** α) x=9/23, β) x= 8/3, γ) x= 1/25, δ) x=1/35, **3)** α) x=3/2, β) x=1/15, γ) x= 2/7

Γ. 1) 3/2, 7/4, 15/30,8/5, 8, 4/5, 9/7, 5/7, 20/20, 15/13, 2/14, 6/5, 1/4, 1/3, 19/19, 2/7, **2)** α) x=25/3, β) x=29/8, γ) x=2/5, δ) x=21, ε) x=1/23, στ) x=1/75, **3)** α) x=16/3, β) y=33/35, γ) ω=13/12, δ) λ=1/25, ε) κ = 7/338, **4)** α) 10/13, β) 28/63, γ) 84/29, δ) 8/33, **5)** 4, 13/6, 5/3, 9/7, 3/8

3.9 **Β. 1)** α) 5/35, β) 35/48, γ) 9/32, δ) 45/4, **2)** α) 19/4, β) 1/3, **3)** 220/39, **4)** α) 1/16, β) 21/4, γ) 3/8, δ) 2/3, **5)** α) 5, β) 1/2

Γ. 1) α) 1/2, β) 6/5, γ) 2/27, δ) 10/9, ε) 760/171, στ) 7/26, ζ) 25/264, η) 9/10, **2)** δ, γ,β,α, **3)** α) 17/30, β) 13/14, γ) 1/4, δ) 1, **4)** α) 1, β) 25/16, γ) 2/5, δ) 25/24, **5)** α) 85/360, β) 3, γ) 79/21, **6)** α) 9/2, β) 243/7, γ) 1875/8, δ) 3/64, ε) 8/243, στ) 9/32, ζ) 8/21, η) 15/4, θ) 8/25, **7)** α) 63/24, β) 85/296, **8)** 9,625, **9)** 42.000, **10)** 80 g, **11)** 64,3125 m

3.10 **Β. 1)** 0,035, 0,28, 73,6, 0,09, 5,29, 10,020, **2)** 9/10, 3524/100, 289/10, 47/100

Γ. 1) 0,835, 0,0016, 9,8, 0,086, **2)** 53,2, 107, 51, 0,947, 0,13, 18,8, **3)** 37/10, 18032/10000, 239/100, 1851/1000, 649/1000, 2277/100, 903/100, 1/100, **4)** 9501/1000, 1001/10, 15/10, 21/1000, 737/100, 16/10000, 837/100, 14405/1000

3.11 **Β. 1)** 1,75, 4,75, 6,25, 0,375, 49,375, **2)** 0,21, 0,214 - 0,12, 0,123 - 0,38, 0,381 - 2,33, 2,333

Γ. 1) 0,6, 0,875, 3,8, 0,85, 0,4, 0,34375, **2)** 0,4, 0,41, 0,407 - 1,6, 1,56, 1,556 - 3,7, 3,67, 3,667 - 0,9, 0,87, 0,867 - 0,6, 0,64, 0,636 - 0,1, 0,08, 0,083 - 2,3, 2,33, 2,333

3.12 **Β. 1)** 60%, **2)** 179,2, 162,4, **3)** 142,5, 7,5, **4)** 142,5 κιλά, 7,5, **5)** α) 750, 150, 0,18, β) 0,05, 0,0625, γ) 1,02, 25,5, 102, **6)** 78023, **7)** x=19, y=880, ω =777, **8)** 12350, **9)** 50%, **10)** 9200, **11)** 12%, **12)** 123.200, **13)** 8,3%

Γ. 1) α) 40%, 5%, 87,5%, 41,6%, 53,12%, β) 32,3 %, 38,50%, 60%, 55%, γ) 2050%, 12%, 2,5%, **2)** α) 11/100, 7/100, 13/100, 37/100, β) 12,3/100, 116,5/100, 3,15/100, γ) 133/100, 201/100, 135,7/100, **3)** α) 215,6, β) 19,84, γ) 0,19, **4)** α) 8,25, β) 938,79, γ) 15,6, **5)** 96000, **6)** 72,37%, **7)** 31563, **8)** 95,07%, 4,93%, **9)** 54,44%, **10)** κέρδος 1088 δρχ. **11)** 36,11%, 41,66%, 22,23%, **12)** 21950, 17,17%,

13) 14,47%

3.13, 3.14 **Β.** **1)** α) 15, β) 1003,92, γ) 15.054, **2)** 9.204, **3)** 11.560,34, 1849,66, **4)** α) 6%, β) 18%, γ) 36%, **5)** 22.171, 19.490, **6)** 19.029, **7)** 10.662, **8)** α) 240.333, 247.333, 254.333, 261.333, 268.333, 275.333, β) 4.227.000, **9)** 415.860

Γ. **1)** α) 47,4, 342, 1279,2, β) 79, 570, 2132, γ) 284,4, 2052, 7675,2, **2)** α) 1903, β) 6589, γ) 69.465, δ) 950,95, **3)** α) 23.978, β) 8.632, **4)** 106.000, **5)** 1700, 2675, **6)** 6%, 18%, 36%, **7)** 6.397, **8)** 22.858, **9)** 11.338, **10)** 80.000, **11)** 319.410, **12)** 1.664.006, **13)** α) 250.000, β) 260.000, 270.000, 280.000, 290.000, γ) 2.600.000, **14)** 57.920, **15)** 17%, 83%, **16)** 90.000, **17)** 87.500, **18)** Χ=13,7%, Υ=20,76%, Φ=34,47%, Ω=31,04%, Ζ=181

Δ. **1)** α) 1, β) 5/2, γ) 1/2, **2)** α) 1/2, β) 1, γ) 31/25, **3)** α) 5/6, β) 7/10, γ) 2/5, **4)** α) 5/27, β) 1, **5)** α) 1/6, β) 1/8, **6)** α) 11/10, β) 2/3, γ) 1/3, **7)** α) 1, β) 9/8, **8)** 33.000, **9)** 300, **10)** 250, **11)** 1.440, **12)** 72, **13)** 60.000, **14)** 25.200, 2.100, 1.575, **15)** α) 15,75/100, β) 2,15/100, γ) 18,25/100, δ) 1721/1000, ε) 4,16/100, στ) 5,5/1000, **16)** α) 44,136, β) 119,04, γ) 1,11, δ) 5529, ε) 560,79, στ) 0,003, **17)** 15.345, **18)** 51.445, **19)** 11,7%, **20)** 840.000, **21)** 32,16%, **22)** μείωση 4%, **23)** 637,5, **24)** 95.850

Κεφάλαιο 4ο

4.1 **Β.** **2)** Ναι, **3)** α=5/2, β=0, γ=5/4, **4)** είναι ανάλογα

Γ. **1)** α) ναι, β) ναι, γ) όχι, δ) όχι, ε) ναι, **2)** α) ναι, β) ναι, γ) όχι, δ) όχι, **3)** x=5, ω=6,5, y=6

4.2 **Β.** **1)** 2.950.000, **2)** 445.000, **3)** 13,6%, **4)** 1.140.000

Γ. **1)** 31.200, **2)** 34,48%, **3)** 46, **4)** 750, **5)** 70,72, **6)** 7,312

4.3 **Β.** **1)** 34,45 - 30,55, **2)** 16

Γ. **1)** 21, 6, 448, 183, **2)** 18.900.000, 181.500.000, 1.863.000, 18.900.000, **3)** 35,75, **4)** 1,4 μίλια

4.4 **Β.** **1)** 52.000 κέρδος, **2)** 7.000.000, 10.500.000, 17.500.000, **3)** 1.350, 2.025, 4.050, 6.075

Γ. **1)** 215.000, 301.000, 344.000, **2)** 17,5, 2,5, 5, **3)** 60, 30, 70, 40

Δ. **1)** Όχι, **2)** Ναι, **3)** z=9, ω=5, y=3, x=6, **4)** 1.392.400, **5)** 3.640.000, **6)** α=50, β=65, **7)** 660.000, 110.000, 88.000, 99.000, 143.000

Κεφάλαιο 5ο

5.1 **Γ.** **1)** ισόπλευρο τρίγωνο, **2)** 6, 12, 7, **3)** α) 9, β) 16, γ) 9, **4)** γ) 5, **5)** 3

5.2 **Γ.** **1)** 9, **2)** 10, **4)** 5, 9, **5)** 6 τμήματα

5.3 **Γ.** **1)** 6 τρόποι, **3)** Όχι, **4)** Όχι, **5)** 6, 6

5.6 **Γ.** **3)** Ναι, **5)** ΚΜ // ΒΓ, ΚΛ // ΑΓ, ΛΜ // ΑΒ

5.8 **Γ.** **7)** ΜΒ = ΜΓ

5.9 **Γ.** **2)** Είναι παράλληλη, ΚΛ = ΜΒ, ΚΛ = ΜΓ, **3)** Είναι ΑΓ = ΒΔ, **4)** ΔΒ' = ΔΓ', **5)** Α'Β' = Β'Γ'

5.10 **Β.** **5)** Οι τέσσερεις χορδές είναι ίσες

Γ. **1)** Δύο τόξα, μία χορδή, **3)** α) όχι, β) το μέσο του ΑΒ, **4)** ΑΜ = ΜΒ

5.11 **Β.** **1)** ΑΜ = ΜΒ, **3)** ΜΕ = ΜΖ

Γ. **5)** Όχι, **7)** Ναι, ΚΛ = ΓΔ/2

5.12 **Γ.** **2)** Όχι, **3)** ΜΚ = ΜΛ, ΒΚ = ΒΛ, ΓΚ = ΓΛ. Η ΒΓ είναι μεσοκάθετος του ΚΛ. **4)** Είναι η τομή της ε με τη μεσοκάθετο του ΚΛ. **5)** Είναι ίσες

Δ. **7)** Το κέντρο βρίσκεται στο σημείο που τέμνονται οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. **8)** Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση. Το κέντρο του κύκλου είναι στο μέσο του ΒΓ. **9)** Είναι 5 cm κάθε μια. **10)** Είναι εφαπτόμενες στους δυο κύκλους.

Κεφάλαιο 6ο

6.2 **Β.** 4) x=6
6.3 **Β.** 2) Β οξεία, Γ οξεία, Α αμβλεία, 3) ορθές
Γ. 2) α, γ οξείες, β ορθή, δ αμβλεία, ε ευθεία, 3) Α, Β, Γ οξείες, 4) ορθές
6.4 **Β.** 2) α = β = 24°, γ = δ = 66°, 7) Α = Β = Γ = 60°
6.5, 6.6 **Β.** 1) (ΔΓΕ, ΕΓΑ), (ΔΓΑ, ΑΓΒ), (ΕΓΑ, ΑΓΒ), (ΒΑΓ, ΓΑΕ), 2) ΒΓΑ + ΑΓΔ = 90°, 3) α= 160°, β = 58°, 5) ΒΟΔ = 78°, 6) x =60°, y = 120°, 7) x = 105°, y = 75°, 8) 140° 49' 17", 9) α = 135°, β = 45°, γ = 135°
Γ. 1) (α, β), (γ, δ), (η, θ), (θ, ι), 2) ΑΚΛ και ΛΚΒ, ΚΛΔ και ΔΛΓ, 3) ΑΒΔ + ΔΒΓ = = 90°, 4) 58°, 5) α) 120°, 60°, β) 135°, 45°, γ) 80°, 100°, 6) ψΟχ = 155°, χΟψ' = 25°, ψ'Οχ' = 155°, 7) Α + Β + Γ = 180°
6.7 **Β.** 1) γ = δ = 154° 14' 30", 2) γ = 84°, 3) θ = φ = 100°, 4) zΑχ' = χΑz' = 67°, z'Αψ = 113°
Γ. 1) α = γ = 36° 7' 46", β = δ = 143° 52' 14", 2) (α, γ), (β, δ), (κ, μ), (λ, ν), 3) θ = 132°, 4) γ = 9° 11' 1", 5) γ = 45°, δ = 135°, α + β + γ = 225°
6.8 **Β.** 1) β) α και x, α και κ, β και ψ, β και λ, δ και ω, δ και ν, ω και ν, κ και x, κ.λπ., γ) δ και x, δ και κ, κ και ω, γ και ψ, γ και λ, λ και ζ, 2) Γ = 60°, Β = 120°, 3) Β = 55°, 4) φ = ψ'Βz'
Γ. 1) φ = 40°, θ = 75°, φ + ω + θ = 180°, 2) ΒΑΓ = 60°, ΑΔΒ = 37°, 3) θ + ΖΗΔ = = 180° ως εντός και επί τα αυτά, ΖΗΔ = φ ως εντός εναλλάξ, άρα θ + φ = 180°, 4) Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΗΖ = ΑΖΗ, 5) Χρησιμοποιήστε τις παραλληλίες, 6) ΑΓΒ = 91°
6.9 **Β.** 1) θ + λ + Δ = 180°, άρα φ + κ + Β + θ + λ + Δ = 360°, 2) ω = 43°, 3) θ = 60°, 5) Β = Γ = 30°, 6) Α = 80°, Β = 55°, Γ = 45°
Γ. 1) Α = 90°, άρα είναι ορθογώνιο τρίγωνο, 2) Β = Γ = 50°, 3) Α = 85°, Β = 55°, Γ = 40°, 4) Β = 20°, άρα το συμπλήρωμα της Β είναι φ = 70°, 5) Χρησιμοποιήστε την παραλληλία και ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180°, 6) ΑΔΕ = 52°, 7) Ισχύει ΑΔΒ = 90° − Γ και φ + ΑΔΒ = 90°, άρα φ = 90° − ΑΔΒ ή φ = 90° − 90° + Γ = Γ

Δ. 1) 106° 18' 6", 2) zOz' = 90°, 4) Τα τρία ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό βρίσκεται α) μέσα στο τρίγωνο, β) έξω από το τρίγωνο, γ) είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, 6) α) 65°, β) 51°, 7) Α = 36°, Β = 96°, Γ = 48°, 8) ψ = β = 115°, α = χ = 65°, 9) ΓΑΔ = 80°, Δ = 40°, ΑΓΔ = 60°, 10) Γ = 85°

Κεφάλαιο 7ο

7.2 **Β.** 1) Α = Ι, Β = Ζ, Γ = Κ, Δ = Η, Ε = Θ, 2) Ναι, 3) Είναι ίσα μεταξύ τους
Γ. 2) τριγ. ΑΕΔ = τριγ. ΒΖΓ, 3) τριγ. ΑΔΓ = τριγ. ΑΒΓ, τριγ. ΑΒΔ = τριγ. ΒΓΔ, 4) Ναι, 5) τριγ. ΟΑΒ = τριγ. ΟΒΓ και γωνίες ΟΑΒ = ΟΓΒ, ΟΒΑ = ΟΒΓ
7.3 **Β.** 1) Οι διχοτόμοι περνούν από το σημείο Ο, 2) Διχοτομεί και τη γωνία ΑΟΒ και διέρχονται από το Ο
Γ. 3) ΑΔΒ = ΑΔΓ, 4) ΟΑ = ΟΒ = ρ και χΟψ = 60°, 5) Ο κύκλος εφάπτεται στις Αχ, Αψ, ΒΓ
7.5 **Β.** 1) Α = Γ = 62°, Β = Δ = 118°, 3) x = 8, 4) 6 cm, 5) Β = φ = 55°, Ε = 70°, Γ = 55°, 6) Δ = Β = 76°, Α = Γ = 104°, ΑΖΒ = 38°, ΔΕΒ = 104°
Γ. 2) Τετράγωνο, 3) Οι ΒΔ, ΑΓ, ΜΝ τέμνονται στο Ε, ΑΔ, ΒΓ, ΜΝ τέμνονται στο ίδιο σημείο, 4) ΑΒ = ΒΓ, ΓΔ = ΔΑ, ΑΒΓΔ ρόμβος, 6) ίσες, διχοτομούνται, κάθετες, 8) ΑΔ = ΒΓ, ΑΓ = ΒΔ, 9) 6cm, 18 cm,10) το πλοίο Γ
7.6 **Β.** 1) 32 cm^2, 2) τα εμβαδά των τριγώνων είναι ίσα, 3) 270 cm^2, 4) $α_2$ = 8, $α_3$ = 32,

5) $E = 147\ cm^2$

Γ. 1) 756 d/m, **2)** $E = 882\ cm^2$, $υ = 49$ cm, **3)** $E = 50{,}43\ cm^2$, **4)** 96 cm, **5)** 246, **6)** 98m, $420m^2$, **7)** βάση 482 m, υ = 843, 5 m, και $υ_2 = υ_3 = 482$ **8)** $(ΒΕΓ) = 56\ m^2$, $(ΑΔΓΒ) = 26\ m^2$, $(ΑΔΕ) = 18\ m^2$, $(ΗΚΖ) = 18\ m^2$

7.8 **Β. 1)** γ) $30{,}9375\ cm^2$, **2)** α) $22{,}23\ cm^2$, β) $4{,}485\ cm^2$, **3)** $54\ cm^2$, **4)** $E = 264\ cm^2$, **5)** $E = 54\ cm^2$, **6)** $E_1 = 63\ cm^2$, $E_2 = 63\ cm^2$

Γ. 1) α) $E = 9{,}86\ cm^2$, β) $E = 9{,}434\ cm^2$, γ) $E = 350\ cm^2$, **2)** α) $E = 12.3\ cm^2$, β) $E = 29{,}19\ cm^2$, γ) $E = 1{,}695\ cm^2$, **3)** υ = 16 cm, **4)** 4,5 cm, **5)** υ = 3 cm, **6)** $E = 170\ cm^2$, **7)** υ = 5,57, **8)** $80\ cm^2$, **9)** α) $E = 4450\ cm^2$, β) $E = 31{,}25\ cm^2$, **10)** E = 59, **11)** $E = 177{,}5\ cm^2$, **12)** $E = 110,96\ cm^2$

Δ. 1) α = β, τα γ, δ έχουν ίσα εμβαδά, ε = στ, ζ = η, **4)** Δείξτε ότι ΑΔ = ΑΕ, **8)** 102 dm, **9)** $86{,}4\ cm^2$, **10)** 507,78 cm

Κεφάλαιο 8ο

8.1 **Β. 3)** - 7, - 6, - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1

Γ. 4) - 9, - 8, ..., 3, 4, 5, **6)** οι αριθμοί 8, 0, 5 ανήκουν στο N, οι αριθμοί - 7, 8, 0, - 8, 5 ανήκουν στο Z, όλοι ανήκουν στο Q

8.4 **Β. 1)** $|-4| = 4$, $|-5/7| = 5/7$, $|+3/8| = 3/8$, $|-6{,}25| = 6{,}25$, $|+2| = 2$, **3)** γ) - 5, - 4, - 3, - 2, + 2, + 3, + 4, + 5, δ) ..., - 12, - 11, 11, 12, ..., **4)** α) 12, β) 1, γ) 7, δ) 1

Γ. 1) $|-3/2| = 3/2$, $|+11/8| = 11/8$, $|-7{,}28| = 7{,}28$, κ.λπ., **2)** + 8, - 8, + 3/8, - 3/8, - 6,25, + 6,25, + 5, - 5, + 3/4, - 3/4, **3)** α) - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, β) ..., - 7, - 6, 6, 7, ..., γ) - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, δ) ..., - 7, - 6, - 5, 5, 6, 7, ε) - 5, - 4, + 4, + 5, στ) - 5, - 4, - 3, + 3, + 4, + 5, **4)** α) 17/12, β) 7, γ) 32, **5)** α) 0,61, β) 21,84, γ) 8, **6)** α) 7,82, β) 1, γ) 19

8.5 **Β. 1)** + 8,3 > + 4,5 > + 3 > - 1,2 > - 7,5 > -7,6, **2)** α) + 3, 7 > - 6,3, β) - 7,5 < - 2,4, γ) - 2 < 0, δ) - 3,7 > - 6,3, ε) + 6,35 > + 6,3, στ) - 7,1 < - 1,2, **3)** β) x = 0, 1, 2, γ) y = - 6, - 5, - 4, ... - 1

Γ. 1) α) + 7,2 > ... > - 6,3, β) - 5,2, + 2,5, + 4, **2)** α) + 7 > + 6, β) + 3 > - 6, γ) + 4 > 0, δ) + 4 > - 3, ε) - 1 < - 0,5, στ) - 5 < 0, ζ) - 1/2 > - 3/2, η) - 6/7 < - 5/7, θ) + 1/3 < + 5/3, ι) - 7/3 < - 7/4, **3)** α) x = - 5, - 4, ..., 1, 2, β) y = 1, 0, ..., - 2, - 3, **5)** α) αληθής, β) αληθής, γ) ψευδής, δ) ψευδής, ε) ψευδής, στ) ψευδής, ζ) ψευδής, η) αληθής

8.6 **Β. 1)** γ) - 16, δ) 8,4, ε) 4, στ) - 0,53 **2)** α) 13/12, β) - 2/5, γ) 0,2, **3)** α) - 3, β) - 7,43, γ) + 11/24, **4)** 11/12, **5)** β) 2,5, γ) - 15, δ) - 11

Γ. 1) α) - 31, β) 28, γ) - 17, δ) 75, ε) - 16, στ) - 35, **2)** α) - 14,2, β) - 4,35, γ) 40,637, δ) 2,2, ε) 1, στ) - 4,43, **3)** α) - 1, β) - 7/12, γ) 5/12, δ) - 2/15, ε) - 3/2, στ) - 68/21, **4)** α) 1,9, β) 51/28, **5)** α) - 1,05, β) - 9,602, **6)** α) - 9, β) 9,7, γ) - 21, δ) 14,3, **7)** (- 3/4) + (- 2) = (- 3/4) + (- 8/4) = - 11/4 κ.λπ.

8.7 **Β. 1)** γ) - 36, δ) - 2,2, ε) 13,15, στ) - 11,58, **2)** γ) x = 0, δ) x = - 125,75, **4)** α) β = - 29/12, β) Α = 13/6, Β = - 13/6, **5)** Α = - 49 /30

Γ. 1) α) 47, β) - 10,85, γ) - 6,8, δ) + 79,63, ε) - 41/24, στ) - 17/26, **2)** α) 59/24, β) 109, γ) - 21,43, δ) - 4,76, ε) - 2/21, στ) 96, **3)** Α= - 70, Β=70, Γ=142, **4)** x=1, y=1, α=2, β=0, γ=0, Α=2, Β=2, Γ= -2, Π=2, **5)** Α= - 88, Β= +34,01, Γ= - 54,187, **6)** φ=45, x= -76, y= - 36, ω = - 5, Α= 90, Β=10, Γ=62

Δ. 1) ΑΒ=4, ΑΓ=5,5, ΑΔ=7,8, ΑΕ=9, ΑΖ=9,5, ΔΓ=2,3, ΒΖ=5,5, ΒΕ=5, **2)** Β= - 11,5 ή Β = - 3,5, **3)** α) - 1, + 1, β) κανένας, γ) - 3,7, + 3,7, δ) - 1,6, + 1,6, **4)** α) - 1, 0, 1, β) 0, γ) - 7, - 6, - 5, - 4, - 3, - 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, δ) - 6, - 5, - 4, - 3, 3, 4, 5, 6, **5)** Α = 15/24, Β = 49, **6)** - 7/5 < - 1 <- 2/3 <- 1/3 < + 5/6 < + 1 < + 4/3, **9)** α) 36, β) 19,8, γ) - 37/24, **10)** Α = 13, Β = - 2,76, Γ = - 8,788, **11)** -8,8

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο

Φυσικοί και δεκαδικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 2ο

Μέτρησεις μεγεθών

Κεφάλαιο 3ο
Τα κλάσματα

Κεφάλαιο 4ο
Ανάλογα ποσά

Κεφάλαιο 5ο
Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Κεφάλαιο 6ο
Οι γωνίες

Κεφάλαιο 7ο
Ευθύγραμμα σχήματα

Κεφάλαιο 8ο
Οι ρητοί αριθμοί

Στο τέλος κάθε παραγράφου υπάρχουν λυμένες, μισολυμένες και προτεινόμενες ασκήσεις.

Οι συγγραφείς:

Π. Σ. Δαμιανός, Ειρήνης 17 Πευκη, 8069067
Κ. Ι. Κοτσώνης, Ομηρίδου 13 Πειραιάς, 4523568
Β. Ν. Κωστόπουλος, Σκόκου 11 Πατήσια, 2232801
Α. Α. Μανθογιάννης, Κορινθίας 48-50 Αμπελόκηποι, 7715238
Π. Σ. Μουρελάτος, Ικτίνου 27 Νίκαια, 4901022

Σχολικά βοηθήματα από τις εκδόσεις «Αθηνά»

Νηπιαγωγείο

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 4 - 5 χρονών
2. Για παιδιά 5 - 6 χρονών

Δημοτικό

Γ. Μαυρογιάννη - Ν. Στυλιανού

Σκέπτομαι και γράφω Έκθεση

1. α Δημοτικού
2. β Δημοτικού
3. γ - δ Δημοτικού
4. ε - στ Δημοτικού

Θ. Κωστόπουλου - Δ. Κελέκη
Α. Σκούφου - Μ. Μαυρογιάννη

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 6 - 7 χρονών
2. Για παιδιά 7 - 8 χρονών
3. Για παιδιά 8 - 9 χρονών
4. Για παιδιά 9 - 10 χρονών
5. Για παιδιά 10 - 11 χρονών
6. Για παιδιά 11 - 12 χρονών

Ν. Στυλιανού

1. Γραμματική α Δημοτικού
2. Γραμματική β Δημοτικού
3. Γραμματική γ Δημοτικού
4. Γραμματική δ Δημοτικού
5. Γραμματική ε Δημοτικού
6. Γραμματική στ Δημοτικού

7. Μαθηματικά α Δημοτικού
8. Μαθηματικά β Δημοτικού
9. Μαθηματικά γ Δημοτικού
10. Μαθηματικά δ Δημοτικού
11. Μαθηματικά ε Δημοτικού
12. Μαθηματικά στ Δημοτικού

Γυμνάσιο

Γ. Μαυρογιάννη

Μέθοδος διδασκαλίας και αυτοδιδασκαλίας για την Έκθεση

1. Α Γυμνασίου
2. Β Γυμνασίου
3. Γ Γυμνασίου

Π. Σ.Δαμιανού
Κ. Κοτσώνη - Β. Κωστόπουλου
Α. Μανθογιάννη- Π. Μουρελάτου

Μαθηματικά

1. Α Γυμνασίου
2. Β Γυμνασίου
3. Γ Γυμνασίου

Λύκειο - Δέσμες

Γ. Μαυρογιάννη

1. Η διδασκαλία της Έκθεσης
2. Η Εννοιολογία της Έκθεσης
3. Δοκίμια

Γ. Μαυρογιάννη - Δ. Λάππα
Μ. Κωνσταντάρα - Μ. Τάκη

Έκθεση - Έκφραση

!. Α Λυκείου
2. Β Λυκείου
3. Γ Λυκείου

Μ. Κωνσταντάρα - Ευαγ. Θεοδώρου
Ε. Κοκμοτού - Η. Πετώνη
Γ. Μαυρογιάννη - Β. Πρέντζα
Γ. Σ. Δαμιανού

Οι Αρχαίοι κλασικοί

1. Λυσία: Υπέρ αδυνάτου
2. Σοφοκλή: Αντιγόνη
3. Θουκυδίδη: Επιτάφιος
4. Πλάτωνος: Πρωταγόρας
5. Σοφοκλή: Οιδίπους Τύραννος
6. Θεματογραφία Αρχαίων Ελλήνων Συγγραφέων

Δίγλωσσες Εκδόσεις

(Ελληνικά-Αγγλικά)

Ειρ. Καμαράτου/Γιαλλούση

1. Το πέτρινο πουλί
2. Το αγόρι και η Ελπίδα
3. Η χρυσή φυλακή
4. Οι αόρατοι με το Σωκράτη
5. Οι αόρατοι με τον Αριστοτέλη
6. Οι αόρατοι με το Διογένη
7. Οι αόρατοι με τον Καζαντζάκη
8. Οι αόρατοι με το Θεόφιλο
9. Οι αόρατοι με το Μητρόπουλο

Ιστορία

Γ. Σ. Δαμιανού

Ιστορία (γ και δ Δέσμες)