Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Π.Σ.ΔΑΜΙΑΝΟΣ
Κ.Ι.ΚΟΤΣΩΝΗΣ
Β.Ν.ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Α.Α.ΜΑΝΘΟΓΙΑΝΝΗΣ
Π.Σ.ΜΟΥΡΕΛΑΤΟΣ

- θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- λυμένες ασκήσεις
- μισο... λυμένες ασκήσεις

2000 ασκήσεις και προβλήματα

- προτεινόμενες ασκήσεις
- επαναληπτικές ασκήσεις (κατά κεφάλαιο)
- εφαρμογή στην basic (κατά κεφάλαιο)

εφαρμογή στην Basic

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘΗΝΑ
Μ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗ

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου

Μαθηματικά

Γ΄ Γυμνασίου

- Θεωρία με το σύστημα των ερωτήσεων - απαντήσεων
- Λυμένες ασκήσεις
- Μισο ... λυμένες ασκήσεις
- Προτεινόμενες ασκήσεις
- Επαναληπτικές ασκήσεις

Εφαρμογές στην BASIC

2000 ασκήσεις

και προβλήματα

Εκδόσεις «Αθηνά»
Μ. Μαυρογιάννη
Εμμ. Μπενάκη 43 & Σόλωνος
106 81 Αθήνα
38.21.308 - 38.07.220 Fax: 38.38.228

Τα γνήσια αντίτυπα έχουν τη σφραγίδα του εκδοτικού οίκου.

Π. Σ. Δαμιανού - Κ. Ι. Κοτσώνη - Β. Ν. Κωστόπουλου -
Α. Α. Μανθογιάννη - Π. Σ. Μουρελάτου: Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου
α΄ Εκδοση: Φεβρουάριος — Ιούνιος 1993
β΄ Έκδοση: Σεπτέμβριος 1997
© Εκδόσεις "Αθηνά"
Μαίρη Μαυρογιάννη
Εμμ. Μπενάκη 43 10681 Αθήνα
τηλ. 3807220 —3821308 Fax: 3838228
Μακέτα εξωφύλλου: Δημήτρης Μουστάκης
Υπεύθυνος Μαθηματικών Εκδόσεων:
Πέτρος Σ. Δαμιανός Λ. Ειρήνης 17 Πεύκη 8069067 - 8065351

ISBN 960-7319-27-3

Η Φωτοστοιχειοθεσία, η σελιδοποίηση και το μοντάζ έγινε στο εργαστήριο γραφικών τεχνών των εκδόσεών μας με το εκδοτικό πρόγραμμα ready, set, go της Apple και με εκτύπωση χαρτοφίλμς σε Laser Master 1000 της Unibrain.

Απαγορεύεται η μερική ή ολική αναδημοσίευση μέρους ή όλου του κειμένου χωρίς τη γραπτή άδεια των εκδόσεων "Αθηνά"

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Γυμνασίου. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας και αποτελεί το τρίτο της σειράς του Γυμνασίου.

Στόχος του βιβλίου είναι η ενεργοποίηση του μαθητή της τελευταίας δεκαετίας του αιώνα μας, απέναντι στην πρόκληση του 2000.

Σκοπός του να βοηθήσει:

α) το μαθητή στην καλύτερη κατανόηση της ύλης της τάξης του και στη σωστή αντιμετώπιση των θεμάτων στα διαγωνίσματα του Ιανουαρίου και Ιουνίου, καθώς και

β) τους κ.κ. συνάδελφους στην προετοιμασία της διδασκαλίας του μαθήματος.

Η **Δομή** του βιβλίου:

1. Αποτελείται από 10 αυτόνομα κεφάλαια.
2. Κάθε παράγραφος κεφαλαίου αποτελείται από:
   α) Θεωρία (ερωτήσεις - απαντήσεις)
   β) Λυμένες ασκήσεις
   γ) Μισο...λυμένες ασκήσεις
   δ) Προτεινόμενες ασκήσεις
3. Επαναληπτικές ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου.
4. Εφαρμογή στην BASIC.

Αντιμετωπίσαμε με μεγάλο προβληματισμό τη **θεωρία** του παρόντος βιβλίου μέχρι να καταλήξουμε στη συγκεκριμένη μορφή (Ερωτήσεις - Απαντήσεις). Σ' αυτό μας βοήθησε κυρίως μια πανεθνική διαπίστωση: οι νέοι σήμερα έχουν μεγάλη αντιληπτική ικανότητα στην κατανόηση των εννοιών όχι όμως και στη διατύπωσή τους με απλά Ελληνικά. Έχουν δηλαδή δυσκολία στη χρήση της γλώσσας τους. Επομένως δεν μπορούν εύκολα να διατυπώσουν τις έννοιες με σαφήνεια και πληρότητα. Τα αποτελέσματα άλλωστε των γραπτών εξετάσεων που διενεργήθηκαν - σύμφωνα με τις νέες αλλαγές που ίσχυσαν στο πρόγραμμα των γυμνασίων - αποδεικνύουν την παραπάνω διαπίστωση. Φυσικά η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι κυρίως ευθύνη των φιλολόγων, όμως συμβολή στο πρόβλημα μπορεί να προσφέρει - κατά τη γνώμη μας - οποιοσδήποτε χώρος επικοινωνεί με το μαθητή (βιβλία, εφημερίδες, ραδιόφωνο, τηλεόραση κ.ά.).

Οι **λυμένες** ασκήσεις έχουν γραφεί με απλή και κατανοητή γλώσσα, ώστε ο μαθητής να έχει αρκετά παραδείγματα για να αναπτύξει τη δική του κριτική ικανότητα.

Οι **μισο...λυμένες** ασκήσεις έχουν σκοπό να κεντρίσουν το ενδιαφέρον του μαθητή ώστε να συνεχίσει μόνος του τη λύση τους, μαζί δε με τις **προτεινόμενες** άλυτες ασκήσεις ολοκληρώνουν το αντικείμενο κάθε παραγράφου προσφέροντας μια αρκετά μεγάλη ποικιλία και για τους μαθητές που επιμένουν αλλά και για τους κ.κ. συναδέλφους που θέλουν η τάξη τους να ασχοληθεί περισσότερο.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου και μετά από τις **επαναληπτικές** ασκήσεις βρίσκονται οι σελίδες της **πληροφορικής**. Οι εφαρμογές έγιναν στη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC.**

Σκοπός μας **δεν** ήταν η εκμάθηση της γλώσσας μέσα από τις σελίδες αυτού του βιβλίου. Θέλαμε όμως να συνδέσουμε την πληροφορική με το σχολείο και να πείσουμε το μαθητή να δει το μηχάνημα που έχει στο γραφείο του, όχι μόνο ως μέσο διασκέδασης αλλά και ως εργαλείο στη δουλειά του. Για το λόγο αυτό ξεκινήσαμε την περιήγηση στην πληροφορική, θεωρώντας ότι ο μαθητής **δεν** έχει άλλη σχετική γνώση. Έτσι, αν ακολουθήσει σωστά τις οδηγίες μας, θα μπορέσει να αποκτήσει μια κάποια αρχική εμπειρία.

Τα παραδείγματα που αναπτύσσονται φροντίσαμε να τα αντλήσουμε - όσο ήταν δυνατόν - από την ύλη του κάθε κεφαλαίου ώστε να γίνει αντιληπτό ότι η πληροφορική δεν είναι «αλλοιώτικη» αλλά έρχεται να βοηθήσει μεταξύ των άλλων και τα μαθήματα του σύγχρονου νέου.

Αν καταφέραμε να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των αναγνωστών μας, τότε θα πρέπει να καταφύγουν σε κάποιο εξειδικευμένο βιβλίο για την εκμάθηση της γλώσσας BASIC ή οποιασδήποτε άλλης επιθυμούν.

Πιστεύουμε ότι με το βιβλίο αυτό συμβάλλουμε αναλογικά στην ανύψωση της εκπαιδευτικής στάθμης των μαθητών. Θα ήταν τιμή μας αν οι αναγνώστες επικοινωνούσαν μαζί μας για οποιαδήποτε παρατήρηση που τυχόν έχουν, ώστε να βοηθήσουν στην καλύτερη παρουσίαση στις επόμενες εκδόσεις.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 Πράξεις

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς;

1. Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

2. Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς;

2. Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς, βρίσκουμε τις απόλυτες τιμές τους, αφαιρούμε τη μικρότερη από τη μεγαλύτερη, στη δε διαφορά τους βάζουμε το πρόσημο που είχε ο αριθμός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

3. Να γράψετε τις ιδιότητες της προσθέσεως.

3. Οι ιδιότητες της προσθέσεως είναι:
α) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (αντιμεταθετική)
β) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (προσεταιριστική)
γ) $\alpha + 0 = \alpha$
δ) $\alpha + (-\alpha) = 0$

4. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς;

4. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε το πρόσημο «+».

5. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς;

5. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε το πρόσημο «-».

6. Να γράψετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.

6. Οι ιδιότητες της πολλαπλασιασμού είναι:

α) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (αντιμεταθετική)

β) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (προσεταιριστική)

γ) $\alpha \cdot 1 = \alpha$

δ) $\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 1$

ε) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (επιμεριστική)

7. Πώς αφαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

7. Για να αφαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Δηλαδή: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

8. Πώς διαιρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

8. Για να διαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη (αν ο διαιρέτης είναι διάφορος του μηδενός).

Δηλαδή: $\alpha : \beta = \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

α) $-1 + 4 - 13 - 5 + 6$

β) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - 2 + \dfrac{9}{2} - 3$

γ) $\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{6}\right) - \left(4 - \dfrac{3}{5}\right) + \left(1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$

Λύση

α) $-1 + 4 - 13 - 5 + 6 = -19 + 10 = -9$

β) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} - 2 + \dfrac{9}{2} - 3 =$

$= -\dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{12}{6} + \dfrac{27}{6} - \dfrac{18}{6} = \dfrac{31}{6} - \dfrac{33}{6} =$

$= -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

γ) $\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{6}\right) - \left(4 - \dfrac{3}{5}\right) + \left(1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2}\right) =$

$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{6} - 4 + \dfrac{3}{5} + 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} =$

$= \dfrac{6}{30} - \dfrac{35}{30} - \dfrac{120}{30} + \dfrac{18}{30} + \dfrac{30}{30} - \dfrac{20}{30} + \dfrac{75}{30} =$

$= \dfrac{129}{30} - \dfrac{175}{30} = -\dfrac{46}{30} = -\dfrac{23}{15}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{5}$

β) $\dfrac{7}{6} \cdot \dfrac{3}{14} - \left(-\dfrac{3}{2}\right) : \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \left(-\dfrac{5}{6}\right) \cdot \dfrac{3}{2}$

Λύση

α) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{5} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{5} =$

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{40}{60} + \dfrac{75}{60} - \dfrac{90}{60} - \dfrac{36}{60} =$

$= \dfrac{115}{60} - \dfrac{126}{60} = -\dfrac{11}{60}$

β) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14} - (-\frac{3}{2}) : (-\frac{1}{4}) + (-\frac{5}{6}) \cdot \frac{3}{2} =$

$= \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14} - (-\frac{3}{2}) \cdot (-4) + (-\frac{5}{6}) \cdot \frac{3}{2} =$

$= \frac{1}{4} - 6 - \frac{5}{4} = -6 - \frac{4}{4} = -6 - 1 = -7$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-2(\frac{2}{3} - 5) - (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (-1-3)$

β) $(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1) \cdot (-\frac{4}{3} + 2) \cdot (-1 + \frac{2}{3})$

γ) $(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}) \cdot (-6) + (-\frac{6}{5} - \frac{2}{3}) \cdot (-15)$

Λύση

α) $-2(\frac{2}{3} - 5) - (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (-1-3) =$

$= -2(\frac{2}{3} - \frac{15}{3}) - (\frac{8}{6} - \frac{3}{6}) \cdot (-4) =$

$= -2(-\frac{13}{3}) - \frac{5}{6} \cdot (-4) = \frac{26}{3} + \frac{10}{3} = +\frac{36}{3} = 12$

β) $(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1) \cdot (-\frac{4}{3} + 2) \cdot (-1 + \frac{2}{3}) =$

$= (-\frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{6}{6}) \cdot (-\frac{4}{3} + \frac{6}{3}) \cdot (-\frac{3}{3} + \frac{2}{3}) =$

$= \frac{11}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{11}{27}$

γ) $(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}) \cdot (-6) + (-\frac{6}{5} - \frac{2}{3}) \cdot (-15) =$

$= (-\frac{2}{6} + \frac{15}{6}) \cdot (-6) + (-\frac{18}{15} - \frac{10}{15}) \cdot (-15) =$

$= \frac{13}{6} \cdot (-6) + (-\frac{28}{15}) \cdot (-15) = -13 + 28 = 15$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{3(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6})}{-2(-\frac{5}{4}) + \frac{3}{2}}$ *β)* $\dfrac{(-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{1}{5} + \frac{1}{2})}{-\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{7}{8}}$

Λύση

α) $\dfrac{3(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6})}{-2(-\frac{5}{4}) + \frac{3}{2}} =$

$= [3(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6})] : [-2(-\frac{5}{4}) + \frac{3}{2}] =$

$= [3(-\frac{3}{6} + \frac{5}{6})] : (\frac{5}{2} + \frac{3}{2}) =$

$= (3 \cdot \frac{2}{6}) : \frac{8}{2} = 1 : 4 = \frac{1}{4}$

β) $\dfrac{(-\frac{5}{2})(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2})}{-\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{7}{8}} =$

$= [(-\frac{5}{2})(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2})] : (-\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{7}{8}) =$

$= [(-\frac{5}{2})(-\frac{2}{10} + \frac{5}{10})] : (-\frac{3}{4} + \frac{7}{4}) =$

$= [(-\frac{5}{2}) \cdot \frac{3}{10}] : \frac{4}{4} = -\frac{3}{4} : 1 = -\frac{3}{4}$

5. Το γινόμενο τριών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. Τι συμπεραίνετε για το πρόσημο αυτών των αριθμών;

Λύση

Για να είναι αρνητικό το γινόμενο πρέπει και οι τρεις αριθμοί να είναι αρνητικοί ή οι δύο να είναι θετικοί και ο ένας αρνητικός.

6. Εάν α θετικός και β αρνητικός με |α| > |β|. Τι συμπεραίνετε για το πρόσημο των παραστάσεων;

α) $\alpha + \beta$, *β)* $\alpha - \beta$, *γ)* $\alpha \cdot \beta$, *δ)* $\alpha : \beta$

ε) $\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}$, *στ)* $\dfrac{\beta - \alpha}{\alpha}$

Λύση

α) Επειδή $|\alpha| > |\beta|$ το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι θετικό.

β) Ο $-\beta$ είναι ο αντίθετος του β, άρα θετικός οπότε: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ είναι θετικό.

γ) Ο $\alpha \cdot \beta$ είναι αρνητικός αριθμός γιατί α, β ετερόσημοι.

δ) Ο $\alpha : \beta$ είναι αρνητικός αριθμός γιατί α, β ετερόσημοι.

ε) Ο $\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha}$ είναι θετικός γιατί $\alpha + \beta$ θετικός και α θετικός.

στ) Για να βρούμε το πρόσημο του $\dfrac{\beta - \alpha}{\alpha}$ πρέπει να βρούμε το πρόσημο του $\beta - \alpha$. Ο $-\alpha$ είναι αρνητικός γιατί είναι ο αντίθετος του α.

Άρα ο $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$ είναι αρνητικός ως άθροισμα αρνητικών αριθμών. Οπότε ο αριθμός που θέλουμε είναι αρνητικός γιατί οι αριθμοί β - α και α είναι ετερόσημοι.

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $\alpha - 2\beta - 3(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 2\beta)$
β) $\alpha - (2\beta - 3\alpha) + 2(2\alpha - 3\beta)$
αν $\alpha = -3$ και $\beta = 5$.

Λύση

α) $\alpha - 2\beta - 3(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 2\beta) =$
$= \alpha - 2\beta - 3\beta + 3\alpha + 2\alpha - 4\beta =$
$= 6\alpha - 9\beta = 6 \cdot (-3) - 9 \cdot 5 =$
$= -18 - 45 = -63$

β) $\alpha - (2\beta - 3\alpha) + 2(2\alpha - 3\beta) =$
$= \alpha - 2\beta + 3\alpha + 4\alpha - 6\beta =$
$= 8\alpha - 8\beta = 8(\alpha - \beta) = 8 \cdot (-3 - 5) =$
$= 8 \cdot (-8) = -64$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
α) $-3 + (7 - 5) - (4 - 13) - 6$
β) $3 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + 2 - \frac{7}{2}$
γ) $5 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (-\frac{5}{6} - \frac{2}{3}) - (\frac{5}{6} + \frac{1}{2})$

Λύση

α) $-3 + (7 - 5) - (4 - 13) - 6 =$
$= -3 + 7 - 5 - 4 + 13 - 6 = \ldots$

β) $3 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + 2 - \frac{7}{2} =$
$= \frac{18}{6} - \frac{2}{6} + \frac{15}{6} - \frac{10}{6} + \frac{12}{6} - \frac{21}{6} = \ldots$

γ) $5 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (-\frac{5}{6} - \frac{2}{3}) - (\frac{5}{6} + \frac{1}{2}) =$
$= 5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \ldots$

2. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $2(4 - 5) - 3(-7 + 6) + 2(-6 - 2)$
β) $(7 - 6 + 1) \cdot (3 - 13 + 9) -$
$- (-5 - 4 + 10) \cdot (-4 + 3 - 12)$
γ) $-2(4 - 5) - 3[-2(7 - 2) + 5(1 - 4)]$

Λύση

α) $2(4 - 5) - 3(-7 + 6) + 2(-6 - 2) =$
$= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-8) = \ldots.$

β) $(7 - 6 + 1) \cdot (3 - 13 + 9) -$
$- (-5 - 4 + 10) \cdot (-4 + 3 - 12) =$
$= 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-13) = \ldots..$

γ) ....

3. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{13}{3} + \frac{7}{2} + \frac{4}{3} - \frac{11}{6}$
β) $-3(-\frac{5}{3} + \frac{4}{5}) + 5(\frac{7}{6} - \frac{6}{5}) + 2(\frac{4}{3} - \frac{11}{6})$
γ) $(-2 + \frac{1}{2}) \cdot (-\frac{7}{5} + 1) - (4 - \frac{7}{3}) \cdot (-2 + \frac{2}{5})$

Λύση

α) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{13}{3} + \frac{7}{2} + \frac{4}{3} - \frac{11}{6} =$
$= -\frac{2}{6} + \frac{5}{6} - \frac{26}{6} + \frac{21}{6} + \frac{8}{6} - \frac{11}{6} = \ldots$

β) $-3(-\frac{5}{3} + \frac{4}{5}) + 5(\frac{7}{6} - \frac{6}{5}) + 2(\frac{4}{3} - \frac{11}{6}) =$
$= -3(-\frac{25}{15} + \frac{12}{15}) + 5(\frac{35}{30} - \frac{36}{30}) + 2(\frac{8}{6} - \frac{11}{6}) =$
$= -3(-\frac{13}{15}) + 5(-\frac{1}{30}) + 2(-\frac{3}{6}) = \ldots$

γ) .....

4. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $-15 : (-8 + 3) - 28 : (4 - 11) +$
$+ 35 : (2 - 9)$
β) $21 : (-3) - (-4) \cdot (-3) + (-25) : (-5)$

Λύση

α) $-15 : (-8 + 3) - 28 : (4 - 11) +$
$+ 35 : (2 - 9) =$
$= -15 : (-5) - 28 : (-7) + 35 : (-7) = \ldots$

β) $21 : (-3) - (-4) \cdot (-3) + (-25) : (-5) =$
$= -7 - 12 + 5 = \ldots..$

5. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}) : (-\frac{5}{6}) - (-\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) : (-\frac{13}{4})$
β) $(-1 + \frac{1}{3}) : (-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) + (-\frac{2}{5} - \frac{1}{6}) \cdot (-8 + \frac{1}{2})$

Λύση

α) $(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}) : (-\frac{5}{6}) - (-\frac{7}{4} - \frac{3}{2}) : (-\frac{13}{4}) =$
$= (-\frac{2}{6} + \frac{15}{6}) : (-\frac{5}{6}) - (-\frac{7}{4} - \frac{6}{4}) : (-\frac{13}{4}) =$

$= \frac{13}{6} \cdot (-\frac{6}{5}) - (-\frac{13}{4}) \cdot (-\frac{4}{13}) = ...$

β) $(-1+\frac{1}{3}) : (-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}) + (-\frac{2}{5} - \frac{1}{6}) \cdot (-8+\frac{1}{2}) =$

$= (-\frac{3}{3}+\frac{1}{3}) : (-\frac{4}{6}+\frac{5}{6}) + (-\frac{12}{30} - \frac{5}{30}) \cdot$

$\cdot (-\frac{16}{2}+\frac{1}{2}) = ...$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{-2(-\frac{3}{8})+5(-\frac{13}{20})}{(-3-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2})}$

β) $\dfrac{-\frac{1}{4}(-\frac{7}{2}+\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}$

Λύση

α) $\dfrac{-2(-\frac{3}{8})+5(-\frac{13}{20})}{(-3-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2})} =$

$= \dfrac{\frac{3}{4}-\frac{13}{4}}{(-\frac{9}{3}-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{8}{10}+\frac{5}{10})} = ..$

β) $\dfrac{-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{7}{2}+\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} = \dfrac{-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{21}{6}+\frac{2}{6})}{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = ...$

7. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων, αφού πρώτα βγάλετε τις παρενθέσεις, για α = -1 και β = - 3.

α) 3 [β - 4 (α - β) + 2α] -
- 2 [α + 2 (β - 3α) - 4 (α + β)]

β) - 2 [β - 2 (α - 2β) + 3] - 4 (α - 3β)

Λύση

α) 3 [β - 4 (α - β) + 2α] -
- 2 [α + 2 (β - 3α) - 4 (α + β)] =
= 3 (β - 4α + 4β + 2α) - 2 (α + 2β -
- 6α - 4α - 4β) =
= 3β - 12α + 12β + 6α - 2α - 4β +
+ 12α + 8α + 8β = ...

β) - 2 [β - 2 (α - 2β) + 3] - 4 (α - 3β) =
= - 2 (β - 2α + 4β + 3) - 4α + 12 β =
= ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τους αντίθετους και τους αντίστροφους των αριθμών:

$\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -5, \frac{7}{2}, -3, 2, -\frac{5}{4}$

2. Αν α θετικός και β αρνητικός να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

$\frac{\alpha}{2}, -3\beta, 4\alpha\beta, -2[-(\alpha\beta)],$

$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{-1}, -[-(-\alpha)], -(\frac{\alpha\beta}{-2\alpha})$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) - 3 + 4 - 5 - 17 + 15 - 6 + 10

β) $-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{6}{3}-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}-1$

γ) $-5+\frac{7}{3}+4+\frac{4}{3}-\frac{7}{3}-2+\frac{2}{3}$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) - 3 · (7 - 6) - 2 · (4 - 3) + 2 · (7 + 2)

β) $-2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+3(1-\frac{1}{3})-3(1+\frac{1}{3})$

γ) $-4(7-\frac{15}{2})+2(\frac{1}{2}-1)-5(2-\frac{6}{5})$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\frac{1}{2}-1)\cdot(2-\frac{1}{2})-(4-\frac{5}{3})\cdot(1-4)$

β) $(\frac{5}{4}-\frac{2}{3})\cdot(\frac{11}{2}+\frac{5}{4})+(3-\frac{5}{2})\cdot(\frac{1}{3}-1)$

γ) $(\frac{1}{2}-4)\cdot(7-\frac{5}{2})-(4-\frac{1}{4})\cdot(-\frac{4}{3})$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(-\frac{1}{2})\cdot(-2)\cdot(-\frac{4}{3})\cdot\frac{3}{2}\cdot(-1)$

β) $\frac{1}{5} \cdot (-15) \cdot (-3) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-2) \cdot (-\frac{1}{20})$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-\frac{4}{3}-\frac{5}{4}):(1-\frac{7}{12})$

β) $(1-\frac{4}{5}):(1-\frac{1}{5})-(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}):(-\frac{4}{3})$

γ) $(\frac{5}{2}+\frac{1}{3}):(1+\frac{10}{7})-(-\frac{3}{4}):\frac{6}{8}$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{1-\frac{5}{4}-2}{(\frac{1}{2}-1) \cdot (1-\frac{1}{2})}$ β) $\dfrac{(\frac{4}{3}-2) \cdot (2-\frac{4}{3})}{1-\frac{5}{6}}$

γ) $\dfrac{(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}) \cdot (-1)}{(-\frac{1}{6}) \cdot (4-\frac{5}{2})}$ δ) $\dfrac{(1-\frac{1}{2}) \cdot (3+\frac{1}{2})}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

9. Αν $\alpha = -2$, $\beta = 3$ να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α) $-2\,[\alpha - (\beta + 2\alpha) - 3\,(\alpha - 2\alpha) + \beta]$

β) $-(\alpha - \beta) - [\alpha + (2\beta - \alpha) + (-\beta)] - 3\alpha$

γ) $3\,[\alpha - 2\,(\beta - \alpha)] - 4\,[\beta - (3\alpha + \beta)]$

1.2 Δυνάμεις

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Πώς ορίζεται η δύναμη α^ν με βάση α και εκθέτη το φυσικό $\nu > 1$;

1. Η δύναμη α^ν με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη το φυσικό αριθμό $\nu > 1$ ορίζεται ως το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α. Δηλαδή:

$$\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha, \quad \text{αν } \nu > 1$$

Επίσης ορίζεται ότι:

$\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$ και

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}, \quad \text{αν } \alpha \neq 0$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

2. Για τις δυνάμεις πραγματικών αριθμών διάφορων του μηδενός με εκθέτη ακέραιο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$
$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$
$$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$$
$$\alpha^\nu : \beta^\nu = (\alpha : \beta)^\nu$$
$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $3^5 \cdot 3^{-3}$, β) $(-2)^4 : (-2)^{-5}$,

γ) $\frac{(-16)^3}{2^5}$, δ) $(\frac{3}{5})^{-2}$,

ε) $(-8)^3 : (-16)^2$, στ) $(-10^2)^{-3}$,

ζ) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^{-2}$

Λύση

α) $3^5 \cdot 3^{-3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

β) $(-2)^4 : (-2)^{-5} = (-2)^{4-(-5)} = (-2)^9 = -2^9$

γ) $\frac{(-16)^3}{2^5} = \frac{(-2^4)^3}{2^5} = \frac{-2^{12}}{2^5} = -2^{12-5} = -2^7$

δ) $(\frac{3}{5})^{-2} = (\frac{5}{3})^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

ε) $(-8)^3 : (-16)^2 = (-2^3)^3 : (-2^4)^2 = (-2)^9 : 2^8 =$

$= -2^9 : 2^8 = -2^{9-8} = -2$

στ) $(-10^2)^3 = -10^{-6} = -0{,}000001$

ζ) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot 2^{-2} = (-2^3) \cdot 2^4 \cdot 2^{-2} =$

$= -2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-2} = -2^{3+4-2} = -2^5 = -32$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $64^3 : 32^3$, β) $(-8)^{-1} : (-16)^{-1}$,

γ) $81^5 : (-3)^5$, δ) $(\frac{4}{3})^2 \cdot (-\frac{3}{4})^2$

Λύση

α) $64^3 : 32^3 = (64 : 32)^3 = 2^3 = 8$

β) $(-8)^{-1} : (-16)^{-1} = [(-8) : (-16)]^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$

γ) $81^5 : (-3)^5 = [81 : (-3)]^5 = (-27)^5 = -27^5$

δ) $(\frac{4}{3})^2 \cdot (-\frac{3}{4})^2 = [\frac{4}{3} : (-\frac{3}{4})]^2 = (-1)^2 = 1$

3. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$A = (-2)^4 - 3^2 - (-5)^2 - [(2^3 - 3^2) -$
$- (5^3 - 5^2) : 10^2]$

Λύση

$A = (-2)^4 - 3^2 - (-5)^2 - [(2^3 - 3^2) -$
$- (5^3 - 5^2) : 10^2] =$
$= 16 - 9 - 25 - [(8 - 9) - (125 - 25) : 100] =$
$= 16 - 9 - 25 - (-1 - 100 : 100) =$
$= -18 - (-1 - 1) = -18 - (-2) =$
$= -18 + 2 = -16$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(\alpha^2 - 2\beta)^2$, β) $(\alpha^2 - \beta + \beta^2)^2$
αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Λύση

α) $(\alpha^2 - 2\beta)^2 = (2^2 - 2 \cdot 3)^2 = (4 - 6)^2 =$
$= (-2)^2 = 4$

β) $(\alpha^2 - \beta + \beta^2)^2 = (2^2 - 3 + 3^2)^2 =$
$= (4 - 3 + 9)^2 = 10^2 = 100$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $(x - 2y)^3$, β) $(x - y^2) \cdot (x + y^2)$,
γ) $(x^2 - 3y - 2x)^3$
αν $x = -1$, $y = 2$.

Λύση

α) $(x - 2y)^3 = (-1 - 2 \cdot 2)^3 = (-1 - 4)^3 =$
$= (-5)^3 = -125$

β) $(x - y^2) \cdot (x + y^2) =$
$= [(-1) - 2^2] \cdot [(-1) + 2^2] =$
$= (-1 - 4) \cdot (-1 + 4) = (-5) \cdot 3 = -15$

γ) $(x^2 - 3y - 2x)^3 =$
$= [(-1)^2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)]^3 =$
$= (1 - 6 + 2)^3 = (-3)^3 = -27$

6. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $(-x^2y^3)^2$, β) $(2xy^2)^3$, γ) $(4x^3y^2)^{-1}$

Λύση

α) $(-x^2y^3)^2 = x^4y^6$

β) $(2xy^2)^3 = 2^3x^3 (y^2)^3 = 8x^3y^6$

γ) $(4x^3y^2)^{-1} = 4^{-1} (x^3)^{-1} (y^2)^{-1} =$

$= \frac{1}{4} x^{-3} y^{-2}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3\alpha^2\beta^3)^{-1}\cdot(\alpha^3\beta^4)$,

β) $(5\alpha^3\beta^{-2})^2\cdot(\alpha^{-3}\beta^{-3})^3$

Λύση

α) $(3\alpha^2\beta^3)^{-1}\cdot(\alpha^3\beta^4) = 3^{-1}\alpha^{-2}\beta^{-3}\alpha^3\beta^4 = \frac{1}{3}\alpha\beta$

β) $(5\alpha^3\beta^{-2})^2\cdot(\alpha^{-3}\beta^{-3})^3 = 5^2\alpha^6\beta^{-4}\alpha^{-6}\beta^{-6} =$

$= 25\,\alpha^0\beta^{-10} = \frac{25}{\beta^{10}}$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2\alpha^5\beta^3}{\alpha^2\beta^4}$, *β)* $\frac{5(\alpha\beta^2)^{-2}}{2\alpha^3\beta^{-4}}$,

γ) $\frac{(\alpha^{-3}\beta^2\gamma)^2}{(2\alpha^{-2}\beta^{-1}\gamma^3)^{-2}}$

Λύση

α) $\frac{2\alpha^5\beta^3}{\alpha^2\beta^4} = 2\alpha^{5-2}\beta^{3-4} = 2\,\alpha^3\beta^{-1} = \frac{2\,\alpha^3}{\beta}$

β) $\frac{5(\alpha\beta^2)^{-2}}{2\alpha^3\beta^{-4}} = \frac{5\alpha^{-2}\beta^{-4}}{2\alpha^3\beta^{-4}} = \frac{5}{2}\alpha^{-2-3}\beta^{-4-(-4)} =$

$= \frac{5}{2}\alpha^{-5}\beta^0 = \frac{5}{2\alpha^5}$

γ) $\frac{(\alpha^{-3}\beta^2\gamma)^2}{(2\alpha^{-2}\beta^{-1}\gamma^3)^{-2}} = \frac{\alpha^{-6}\beta^4\gamma^2}{2^{-2}\alpha^4\beta^2\gamma^{-6}} =$

$= 2^2\,\alpha^{-6-4}\,\beta^{4-2}\,\gamma^{2-(-6)} = 4\,\alpha^{-10}\,\beta^2\,\gamma^8 = \frac{4\beta^2\gamma^8}{\alpha^{10}}$

9. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $(\frac{2}{3})^5 : (\frac{2}{3})^6$,

β) $(\frac{\alpha^{-2}}{\beta^2})^3 : (\frac{\alpha^2}{\beta^{-2}})^{-4}$,

γ) $(\frac{\alpha^2\beta^{-1}}{\gamma\delta^{-2}})^2 : (\frac{\alpha^{-2}\beta}{\gamma^2\delta})$

Λύση

α) $(\frac{2}{3})^5 : (\frac{2}{3})^6 = (\frac{2}{3})^{5-6} = (\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$

β) $(\frac{\alpha^{-2}}{\beta^2})^3 : (\frac{\alpha^2}{\beta^{-2}})^{-4} = \frac{\alpha^{-6}}{\beta^6} : \frac{\alpha^{-8}}{\beta^8} = \frac{\alpha^{-6}}{\beta^6}\cdot\frac{\beta^8}{\alpha^{-8}} =$

$= \alpha^{-6-(-8)}\cdot\beta^{8-6} = \alpha^{-6+8}\cdot\beta^{8-6} = \alpha^2\beta^2$

γ) $(\frac{\alpha^2\beta^{-1}}{\gamma\delta^{-2}})^2 : (\frac{\alpha^{-2}\beta}{\gamma^2\delta}) = \frac{\alpha^2\beta^{-2}}{\gamma^2\delta^{-4}}\cdot\frac{\gamma^2\delta}{\alpha^{-2}\beta} =$

$= \alpha^{2-(-2)}\cdot\beta^{-2-1}\cdot\gamma^{2-2}\cdot\delta^{1-(-4)} =$

$= \alpha^{2+2}\cdot\beta^{-3}\cdot\gamma^0\cdot\delta^{1+4} = \alpha^4\beta^{-3}\delta^5$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^3 : 2^x = 32$, ***β)*** $3^{x-1}\cdot 3^{x+2} = 81$

γ) $(-2)^x : (-2)^{1-x} = 16$

Λύση

α) $2^3 : 2^x = 32$ ή $2^{3-x} = 2^5$ ή

$3 - x = 5$ ή $-x = 5 - 3$ ή $-x = 2$ ή

$x = -2$

β) $3^{x-1}\cdot 3^{x+2} = 81$ ή

$3^{x-1+x+2} = 3^4$ ή $3^{2x+1} = 3^4$ ή

$2x + 1 = 4$ ή $2x = 4 - 1$ ή

$2x = 3$ ή $x = 3/2$

γ) $(-2)^x : (-2)^{1-x} = 16$ ή

$(-2)^{x-(1-x)} = 2^4$ ή $x - (1 - x) = 4$ ή

$x - 1 + x = 4$ ή $2x - 1 = 4$ ή

$2x = 4 + 1$ ή $2x = 5$ ή $x = 5/2$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

α) $(-2)^5 + (+3)^3$, ***β)*** $(-3)^4 - (-2)^6$

γ) $(-1)^7 + (-2)^3 - (-3)^2$,

δ) $(-10)^2 - (-9)^2$

Λύση

α) $(-2)^5 + (+3)^3 = -32 + 27 = ...$

β) $(-3)^4 - (-2)^6 = 81 - 64 = ...$

γ) ....
δ) ....

2. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

α) $(-3)^{2} \cdot (-1)^{2}$, β) $(-4)^{3} \cdot (-\frac{3}{4})^{3}$,

γ) $(\frac{7}{2})^{3} \cdot (-\frac{1}{7})^{3}$, δ) $(-3)^{5} \cdot (-\frac{2}{3})^{5}$

Λύση

α) $(-3)^2 \cdot (-1)^2 = [(-3) \cdot (-1)]^2 = 3^2 = ...$

β) $(-4)^3 \cdot (-\frac{3}{4})^3 = [(-4) \cdot (-\frac{3}{4})]^3 = 3^3 = ...$

γ) ....
δ) ....

3. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:
α) $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^{-4}$
β) $(-4)^3 \cdot (-4)^{-3} \cdot (-4)^8 \cdot (-4)^{-6}$
γ) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^{-5}$
δ) $(-\frac{2}{3})^{2} \cdot (-\frac{2}{3})^{-4} \cdot (-\frac{2}{3})^{3}$

Λύση

α) $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^{-4} = 2^{3+7-4} = ...$
β) $(-4)^3 \cdot (-4)^{-3} \cdot (-4)^8 \cdot (-4)^{-6} =$
$= (-4)^{3-3+8-6} = ...$
γ) .....
δ) .....

4. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

α) $[(-3)^{2}]^{3}$, β) $[(-2)^{3}]^{2}$,

γ) $[(\frac{1}{2})^{2}]^{4}$, δ) $-[(-2)^{-2}]^{3}$

Λύση

α) $[(-3)^2]^3 = (-3)^6 = ...$

β) $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = ...$

γ) .....
δ) .....

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις:
α) $(-9)^0 + (-8)^1 + (-25)^0$
β) $(-5)^1 \cdot (+4)^1 \cdot (-25)^0 \cdot (-2)^{-2}$
γ) $(-3)^2 + (+5)^2 - (+25)^1$
δ) $(-5)^2 + (-7)^1 - (+12)^1$

Λύση

α) $(-9)^0 + (-8)^1 + (-25)^0 =$
$= 1 - 8 + 1 = ...$
β) $(-5)^1 \cdot (+4)^1 \cdot (-25)^0 \cdot (-2)^{-2} =$
$= -5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-1/2)^2 = ...$
γ) .....
δ) .....

6. Να εκτελέσετε τις πράξεις:
α) $(-5)^2 + [(-3)^5 : (-3)^2]$
β) $[(-3)^2]^3 - [(-5)^5 : (-5)^3]$
γ) $[(-2)^4 \cdot (-2)^3] + (-3)^2 \cdot (+5)^2$
δ) $[(-2) \cdot (+3)]^2 - [(-10)^5 : (-10)^4]$

Λύση

α) $(-5)^2 + [(-3)^5 : (-3)^2] =$
$= 25 + [(-3)^{5-2}] = ...$
β) $[(-3)^2]^3 - [(-5)^5 : (-5)^3] =$
$= (-3)^6 - (-5)^{5-3} = ...$
γ) .....
δ) .....

7. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:
α) $(\alpha^2\beta\gamma) \cdot (\alpha\beta^2) \cdot (\gamma^3\delta)$,

β) $(\frac{\alpha^3\beta\gamma}{3})^{2} \cdot 3\alpha\beta^2\gamma$,

γ) $(-\frac{1}{3}\alpha\beta^{-1}\gamma)^{2}$,

δ) $(-2\alpha^3\beta) \cdot (-3\alpha\beta^2\gamma^3)$

Λύση

α) $(\alpha^2\beta\gamma) \cdot (\alpha\beta^2) \cdot (\gamma^3\delta) = \alpha^2\beta\gamma\alpha\beta^2\gamma^3\delta =$
$= \alpha^{2+1}\beta^{1+2}\gamma^{1+3}\delta = ...$

β) $(\frac{\alpha^3\beta\gamma}{3})^2 \cdot 3\alpha\beta^2\gamma = \frac{\alpha^6\beta^2\gamma^2}{9} \cdot 3\alpha\beta^2\gamma = ...$

γ) .....
δ) .....

8. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $\dfrac{(\alpha^3\beta^{-1}\gamma^4)^2}{\alpha^{-4}\beta^3\gamma^5}$,

β) $\dfrac{(\alpha\beta^{-1}\gamma)^{-2}\cdot(\alpha^{-1}\beta\gamma^2)^{-1}}{\alpha^{-3}\beta^2\cdot(\alpha^{-2})^2\cdot(\beta^{-1})^{-2}}$

Λύση

α) $\dfrac{(\alpha^3\beta^{-1}\gamma^4)^2}{\alpha^{-4}\beta^3\gamma^5}=\dfrac{\alpha^6\beta^{-2}\gamma^8}{\alpha^{-4}\beta^3\gamma^5}=\alpha^{6-(-4)}\beta^{-2-3}\gamma^{8-5}=\dots$

β) $\dfrac{(\alpha\beta^{-1}\gamma)^{-2}\cdot(\alpha^{-1}\beta\gamma^2)^{1}}{\alpha^{-3}\beta^2\cdot(\alpha^{-2})^2\cdot(\beta^{-1})^{-2}}=\dfrac{\alpha^{-2}\beta^2\gamma^{-2}\cdot\alpha\beta^{-1}\gamma^{-2}}{\alpha^{-3}\beta^2\alpha^{-4}\beta^2}=$

$=\alpha^{-2+1-(-3)-(-4)}\beta^{2-1-2-2}\gamma^{-2-2}=\dots$

9. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $\left(\dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha^{-1}\beta^3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{\alpha^{-2}\beta^3}{\alpha^2\beta^{-2}}\right)^{-2}$,

β) $\left(\dfrac{\alpha^2\beta^{-1}}{\alpha^3\beta^{-2}}\right)^{-2}:\left(\dfrac{\alpha^4\beta^2}{\alpha^{-1}\beta^3}\right)^{-1}$

Λύση

α) $\left(\dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha^{-1}\beta^3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{\alpha^{-2}\beta^3}{\alpha^2\beta^{-2}}\right)^{-2}=\dfrac{\alpha^{-1}\beta^{-2}}{\alpha\beta^{-3}}\cdot\dfrac{\alpha^4\beta^{-6}}{\alpha^{-4}\beta^4}=$

$=\dfrac{\alpha^{-1}\beta^{-2}\alpha^4\beta^{-6}}{\alpha\beta^{-3}\alpha^{-4}\beta^4}=\dots..$

β) $\left(\dfrac{\alpha^2\beta^{-1}}{\alpha^3\beta^{-2}}\right)^{-2}:\left(\dfrac{\alpha^4\beta^2}{\alpha^{-1}\beta^3}\right)^{-1}=\dfrac{\alpha^{-4}\beta^2}{\alpha^{-6}\beta^4}:\dfrac{\alpha^{-4}\beta^{-2}}{\alpha\beta^{-3}}=$

$=\dfrac{\alpha^{-4}\beta^2}{\alpha^{-6}\beta^4}\cdot\dfrac{\alpha\beta^{-3}}{\alpha^{-4}\beta^{-2}}=\dots..$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{2x}\cdot 2^{x-1}=\dfrac{1}{16}$,

β) $(-3)^{x+2}\cdot(-3)^2=-\dfrac{1}{27}$

γ) $4^{x-1}=1$, δ) $2^{x+3}=8^{x-3}$

Λύση

α) $2^{2x}\cdot 2^{x-1}=\dfrac{1}{16}$ ή $2^{2x}\cdot 2^{x-1}=\dfrac{1}{2^4}$ ή

$2^{2x}\cdot 2^{x-1}=2^{-4}$ ή $2^{2x+x-1}=2^{-4}$

οπότε $2x+x-1=-4$ .....

β) $(-3)^{x+2}\cdot(-3)^2=-\dfrac{1}{27}$ ή $(-3)^{x+2}\cdot(-3)^2=-\dfrac{1}{3^3}$

ή $(-3)^{x+2}\cdot(-3)^2=-3^{-3}$ ή

$(-3)^{x+2}\cdot(-3)^2=(-3)^{-3}$ ή

$(-3)^{x+2+2}=(-3)^{-3}$ οπότε ......

γ) .....

δ) .....

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $10^{-4}\cdot x=10^{-3}$, β) $10^5\cdot x=10^3$,

γ) $x:10^{-4}=10^3$, δ) $x:10^{-2}=10$

Λύση

α) $10^{-4}\cdot x=10^{-3}$ ή

$x=10^{-3}:10^{-4}$ .....

β) $10^5\cdot x=10^3$ ή $x=10^3:10^5$ .....

γ) $x:10^{-4}=10^3$ ή $x=10^3\cdot 10^{-4}$ ....

δ) $x:10^{-2}=10$ ή $x=10\cdot 10^{-2}$ ....

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $0{,}0001\cdot x=0{,}000001$

β) $1000x=100000$

Λύση

α) $0{,}0001\cdot x=0{,}000001$ ή

$10^{-4}\cdot x=10^{-6}$ ....

β) $1000\cdot x=100000$ ή

$10^3\cdot x=10^5$ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι δυνάμεις:

α) $\alpha^8\cdot\alpha^5$, β) $x^8:x^4$, γ) $x^{-3}\cdot x^3$,

δ) $\beta^{-5}:\beta^{-7}$, ε) $\alpha^{-7}:\alpha^{-5}$,

στ) $y^{10}\cdot y^7$, ζ) $\gamma^{10}\cdot\gamma^{-8}$

2. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

α) $(-3)^{-1}$, β) 2^{-2}, γ) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$,

δ) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$, ε) 4^{-3}, στ) $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$, ζ) $(-\frac{1}{5})^{-2}$

3. Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα:

α) $(-3)^{2} \cdot (-3)^{1}$, β) $2^{-5} \cdot 2^{3}$,

γ) $11^{0} \cdot 11^{2}$, δ) $(-2)^{-4} \cdot (-2)$

ε) $(-\frac{2}{5})^{2} \cdot (-\frac{2}{5})^{-3}$

4. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

α) $4\,\alpha^{2}\beta\,\alpha^{3}\beta^{-2}$, β) $\alpha^{3}\beta^{-2}\alpha^{3}\beta^{-1}$,

γ) $\alpha^{3}\beta^{4}\alpha^{-5}\beta^{-4}$, δ) $\alpha^{4}\beta^{3}\alpha^{-2}\beta^{-1}$,

ε) $\alpha^{5}\beta^{-2}\gamma\,\alpha^{-1}\gamma^{-3}\beta^{3}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\alpha^{4} \cdot \alpha^{3}}{\alpha^{2}}$, β) $\frac{x^{-2} \cdot x^{3}}{x^{-4}}$, γ) $\frac{x^{-5}}{x^{3} \cdot x^{-7}}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{4x^{3}y^{2}}{x^{2}y^{3}} \cdot \frac{x^{-3}y}{2x^{-2}y^{5}}$,

β) $\frac{x^{4}y^{3}}{x^{3}y^{-2}} \cdot \frac{5x^{3}y^{-2}}{3x^{-1}y}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{(2x^{2}y^{-1})^{2}}{(x^{-1}y^{-2})^{-1}} \cdot \frac{(3x^{3}y^{-2})^{-1}}{x^{4}y^{4}}$,

β) $\frac{(x^{5}y^{7}z^{3})^{-2}}{(x^{-2}z^{5})^{-3}} : \frac{(x\ y^{7})^{-2}}{(x^{3}y^{-2}z)^{2}}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5^{x-1} = 25$, β) $5^{2x} = 5 \cdot 5^{x-1}$,

γ) $(-\frac{1}{2})^{x+3} = -\frac{1}{8}$, δ) $(-3)^{x-4} = -27$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $10^{-2} \cdot x = 10^{-3}$, β) $10^{3} \cdot x = 10^{-2}$

γ) $x : 10^{-2} = 10^{4}$, δ) $x : 10^{-1} = 10^{-2}$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $0{,}001 \cdot x = 0{,}1$,

β) $10000 \cdot x = 10^{3}$

γ) $0{,}0001 \cdot \chi = 0{,}000001$

11. Να γραφούν με τη μορφή μιας δύναμης.

α) $\frac{(x^{2})^{-4} \cdot x^{3}}{(x^{-1})^{3} \cdot (x^{2})^{-3}}$, β) $\frac{(x^{-4})^{2} \cdot (x^{2})^{3}}{x^{7} \cdot (x^{3})^{-2}}$

1.3 Ρίζες

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού;

Απαντήσεις

1. Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού **α** ονομάζεται ο θετικός αριθμός **x** που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό **α**.

Συμβολικά: $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^{2} = \alpha$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό καταλαβαίνουμε εύκολα ότι αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^{2}} = \alpha$.
Γενικά αν δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του α τότε $\sqrt{\alpha^{2}} = |\alpha|$.

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ριζών και πώς αποδεικνύονται;

2. Οι ιδιότητες των ριζών είναι:

α) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$, όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$

β) $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, όπου $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$

Απόδειξη:

α) Το 1ο μέλος με ύψωση στο τετράγωνο δίνει: $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha \cdot \beta$.

Το 2ο μέλος με ύψωση στο τετράγωνο δίνει: $(\sqrt{\alpha \cdot \beta})^2 = \alpha \cdot \beta$.

Άρα $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha \cdot \beta})^2$ οπότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$.

β) Το 1ο μέλος με ύψωση στο τετράγωνο δίνει: $(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}})^2 = \dfrac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Το 2ο μέλος με ύψωση στο τετράγωνο δίνει: $(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}})^2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Άρα $(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}})^2 = (\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}})^2$ οπότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών:
α) 100, β) 25, γ) 0,25, δ) 64, ε) 10.000, στ) 0,0064.

Λύση

α) $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2 = 100$.

β) $\sqrt{25} = 5$ γιατί $5^2 = 25$.

γ) $\sqrt{0,25} = \sqrt{\dfrac{25}{100}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \dfrac{5}{10} = 0,5$.

δ) $\sqrt{64} = 8$ γιατί $8^2 = 64$.

ε) $\sqrt{10.000} = 100$ γιατί $100^2 = 10.000$.

στ) $\sqrt{0,0064} = \sqrt{\dfrac{64}{10000}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{10000}} = $

$= \dfrac{8}{100} = 0,08$.

2. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών:

α) $\dfrac{1}{4}$, ***β)*** $\dfrac{4}{16}$, ***γ)*** $\dfrac{25}{64}$, ***δ)*** $\dfrac{144}{81}$

Λύση

Είναι:

α) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$, β) $\sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \dfrac{2}{4}$,

γ) $\sqrt{\dfrac{25}{64}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \dfrac{5}{8}$, δ) $\sqrt{\dfrac{144}{81}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} = \dfrac{12}{9}$

3. Να υπολογιστούν:

α) $\sqrt{3^2}$, ***β)*** $\sqrt{4^4}$, ***γ)*** $\sqrt{2^6}$, ***δ)*** $\sqrt{5^4}$

Λύση

α) $\sqrt{3^2} = 3$, β) $\sqrt{4^4} = \sqrt{(4^2)^2} = 4^2$,

γ) $\sqrt{2^6} = \sqrt{(2^3)^2} = 2^3$, δ) $\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2$

4. Να υπολογιστούν:

α) $\sqrt{50}$, ***β)*** $\sqrt{72}$, ***γ)*** $\sqrt{1372}$, ***δ)*** $\sqrt{324}$

Λύση

α) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

β) $\sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 4} =$
$= 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

γ) Επειδή ο αριθμός 1372 είναι αρκετά μεγάλος για να μπορούμε να βρούμε απευθείας ποιων αριθμών είναι γινόμενο, τον αναλύουμε σε γινόμενο ως εξής:

1372	2
686	2
343	7
49	7
7	7
	1

Άρα $1372 = 2^2 \cdot 7^3 =$
$= 2^2 \cdot 7^2 \cdot 7$ οπότε:

$\sqrt{1372} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 7} =$
$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7} =$
$= 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{7} = 14 \cdot \sqrt{7}$

δ) Ομοίως:

324	2
162	2
81	9
9	9
1	

Άρα $324 = 2^2 \cdot 9^2$ οπότε:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 9^2} =$
$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{9^2} = 2 \cdot 9 = 18$

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{5}$, *β)* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$, *γ)* $\sqrt{54} \cdot \sqrt{6}$

Λύση

α) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{125 \cdot 5} = \sqrt{625} = 25$

β) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

γ) $\sqrt{54} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{54 \cdot 6} = \sqrt{324} = 18$

6. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}}{\sqrt{80}}$, *β)* $\dfrac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{63}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}}$

Λύση

α) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 30}{80}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

β) $\dfrac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{63}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{52 \cdot 63}{26 \cdot 14}} =$

$= \sqrt{\dfrac{2 \cdot 26 \cdot 7 \cdot 9}{26 \cdot 2 \cdot 7}} = \sqrt{9} = 3$

7. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$,

β) $4\sqrt{5} - 13\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

Λύση

α) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2} =$
$= (5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) + (4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) =$
$= (5 - 3 + 6)\sqrt{2} + (4 - 2)\sqrt{3} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

β) $4\sqrt{5} - 13\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 2\sqrt{5} =$
$= (4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) + (-13\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}) =$
$= (4 - 2 - 2)\sqrt{5} + (-13 + 5 - 7)\sqrt{3} =$
$= 0\sqrt{5} + (-15\sqrt{3}) = -15\sqrt{3}$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $7\sqrt{18} - 9\sqrt{72} + 12\sqrt{50} - 3\sqrt{8}$,

β) $\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 3\sqrt{24}$

Λύση

α) $7\sqrt{18} - 9\sqrt{72} + 12\sqrt{50} - 3\sqrt{8} =$
$= 7\sqrt{9 \cdot 2} - 9\sqrt{36 \cdot 2} + 12\sqrt{25 \cdot 2} - 3\sqrt{4 \cdot 2} =$
$= 7\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 9\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} + 12\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} -$
$- 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} =$
$= 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 9 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} + 12 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} -$
$- 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} =$
$= 21\sqrt{2} - 54\sqrt{2} + 60\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$

β) $\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 3\sqrt{24} =$
$= \sqrt{25 \cdot 6} - 4\sqrt{9 \cdot 6} + 3\sqrt{4 \cdot 6} =$
$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} - 4\sqrt{9} \cdot \sqrt{6} + 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{6} =$
$= 5 \cdot \sqrt{6} - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} =$
$= 5\sqrt{6} - 12\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

9. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$, *β)* $\sqrt{5}(\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$,
γ) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\sqrt{3}$

Λύση

α) $\sqrt{2}\,(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$
$= 2\sqrt{6} - \sqrt{4} = 2\sqrt{6} - 2$

β) $\sqrt{5}\,(\sqrt{6} - 2\sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$
$= \sqrt{30} - 2\sqrt{25} = \sqrt{30} - 2 \cdot 5 = \sqrt{30} - 10$

γ) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\,\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$
$= \sqrt{9} - 2\sqrt{6} = 3 - 2\sqrt{6}$

10. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{24} - \sqrt{54}) : \sqrt{6}$,
β) $(2\sqrt{18} - 3\sqrt{14}) : \sqrt{2}$,
γ) $(4\sqrt{75} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{3}$

Λύση

α) $(\sqrt{24} - \sqrt{54}) : \sqrt{6} =$
$= \sqrt{24} : \sqrt{6} - \sqrt{54} : \sqrt{6} =$
$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} : \sqrt{6} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} : \sqrt{6} =$
$= \sqrt{4} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$

β) $(2\sqrt{18} - 3\sqrt{14}) : \sqrt{2} =$
$= 2\sqrt{18} : \sqrt{2} - 3\sqrt{14} : \sqrt{2} =$
$= 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} : \sqrt{2} - 3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} : \sqrt{2} =$
$= 2\sqrt{9} - 3\sqrt{7} = 2 \cdot 3 - 3\sqrt{7} = 6 - 3\sqrt{7}$

γ) $(4\sqrt{75} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{3} =$
$= 4\sqrt{75} : \sqrt{3} + 3\sqrt{18} : \sqrt{3} =$
$= 4\sqrt{25} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{3} + 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{3} =$
$= 4\sqrt{25} + 3\sqrt{6} = 4 \cdot 5 + 3\sqrt{6} = 20 + 3\sqrt{6}$

11. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$,
β) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$

Λύση

α) $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\,(\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$
$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$
$= \sqrt{6} - \sqrt{10} - 2\sqrt{9} + 2\sqrt{15} =$
$= \sqrt{6} - \sqrt{10} - 2 \cdot 3 + 2\sqrt{15} =$
$= \sqrt{6} - \sqrt{10} + 2\sqrt{15} - 6$

β) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})\,(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) =$
$= 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$
$= 3\sqrt{4} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 2\sqrt{25} =$
$= 3 \cdot 2 - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 2 \cdot 5 =$
$= 6 + \sqrt{10} - 10 = \sqrt{10} - 4$

12. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{2} - 3)^2$, *β)* $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, *γ)* $(1 - 4\sqrt{2})^2$

Λύση

α) $(\sqrt{2} + 3)^2 = (\sqrt{2} + 3)\,(\sqrt{2} + 3) =$
$= (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3^2 =$
$= 2 + 6\sqrt{2} + 9 = 11 + 6\sqrt{2}$

β) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$
$= (2\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 =$
$= 4(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 2 =$
$= 4 \cdot 3 - 4\sqrt{6} + 2 = 12 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6}$

γ) $(1 - 4\sqrt{2})^2 = (1 - 4\sqrt{2})\,(1 - 4\sqrt{2}) =$
$= 1^2 - 1 \cdot 4\sqrt{2} - 1 \cdot 4\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2 =$
$= 1 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 16(\sqrt{2})^2 =$
$= 1 - 8\sqrt{2} + 16 \cdot 2 = 1 - 8\sqrt{2} + 32 =$
$= 33 - 8\sqrt{2}$

13. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, *β)* $\frac{2}{3\sqrt{2}}$, *γ)* $\frac{5}{4\sqrt{5}}$

Λύση

α) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{5}$.

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

β) $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

γ) $\frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{25}} = \frac{5\sqrt{5}}{4\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

14. Να γίνουν οι πράξεις της παράστασης:

$A = (2+\sqrt{3})^{-2} + (2-\sqrt{3})^{-2}$

Λύση

$A = (2+\sqrt{3})^{-2} + (2-\sqrt{3})^{-2} =$

$= \frac{\overbrace{1}^{(2-\sqrt{3})^2}}{(2+\sqrt{3})^2} + \frac{\overbrace{1}^{(2+\sqrt{3})^2}}{(2-\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})^2\cdot(2-\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^2} =$

$= \frac{4-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+4+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{[4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2]^2}$

$= \frac{4+3+4+3}{(4-3)^2} = \frac{14}{1^2} = 14$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$,

β) $\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$

Λύση

α) $\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5} =$

$= (\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) + (-3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) =$

$= (1+2-2)\sqrt{5} + (-3+4)\sqrt{3} = ...$

β) $\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{6} + 3\sqrt{3} =$

$= (\sqrt{6} + 5\sqrt{6}) + (-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) =$

$= (1+5)\sqrt{6} + (-2-4+3)\sqrt{3} = ...$

2. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$, *β)* $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$, *γ)* $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}$

Λύση

α) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{9\cdot 2}\cdot\sqrt{4\cdot 2} =$

$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = ...$

β) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{9\cdot 7}\cdot\sqrt{7} =$

$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = ...$

γ) $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13} = \sqrt{4\cdot 13}\cdot\sqrt{13} = ...$

3. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

α) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$, *β)* $\sqrt{432} : \sqrt{3}$, *γ)* $\sqrt{405} : \sqrt{5}$

Λύση

α) $\sqrt{72} : \sqrt{8} = \sqrt{9\cdot 8} : \sqrt{8} =$

$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{8} : \sqrt{8} = ...$

β) $\sqrt{432} : \sqrt{3} = \sqrt{144\cdot 3} : \sqrt{3} =$

$= \sqrt{144}\cdot\sqrt{3} : \sqrt{3} = ...$

γ) $\sqrt{405} : \sqrt{5} = \sqrt{81\cdot 5} : \sqrt{5} = ...$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$,

β) $4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3$

Λύση

α) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} =$

$= 2\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} =$

$= 30\sqrt{3\cdot 2\cdot 2\cdot 5} = ...$

β) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 3 =$
$= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$
$= 24\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 6} = ...$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{2}{3}\sqrt{12} - \frac{7}{3}\sqrt{27} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{36}}$,

β) $4\ \sqrt{20} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{80}{9}} - \frac{5}{7}\sqrt{\frac{245}{16}}$

Λύση

α) $3\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{2}{3}\sqrt{12} - \frac{7}{3}\sqrt{27} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{36}} =$

$= 3\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} + \frac{2}{3}\sqrt{3 \cdot 4} - \frac{7}{3}\sqrt{9 \cdot 3} + \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{36}} =$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} - \frac{7}{3}\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{6} = ...$

β) $4\ \sqrt{20} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{80}{9}} - \frac{5}{7}\sqrt{\frac{245}{16}} =$

$= 4\ \sqrt{4 \cdot 5} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{16 \cdot 5}{9}} - \frac{5}{7}\sqrt{\frac{49 \cdot 5}{16}} =$

$= 4\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{9}} - \frac{5}{7}\,\frac{\sqrt{49} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{16}} = ...$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$,

β) $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})(1 - \sqrt{6})$

Λύση

α) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) =$
$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} -$
$- 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = ...$

β) $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) =$
$= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = ...$

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{147} - \sqrt{108}) : \sqrt{3}$,

β) $(\sqrt{112} + \sqrt{28}) : \sqrt{7}$

Λύση

α) $(\sqrt{147} - \sqrt{108}) : \sqrt{3} =$
$= \sqrt{147} : \sqrt{3} - \sqrt{108} : \sqrt{3} =$
$= \sqrt{49 \cdot 3} : \sqrt{3} - \sqrt{36 \cdot 3} : \sqrt{3} = ...$

β) $(\sqrt{112} + \sqrt{28}) : \sqrt{7} =$
$= \sqrt{112} : \sqrt{7} + \sqrt{28} : \sqrt{7} =$
$= \sqrt{16 \cdot 7} : \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 7} : \sqrt{7} = ...$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$, *β)* $(4\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$

Λύση

α) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) = ...$

β) $(4\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = (4\sqrt{2} + \sqrt{6})(4\sqrt{2} + \sqrt{6}) = ...$

9. Να υπολογισθεί η παράσταση:

$A = (1 - \sqrt{2})^{-2} + (1 + \sqrt{2})^{-2}$

Λύση

$A = (1 - \sqrt{2})^{-2} + (1 + \sqrt{2})^{-2} =$

$= \frac{\overbrace{1}^{(1+\sqrt{2})^2}}{(1 - \sqrt{2})^2} + \frac{\overbrace{1}^{(1-\sqrt{2})^2}}{(1 + \sqrt{2})^2} =$

$= \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})^2 \cdot (1 + \sqrt{2})^2} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι ρίζες:

$\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$,
$\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$

2. Να υπολογιστούν οι ρίζες:

$\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}36}$, $\sqrt{0{,}49}$,
$\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{0{,}81}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{1{,}44}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$,

β) $4\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$,

γ) $3(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - 4(3\sqrt{3} + 5\sqrt{2})$

4. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$, *β)* $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$, *γ)* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

5. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

α) $\sqrt{176} : \sqrt{11}$, *β)* $\sqrt{125} : \sqrt{5}$,
γ) $\sqrt{162} : \sqrt{2}$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta^5}} : \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}$, *β)* $\sqrt{\frac{27\alpha}{2}} : \sqrt{\frac{3\alpha^3}{8}}$

γ) $\sqrt{\frac{5}{x^3}} : \sqrt{\frac{20}{x}}$ *με* $\alpha, \beta, x > 0$.

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$,

β) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$,

γ) $(\sqrt{3} + 5)(5 - \sqrt{3})$,

δ) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{8})(2\sqrt{8} - 5\sqrt{2})$

8. Αν $\alpha = 1 - 2\sqrt{5}$, $\beta = 3 + \sqrt{5}$ *να υπολογιστούν τα* $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$.

9. Να τραπούν τα κλάσματα σε άλλα με ισοδύναμο παρονομαστή:

α) $\frac{5}{\sqrt{5}}$, *β)* $2\frac{7}{\sqrt{7}}$, *γ)* $\frac{3}{2\sqrt{3}}$, *δ)* $\frac{x}{\sqrt{x+y}}$ *με* $x, y > 0$.

10. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(8\sqrt{14} - 6\sqrt{63} - 4\sqrt{28} + 10\sqrt{7}) : 2\sqrt{7}$,

β) $(3\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$,

γ) $(5\sqrt{12} + 2\sqrt{3}) \cdot (7\sqrt{12} - 2\sqrt{3})$,

δ) $(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{5})$,

ε) $(3 - 2\sqrt{2})^{-2} + (3 + 2\sqrt{2})^{-2}$,

στ) $(1 - \sqrt{3})^{-2} + (1 + \sqrt{3})^{-2}$

1.4 Διάταξη

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πότε ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος με τον πραγματικό αριθμό β;

2. Με ποιο τρόπο συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β;

Απαντήσεις

1. Ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος με τον πραγματικό αριθμό β, όταν η διαφορά τους, α - β, είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με το μηδέν, δηλ.
$\alpha > \beta$ όταν $\alpha - \beta > 0$
$\alpha < \beta$ όταν $\alpha - \beta < 0$
$\alpha = \beta$ όταν $\alpha - \beta = 0$

2. Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β βρίσκουμε τη διαφορά τους και:
αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$
αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

3. Τι συμβαίνει όταν και στα δυο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο πραγματικό αριθμό;

3. Όταν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά, δηλαδή:

αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Απόδειξη:

Επειδή $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ (1).
Παίρνουμε τη διαφορά: $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta > 0$ λόγω της (1).
Επομένως: $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) > 0$ ή $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν:
$\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

4. Τι συμβαίνει αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς;

4. Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς τότε προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς με τις προηγούμενες. Δηλαδή:

αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

Απόδειξη:

Αφού $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$. Επίσης αφού $\gamma > \delta$ τότε $\gamma - \delta > 0$. Όμως το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός, οπότε:
$(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) > 0$ ή $\alpha + \gamma - \beta - \delta > 0$ ή $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) > 0$ άρα $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

5. Τι γίνεται όταν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε μ' ένα θετικό αριθμό;

5. Όταν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά, δηλαδή:

αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Απόδειξη:

Επειδή $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και αφού $\gamma > 0$, τότε και το γινόμενο των ομόσημων αριθμών $\alpha - \beta$ και γ είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Δηλαδή:
$(\alpha - \beta) \cdot \gamma > 0$ ή $\alpha\gamma - \beta\gamma > 0$ άρα $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

6. Τι γίνεται όταν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε μ' έναν αρνητικό αριθμό;

6. Όταν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με φορά αντίθετη της πρώτης, δηλαδή:

αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Απόδειξη:

Επειδή $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και αφού $\gamma < 0$, τότε και το γινόμενο των ετερόσημων αριθμών $\alpha - \beta$ και γ είναι μικρότερο του μηδενός. Δηλαδή:
$(\alpha - \beta) \cdot \gamma < 0$ ή $\alpha\gamma - \beta\gamma < 0$ άρα $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

7. Τι συμβαίνει όταν τα μέλη μιας ισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό;

7. Εάν έχουμε $\alpha = \beta$ τότε $\alpha\gamma = \beta\gamma$ που σημαίνει ότι μια ισότητα δεν αλλάζει αν και τα δύο μέλη της τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν ισχύει $x > y$ να δειχθεί ότι ισχύει $3x + 2\omega > 3y + 2\omega$.

Λύση

Θα πάρουμε τη διαφορά:
$(3x + 2\omega) - (3y + 2\omega)$ και θα έχουμε:
$(3x + 2\omega) - (3y + 2\omega) =$
$= 3x + 2\omega - 3y - 2\omega = 3x - 3y =$
$= 3(x - y) > 0$ γιατί $3 > 0$ και $x - y > 0$.
Άρα: $3x + 2\omega > 3y + 2\omega$.

2. Αν $x < y$ να δείξετε ότι $x^2 < y^2$ με $x > 0$, $y > 0$.

Λύση

Είναι: $x < y$ και $x > 0$ άρα $x \cdot x < x \cdot y$ ή $x^2 < xy$ (1).
Επίσης $x < y$ και $y > 0$ άρα $xy < y \cdot y$ ή $xy < y^2$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:
$x^2 < xy < y^2$ οπότε και $x^2 < y^2$.

3. Αν $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta.$$

Λύση

Είναι $\alpha < \beta$ άρα με πρόσθεση του α και στα δύο μέλη έχουμε:
$\alpha + \alpha < \beta + \alpha$ ή $2\alpha < \beta + \alpha$ (1)
και από την $\alpha < \beta$ με πρόσθεση του β και στα δύο μέλη έχουμε:
$\alpha + \beta < \beta + \beta$ ή $\alpha + \beta < 2\beta$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:
$2\alpha < \alpha + \beta < 2\beta$ και διαιρώντας με το 2 έχουμε:

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$$

4. Αν $\alpha < 3$ και $\beta < 2$ να υπολογίσετε το $3\alpha + 2\beta$.

Λύση

Επειδή $\alpha < 3$ τότε $3\alpha < 9$ και $\beta < 2$ τότε $2\beta < 4$. Με πρόσθεση κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:
$3\alpha + 2\beta < 9 + 4$ ή $3\alpha + 2\beta < 13$.

5. Αν $-2 < \alpha < 2$ και $1 < \beta < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

Λύση

Θα υπολογίσουμε το 2α πολλαπλασιάζοντας με το 2 τη σχέση $-2<\alpha< 2$.
Έχουμε: $-2 \cdot 2 < 2 \cdot \alpha < 2 \cdot 2$ ή
$-4 < 2\alpha < 4$ (1).
Θα υπολογίσουμε το -3β πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $1< \beta< 4$ με το -3.
Έχουμε: $-3 \cdot 1 > -3\beta > -3 \cdot 4$ ή
$-3 > -3\beta > -12$ (η φορά άλλαξε γιατί πολλαπλασιάσαμε με αρνητικό αριθμό) ή $-12 < -3\beta < -3$ (2).
Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:
$-4 - 12 < 2\alpha - 3\beta < 4 - 3$ ή
$-16 < 2\alpha - 3\beta < 1$.

6. Εάν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \beta$ με α, β, γ θετικούς αριθμούς να δειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$$

Λύση

Επειδή $\alpha < \beta$ και γ θετικός τότε:
$\alpha\gamma < \beta\gamma$ (1).
Προσθέτουμε το $\alpha\beta$ και στα δύο μέλη της (1) και έχουμε $\alpha\gamma + \alpha\beta < \beta\gamma + \alpha\beta$

ή $\alpha(\gamma+\beta) < \beta(\gamma+\alpha)$ και διαιρούμε με το θετικό $\beta(\gamma+\beta)$ οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} < \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} \text{ δηλαδή } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} \quad (2).$$

Ομοίως αφαιρούμε τον $\alpha\beta$ από την (1) και έχουμε: $\alpha\gamma - \alpha\beta < \beta\gamma - \alpha\beta$ ή $\alpha(\gamma-\beta) < \beta(\gamma-\alpha)$ ή $\alpha(\beta-\gamma) > \beta(\alpha-\gamma)$. (Πολλαπλασιάζουμε με - 1 και αλλάζουμε τη φορά).
Διαιρούμε τώρα με το θετικό $\beta(\beta-\gamma)$ και έχουμε:

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta(\beta-\gamma)} > \frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\beta(\beta-\gamma)} \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \text{ ή }$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}.$$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{4-x}{3} - \frac{3x+1}{4} < 1$

β) $\frac{15-x}{6} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$

Λύση

α) $\frac{4-x}{3} - \frac{3x+1}{4} < 1$ ή

$12 \cdot \frac{4-x}{3} - 12 \cdot \frac{3x+1}{4} < 12 \cdot 1$ ή

$4(4-x) - 3(3x+1) < 12$ ή

$16 - 4x - 9x - 3 < 12$ ή

$-4x - 9x < 12 - 16 + 3$ ή $-13x < -1$

ή $\frac{-13x}{-13} > \frac{-1}{-13}$ οπότε $x > \frac{1}{13}$

β) $\frac{15-x}{6} - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$ ή

$6 \cdot \frac{15-x}{6} - 6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{x}{3} > 6 \cdot \frac{1}{2}$ ή

$15 - x - 3x - 2x > 3$ ή

$-x - 3x - 2x > 3 - 15$ ή $-6x > -12$ ή

$\frac{-6x}{-6} < \frac{-12}{-6}$ οπότε $x < 2$

8. Να βρείτε για ποιες τιμές συναληθεύουν οι παρακάτω ανισότητες:

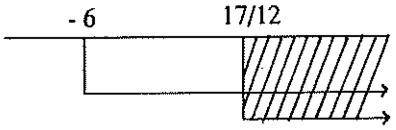
$4x - 5 > \frac{2}{3}$ και $3x - 2 > -2(4 - x)$.

Λύση

$4x - 5 > \frac{2}{3}$ ή $3 \cdot 4x - 3 \cdot 5 > 3 \cdot \frac{2}{3}$ ή

$12x - 15 > 2$ ή $12x > 2 + 15$ ή
$12x > 17$ ή $x > 17/12$ (1)

και $3x - 2 > -2(4 - x)$ ή
$3x - 2 > -8 + 2x$ ή $3x - 2x > -8 + 2$
ή $x > -6$ (2)
Τοποθετούμε τους αριθμούς 17/12 και - 6 πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και έχουμε:



Το γραμμοσκιασμένο τμήμα μας δίνει τις κοινές λύσεις των ανισώσεων. Δηλαδή: $x > 17/12$.

9. Αν ισχύει $16 < x < 25$ τότε να δείξετε ότι ο $\sqrt{x}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση

Ισχύει $16 < x < 25$ οπότε $4^2 < (\sqrt{x})^2 < 5^2$ ή $4 < \sqrt{x} < 5$. Μεταξύ των αριθμών 4 και 5 δεν υπάρχει κανένας ακέραιος άρα ο $\sqrt{x}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός.

10. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ να δείξετε ότι $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $\alpha < \beta$ με το θετικό γ ώστε να σχηματίσουμε το $\alpha\gamma$ της αποδεικτέας και έχουμε:
$\alpha\gamma < \beta\gamma$ (1).
Για να σχηματίσουμε το $\beta\delta$, πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $\gamma < \delta$ με το β και έχουμε $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ (2).

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν:
$\alpha\gamma < \beta\gamma < \beta\delta$ άρα $\alpha\gamma < \beta\delta$.

11. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \lambda + 1$.

Λύση

Είναι: $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ προσθέτουμε το 1 και στα δύο μέλη: $\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \lambda + 1$ ή $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \lambda + 1$ ή $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \lambda + 1$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Αν α, β θετικοί και $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ τότε να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} > 1$.

Λύση

Είναι: $\frac{\alpha}{\beta} < 1$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με β ($\beta > 0$) και έχουμε: $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} < \beta \cdot 1$ ή $\alpha < \beta$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με α ($\alpha > 0$) και έχουμε: $\frac{\alpha}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$ ....

2. Αν για τους θετικούς α, β, γ, δ ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}$.

Λύση

Είναι: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$. Πολλαπλασιάζουμε με το θετικό βδ και έχουμε: $\beta\delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} < \beta\delta \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ ή $\alpha \cdot \delta < \beta \cdot \gamma$. Διαιρούμε με τον θετικό αγ και έχουμε: $\frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma} < \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}$ ....

3. Αν $-1 < \alpha < 2$ και $-2 < \beta < 1$ να υπολογίσετε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται το:
α) $5\alpha + 2\beta$ και το β) $5\alpha - 2\beta$.

Λύση

Είναι $-1 < \alpha < 2$ ή $-1 \cdot 5 < 5\alpha < 5 \cdot 2$ ή $-5 < 5\alpha < 10$ (1).
Επίσης $-2 < \beta < 1$ ή $-2 \cdot 2 < 2\beta < 2 \cdot 1$ ή $-4 < 2\beta < 2$ (2) και
$-4 \cdot (-1) > -1 \cdot 2\beta > -1 \cdot 2$ ή
$4 > -2\beta > -2$ ή $-2 < -2\beta < 4$ (3).
α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε .....
β) Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3) βρίσκουμε .....

4. Αν είναι $x < y$, τότε να αποδείξετε ότι $3x - 5z < 3y - 5z$.

Λύση

Η σχέση $x < y$ δίνει $x - y < 0$.
Παίρνουμε τη διαφορά:
$(3x - 5z) - (3y - 5z) =$
$= 3x - 5z - 3y + 5z = 3x - 3y =$
$= 3(x - y) < 0$.
Άρα ....

5. Αν $1 < \alpha < 2$ και $0 < \beta < 1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο αριθμός $2\beta - \alpha$.

Λύση

Από τη σχέση $1 < \alpha < 2$, πολλαπλασιάζοντας με -1 έχουμε:
$-1 \cdot 1 > -1 \cdot \alpha > -1 \cdot 2$ ή
$-1 > -\alpha > -2$ (1)
και από τη σχέση $0 < \beta < 1$ πολλαπλασιάζοντας με 2 έχουμε:
$2 \cdot 0 < 2 \cdot \beta < 2 \cdot 1$ ή $0 < 2\beta < 2$ (2).
Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε .....

6. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{4x+3}{3} < \frac{2(x-1)}{3}$$

Λύση

Είναι: $\frac{3x-1}{2} - \frac{4x+3}{3} < \frac{2(x-1)}{3}$

Πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών και έχουμε:

$6 \cdot \frac{3x-1}{2} - 6 \cdot \frac{4x+3}{3} < 6 \cdot \frac{2(x-1)}{3}$ ή

$3(3x-1) - 2(4x+3) < 4(x-1)$ .....

7. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $4(x-1) - 3(1-2x) < 1 - 4x$

β) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1$

Λύση

α) Είνάι: $4(x-1) - 3(1-2x) < 1 - 4x$
ή $4x - 4 - 3 + 6x < 1 - 4x$ .....

β) Είναι: $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1$ ή

$12 \cdot \frac{x}{2} - 12 \cdot \frac{x}{3} - 12 \cdot \frac{x}{4} < 12 \cdot 1$ ή

$6x - 4x - 3x < 12$ ......

8. Να βρεθεί πού συναληθεύουν οι ανισώσεις: $4x - 5 < 1 - 2x$ και

$2x - \frac{x}{2} < 1$

Λύση

Είναι: $4x - 5 < 1 - 2x$ ή
$4x + 2x < 1 + 5$ ή $6x < 6$ ή $x < 1$ (1) και

$2x - \frac{x}{2} < 1$ ή $2 \cdot 2x - 2 \cdot \frac{x}{2} < 2 \cdot 1$ ή

$4x - x < 2$ ή $3x < 2$ ή $x < 2/3$
Τοποθετούμε τους αριθμούς 1 και 2/3 στον άξονα των πραγματικών αριθμών και έχουμε .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Αν ισχύει $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι $2\alpha + 3\gamma > 2\beta + 3\gamma$.

2. Αν ισχύει $x < y$, να αποδείξετε ότι $-2x + 3\omega > 2y + 3\omega$.

3. Αν $\alpha > 1$ να δείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} < 1$.

4. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι $\alpha^3 > \beta^3$.

5. Αν $\frac{\alpha}{\beta} > \lambda$ να δείξετε ότι

$\frac{\alpha+\beta}{\beta} > \lambda + 1$.

6. Αν είναι $\alpha > \beta$ και $\delta < \gamma$, να δείξετε ότι: $\alpha - \delta > \beta - \gamma$.

7. Εάν $\alpha > \beta$ και $\delta < \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικούς, να δείξετε ότι:

$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$

8. Αν $-2 < x < 3$ και $2 < y < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται τα: α) $-x$, β) $-y$, γ) $2x$, δ) $-3y$, ε) $2x - 3y$.

9. Αν $-1 < \alpha < 0$ και $-0,5 < \beta < 0,5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση: $-3\alpha + 5\beta$.

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x+2}{3} > \frac{1}{2}$

β) $3x - \frac{x+2}{4} < \frac{5x+3}{2} - 1$

11. Να βρεθεί που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $4x - 3 < 1 - 3x - x$ και $4(x+2) < 3x$

β) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{2x}{3}$ και $\frac{x-1}{2} > \frac{3x+2}{3}$

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha - \beta - \gamma + \delta$, αν

α) $\alpha = 10,\ \beta = -8,\ \gamma = 13,\ \delta = -4$

β) $\alpha = -8,\ \beta = -4,\ \gamma = 11,\ \delta = -17$

2. Δίνονται: $A = -4 + 8 - 3 + 2$, $B = -6 + 4 + 12 - 5$ και $\Gamma = -4 + 3 - 1 - 27 + 7$ να υπολογίσετε τα

α) $A + B + \Gamma$, β) $A - B + \Gamma$, γ) $A - (B + \Gamma)$.

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $(+2)\cdot(-5) - (+5)\cdot(-8) + (-9)\cdot(-6) - 3\cdot(-10)$

β) $(-\frac{1}{3})(+\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{3})(+\frac{5}{6})(-\frac{4}{5})$

4. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{-1+2-3}{(-5)(+6)-7} : \dfrac{-\frac{1}{2}}{-21+(-2)(-16)}$

β) $\dfrac{-2\cdot 6-10}{-2(6-4)} : \dfrac{-\frac{3}{9}}{7\cdot 5-10}$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2^3 : (-2) + 4[2^2 - 2(7-5)^2 - 3^2] - (-4)^3$

β) $(-2)^4\cdot(-2)^2 - 4[3^2 - 4(3-7)^2] - 5\cdot(5-7)^2$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων για $x = 2$:

$A = 3(-2)^{-x} + 3(-x)^{x-1} - 2(1-x)^x$

$B = -2(x-1)^x - (-3)^{-x} + 9(-3)^{-x-1}$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{(x^2)^2\,(y^{-2})^3\,(\omega^{-1})^2}{x^{-3}\,(y^{-2})^2\,(\omega^{-4})^{-1}}$,

β) $\dfrac{[(\omega^{-2})^3\,x^2\,(y^{-1})^3]^{-1}}{\omega^{-2}\,(x^{-3})^{-1}\,y^2}$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{343}$, β) $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}$,

γ) $\sqrt{2x^5}\cdot\sqrt{2x}$, δ) $\sqrt{8\alpha^3}\cdot\sqrt{2\alpha^5}$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\sqrt{252}}{\sqrt{7}}$, β) $\dfrac{\sqrt{27\alpha^3}}{\sqrt{3\alpha}}$,

γ) $\dfrac{\sqrt{125x^3}}{\sqrt{5x^5}}$, δ) $\dfrac{\sqrt{32x^3y^5}}{\sqrt{2xy^3}}$

10. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(\sqrt{x} - 2)^2$, β) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$,

γ) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$,

δ) $(1 - 2\sqrt{3})^{-2} - (1 + 2\sqrt{3})^{-2}$

11. Για τους αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι ισχύει: $\alpha^\nu < \beta^\nu$.

12. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, δείξτε ότι ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

13. Αν $0 < x < 4$ και $1 < y < 3$, δείξτε ότι $0 < xy < 12$ και υπολογίστε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι αριθμοί: $x + y$, $-2x + y$, $x - 3y$.

14. Να βρείτε που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $\frac{x}{2} - \frac{3x-1}{3} > \frac{3}{2}$ και $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x+2}{2}$

β) $\frac{2(x+2)}{3} - 1 < \frac{x-3}{2}$ και $\frac{4x-2}{3} - \frac{x}{4} > \frac{3(x-1)}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

BASIC 1

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου θα βρίσκονται αυτές οι ειδικές σελίδες **προγραμματισμού BASIC**.

Τα κείμενα αυτά θα ήταν σωστό να χρησιμοποιηθούν μαζί μ' έναν οποιοδήποτε ηλεκτρονικό υπολογιστή που να δέχεται τη γλώσσα προγραμματισμού **BASIC.**

Η γλώσσα BASIC χρησιμοποιεί τα σύμβολα που ήδη γνωρίζουμε για να δηλώσουμε τις 4 γνωστές πράξεις.

+ , - για πρόσθεση και αφαίρεση
* , / για πολ/σμό και διαίρεση.

Επίσης χρησιμοποιεί τις παρενθέσεις με τον ίδιο τρόπο που τις χρησιμοποιούμε και στα Μαθηματικά.

Για τις δυνάμεις όμως χρησιμοποιεί το σύμβολο ↑, δηλαδή η έκφραση 3^2 γράφεται στη BASIC 3↑2. Σύμφωνα με τα παραπάνω η παράσταση:

$\frac{3 \cdot 5}{7}$ γράφεται στη BASIC 3 * 5 / 7

ενώ η $\frac{3+5}{7}$ γράφεται στη BASIC:

(3 + 5) / 7.

Ας προσέξουμε ότι στη BASIC δεν υπάρχει αριθμητής και παρονομαστής κλάσματος όπως τουλάχιστον τους ξέραμε. Όλα γράφονται σε μια γραμμή. Πρέπει όμως να ξεχωρίζουμε με παρενθέσεις ποιος είναι ο αριθμητής και ποιος ο παρονομαστής. Π.χ.

η $\frac{3 \cdot 2 + 7}{2 + 4 - 3 \cdot 5}$ γράφεται ως

(3 * 2 + 7) / (2 + 4 - 3 * 5)

η $\frac{2^3 - 4}{5 + 7^2}$ ως (2↑3 - 4) / (5 + 7↑2)

και η $\frac{3^4 - 1}{2 \cdot 3} - \frac{4 - 5^2}{1 + 5} + \frac{3 - 4 \cdot 2 - 7^2}{5 \cdot 3 + 1}$

ως

(3↑4 - 1) / (2*3) - (4 - 5↑2) / (1+5)
+ (3 - 4*2 - 7↑2) / (5*3 + 1).

Παρατήρηση:

Η σειρά των πράξεων που καταλαβαίνει ο υπολογιστής είναι ίδια με αυτή που μάθαμε και χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά.

Υπάρχουν πολλές μορφές της γλώσσας BASIC και συνεχώς δημιουργούνται άλλες. Στο βιβλίο αυτό φροντίσαμε να έχουμε προγράμματα συμβατά με τις περισσότερες απ' αυτές. Αν όμως κάτι δεν πάει καλά τη λύση θα την ανακαλύψετε εύκολα στο βιβλίο οδηγιών της έκδοσης που χρησιμοποιείτε στον υπολογιστή σας.

Θα ήταν ακόμα χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι ο υπολογιστής αναγνωρίζει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού ως SQR (από τις αγγλικές λέξεις SQuare Root). Δηλαδή αν θέλουμε να γράψουμε

$\sqrt{17}$ τότε πληκτρολογούμε SQR17 ή αν θέλουμε να γράψουμε $\sqrt{x+y}$

τότε πληκτρολογούμε SQR(x + y). Προσοχή: $x + y \geq 0$.

Επίσης η απόλυτη τιμή ενός αριθμού γράφεται ως ABS (από τις λέξεις ABSolute Value). Αν δηλαδή θέλουμε να γράψουμε την απόλυτη τιμή του αριθμού - 7 ($|-7|$) πληκτρολογούμε το εξής: ABS(- 7) (ή ABS-7 ανάλογα με την έκδοση της Basic που χρησιμοποιείτε). Επομένως αν θέλουμε να γράψουμε στη Basic την παράσταση: $|3 - 2^3 + 4 \cdot 3|$ πληκτρολογούμε: ABS(3 - 2↑3 + 4*3).

Σύμφωνα τώρα με όλα τα παραπάνω η παράσταση:

$$\frac{3^2 - 5 \cdot 3^3}{|3 - 2^3 - 4 \cdot 3|} - \frac{3 \cdot 4^2 - \sqrt{27}}{|-4| - 2 \cdot \sqrt{35}}$$

γράφεται στη Basic ως:

(3↑2 - 5*3↑3) / ABS(3 - 2↑3 - 4*3) - (3*4↑2-SQR27)/(ABS(-4)-2*SQR35)

Ασκήσεις

Να μετατρέψετε σε γλώσσα BASIC τις παραστάσεις:

α) $2 - 4 \cdot 3^3 + (12 - 7) \cdot 3^2$

β) $3 + (2 - 1) : (4 - 3) - 3^5 - 1$

γ) $\dfrac{3^4 - 2^6 \cdot (3^2 - 4^3) - 5}{3 \cdot 4 \cdot (5^2 - 1)}$

δ) $1 + 3 \cdot 4^3 + \dfrac{5 \cdot 4^3 - 5 \cdot 7^6}{12 - 4^3 + 1}$

ε) $3 \cdot \sqrt{35} - |2 - 3^2 \cdot 4 + 7|$

στ) $\dfrac{2 \cdot (3^3 - 12 \cdot \sqrt{3}) + 4 \cdot 3^2}{\sqrt{35} - |3 - 7^2|} - \dfrac{4 \cdot (2 - 4)^2 - (5 - 8) \cdot \sqrt{12}}{|3 - 4 \cdot 3^2 - 7| - 3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Αλγεβρικές παραστάσεις

2.1 Μονώνυμα

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε αλγεβρικές παραστάσεις; Δώστε παραδείγματα.

1. Αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζουμε τις εκφράσεις οι οποίες περιέχουν αριθμούς και γράμματα (μεταβλητές), που συνδέονται μεταξύ τους με τις γνωστές μας πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, δυνάμεις κ.λπ.).

Π.χ. Οι εκφράσεις $3x^2$, $5\alpha^2\beta - \frac{2}{3}x^3y^2$, $-x^4 + (\sqrt{2} - 1)\lambda x^3 + 5$ είναι αλγεβρικές παραστάσεις

2. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;

2. Αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζουμε τον αριθμό που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της αλγεβρικής παράστασης με αριθμούς και εκτελέσουμε όλες τις πράξεις που σημειώνονται σ' αυτήν.

Π.χ. Αν στην αλγεβρική παράσταση $2x^2y - 3xy$, τοποθετήσουμε $x = 1$, $y = -2$ έχουμε διαδοχικά:
$2 \cdot 1^2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-2) = 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -4 + 6 = 2.$
Το 2 είναι η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

3. Τι λέμε μονώνυμο;

3. Μονώνυμο λέμε μια αλγεβρική παράσταση, που περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς ανάμεσα στους αριθμούς και τις μεταβλητές της.

Π.χ. $-\frac{7}{2}\alpha^3\beta\gamma$, $5xyz$, $\sqrt{5}\alpha\beta^3y$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Σ' ένα μονώνυμο οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ακέραιοι.

4. Τι λέγεται συντελεστής και τι κύριο μέρος ενός μονωνύμου;

4. Συντελεστής του μονωνύμου λέγεται το αριθμητικό μέρος του μονωνύμου, ενώ **κύριο μέρος** λέγεται το γινόμενο όλων των μεταβλητών του μαζί με τους εκθέτες τους. Π.χ.

$$\overbrace{\underbrace{-\frac{7}{8}}_{\textbf{συντελεστής}}\ \underbrace{x^2y\omega^3}_{\textbf{κύριο μέρος}}}^{\textbf{μονώνυμο}}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Σ' ένα μονώνυμο συνήθως γράφουμε πρώτο τον συντελεστή του και δίπλα το κύριο μέρος του ακολουθώντας αλφαβητική σειρά (όπου είναι δυνατό), για τις μεταβλητές του.

5. Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια, αντίθετα, ίσα;

5. Όμοια λέγονται τα μονώνυμα που έχουν ίδιο κύριο μέρος.
Π.χ. $-3x^2y\omega^5$, $2x^2y\omega^5$
Αντίθετα λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.
Π.χ. $6\alpha\beta^2\gamma^3$, $-6\alpha\beta^2\gamma^3$
Ίσα λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν ίδιο συντελεστή.

6. Ποιο μονώνυμο λέγεται μηδενικό;

6. Μηδενικό λέγεται οποιοδήποτε μονώνυμο που έχει συντελεστή του το 0.
Π.χ. $0\alpha^2\beta^3\gamma$

7. Πώς γίνονται η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μονωνύμων;

7. α) Η πρόσθεση μονωνύμων γίνεται μόνο όταν αυτά είναι όμοια.
Το άθροισμα που προκύπτει είναι επίσης ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

Π.χ. $3xy^3$, $-4xy^3$, $-xy^3$ με πρόσθεση γίνεται:
$3xy^3 + (-4xy^3) + (-xy^3) = 3xy^3 + (-4xy^3) + (-1xy^3) = (3 - 4 - 1)xy^3 = -2xy^3$.

β) Ο πολλαπλασιασμός στα μονώνυμα γίνεται χωρίς αυτά να είναι υποχρεωτικά όμοια.
Το γινόμενο που προκύπτει είναι επίσης ένα μονώνυμο, που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο απ' όλες τις μεταβλητές των μονώνυμων, που κάθε μια έχει έκθετη το άθροισμα των εκθετών της.
Π.χ. $-2xy^2$, $3x^2y\omega$, $-5x\omega^2$ πολλαπλασιάζονται ως εξής:
$(-2xy^2)\cdot(3x^2y\omega)\cdot(-5x\omega^2) = -2\cdot3\cdot(-5)\cdot x\cdot x^2\cdot x\cdot y^2\cdot y\cdot\omega\cdot\omega^2 = 30x^4y^3\omega^3$.

γ) Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται όπως και στους αριθμούς, δηλαδή αντιστρέφουμε το διαιρέτη και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Π.χ. $(-18x^4y^2z\omega) : (9x^2yz) = (-18x^4y^2z\omega) \cdot \frac{1}{9x^2yz} = \frac{-18x^4y^2z\omega}{9x^2yz} = \frac{-18}{9} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y} \cdot \frac{z}{z} \cdot \omega =$

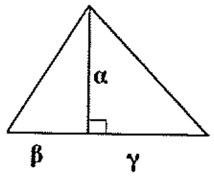
$= -2x^2yz\omega$

Παρατήρηση: Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντοτε μονώνυμο.

Π.χ. $(-7x^2yz^3) : (2x^2y^3\omega) = (-7x^2yz^3) \cdot \frac{1}{2x^2y^3\omega} = \frac{-7x^2yz^3}{2x^2y^3\omega} = \frac{-7}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{y}{y^3} \cdot z^3 \cdot \frac{1}{\omega} = -\frac{7}{2}\frac{z^3}{y^2\omega}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου υπολογίζεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}(\text{βάση}) \cdot (\text{ύψος})$.

Εδώ έχουμε (βάση) = β + γ, (ύψος)=α. Άρα η αλγεβρική παράσταση που ζητάμε είναι:

$E = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\,\alpha = \frac{1}{2}\beta\alpha + \frac{1}{2}\gamma\alpha =$

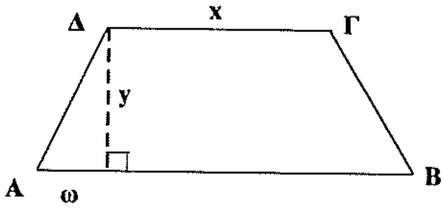
$= \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha\gamma.$

2. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο με ταχύτητα 18m/sec. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το διάστημα σε km που διανύει το αυτοκίνητο σε χρόνο t ώρες.

Λύση

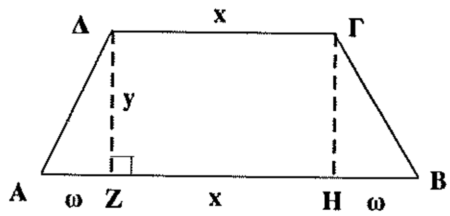
Ταχύτητα 18 m/sec σημαίνει πως σε κάθε 1 sec διανύει 18 m. Άρα σε χρόνο μιας ώρας δηλ 3.600 sec θα διανύει 18 · 3600 = 64800m ή 64,8km. Άρα σε χρόνο t ώρες διανύει διάστημα s = 64,8 · t km. Η έκφραση 64,8 · t είναι η αλγεβρική παράσταση που ζητάμε.

3. Το παρακάτω σχήμα παριστάνει ένα ισοσκελές τραπέζιο. Χρησιμοποιώντας τα μήκη που σημειώνονται να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του καθώς και μια άλλη που να εκφράζει την περίμετρό του.



Λύση

Φέρνουμε και το άλλο ύψος ΓΗ του τραπεζίου. Τότε, λόγω της συμμετρίας του σχήματος είναι ΗΒ = ω και ΖΗ = x.
Άρα η βάση του ΑΒ = ω + x + ω =
= 2ω + x.



Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$E = \frac{1}{2}(AB + \Delta\Gamma) \cdot AZ$. Έτσι έχουμε:

$E = \frac{1}{2}[(2\omega + x) + x]\, y = \frac{1}{2}(2\omega + x + x)\, y =$

$= \frac{1}{2}(2\omega + 2x)\, y = \frac{1}{2} \cdot 2\,(\omega + x)\, y =$

$= \omega y + xy = xy + y\omega$

Για την περίμετρό του εργαζόμαστε ως εξής:
Υπολογίζουμε την ΑΔ με το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΔ.

Είναι: $A\Delta^2 = y^2 + \omega^2$ ή $A\Delta = \sqrt{y^2 + \omega^2}$

Αφού το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα είναι ΓΒ = ΑΔ.
Η αλγεβρική παράσταση που υπολογίζει την περίμετρό του Π επομένως είναι:

$\Pi = x + (\sqrt{y^2 + \omega^2}) + (2\omega + x) +$

$+ (\sqrt{y^2 + \omega^2}) =$

$= x + \sqrt{y^2 + \omega^2} + 2\omega + x + \sqrt{y^2 + \omega^2} =$

$= 2x + 2\omega + 2\sqrt{y^2 + \omega^2}$

4. Να υπολογιστεί το άθροισμα των μονωνύμων:
α) $-3x^2$, $5x^2$, $12x^2$, $-20x^2$
β) $5x^2y$, $-3x^2y$, $\frac{1}{4}x^2y$, $-\frac{3}{4}x^2y$

Λύση

α) $(-3x^2)+(+5x^2)+(+12x^2)+(-20x^2) =$
$= -3x^2 + 5x^2 + 12x^2 - 20x^2 =$
$= 17x^2 - 23x^2 = -6x^2$

β) $(5x^2y) + (-3x^2y) + (+\frac{1}{4}x^2y) + (-\frac{3}{4}x^2y)$
$= 5x^2y - 3x^2y + \frac{1}{4}x^2y - \frac{3}{4}x^2y =$
$= 2x^2y - \frac{2}{4}x^2y = \frac{4}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2y = \frac{3}{2}x^2y$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα ως προς x:
α) $-5\alpha x + 2\alpha^2 x - \beta x + \gamma x$ και
β) $4\kappa x + 5\lambda x - \kappa x + 3\lambda x + 2x - \lambda x$.

Λύση

α) $-5\alpha x + 2\alpha^2 x - \beta x + \gamma x =$
$= (-5\alpha + 2\alpha^2 - \beta + \gamma)\, x$

β) $4\kappa x + 5\lambda x - \kappa x + 3\lambda x + 2x - \lambda x =$
$= 4\kappa x - \kappa x + 5\lambda x + 3\lambda x - \lambda x + 2x =$
$= 3\kappa x + 7\lambda x + 2x = (3\kappa + 7\lambda + 2)\, x$

6. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $4\alpha^2 xy \cdot (-3xy\omega) \cdot (-2x^2y)^3$
β) $5x^2\alpha\beta \cdot (-2x\alpha\beta)^2 : (2x\alpha\beta)$

Λύση

α) $4\alpha^2 xy \cdot (-3xy\omega) \cdot (-2x^2y)^3 =$
$= 4\alpha^2 xy \cdot (-3xy\omega) \cdot (4x^6y^3) =$
$= (-12\alpha^2x^2y^2\omega) \cdot (4x^6y^3) =$
$= 48\alpha^2x^8y^5\omega$

β) $5x^2\alpha\beta \cdot (-2x\alpha\beta)^2 : (2x\alpha\beta) =$
$= 5x^2 2\alpha\beta \cdot (4x^2\alpha^2\beta^2) : (2x\alpha\beta) =$
$= 20x^4\alpha^3\beta^3 : 2x\alpha\beta =$
$= 10x^3\alpha^2\beta^2$

Παρατήρηση: Όταν υπάρχουν δυνάμεις και πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις, εκτελούμε πρώτα τις δυνάμεις και μετά τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(-2x) \cdot (-3x^2)$, β) $2xy^2 \cdot (-x^2y^2)$,
γ) $(\frac{2}{3}\alpha^2) \cdot (\frac{3}{4}\alpha y^2)$, δ) $(-\frac{3}{4}\alpha^3\beta)^3$,
ε) $(-3\alpha^2) \cdot (-5\beta^3)$,
στ) $(-2x^3y^2\omega)^2 \cdot (\frac{1}{3}xy)^3$

Λύση

α) $(-2x) \cdot (-3x^2) = 6x^3$
β) $2xy^2 \cdot (-x^2y^2) = 2xy^2 \cdot (-1x^2y^2) =$
$= 2x^3y^4$
γ) ...., δ) ...., ε) ...., στ) ....

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $x^2y \cdot (-xy^2)^2 \cdot (x^2y^2z^3)$

β) $(\frac{1}{2}x^2y) \cdot (-yz) \cdot (4xyz^2)^2$

γ) $(-2\alpha^2\beta) : \alpha\beta$
δ) $(7x^3y^2) : (-7x^3y)$
ε) $(-18x^3y^2) : (-6x^3y)^2$

Λύση

α) $x^2y \cdot (-xy^2)^2 \cdot (x^2y^2z^3) =$
$= x^2y \cdot (x^2y^4)(x^2y^2z^3) = x^6y^7z^3$
β) ....

3. Για ποια τιμή του κ τα παρακάτω μονώνυμα είναι:
α) ίσα
β) αντίθετα
γ) μηδενικά μονώνυμα
$(2\kappa - 1)xy^3$, $(\kappa + 3)xy^3$.

Λύση

α) Για να είναι ίσα τα μονώνυμα πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές. Δηλαδή: $2\kappa - 1 = \kappa + 3$ ή
$2\kappa - \kappa = 3 + 1$ ή $\kappa = 4$.
β) Για να είναι αντίθετα τα μονώνυμα πρέπει να έχουν αντίθετους συντελεστές.
Δηλαδή: $2\kappa - 1 = -(\kappa + 3)$ ή ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ένας λαγός και μια χελώνα ξεκινούν από το ίδιο σημείο και κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν ο λαγός έχει ταχύτητα υ km/h και η χελώνα σ km/h, να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει πόσο θα απέχουν μεταξύ τους μετά από 2 ώρες.

2. Αν η χελώνα βάδισε μισή ώρα με ταχύτητα x km/h και 1 ώρα με ταχύτητα y km/h, να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τη μέση ταχύτητα της χελώνας.

3. Να γίνουν οι πράξεις στα παρακάτω μονώνυμα:
α) $3x^2y + (-2x^2y) - (+5x^2y)$
β) $2x^3y^3 - (-3xy)^3 + (-2x^3y^3)$
γ) $8xy\omega^2 - 2xy\omega^3 + 5xy\omega^2 - xy\omega^3$
δ) $3xy^2\omega \cdot (-2xy\omega)^2 : (3xy\omega^3)^2$
ε) $6xy^3 \cdot (\frac{1}{3}xy^2\omega) \cdot (-\frac{1}{2}x^3y) : x$

Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των αποτελεσμάτων όταν $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, $\omega = -2$.

4. Να προσδιοριστούν τα κ και λ ώστε οι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις να είναι μονώνυμα:
α) $3\alpha^{\lambda+2}x^2 + 2\alpha^3x^{\kappa+1}$
β) $-2xy^2\omega^{\lambda+3} + 3x^{\kappa-2}y^{\lambda}\omega^5$
γ) $28\alpha^3\beta - 53\alpha^{2(\kappa-1)}\beta^{\lambda-7}$

5. Να προσδιοριστεί ο αριθμός α ώστε τα παρακάτω μονώνυμα να είναι:
α) ίσα
β) αντίθετα
γ) μηδενικά
$(3\alpha - 5)x^3y$, $(7\alpha - 1)x^3y$.

6. Να αντικαταστήσετε τα αστεράκια με τα κατάλληλα μονώνυμα στην παρακάτω ισότητα:
$3x^3y^2 - 3x^3y^2 + 5x^5y + * + * = 7x^3y^2$

2.2 Αναγωγή ομοίων όρων

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι λέγεται πολυώνυμο και τι όροι του πολυωνύμου; Δώστε ένα παράδειγμα.

1. Πολυώνυμο λέγεται ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όλα όμοια μεταξύ τους.
Π.χ. $3x^2y - 2xy^2 + x\omega$
είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητές τα x, y, ω.

Όροι του πολυωνύμου λέγονται τα μονώνυμα από τα οποία αποτελείται το πολυώνυμο.

2. Τι λέγεται αναγωγή ομοίων όρων ενός πολυωνύμου;

2. Αναγωγή ομοίων όρων ενός πολυωνύμου λέγεται η εργασία αντικατάστασης των όμοιων μονωνύμων (όρων) ενός πολυωνύμου με το άθροισμά τους.

Π.χ. στο πολυώνυμο $3x^2 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2 - 3 + x^2 - 3x^4$, η αναγωγή όμοιων όρων δίνει $3x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 7x - 1$.
Παρατήρηση: Εδώ τα μονώνυμα του πολυώνυμου έχουν τοποθετηθεί με τέτοια σειρά ώστε οι δυνάμεις του x να ελαττώνονται από αριστερά προς τα δεξιά. Λέμε ότι το πολυώνυμο έχει διαταχθεί κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις του x**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνει αναγωγή όμοιων όρων στα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $5x^2y + 2xy - x^2y - 8xy$
β) $\alpha^2\beta + 7\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta^2 - 8\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 10\alpha^2\beta$
γ) $9x + 4x^2 - 10 + 2x - 5x^3 + 1 + 8x^3$
δ) $\frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{4} + 3x^3 - 6 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4} - x^3$

Λύση

α) $5x^2y + 2xy - x^2y - 8xy =$
$= 5x^2y - x^2y + 2xy - 8xy =$
$= 4x^2y - 6xy$

β) $\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta^2 - 8\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-10\alpha^2\beta =$
$= \alpha^2\beta - 8\alpha^2\beta - 10\alpha^2\beta + 7\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 =$
$= -17\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2$

γ) $9x + 4x^2 - 10 + 2x - 5x^3 + 1 + 8x^3 =$
$= -5x^3 + 8x^3 + 4x^2 + 9x + 2x - 10 + 1 =$
$= 3x^3 + 4x^2 + 11x - 9$

δ) $\frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{4} + 3x^3 - 6 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4} - x^3 =$
$= 3x^3 - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{4} + \frac{x}{2} - 6 =$
$= 2x^3 + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{4} - 6$

2. Να γράψετε τα παρακάτω πολυώνυμα σε απλούστερη μορφή:

$A = 5 + 8α + 6α^3 - 4α + α^2 - 5α^3$
$B = 6αβ - 2α^2β - α^3 - 5αβ^2 + 3α^2β + α^3$

Λύση

Έχουμε:
$A = 5 + 8α + 6α^3 - 4α + α^2 - 5α^3 =$
$= α^3 + α^2 + 4α + 5$
$B = 6αβ - 2α^2β - α^3 - 5αβ^2 + 3α^2β + α^3 =$
$= α^2β + 6αβ - 5αβ^2 =$
$= βα^2 + (6β - 5β^2)α$
Η τελευταία μορφή είναι διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του α.

3. Αν $A = 3x^2 - 5x + 6$
$B = - x^3 - 2x + 9$
$Γ = - 5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$
να βρείτε τα $A + B + Γ$, $Γ - A$ και $A - B - Γ$.

Λύση

$A + B + Γ =$
$= 3x^2 - 5x + 6 + (- x^3 - 2x + 9) +$
$+ (- 5x^3 + 2x^2 - 8x - 7) =$
$= 3x^2 - 5x + 6 - x^3 - 2x + 9 - 5x^3 +$
$+ 2x^2 - 8x - 7 =$
$= - 6x^3 + 5x^2 - 15x + 8$

$Γ - A =$
$= - 5x^3 + 2x^2 - 8x - 7 - (3x^2 - 5x + 6) =$
$= - 5x^3 + 2x^2 - 8x - 7 - 3x^2 + 5x - 6 =$
$= - 5x^3 - x^2 - 3x - 13$

$A - B - Γ =$
$= 3x^2 - 5x + 6 - (- x^3 - 2x + 9) -$
$- (- 5x^3 + 2x^2 - 8x - 7) =$
$= 3x^2 - 5x + 6 + x^3 + 2x - 9 + 5x^3 -$
$- 2x^2 + 8x + 7 =$
$= 6x^3 + x^2 + 5x + 4$

4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου:
$3x^2y - 2xy^3 + 5xy - 2 + x^2y$
όταν $x = - 1$, $y = 2$.

Λύση

$3x^2y - 2xy^3 + 5xy - 2 + x^2y =$
(αναγωγή ομοίων όρων)
$= 4x^2y - 2xy^3 + 5xy - 2$

Θέτουμε $x = - 1$, $y = 2$ και έχουμε:
$4(- 1)^2 \cdot 2 - 2 (- 1) \cdot 2^3 + 5 (- 1) \cdot 2 - 2 =$
$= 4 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 =$
$= 8 + 16 - 10 - 2 = 24 - 12 = 12.$

5. Να κάνετε τις πράξεις στα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $2α^4 - [1 - (2α^3 + 2α^2 - α)] -$
$- \{- (5α - 3) - 2 + [- 4 - (- 4α^3 - 2)]\}$
β) $- (2x^2 - 3xy) - \{xy - (y^2 - 3xy) -$
$- [y^2 - (x^2 + xy)] - y^2\}$
γ) $- 15x^4y - [3x - (2y - 1) + 3x^4y - 1] +$
$+ [x^4y - (- 2y + 3)]$
δ) $3α^2β - 2αβ^3 + [3α^2β - (- 2αβ^3 +$
$+ 3α^2β)] - \{- [- (2α^2β - 3) - 1] + 2\}$

Λύση

α) $2α^4 - [1 - (2α^3 + 2α^2 - α)] -$
$-\{- (5α - 3) - 2 +[- 4 - (- 4α^3 - 2)]\} =$
$= 2α^4 - [1 - 2α^3 - 2α^2 + α] - \{- 5α + 3 -$
$- 2 + [- 4 + 4α^3 + 2]\} =$
$= 2α^4 - 1 + 2α^3 + 2α^2 - α - \{- 5α + 3 -$
$- 2 - 4 + 4α^3 + 2\} =$
$= 2α^4 - 1 + 2α^3 + 2α^2 - α + 5α - 3 + 2+$
$+ 4 - 4α^3 - 2 =$
$= 2α^4 - 2α^3 + 2α^2 + 4α.$

β) $- (2x^2 - 3xy) - \{xy - (y^2 - 3xy) -$
$- [y^2 - (x^2 + xy)] - y^2\} =$
$= - 2x^2 + 3xy - \{xy - y^2 + 3xy - [y^2 -$
$- x^2 - xy] - y^2\} =$
$= - 2x^2 + 3xy - \{xy - y^2 + 3xy - y^2 +$
$+ x^2 + xy - y^2\} =$
$= - 2x^2 + 3xy - xy + y^2 - 3xy + y^2 -$
$- x^2 - xy + y^2 =$
$= - 3x^2 - 2xy + 3y^2.$

γ) $- 15x^4y - [3x - (2y - 1) + 3x^4y - 1] +$
$+ [x^4y - (- 2y + 3)] =$
$= - 15x^4y - [3x - 2y + 1 + 3x^4y - 1] +$
$+ [x^4y + 2y - 3] =$
$= - 15x^4y - 3x + 2y - 1 - 3x^4y + 1 +$
$+ x^4y + 2y - 3 =$
$= - 17x^4y - 3x + 4y - 3.$

δ) $3α^2β - 2αβ^3 + [3α^2β - (- 2αβ^3 +$
$+ 3α^2β)] - \{-[- (2α^2β - 3) - 1] + 2\} =$
$= 3α^2β - 2αβ^3 + [3α^2β + 2αβ^3 - 3α^2β]-$
$- \{- [- 2α^2β + 3 - 1] + 2\} =$
$= 3α^2β - 2αβ^3 + 3α^2β + 2αβ^3 - 3α^2β -$
$- \{+ 2α^2β - 3 + 1 + 2\} =$
$= 3α^2β - 2αβ^3 + 3α^2β + 2αβ^3 - 3α^2β -$
$- 2α^2β + 3 - 1 - 2 =$
$= α^2β.$

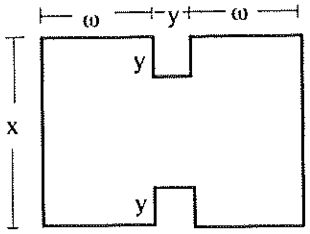
Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να εκτελέσετε τις πράξεις στο παρακάτω πολυώνυμο:
$2x^2 - (3x - 5x^3) + 2x^3 - 4x^2 + 2 - (x - 3)$

Λύση

Έχουμε:
$2x^2 - (3x - 5x^3) + 2x^3 - 4x^2 + 2 - (x - 3) =$
$= 2x^2 - 3x + 5x^3 + 2x^3 - 4x^2 + 2 - x + 3 =$
$= .....$

2. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να παριστάνει την περίμετρο και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Όπως φαίνεται από το σχήμα η περίμετρός του είναι:
$\Pi = \omega + y + y + y + \omega + x + \omega + y +$
$+ y + y + \omega + x = ...$
Για να βρούμε το εμβαδόν του, αφαιρούμε από το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις $y + 2\omega$, x τα εμβαδά των τετραγώνων πλευράς y.
Έτσι έχουμε .....

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις στα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $3x^2y - 2xy^2 + 5x^2y - xy^2 + 4x - 2 +$
$+ 3x^2y - 1$
β) $4\alpha\beta\gamma^2 - 2\alpha\beta^2\gamma + 3\alpha\beta\gamma^2 - (6\alpha\beta^2\gamma -$
$- 3\alpha\beta^2\gamma)$
γ) $2xyz^2 - [3xyz^2 - (2xy^5z + 2xyz^2)]$
$+ 4xy^5z$

Λύση

α) $3x^2y - 2xy^2 + 5x^2y - xy^2 + 4x - 2 +$
$+ 3x^2y - 1 =$
$= 11x^2y - 3xy^2 + 4x - 3.$

β) .....

4. Αν $A = 15x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
$B = - 4x^3 - x + 3$
$\Gamma = 2x - 6$
να υπολογίσετε τα πολυώνυμα:
$\Delta = A - (B + \Gamma)$, $E = (A - B) - \Gamma$
$Z = \Gamma - A - B$, $H = (\Gamma - A) + B$

Λύση

$\Delta = A - (B + \Gamma) =$
$= 15x^3 - 2x^2 + 4x - 1 - [(- 4x^3 - x + 3)+$
$+ (2x - 6)] =$
$= 15x^3 - 2x^2 + 4x - 1 - [- 4x^3 - x + 3 +$
$+ 2x - 6] =$
$= 15x^3 - 2x^2 + 4x - 1 + 4x^3 + x - 3 -$
$- 2x + 6 = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις αναγωγές όμοιων όρων στις αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $3\tau - 5\nu + 4\tau - 2\nu + 6$
β) $6\rho - 7\lambda + 3\rho - 2\lambda$
γ) $6{,}8x + 2{,}4y + 0{,}2x - 3{,}4y$

δ) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{5}xy - 2\kappa\lambda + \frac{3}{5}\kappa\lambda$

2. Ομοίως στις αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $3xy^2\omega - (2xy + 4x^2y) - 5xy$
β) $7x^3yz^2 + 3xy^2z - (2x^3yz^2 - 6xy^2z)$
γ) $9xy^3\omega - 2xy^3\omega + 3 - [- 2xy\omega +$
$+ (4xy\omega - 7xy^3\omega) + 3] - 4$

3. Αν $K = 7x - 2x^3$
$Λ = 3x^2 - 5x + 1$
$M = 8x^3 - 4x^4 - 2$
να υπολογίσετε τα
$K + Λ - M$, $K - Λ + M$, $K - Λ - M$, $- K + (Λ - M)$, $- K - (Λ + M)$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο:
$3κ^2λ - 2κλ + 5λ^2 - 3$.
Αν $κ = - 1$, $λ = (- 3)^2$, να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου.

5. Να βρεθούν οι συντελεστές κ και λ, ώστε τα πολυώνυμα
$A = κx^2 - (λ - 3)x^2y$ και
$B = (2κ - 3)x^2 - (2λ + 1)xy^3$
να είναι μηδενικά μονώνυμα.

6. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$3x^2 - 2x + 5$, $(α - 2)x^2 - 3(β - 1)x + 5$
Να υπολογιστούν τα α και β ώστε τα πολυώνυμα αυτά να είναι ίσα.
<u>**Σημείωση:**</u> Ίσα λέγονται τα πολυώνυμα που έχουν ίσους όρους έναν προς έναν.

7. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$5x^3y - (κ - λ)x^2y - 3xy + 2$ και
$(κ + 3)x^3y - 5x^2y - (ν + 2)xy + 2$.
Να υπολογίσετε τα κ, λ, ν ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

2.3 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Θεωρία

Ερωτήσεις

Απαντήσεις

1. Πώς πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;

1. Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμό με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Αν α είναι το μονώνυμο και β + γ το πολυώνυμο τότε

$$α \cdot (β + γ) = α \cdot β + α \cdot γ$$

δηλαδή εφαρμόζεται η γνωστή μας **επιμεριστική ιδιότητα.**

2. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα;

2. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά κάθε όρο του ενός με όλους τους όρους του άλλου και προσθέτουμε τα μονώνυμα που προκύπτουν.

Αν α + β, γ + δ είναι τα δύο πολυώνυμα τότε:

$$(α + β) \cdot (γ + δ) = αγ + αδ + βγ + βδ$$

δηλαδή εφαρμόζεται η **διπλή επιμεριστική ιδιότητα.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να αποδείξετε την ιδιότητα:
$(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:
$(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) =$
$= \alpha \cdot (\gamma + \delta) + \beta \cdot (\gamma + \delta) =$
$= \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $3xy\,(2x^2y - 5xy^2 - 3x^2y + 8xy)$
β) $4\alpha^2\beta\,(-3\alpha + \beta - 2\alpha\beta)$
γ) $3\,(x - 2y + 5z)$
δ) $(4x^3y^2 - 2x^2y^3 - 8x^3y^2 + 5x^2y^3) \cdot (-3xy^5)$
ε) $4x\,(x^3 - 2x + 5) - 3x^2\,(x - 5x^2 - 3x - 1)$

Λύση

α) $3xy\,(2x^2y - 5xy^2 - 3x^2y + 8xy) =$
$= (3xy) \cdot (2x^2y) - (3xy) \cdot (5xy^2) -$
$- (3xy) \cdot (3x^2y) + (3xy) \cdot (8xy) =$
$= 6x^3y^2 - 15x^2y^3 - 9x^3y^2 + 24x^2y^2 =$
$= 6x^3y^2 - 9x^3y^2 - 15x^2y^3 + 24x^2y^2 =$
$= -3x^3y^2 - 15x^2y^3 + 24x^2y^2$

β) $4\alpha^2\beta\,(-3\alpha + \beta - 2\alpha\beta) =$
$= -12\alpha^3\beta + 4\alpha^2\beta^2 - 8\alpha^3\beta^2$

γ) $3\,(x - 2y + 5z) = 3x - 6y + 15z$

δ) $(4x^3y^2 - 2x^2y^3 - 8x^3y^2 + 5x^3y^3) \cdot (-3xy^5)$
$= -(4x^3y^2) \cdot (3xy^5) + (2x^2y^3) \cdot (3xy^5) +$
$+ (8x^3y^2) \cdot (3xy^5) - (5x^3y^3) \cdot (3xy^5) =$
$= -12x^4y^7 + 6x^3y^8 + 24x^4y^7 - 15x^4y^8 =$
$= -15x^4y^8 + 12x^4y^7 + 6x^3y^8$

ε) $4x\,(x^3 - 2x + 5) - 3x^2\,(x - 5x^2 - 3x - 1) =$
$= 4x^4 - 8x^2 + 20x - 3x^3 + 15x^4 + 9x^3 +$
$+ 3x^2 =$
$= 19x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 20x$

3. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x + 2) - 3x + 4(x^2 - 1)$
β) $2x\,[x^3 - 5x^2(3x - 2)] - 3x^2\,[x^2 -$
$- 5(x - 3)] - 3$
γ) $4xy[x^2y - 2x(x^2y - 3)] + 4x^2y\,(x^3 -$
$- 2xy) - (3y + 1)$
δ) $(5x)^2 \cdot \{3x - 2\,[x^2 - 3x\,(x - 1)] -$
$- (4x)^3\} + 15x\,(x - 2)$

Λύση

α) $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x + 2) - 3x + 4(x^2 - 1) =$
$= 3x^3 - 3x - 4x^3 - 8x^2 - 3x + 4x^2 - 4 =$
$= -x^3 - 4x^2 - 6x - 4$

β) $2x\,[x^3 - 5x^2\,(3x - 2)] - 3x^2\,[x^2 -$
$- 5\,(x - 3)] - 3 =$
$= 2x\,[x^3 - 15x^3 + 10x^2] - 3x^2\,[x^2 - 5x +$
$+ 15] - 3 =$
$= 2x^4 - 30x^4 + 20x^3 - 3x^4 + 15x^3 - 45x^2 - 3 =$
$= -31x^4 + 35x^3 - 45x^2 - 3$

γ) $4xy\,[x^2y - 2x\,(x^2y - 3)] +$
$+ 4x^2y\,(x^3 - 2xy) - (3y + 1) =$
$= 4xy\,[x^2y - 2x^3y + 6x] + 4x^5y -$
$- 8x^3y^2 - 3y - 1 =$
$= 4x^3y^2 - 8x^4y^2 + 24x^2y + 4x^5y -$
$- 8x^3y^2 - 3y - 1 =$
$= -4x^3y^2 - 8x^4y^2 + 24x^2y + 4x^5y - 3y - 1$

δ) $(5x)^2\,\{3x - 2\,[x^2 - 3x\,(x - 1)] -$
$- (4x)^3\} + 15x\,(x - 2) =$
$= 25x^2\{3x - 2\,[x^2 - 3x\,(x - 1)] - 64x^3\} +$
$+ 15x\,(x - 2) =$
$= 25x^2\,\{3x - 2\,[x^2 - 3x^2 + 3x] - 64x^3\} +$
$+ 15x^2 - 30x =$
$= 25x^2\,\{3x - 2x^2 + 6x^2 - 6x - 64x^3\} +$
$+ 15x^2 - 30x =$
$= 75x^3 - 50x^4 + 150x^4 - 150x^3 - 1600x^5 +$
$+ 15x^2 - 30x =$
$= -1600x^5 + 100x^4 - 75x^3 + 15x^2 - 30x$

4. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(3x - 2y)\,(4x - y)$
β) $(4x^2y - 2xy^3)\,(-3xy^2 + 5xy^2 + 2xy)$
γ) $(4x^3 - 5x^2 + 2)\,(3x^4 - 3x^3 - 2x + 1) +$
$+ (3x - y)\,(2x - y)$
δ) $25x^2 - 3x\,(x - 2)\,(x + 3)\,(2x - 5x^2 + 3) -$
$- (3x^2)^2\,[2x - (3x - 2)\,(x^2 - 1)]$
ε) $x\,(x - 1)\,(x + 3) - 2x\,(x + 3)\,(x - 2) -$
$- (5x^2 - 3x + 1)\,(x^2 - 2x + 3)$
στ) $2\alpha^2\beta^2 - (3\alpha\beta + \alpha\beta^2 - 3)\,(\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta +$
$+ 3\alpha\beta) - \alpha\beta + 2$

Λύση

α) $(3x - 2y)(4x - y) =$
$= (3x)(4x) - (3x)y - (2y)(4x) + (2y)y =$
$= 12x^2 - 3xy - 8xy + 2y^2 =$
$= 12x^2 - 11xy + 2y^2$

β) $(4x^2y - 2xy^3)(-3xy^2 + 5xy^2 - 2xy) =$
$= -(4x^2y)(3xy^2) + (4x^2y)(5xy^2) -$
$- (4x^2y)(2xy) + (2xy^3)(3xy^2) -$
$- (2xy^3)(5xy^2) + (2xy^3)(2xy) =$
$= -12x^3y^3 + 20x^3y^3 - 8x^3y^2 + 6x^2y^5 -$
$- 10x^2y^5 + 4x^2y^4 =$
$= 8x^3y^3 - 8x^3y^2 - 4x^2y^5 + 4x^2y^4$

γ) $(4x^3 - 5x^2 + 2)(3x^4 - 3x^3 - 2x + 1) +$
$+ (3x - y)(2x - y) =$
$= 12x^7 - 12x^6 - 8x^4 + 4x^3 - 15x^6 + 15x^5 +$
$+ 10x^3 - 5x^2 + 6x^4 - 6x^3 - 4x + 2 -$
$- 6x^2 - 3xy - 2xy + y^2 =$
$= 12x^7 - 27x^6 + 15x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 11x^2 -$
$- 4x - 5xy + y^2 + 2$

δ) $25x^2 - 3x(x - 2)(x + 3)(2x - 5x^2 +$
$+ 3) - (3x^2)^2 [2x - (3x - 2)(x^2 - 1)] =$
$= 25x^2 - 3x(x^2 + 3x - 2x - 6)(2x - 5x^2 +$
$+ 3) - (9x^4)[2x - (3x^3 - 3x - 2x^2 + 2)] =$
$= 25x^2 - 3x(2x^3 - 5x^4 + 3x^2 + 6x^2 -$
$- 15x^3 + 9x - 4x^2 + 10x^3 - 6x - 12x +$
$+ 30x^2 - 18) - (9x^4)[2x - 3x^3 + 3x +$
$+ 2x^2 - 2] =$
$= 25x^2 - 6x^4 + 15x^5 - 9x^3 - 18x^3 + 45x^4 -$
$- 27x^2 + 12x^3 - 30x^4 + 18x^2 + 36x^2 -$
$- 90x^3 + 54x - 18x^5 + 27x^7 - 27x^5 -$
$- 18x^6 + 18x^4 =$
$= 27x^7 - 18x^6 - 30x^5 + 27x^4 - 105x^3 +$
$+ 52x^2 + 54x$

ε) $x(x - 1)(x + 3) - 2x(x + 3)(x - 2) -$
$- (5x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2x + 3) =$
$= x(x^2 + 3x - x - 3) - 2x(x^2 - 2x + 3x -$
$- 6) - (5x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 3x^3 + 6x^2 -$
$- 9x + x^2 - 2x + 3) =$
$= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x^3 + 4x^2 - 6x^2 +$
$+ 12x - 5x^4 + 10x^3 - 15x^2 + 3x^3 -$
$- 6x^2 + 9x - x^2 + 2x - 3 =$
$= -5x^4 + 12x^3 - 22x^2 + 20x - 3$

στ) $2\alpha^2\beta^2 - (3\alpha\beta + \alpha\beta^2 - 3)(\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta +$
$+ 3\alpha\beta) - \alpha\beta + 2 =$
$= 2\alpha^2\beta^2 - (3\alpha^2\beta^3 - 6\alpha^2\beta^2 + 9\alpha^2\beta^2 +$
$+ \alpha^2\beta^4 - 2\alpha^2\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 - 3\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta -$
$- 9\alpha\beta) - \alpha\beta + 2 =$
$= 2\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3 + 6\alpha^2\beta^2 - 9\alpha^2\beta^2 -$
$- \alpha^2\beta^4 + 2\alpha^2\beta^3 - 3\alpha^2\beta^3 + 3\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta +$
$+ 9\alpha\beta - \alpha\beta + 2 =$
$= -\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^3 - \alpha^2\beta^4 + 3\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + 2$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $2(x - y)$, *δ)* $(x - y)(x + y)$
β) $3x(x - y)$, *ε)* $(x - y)(x - y)$
γ) $-x^2(x - y + 2\omega)$, *στ)* $3x^2y(x - y)$

Λύση

α) $2(x - y) = 2x - 2y$
β) $3x(x - y) = 3x^2 - 3xy$
γ) $-x^2(x - y + 2\omega) = -x^3 + x^2y - 2x^2\omega$
δ) .....

2. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(x - 2y)(2x + 3y) - 2x(3x - y)xy$
β) $(2x^2y - 3x^2y)(xy - 2)$
γ) $(\frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{2}xy)(-\frac{3}{2}xy - 2xy + 1)$
δ) $18x\omega y^2\kappa(3x\omega\kappa - 2xy\omega\kappa^2)$
ε) $(0,6x - 0,3y)(2,5x^2 + 3,2y^2)$

Λύση

α) $(x - 2y)(2x + 3y) - 2x(3x - y)xy =$
$= 2x^2 + 3xy - 4xy - 6y^2 - 2x(3x^2y - xy^2) =$
$= 2x^2 + 3xy - 4xy - 6y^2 - 6x^3y + 2x^2y^2 =$
$= 2x^2 - xy - 6y^2 - 6x^3y + 2x^2y^2$
β) $(2x^2y - 3xy^2)(xy - 2) =$
$= 2x^3y^2 - 4x^2y - 3x^2y^3 + 6xy^2$
γ) .....

3. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $(5x^2 - 3x + 2)(2 - x) + (3x^2 - 2)(x - 1)$
β) $(2x - 3 + 5x^2)(x^3 - 8x + 2)(2 + x)$

γ) $(3x)^2\,[3x - 2\,(y-1)\,(x-2) + 3y] - 5x$
δ) $18x^5\,(2x^3 - 4x + 5)\,(9x^7 - 2x - 5)$

Λύση

α) $(5x^2-3x+2)\,(2-x) + (3x^2-2)\,(x-1) =$
$= 10x^2 - 6x + 4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 3x^3 -$
$- 3x^2 - 2x + 2 =$
$= -2x^3 + 10x^2 - 10x + 6$
β) .....

4. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $2x^\alpha y^\beta\,[3x^{\alpha+1}y^{\beta-1} - 2\,(x^{2\alpha}y^\beta)^2]$
β) $3x^{\sigma+1}\,(-2x^{\sigma-2} + 4x^\sigma)$

Λύση

α) $2x^\alpha y^\beta\,[3x^{\alpha+1}\,y^{\beta-1} - 2\,(x^{2\alpha}y^\beta)^2] =$
$= 6x^{\alpha+\alpha+1}\,y^{\beta+\beta-1} - 2x^{4\alpha}\,y^{2\beta} =$
$= 6x^{2\alpha+1}\,y^{2\beta-1} - 2x^{4\alpha}\,y^{2\beta}$
β) .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $2\kappa x\,(\lambda x - 3) - 5\kappa x\,(2 - \lambda x)$
β) $(3 - 2x)\,(x - y) + (3xy - 2)$
γ) $(2x^2 - 3x + 5)\,(4x^3 - 2x + 1)$
δ) $3x + [3x - (2 - x)\,(2 + x) - 4x]$
ε) $(8xy - 2xy^3 + 5x\omega)\,(2xy - 4xy^3 -$
$- 5x\omega) + 8$
στ) $(3xy\omega - 2xy\omega^2 + 3xy^2\omega - 4x^2y\omega)\,\cdot$
$\cdot\,(2xy - 5) + 3x\,(x - y)$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$A = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
$B = 8x^4 + 5x^3 - 9x + 2$
$\Gamma = 2x^3 - 5x + 7$
Να υπολογίσετε τα
$A \cdot (B + \Gamma)$, $AB + A\Gamma$
$(A - B) \cdot \Gamma$, $2A + 3 \cdot (B - \Gamma)$
$(\Gamma - A) \cdot B$, $3A + 2B - \Gamma$

3. Να κάνετε τις πράξεις:
$(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$, $(\alpha + \beta + \gamma)^2$.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των πολυωνύμων που προκύπτουν όταν $\alpha = -2$, $\beta = 3$.

4. Να κάνετε τις πράξεις:
$(3x^\kappa y^{\lambda+1})^2\,[2x^\kappa\,y^\lambda\,(3x^{\kappa+1} - 2y^{\lambda-1}) + xy]$

5. Να κάνετε τις πράξεις:
$2\alpha^\varrho\,\beta^{\varrho+1}\,(4\alpha^\varrho \cdot \beta^{\varrho+2} - 2\alpha^\varrho\,\beta^{\varrho-1})$

2. 4 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι λέγεται ταυτότητα;

Απαντήσεις

1. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για οποιεσδήποτε τιμές και αν δώσουμε στις μεταβλητές της.

Π.χ. η ισότητα $2\,(x + y) = 2x + 2y$ είναι μια ταυτότητα, γιατί όποιες τιμές κι αν δώσουμε στις μεταβλητές x και y, επαληθεύεται.
Π.χ. για $x = 2$ και $y = 3$ η παραπάνω ισότητα, δίνει:
$2 \cdot (2 + 3) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$ ή $2 \cdot 5 = 4 + 6$ ή $10 = 10$.

2. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. Διαδοχικά έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \text{τετράγωνο αθροίσματος}\end{array}}$$

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. Διαδοχικά έχουμε:

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \text{τετράγωνο διαφοράς}\end{array}}$$

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

4. Διαδοχικά έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \text{κύβος αθροίσματος}\end{array}}$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

5. Αν στον κύβο αθροίσματος θέσουμε όπου β το $-\beta$ παίρνουμε

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2(-\beta) + 3\alpha(-\beta)^2 + (-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ \text{κύβος διαφοράς}\end{array}}$$

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

6. Διαδοχικά έχουμε:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2 \\ \text{διαφορά τετραγώνων}\end{array}}$$

7. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:
$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

7. Είναι:

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$$

Δηλαδή:

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$
άθροισμα κύβων

Αν στην τελευταία θέσουμε όπου β το - β παίρνουμε:
$(\alpha - \beta)[\alpha^2 - \alpha(-\beta) + (-\beta)^2] = \alpha^3 + (-\beta)^3$ ή $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Δηλαδή:

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$
διαφορά κύβων

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να αναπτυχθούν οι ταυτότητες:
α) $(x+5)^2$, *β)* $(-4x+3)^2$,
γ) $(-5\alpha-3\beta)^2$, *δ)* $(\alpha+\beta+\gamma)^2$,
ε) $(\alpha-\beta+\gamma)^2$, *στ)* $(4x-3)^2$,
ζ) $(\alpha\beta+1)^2$, *η)* $(-3\alpha+1)^3$,
θ) $(x+3y-2z)^2$

Λύση

α) $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 =$
$= x^2 + 10x + 25$

β) $(-4x+3)^2 = (-4x)^2 + 2\cdot(-4x)\cdot 3 + 3^2 =$
$= 16x^2 - 24x + 9$

γ) $(-5\alpha - 3\beta)^2 = [-(5\alpha + 3\beta)]^2 =$
$= (5\alpha+3\beta)^2 = (5\alpha)^2 + 2(5\alpha)(3\beta) + (3\beta)^2 =$
$= 25\alpha^2 + 30\alpha\beta + 9\beta^2$

δ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = [(\alpha+\beta)+\gamma]^2 =$
$= (\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

ε) $(\alpha-\beta+\gamma)^2 = [(\alpha-\beta)+\gamma]^2 =$
$= (\alpha-\beta)^2 + 2(\alpha-\beta)\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$

στ) $(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2(4x)\cdot 3 + 3^2 =$
$= 16x^2 - 24x + 9$

ζ) $(\alpha\beta+1)^2 = (\alpha\beta)^2 + 2(\alpha\beta)\cdot 1 + 1^2 =$
$= \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta + 1$

η) $(-3\alpha+1)^3 =$
$= (-3\alpha)^3 + 3(-3\alpha)^2\cdot 1 + 3(-3\alpha)\cdot 1^2 + 1^3 =$
$= -27\alpha^3 + 3\cdot 9\alpha^2\cdot 1 - 3(3\alpha)\cdot 1 + 1 =$
$= -27\alpha^3 + 27\alpha^2 - 9\alpha + 1$

θ) $(x+3y-2z)^2 =$
$= x^2 + (3y)^2 + (-2z)^2 + 2x\cdot 3y +$
$+ 2x\cdot(-2z) + 2(3y)\cdot(-2z) =$
$= x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy - 4xz - 12yz$
(χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα (δ))

2. Να αναπτυχθούν οι ταυτότητες:

α) $(3xy+1)^3$, *β)* $(-x^2 - \frac{2}{x})^2$,
γ) $(x + \frac{1}{2})$, *δ)* $(x^3y^2 - \omega)^3$,
ε) $(-3\alpha^2 - 2)^3$, *στ)* $(3\alpha - 7\beta)^3$

Λύση

α) $(3xy+1)^3 =$
$= (3xy)^3 + 3(3xy)^2\cdot 1 + 3(3xy)\cdot 1^2 + 1^3 =$
$= 27x^3y^3 + 3\cdot(9x^2y^2) + 3(3xy)\cdot 1 + 1 =$
$= 27x^3y^3 + 27x^2y^2 + 9xy + 1$

β) $(-x^2 - \frac{2}{x})^2 = [-(x^2 + \frac{2}{x})]^2 = (x^2 + \frac{2}{x})^2 =$
$= (x^2)^2 + 2x^2\cdot\frac{2}{x} + (\frac{2}{x})^2 = x^4 + 4x + \frac{4}{x^2}$

γ) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2x\cdot\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 =$
$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

δ) $(x^3y^2 - \omega)^3 =$
$= (x^3y^2)^3 - 3(x^3y^2)^2\omega + 3(x^3y^2)\omega^2 - \omega^3 =$
$= x^9y^6 - 3x^6y^4\omega + 3x^3y^2\omega^2 - \omega^3$

ε) $(-3\alpha^2 - 2)^3 = [-(3\alpha^2 + 2)]^3 =$

$= -(3\alpha^2+2)^3 =$
$= -[(3\alpha^2)^3 + 3(3\alpha^2)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (3\alpha^2) \cdot 2^2 + 2^3] =$
$= -[27\alpha^6 - 3(9\alpha^4) \cdot 2 + 3(3\alpha^2) \cdot 4 - 8] =$
$= -[27\alpha^6 - 54\alpha^4 + 36\alpha^2 - 8] =$
$= -27\alpha^6 + 54\alpha^4 - 36\alpha^2 + 8$

στ) $(3\alpha - 7\beta)^3 =$
$= (3\alpha)^3 - 3(3\alpha)^2 \cdot (7\beta) + 3(3\alpha) \cdot (7\beta)^2 - (7\beta)^3 =$
$= 27\alpha^3 - 3(9\alpha^2) \cdot (7\beta) + 3(3\alpha) \cdot (49\beta^2) - 343\beta^3 =$
$= -27\alpha^3 - 189\alpha^2\beta + 441\alpha\beta^2 - 343\beta^3$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα των γινομένων:
α) $(\alpha\beta + 3)(\alpha\beta - 3)$,
β) $(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)$,
γ) $(-5x - 1)(5x - 1)$,
δ) $(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y)(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y)$
ε) $(3\alpha + 5\alpha^2\beta)(3\alpha - 5\alpha^2\beta)$,
στ) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$,
ζ) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

Λύση

α) $(\alpha\beta + 3)(\alpha\beta - 3) = (\alpha\beta)^2 - 3^2 =$
$= \alpha^2\beta^2 - 9$

β) $(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta) = (2\alpha)^2 - (3\beta)^2 =$
$= 4\alpha^2 - 9\beta^2$

γ) $(-5x - 1)(5x - 1) = -(5x+1)(5x-1) =$
$= -[(5x)^2 - 1^2] = -(25x^2 - 1) =$
$= -25x^2 + 1$

δ) $(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y)(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y) =$
$= (\frac{1}{3}x)^2 - (\frac{2}{3}y)^2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}y^2$

ε) $(3\alpha + 5\alpha^2\beta)(3\alpha - 5\alpha^2\beta) =$
$= (3\alpha)^2 - (5\alpha^2\beta)^2 = 9\alpha^2 - 25\alpha^4\beta^2$

στ) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) =$
$= (x + 3y)[x^2 - x \cdot 3y + (3y)^2] =$
$= x^3 + (3y)^3 = x^3 + 27y^3$

ζ) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 - 2^3 =$
$= y^3 - 8$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3x-2)^2 - 2(3x+2)^2 - 5x(3-x)(3+x)$
β) $2(x-1)^3 + 3(x+2)^3 - 4(x-2)(x+2)$
γ) $(8 - 3x)(8 + 3x) - 4(x - 2)^2(3 - 2x)(3 + 2x)$
δ) $(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) - 2\alpha^2 + (3\beta - \gamma)(\beta + 3\gamma)$
ε) $(x + 2y - 3\omega)(x - 2y + 3\omega) + (x - y)^2$

Λύση

α) $(3x-2)^2 - 2(3x+2)^2 - 5x(3-x)(3+x) =$
$= (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 - 2 \cdot [(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2] - 5x \cdot (3^2 - x^2) =$
$= 9x^2 - 12x + 4 - 2[9x^2 + 12x + 4] - 5x(9 - x^2) =$
$= 9x^2 - 12x + 4 - 18x^2 - 24x - 8 - 45x + 5x^3 =$
$= 5x^3 - 9x^2 - 81x - 4$

β) $2(x-1)^3 + 3(x+2)^3 - 4(x-2)(x+2) =$
$= 2(x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x - 1) + 3(x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3) - 4(x^2 - 2^2) =$
$= 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3(x^3 + 6x^2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8) - 4(x^2 - 4) =$
$= 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 + 3x^3 + 18x^2 + 36x + 24 - 4x^2 + 16 =$
$= 5x^3 + 8x^2 + 42x + 38$

γ) $(8 - 3x)(8 + 3x) - 4(x - 2)^2(3 - 2x)(3 + 2x) =$
$= 8^2 - (3x)^2 - 4(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2)[3^2 - (2x)^2] =$
$= 64 - 9x^2 - 4(x^2 - 4x + 4)(9 - 4x^2) =$
$= 64 - 9x^2 - 4(9x^2 - 4x^4 - 36x + 16x^3 + 36 - 16x^2) =$
$= 64 - 9x^2 - 36x^2 + 16x^4 + 144x - 64x^3 - 144 + 64x^2 =$
$= 16x^4 - 64x^3 + 19x^2 + 144x - 144$

δ) $(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) - 2\alpha^2 + (3\beta - \gamma)(\beta + 3\gamma) =$
$= [\alpha - (\beta - \gamma)][\alpha + (\beta - \gamma)] - 2\alpha^2 + 3\beta^2 + 9\beta\gamma - \beta\gamma - 3\gamma^2 =$
$= \alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 - 2\alpha^2 + 3\beta^2 + 9\beta\gamma - \beta\gamma - 3\gamma^2 =$
$= \alpha^2 - (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2) - 2\alpha^2 + 3\beta^2 + 9\beta\gamma - \beta\gamma - 3\gamma^2 =$
$= \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2 - 2\alpha^2 + 3\beta^2 + 9\beta\gamma - \beta\gamma - 3\gamma^2 =$
$= -\alpha^2 + 2\beta^2 - 4\gamma^2 + 10\beta\gamma$

ε) $(x + 2y - 3\omega)(x - 2y + 3\omega) + (x - y)^2 =$

$= [x + (2y - 3\omega)] [x - (2y - 3\omega)] +$
$+ (x - y)^2 =$
$= x^2 - (2y - 3\omega)^2 + x^2 - 2xy + y^2 =$
$= x^2 - [(2y)^2 - 2 (2y) (3\omega) + (3\omega)^2] +$
$+ x^2 - 2xy + y^2 =$
$= x^2 - [4y^2 - 12y\omega + 9\omega^2] + x^2 - 2xy +$
$+ y^2 =$
$= x^2 - 4y^2 + 12y\omega - 9\omega^2 + x^2 - 2xy + y^2 =$
$= 2x^2 + 12y\omega - 2xy - 9\omega^2 - 3y^2$

5. Να αντικαταστήσετε τα αστεράκια με τα κατάλληλα μονώνυμα:
α) $(x + *)^2 = x^2 + * + y^2$,
β) $(* - \beta)^2 = 4\alpha^2 - * + \beta^2$,
γ) $(* + *)^3 = 27\alpha^3 + * + 36\alpha\beta^2 + *$,
δ) $(* + *) (* - 2\alpha\beta) = 36x^2y^2 - 4\alpha^2\beta^2$

Λύση

α) $(x + *)^2 = x^2 + * + y^2$
Ο τελευταίος όρος του δευτέρου μέλους είναι y^2, άρα ο δεύτερος όρος της ταυτότητας είναι y. Τότε το διπλάσιο γινόμενο θα είναι 2xy. Άρα η ισότητα γράφεται:
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

β) $(* - \beta)^2 = 4\alpha^2 - * + \beta^2$
Από τον πρώτο όρο του δευτέρου μέλους καταλαβαίνουμε ότι ο πρώτος όρος της ταυτότητας είναι ο 2α (γιατί $(2\alpha)^2 = 4\alpha^2$). Τότε το διπλάσιο γινόμενο θα είναι $2 \cdot 2\alpha \cdot \beta = 4\alpha\beta$. Άρα η ισότητα γράφεται:
$(2\alpha - \beta)^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2$

γ) $(* + *)^3 = 27\alpha^3 + * + 36\alpha\beta^2 + *$
Από τον πρώτο όρο του δευτέρου μέλους καταλαβαίνουμε ότι ο πρώτος όρος της ταυτότητας είναι 3α (γιατί $(3\alpha)^3 = 27\alpha^3$). Επίσης από τον όρο $36\alpha\beta^2$ έχουμε: $36\alpha^2\beta = 3 \cdot (3\alpha) \cdot 4\beta^2 = 3 \cdot (3\alpha) \cdot (2\beta)^2$. Άρα η ισότητα γράφεται:
$(3\alpha + 2\beta)^3 = 27\alpha^3 + 3 \cdot (3\alpha)^2 \cdot 2\beta +$
$+ 3 \cdot (3\alpha) \cdot (2\beta)^2 + (2\beta)^3 =$
$= 27\alpha^3 + 54\alpha^2\beta + 36\alpha\beta^2 + 8\beta^3$

δ) $(* + *) (* - 2\alpha\beta) = (36x^2y^2 - 4\alpha^2\beta^2)$
Εδώ πρόκειται για την ταυτότητα «γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά». Το δεύτερο μέλος γράφεται:
$36x^2y^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (6xy)^2 - (2\alpha\beta)^2$.
Άρα η ισότητα γίνεται:
$(6xy + 2\alpha\beta) (6xy - 2\alpha\beta) = 3$
$= 6x^2y^2 - 4\alpha^2\beta^2$

6. Αν $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ***και*** $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ***να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης*** $3x^2 - 5xy + 4y^2$.

Λύση

Έχουμε: $3x^2 - 5xy + 4y^2 =$
$= 3 (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 5 (\sqrt{3} + \sqrt{2}) (\sqrt{3} - \sqrt{2}) +$
$+ 4 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$
$= 3 [(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] - 5 [(\sqrt{3})^2 -$
$- (\sqrt{2})^2] - 4 [(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] =$
$= 3 (5 + 2\sqrt{6}) - 5 \cdot 1 - 4 (5 - 2\sqrt{6}) =$
$= 15 + 6\sqrt{6} - 5 - 20 + 8\sqrt{6} =$
$= - 10 + 14\sqrt{6}$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:
α) $(3\alpha - 2\beta)^2 - 5 (\alpha + \beta) (\alpha - \beta) =$
$= (2\alpha - 3\beta)^2$
β) $(x + 3y) + [2 (x - y)]^2 - (x + y)^2 - 3y^2 =$
$= (2x - 3y)^2 + 8xy$
γ) $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 = 24xy$

Λύση

α) $(3\alpha - 2\beta)^2 - 5 (\alpha + \beta) (\alpha - \beta) =$
$= 9\alpha^2 - 12\alpha\beta + 4\beta^2 - 5 (\alpha^2 - \beta^2) =$
$= 9\alpha^2 - 12\alpha\beta + 4\beta^2 - 5\alpha^2 + 5\beta^2 =$
$= 4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 =$
$= (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 =$
$= (2\alpha - 3\beta)^2$

β) Το πρώτο μέλος δίνει διαδοχικά:
$(x + 3y)^2 + [2 (x - y)]^2 - (x + y)^2 - 3y^2 =$
$= x^2 + 6xy + 9y^2 + 4 (x - y)^2 - (x^2 +$
$+ 2xy + y^2) - 3y^2 =$
$= x^2 + 6xy + 9y^2 + 4 (x^2 - 2xy + y^2) -$
$- x^2 - 2xy - y^2 - 3y^2 =$
$= x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x^2 - 8xy + 4y^2 -$
$- x^2 - 2xy - y^2 - 3y^2 =$
$= 4x^2 - 4xy + 9y^2$
Το δεύτερο μέλος επίσης μας δίνει:
$(2x - 3y)^2 + 8xy =$
$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 8xy =$
$= 4x^2 - 4xy + 9y^2$

γ) $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 =$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - (4x^2 - 12xy + 9y^2) =$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x^2 + 12xy - 9y^2 =$
$= 24xy$

8. Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ να υπολογιστούν τα $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Λύση

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της $x + \frac{1}{x} = 3$ στο τετράγωνο και έχουμε:

$(x + \frac{1}{x})^2 = 3^2$ ή $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = 9$

ή $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$ ή $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2$

ή $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της $x + \frac{1}{x} = 3$ στην τρίτη δύναμη και έχουμε:

$(x + \frac{1}{x})^3 = 3^3$ ή

$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 27$ ή

$x^3 + 3x + 3\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 27$ ή

$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\,(x + \frac{1}{x}) = 27$ ή

$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3 = 27$ ή

$x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$ ή $x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

9. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:
α) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, β) $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta$,
γ) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy}$

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, γιατί το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Έτσι έχουμε:
$(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ ή
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ή
$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

β) Όμοια έχουμε: $(\alpha + \beta)^2 \geq 0$ ή
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ή
$\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta$

γ) Επίσης το $(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})^2 \geq 0$ ή

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy} \geq 0$ ή $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy}$

10. Αν x, y είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:
α) αν $x < y$ τότε $x^2 < y^2$
β) αν $x^2 < y^2$ τότε $x < y$

Λύση

α) $x < y$ πολλαπλασιάζουμε με x (που είναι θετικός) τα δύο μέλη της ανισότητας. Τότε έχουμε:
$x^2 < xy$ πολλαπλασιάζουμε τώρα με y (που είναι θετικός) τα δύο μέλη της αρχικής ανισότητας. Τότε έχουμε:
$xy < y^2$ από τις δύο τελευταίες με την μεταβατική ιδιότητα έχουμε:
$x^2 < y^2$.

β) Αφού $x^2 < y^2$ θα είναι και
$x^2 - y^2 < 0$ ή $(x + y)(x - y) < 0$. Οι όροι του γινομένου αυτού πρέπει να είναι ετερόσημοι και επειδή $x + y$ είναι θετικό (γιατί x, y θετικοί), θα είναι $x - y < 0$ άρα $x < y$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(3x - 2)^2 - (x - y)^2$
β) $x\,(-y - 3\omega^2)^2 - (-3y + \omega)^2\,y$
γ) $(2x + y)^2\,(2x - y)^2 - 3(x - y)$
δ) $3\mu\nu\,(\mu - \nu)\,(\mu + \nu)^2$

Λύση

α) $(3x - 2)^2 - (x - y)^2 =$
$= (3x)^2 - 2\,(3x) \cdot 2 + 2^2 - (x^2 - 2xy + y^2) =$
$= 9x^2 - 12x + 4 - x^2 + 2xy - y^2 =$

$= 8x^2 - 12x + 2xy - y^2 + 4$

β) ....

2. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y)(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)$

β) $(\alpha - 2\beta + \gamma)(\alpha + 2\beta - \gamma)$

γ) $(\varkappa + \lambda + \mu)(\varkappa - \lambda + \mu)(\varkappa + \lambda - \mu)(\varkappa - \lambda - \mu)$

Λύση

α) $(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y)(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y) =$

$= (\frac{1}{2}x)^2 - (\frac{3}{2}y)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}y^2$

β) $(\alpha - 2\beta + \gamma)(\alpha + 2\beta - \gamma) =$

$= [\alpha - (2\beta - \gamma)][\alpha + (2\beta - \gamma)] = ...$

γ) $(\varkappa + \lambda + \mu)(\varkappa - \lambda + \mu)(\varkappa + \lambda - \mu)(\varkappa - \lambda - \mu) =$

$= [\varkappa + (\lambda + \mu)][\varkappa - (\lambda - \mu)][\varkappa + (\lambda + \mu)][\varkappa - (\lambda + \mu)] =$

$= [\varkappa + (\lambda + \mu)][\varkappa - (\lambda + \mu)][\varkappa - (\lambda - \mu)][\varkappa + (\lambda - \mu)] =$

$= [\varkappa^2 - (\lambda + \mu)^2][\varkappa^2 - (\lambda - \mu)^2] = ...$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3x - 2)^3 + (2x - 3)^3$

β) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

γ) $(\mu + 2\nu)^3 - 3(-2\nu - 4\mu)^3 - 2\mu(\nu + 2)^2$

δ) $(x^3y\omega + xy^3\omega)(x^6y^2\omega^2 - x^4y^4\omega^2 + x^2y^6\omega^2)$

Λύση

α) $(3x - 2)^3 + (2x - 3)^3 =$

$= (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2 + 3(3x) \cdot 2^2 - 2^3 + (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 3^2 - 3^2 =$

$= ....$

4. Να αντικαταστήσετε τα αστεράκια με τα κατάλληλα μονώνυμα:

α) $(* + *)^2 = 9x^4y^2 + * + 4x^2y^4$

β) $(2x - *)^2 = * - 2x + 1/4$

γ) $(* + 2)^3 = \alpha^3 + * + 12\alpha + *$

Λύση

α) Το δεύτερο μέλος γράφεται: $(3x^2y)^2 + * + (2xy^2)^2$. Άρα το αστεράκι είναι το διπλάσιο γινόμενο, δηλαδή $2 \cdot 3x^2y \cdot 2xy^2 = 12x^3y^3$. Άρα ......

5. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω άρρητες παραστάσεις:

α) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$, *β)* $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$

Λύση

α) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 + 3 + 2\sqrt{5 \cdot 3}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

β) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt{7 + 3 + 2\sqrt{7 \cdot 3}} = ...$

6. Αν $\alpha + \frac{2}{\alpha} = 8$ *να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης* $\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2}$

Λύση

$\alpha + \frac{2}{\alpha} = 8$ ή $(\alpha + \frac{2}{\alpha})^2 = 8^2$ ή

$\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{2}{\alpha} + (\frac{2}{\alpha})^2 = 64$ ή

$\alpha^2 + 2 \cdot 2 + \frac{4}{\alpha^2} = 64$ ή

$\alpha^2 + 4 + \frac{4}{\alpha^2} = 64$ ....

7. Αν $\varkappa + \lambda = 7$, $\varkappa\lambda = 12$ *να υπολογίσετε τα:* $\varkappa^2 + \lambda^2$, $\varkappa^3 + \lambda^3$, $\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\varkappa - 2} + \frac{1}{\lambda - 2}$.

Λύση

$\varkappa + \lambda = 7$ ή $(\varkappa + \lambda)^2 = 7^2$ ή

$\varkappa^2 + 2\varkappa\lambda + \lambda^2 = 49$ ή

$\varkappa^2 + \lambda^2 = 49 - 2\varkappa\lambda$ ή

$\varkappa^2 + \lambda^2 = 49 - 2 \cdot 12$ ή ....

$\varkappa + \lambda = 7$ ή $(\varkappa + \lambda)^3 = 7^3$ ή

$\varkappa^3 + 3\varkappa^2\lambda + 3\varkappa\lambda^2 + \lambda^3 = 343$ ή

$\varkappa^3 + 3\varkappa\lambda(\varkappa + \lambda) + \lambda^3 = 343$ ή

$\varkappa^3 + \lambda^3 = 343 - 3\varkappa\lambda(\varkappa + \lambda)$ ή

$\varkappa^3 + \lambda^3 = 343 - 3 \cdot 12 \cdot 7$ ή ....

$\frac{1}{\varkappa - 2} + \frac{1}{\lambda - 2} = \frac{\lambda - 2 + \varkappa - 2}{(\varkappa - 2) \cdot (\lambda - 2)} =$

$= \frac{\varkappa + \lambda - 4}{\varkappa\lambda - 2\varkappa - 2\lambda + 4} = \frac{\varkappa + \lambda - 4}{\varkappa\lambda - 2(\varkappa + \lambda) + 4} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. *Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:*

α) $(x + 5y)^2$, β) $(2x^2 - 3y^3)^2$,

γ) $(-2\kappa - 5\lambda)^2$, δ) $(-\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}y)^2$,

ε) $(2\nu + 3\varrho^2)^2$, στ) $(3x^2y^3z - 5xy^2z)^2$

2. *Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:*

α) $(\beta + 3\gamma)^3$, β) $(-5x + 4y)^3$,

γ) $(-3x^2y - 2y\omega)^3$, δ) $(2\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3)^3$,

ε) $(\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}xy^2)^3$, στ) $(4\alpha\beta^2 - 3\alpha^2\beta)^3$

3. *Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:*

α) $(2x + 8y)(2x - 8y)$

β) $(0{,}2\alpha - \frac{3}{2}\beta)(0{,}2\alpha + \frac{3}{2}\beta)$

γ) $(2d^2R - 3dR^3)(2d^2R + 3dR^3)$

δ) $(3x - 2y + z)(3x + 2y - z)$

ε) $(4\upsilon^2ts - 3)(4\upsilon^2ts + 3)$

4. *Να αναπτύξετε τις ταυτότητες:*

α) $(3\kappa\mu - 5)(9\kappa^2\mu^2 + 15\kappa\mu + 25)$

β) $(0{,}2x + 0{,}3y)(0{,}04x^2 - 0{,}06xy + 0{,}09y^2)$

γ) $(\frac{1}{3}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta)(\frac{1}{9}\alpha^2\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta^3 + \frac{1}{4}\alpha^4\beta^2)$

δ) $(x + 2y + 5\omega)^2$

ε) $(x - 4y^2 - 3\omega)^2$

5. *Να κάνετε τις πράξεις:*

α) $3(x - 2y)^2 - 2(x + y)(x - y) + 3(x + 2y)^2$

β) $(\alpha - 2\beta)^2 + 2(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) + (\alpha + 2\beta)^2$

γ) $3x[x^3 - 3(x - x^2)^3 + 3x(x - 2)(x + 2)] - 6x(x - 1)$

δ) $2[\kappa^2 - \lambda(\mu + \nu)(\mu - \nu) + \lambda^2] - 3\mu^2 - 4\nu^2$

6. *Να κάνετε τις πράξεις:*

α) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x^3 - 27$

β) $(\alpha + 2\beta)(\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\beta) + (\alpha + 2\beta)^3$

γ) $(\mu + \nu + 2\kappa)(\mu - \nu - 2\kappa)(\mu - \nu - 2\kappa)(\mu + \nu - 2\kappa)$

δ) $(-2\mu - \nu)^2 + (-2\mu + \nu)^2$

ε) $(-x - y)^3 + (-x + y)^3$

7. *Να αντικαταστήσετε τα αστεράκια με τα κατάλληλα μονώνυμα στις παρακάτω ταυτότητες:*

α) $(3x + *)^2 = * + 18xy + *$

β) $(* + 3\beta)(2\alpha - *) = 4\alpha^2 - 9\beta^2$

γ) $(* - *)^3 = 125x^3 - * + * + 64y^6$

δ) $(2\alpha - *)(* + 2\alpha\beta + *) = 8\alpha^3 - *$

8. *Αν* $\alpha = \sqrt{8} + \sqrt{7}$ *και* $\beta = \sqrt{8} - \sqrt{7}$

να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

β) $3(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) + 5(\alpha - \beta)^2$

γ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

9. *Αν* $x + y = 10$ *και* $xy = 24$, *να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων*

α) $x^2 + y^2$,

β) $x^3 + y^3$,

γ) $2x^2 + 3x^2y + 3xy + 2y^2$,

δ) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y - 1}$

2.5 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;

1. Παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία μετατροπής μιας αλγεβρικής παράστασης, που περιέχει αθροίσματα, σε μια άλλη ίση με αυτή, που αποτελείται από γινόμενα.
Π.χ. $3x + 3y = 3 \cdot (x + y)$

2. Αναφέρετε τις κυριότερες περιπτώσεις παραγοντοποίησης.

2. Οι κυριότερες περιπτώσεις παραγοντοποίησης είναι οι παρακάτω:

α) Κοινός παράγοντας από όλους τους όρους.
Αν η αλγεβρική παράσταση περιέχει έναν κοινό παράγοντα σε όλους τους όρους της μετατρέπουμε την παράσταση αυτή σε γινόμενο με την επιμεριστική ιδιότητα.
Π.χ. $\alpha x + \alpha y - \alpha\omega = \alpha (x + y - \omega)$

β) Ομαδοποίηση.
Τη μέθοδο αυτή την ακολουθούμε όταν οι όροι της παράστασης μπορούν να χωριστούν σε ομάδες που κάθε μια περιέχει κοινό παράγοντα. Εργαζόμαστε τότε για κάθε ομάδα όπως στην προηγούμενη περίπτωση και μετά βγάζουμε κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση που έχει εμφανιστεί σε κάθε ομάδα.
Π.χ. $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \alpha (x + y) + \beta (x + y) = (x + y) (\alpha + \beta)$

γ) Χρήση ταυτοτήτων.
Όταν εμφανίζονται αναπτύγματα ταυτοτήτων σε μια αλγεβρική παράσταση, μπορούμε να γράψουμε τα αναπτύγματα αυτά στην αρχική τους μορφή έτσι ώστε να εμφανιστούν οι παράγοντες. Εδώ υπενθυμίζουμε τις κυριώτερες ταυτότητες που τις χρησιμοποιούμε στην παραγοντοποίηση κυρίως από το δεύτερο μέλος προς το πρώτο. Η παράθεση γίνεται με τον τρόπο που θα τις χρησιμοποιούμε.

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) (\alpha - \beta)$
$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$
$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Π.χ. $36\alpha^2 - 25\beta^2 = (6\alpha)^2 - (5\beta)^2 = (6\alpha + 5\beta) (6\alpha + 5\beta)$
$4\alpha^2 + 12\alpha\beta + 9\beta^2 = (2\alpha)^2 + 2 (2\alpha) (3\beta) + (3\beta)^2 = (2\alpha + 3\beta)^2$
$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3) [(2x)^2 + 2x \cdot 3 + 3^2] = (2x - 3) (4x^2 + 6x + 9)$

3. Τι λέγεται τριώνυμο δευτέρου βαθμού και πώς παραγοντοποιείται;

3. Κάθε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς λέγεται **τριώνυμο δευτέρου βαθμού.**
Η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου στηρίζεται σε μια συγκεκριμένη μέθοδο που θα μάθουμε στο επόμενο κεφάλαιο.
Εδώ θα δείξουμε μια πρακτική μέθοδο να παραγοντοποιούμε ορισμένα μόνο τριώνυμα και μάλιστα εκείνα που έχουν $\alpha = 1$ ενώ το β και το γ είναι άθροισμα και γινόμενο αντίστοιχα δύο συγκεκριμένων αριθμών.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο αριθμοί κ και λ ώστε $\beta = \kappa + \lambda$ και $\gamma = \kappa\lambda$ ενώ $\alpha = 1$. Τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, γράφεται:
$x^2 + (\kappa + \lambda)\, x + \kappa\lambda = x^2 + \kappa x + \lambda x + \kappa\lambda = x\,(x + \kappa) + \lambda\,(x + \kappa) = (x + \kappa)\,(x + \lambda)$
Δηλαδή: $\mathbf{x^2 + (\kappa + \lambda)\, x + \kappa\lambda = (x + \kappa)\,(x + \lambda)}$.
Π.χ. Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$.
Παρατηρούμε ότι $2 + 3 = 5$ ενώ $2 \cdot 3 = 6$. Τότε το $x^2 + 5x + 6$ γράφεται:
$x^2 + (2 + 3)\, x + 2 \cdot 3 = (x + 2)\,(x + 3)$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $6x^2 + 3x$
β) $3\alpha\beta - 9\beta$
γ) $12\alpha x^2 y - 6\alpha x$
δ) $(\alpha + \beta)\, x + (\alpha + \beta)\, y$
ε) $(5\alpha - 1)\, \kappa - (5\alpha - 1)\, \lambda$
στ) $x\,(\alpha + \beta) - y\,(\alpha + \beta)^2$
ζ) $(xy - 1)\,(\beta + 3) - (1 - xy)\,(\beta + 3)$
η) $(4x - 3)\, \beta - (3 - 4x)\, \beta$
θ) $\alpha^2\,(1 - x)\,(\alpha + \beta) + \alpha^2\,(x - 1)$

Λύση

α) $6x^2 + 3x = 3x\,(2x + 1)$

β) $3\alpha\beta - 9\beta = 3\beta\,(\alpha - 3)$

γ) $12\alpha x^2 y - 6\alpha x = 6\alpha x\,(2xy - 1)$

δ) $(\alpha + \beta)\, x + (\alpha + \beta)\, y = (\alpha + \beta)\,(x + y)$

ε) $(5\alpha - 1)\, \kappa - (5\alpha - 1)\, \lambda = (5\alpha - 1)\,(\kappa - \lambda)$

στ) $x\,(\alpha + \beta) - y\,(\alpha + \beta)^2 =$
$= (\alpha + \beta)\,[x - y\,(\alpha + \beta)] =$
$= (\alpha + \beta)\,(x - y\alpha - y\beta)$

ζ) $(xy - 1)\,(\beta + 3) - (1 - xy)\,(\beta + 3) =$
$= (xy - 1)\,(\beta + 3) + (xy - 1)\,(\beta + 3) =$
$= (xy - 1)\,[(\beta + 3) + (\beta + 3)] =$
$= (xy - 1)\,[2\,(\beta + 3)] =$
$= (xy - 1)\, 2\,(\beta + 3) =$
$= 2\,(xy - 1)\,(\beta + 3)$

η) $(4x - 3)\, \beta - (3 - 4x)\, \beta =$
$= (4x - 3)\, \beta + (4x - 3)\, \beta =$
$= (4x - 3)\,(\beta + \beta) = (4x - 3)\, 2\beta =$
$= 2\,(4x - 3)\, \beta$

θ) $\alpha^2\,(1 - x)\,(\alpha + \beta) + \alpha^2\,(x - 1) =$
$= \alpha^2\,(1 - x)\,(\alpha + \beta) - \alpha^2\,(1 - x) =$
$= \alpha^2\,(1 - x)\,[(\alpha + \beta) - 1] =$
$= \alpha^2\,(1 - x)\,(\alpha + \beta - 1)$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $3x\,(\alpha - \beta + \gamma) - y\,(\beta - \alpha - \gamma)$
β) $\alpha\,(x - y) - \beta\,(x - y) - \gamma\,(y - x)$
γ) $(x + y)^2 - x - y$
δ) $(2\kappa + 1)\,(3\kappa - 2) - (\kappa - 4)\,(2\kappa + 1) - (2\kappa + 1)^2$
ε) $3x^2yz - 6xy^2z + 18x^3y^5z\omega$
στ) $- 8xy^2\kappa + 4x\kappa^3 - 2xy^3\kappa\lambda$
ζ) $\alpha^2\beta - \frac{1}{2}\alpha^3\beta^2\gamma - \frac{3}{2}\alpha$
η) $2\mu^3\nu^2 - 4\mu^3\nu - 6\mu^3\,(\nu + \kappa)$

Λύση

α) $3x(\alpha - \beta + \gamma) - y(\beta - \alpha - \gamma) =$
$= 3x(\alpha - \beta + \gamma) + y(-\beta + \alpha + \gamma) =$
$= 3x(\alpha - \beta + \gamma) + y(\alpha - \beta + \gamma) =$
$= (\alpha - \beta + \gamma)(3x + y)$

β) $\alpha(x - y) - \beta(x - y) - \gamma(y - x) =$
$= \alpha(x - y) - \beta(x - y) + \gamma(x - y) =$
$= (x - y)(\alpha - \beta + \gamma)$

γ) $(x + y)^2 - x - y =$
$= (x + y)^2 - (x + y) =$
$= (x + y)[(x + y) - 1] =$
$= (x + y)(x + y - 1)$

δ) $(2\varkappa + 1)(3\varkappa - 2) - (\varkappa - 4)(2\varkappa + 1) - (2\varkappa + 1)^2 =$
$= (2\varkappa + 1)[(3\varkappa - 2) - (\varkappa - 4) - (2\varkappa + 1)] =$
$= (2\varkappa + 1)(3\varkappa - 2 - \varkappa + 4 - 2\varkappa - 1) =$
$= (2\varkappa + 1)(-1) = -(2\varkappa + 1)$

ε) $3x^2yz - 6xy^2z + 18x^3y^5z\omega =$
$= 3xyz(x - 2y + 6x^2y^4\omega)$

__Παρατήρηση:__ Στην άσκηση αυτή βγάλαμε κοινό παράγοντα το μονώνυμο που έχει συντελεστή το Μ.Κ.Δ. των συντελεστών των μονωνύμων και κύριο μέρος το γινόμενο των κοινών μεταβλητών στη μικρότερη δύναμη στην οποία παρουσιάζονται. Το μονώνυμο αυτό το λέμε **Μέγιστο κοινό διαιρέτη (Μ.Κ.Δ).**
Δηλαδή ο Μ.Κ.Δ των μονωνύμων $3x^2yz$, $6xy^2z$, $18x^3y^5z\omega$ βρίσκεται ως εξής:
$3x^2yz$
$6xy^2z = 2 \cdot 3 \cdot xy^2z$
$18x^3y^5z\omega = 2 \cdot 3^2 \cdot x^3 \cdot y^5z\omega$
Μ.Κ.Δ $= \mathbf{3 \cdot x \cdot y \cdot z}$
Για να βρούμε τι απομένει από κάθε μονώνυμο μέσα στην παρένθεση διαιρούμε κάθε μονώνυμο της αλγεβρικής παράστασης με το Μ.Κ.Δ. Έτσι έχουμε:
$3x^2yz : 3xyz = x$
$-6xy^2z : 3xyz = -2y$
$18x^3y^5z\omega : 3xyz = 6x^2y^4\omega$
Με όμοιο τρόπο θα λυθούν οι ασκήσεις στ), ζ), η).

στ) $-8xy^2\varkappa + 4x\varkappa^3 - 2xy^3\varkappa\lambda =$
$= -2x\varkappa(4y^2 - 2\varkappa^2 + y^3\lambda)$

ζ) $\alpha^2\beta - \frac{1}{2}\alpha^3\beta^2\gamma - \frac{3}{2}\alpha =$
$= \alpha(\alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2\gamma - \frac{3}{2})$

η) $2\mu^3\nu^2 - 4\mu^3\nu - 6\mu^3(\nu + \varkappa) =$
$= 2\mu^3[\nu^2 - 2\nu - 3(\nu + \varkappa)]$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $\boldsymbol{\alpha^2 - 4\alpha\beta + 8\beta - 2\alpha}$
β) $\boldsymbol{2\alpha^3 - \alpha^2 + 8\alpha - 4}$
γ) $\boldsymbol{3\alpha - 3\beta + 6\alpha x - 6\beta x}$
δ) $\boldsymbol{x^3 + x^2 + xy + x + y - 1}$
ε) $\boldsymbol{2\alpha\beta - 12 - 6\alpha + 4\beta}$
στ) $\boldsymbol{xy^2 - 2x^2 + 2y^3 - 4xy}$
ζ) $\boldsymbol{4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega}$
η) $\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$

Λύση

α) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 8\beta - 2\alpha =$
$= (\alpha^2 - 4\alpha\beta) + (8\beta - 2\alpha) =$
$= \alpha(\alpha - 4\beta) + 2(4\beta - \alpha) =$
$= \alpha(\alpha - 4\beta) - 2(\alpha - 4\beta) =$
$= (\alpha - 4\beta)(\alpha - 2)$

β) $2\alpha^3 - \alpha^2 + 8\alpha - 4 =$
$= (2\alpha^3 - \alpha^2) + (8\alpha - 4) =$
$= \alpha^2(2\alpha - 1) + 4(2\alpha - 1) =$
$= (2\alpha - 1)(\alpha^2 + 4)$

γ) $3\alpha - 3\beta + 6\alpha x - 6\beta x =$
$= (3\alpha - 3\beta) + (6\alpha x - 6\beta x) =$
$= 3(\alpha - \beta) + 6x(\alpha - \beta) =$
$= 3(\alpha - \beta)(1 + 2x)$

δ) $x^3 + x^2 + xy + x + y + 1 =$
$= (x^3 + x^2) + (xy + y) + (x + 1) =$
$= x^2(x + 1) + y(x + 1) + (x + 1) =$
$= (x + 1)(x^2 + y + 1)$

ε) $2\alpha\beta - 12 - 6\alpha + 4\beta =$
$= (2\alpha\beta + 4\beta) - (12 + 6\alpha) =$
$= 2\beta(\alpha + 2) - 6(2 + \alpha) =$
$= 2(\alpha + 2)(\beta - 3)$

στ) $xy^2 - 2x^2 + 2y^3 - 4xy =$
$= (xy^2 - 2x^2) + (2y^3 - 4xy) =$
$= x(y^2 - 2x) + 2y(y^2 - 2x) =$
$= (y^2 - 2x)(x + 2y)$

ζ) $4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega =$
$= (4\alpha y - 2\beta y) + (2\alpha\omega - \beta\omega) =$

$= 2y(2\alpha - \beta) + \omega(2\alpha - \beta) =$
$= (2\alpha - \beta)(2y + \omega)$

η) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 =$
$= (x^3 - 5x^2) + (2x - 10) =$
$= x^2(x - 5) + 2(x - 5) =$
$= (x - 5)(x^2 + 2)$

4. Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $\alpha^4 - \beta^4$
β) $9\beta^2 - \alpha^4$
γ) $81\lambda^4\mu^8 - 1$
δ) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{49}$
ε) $\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{36}t^2$

Λύση

α) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2)^2 - (\beta^2)^2 =$
$= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) =$
$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$

β) $9\beta^2 - \alpha^4 = (3\beta)^2 - (\alpha^2)^2 =$
$= (3\beta + \alpha^2)(3\beta - \alpha^2)$

γ) $81\lambda^4\mu^8 - 1 = (9\lambda^2\mu^4)^2 - 1^2 =$
$= (9\lambda^2\mu^4 + 1)(9\lambda^2\mu^4 - 1) =$
$= (9\lambda^2\mu^4 + 1)[(3\lambda\mu^2)^2 - 1^2] =$
$= (9\lambda^2\mu^4 + 1)(3\lambda\mu^2 + 1)(3\lambda\mu^2 - 1)$

δ) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{49} = (\dfrac{x}{5})^2 - (\dfrac{y}{7})^2 = (\dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{7})(\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{7})$

ε) $\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{36}t^2 = (\dfrac{2}{3})^2 - (\dfrac{1}{6}t)^2 =$
$= (\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}t)(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6}t)$

5. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $3\alpha^2 - 12\beta^2$
β) $27\alpha^3\beta - 12\alpha\beta^3$
γ) $9 - (\alpha + \beta)^2$
δ) $64\alpha^4\beta^2 - (\alpha - 2\beta)^2$
ε) $(2x + \alpha)^2 - (2x - \alpha)^2$
στ) $(5\mu + \nu)^2 - (\mu - 3\nu)^2$
ζ) $(\alpha^2 + \alpha + 1)^2 - (\alpha^2 - \alpha + 1)^2$

Λύση

α) $3\alpha^2 - 12\beta^2 = 3(\alpha^2 - 4\beta^2) =$
$= 3[\alpha^2 - (2\beta)^2] = 3(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta)$

β) $27\alpha^3\beta - 12\alpha\beta^3 = 3\alpha\beta(9\alpha^2 - 4\beta^2) =$
$= 3\alpha\beta[(3\alpha)^2 - (2\beta)^2] =$
$= 3\alpha\beta(3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta)$

γ) $9 - (\alpha + \beta)^2 = 3^2 - (\alpha + \beta)^2 =$
$= [3 + (\alpha + \beta)][3 - (\alpha + \beta)] =$
$= (3 + \alpha + \beta)(3 - \alpha - \beta)$

δ) $64\alpha^4\beta^2 - (\alpha - 2\beta)^2 =$
$= (8\alpha^2\beta)^2 - (\alpha - 2\beta)^2 =$
$= [8\alpha^2\beta + (\alpha - 2\beta)][8\alpha^2\beta - (\alpha - 2\beta)] =$
$= (8\alpha^2\beta + \alpha - 2\beta)(8\alpha^2\beta - \alpha + 2\beta)$

ε) $(2x + \alpha)^2 - (2x - \alpha)^2 =$
$= [(2x + \alpha)+(2x- \alpha)][(2x+\alpha)-(2x-\alpha)] =$
$= (2x + \alpha + 2x - \alpha)(2x + \alpha - 2x + \alpha) =$
$= 4x \cdot 2\alpha = 8\alpha x$

στ) $(5\mu + \nu)^2 - (\mu - 3\nu)^2 =$
$= [(5\mu + \nu)+(\mu-3\nu)][(5\mu + \nu)-(\mu-3\nu)] =$
$= (5\mu + \nu + \mu - 3\nu)(5\mu + \nu - \mu + 3\nu) =$
$= (6\mu - 2\nu)(4\mu + 4\nu) =$
$= 2(3\mu - \nu) \cdot 4(\mu + \nu) =$
$= 8(3\mu - \nu)(\mu + \nu)$

ζ) $(\alpha^2 + \alpha + 1)^2 - (\alpha^2 - \alpha + 1)^2 =$
$= [(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 - \alpha + 1)]$
$[(\alpha^2 + \alpha + 1) - (\alpha^2 - \alpha + 1)] =$
$= (\alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^2 - \alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + 1-$
$- \alpha^2 + \alpha - 1) =$
$= (2\alpha^2 + 2)2\alpha = 2(\alpha^2 + 1) \cdot 2\alpha =$
$= 4\alpha(\alpha^2 + 1)$

6. Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις:
α) $\lambda^2 + \mu^2 - 2\mu\lambda$
β) $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2$
γ) $\alpha^2 + 12\alpha + 36$
δ) $9\alpha^4\beta^2 - 6\alpha^2\beta\gamma + \gamma^2$

Λύση

α) $\lambda^2 + \mu^2 - 2\mu\lambda = (\lambda - \mu)^2$

β) $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 = \alpha^2 + 2 \cdot 2\alpha\beta + (2\beta)^2 =$
$= (\alpha + 2\beta)^2$

γ) $\alpha^2 + 12\alpha + 36 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 6 + 6^2 =$
$= (\alpha + 6)^2$

δ) $9\alpha^4\beta^2 - 6\alpha^2\beta\gamma + \gamma^2 =$
$= (3\alpha^2\beta)^2 - 2 \cdot 3\alpha^2\beta \cdot \gamma + \gamma^2 =$
$= (3\alpha^2\beta - \gamma)^2$

7. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{9}\nu^2 + \frac{1}{3}\mu\nu$

β) $\frac{9\alpha^2\beta^2}{16} - \frac{6\alpha\beta\gamma\delta}{5} + \frac{16\gamma^2\delta^2}{25}$

γ) $1000\omega^3 - 1$

δ) $27\alpha^3 + 216\beta^3$

ε) $(\alpha + \beta)^3 + (\alpha - \beta)^3$

Λύση

α) $\frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{9}\nu^2 + \frac{1}{3}\mu\nu =$
$= (\frac{1}{2}\mu)^2 + (\frac{1}{3}\nu)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{3}\nu =$
$= (\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\nu)^2$

β) $\frac{9\alpha^2\beta^2}{16} - \frac{6\alpha\beta\gamma\delta}{5} + \frac{16\gamma^2\delta^2}{25} =$
$= (\frac{3\alpha\beta}{4})^2 - 2 \cdot \frac{3\alpha\beta}{4} \cdot \frac{4\gamma\delta}{5} + (\frac{4\gamma\delta}{5})^2 =$
$= (\frac{3\alpha\beta}{4} - \frac{4\gamma\delta}{5})^2$

γ) $1000\omega^3 - 1 = (10\omega)^3 - 1^3 =$
$= (10\omega - 1)\,[(10\omega)^2 + 10\omega \cdot 1 + 1^2] =$
$= (10\omega - 1)\,(100\omega^2 + 10\omega + 1)$

δ) $27\alpha^3 + 216\beta^3 = (3\alpha)^3 + (6\beta)^3 =$
$= (3\alpha + 6\beta)\,[(3\alpha)^2 - (3\alpha)(6\beta) + (6\beta)^2] =$
$= 3\,(\alpha + 2\beta)\,(9\alpha^2 - 18\alpha\beta + 36\beta^2) =$
$= 3\,(\alpha + 2\beta)\,9\,(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2) =$
$= 27\,(\alpha + 2\beta)\,(\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2)$

ε) $(\alpha + \beta)^3 + (\alpha - \beta)^3 =$
$= [(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]\,[(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta) \cdot$
$\cdot (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2] =$
$= (\alpha + \beta + \alpha - \beta)\,[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 -$
$- \beta^2) + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2] =$
$= 2\alpha\,(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 -$
$- 2\alpha\beta + \beta^2) = 2\alpha\,(\alpha^2 + 3\beta^2)$

8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $(x + y)(2\alpha - \beta) + (x^2 - y^2)$

β) $(\alpha + 1)(2 - \alpha) + (\alpha - 2)^2 + (\alpha^2 - 4)$

γ) $\alpha^8 - 1$

δ) $3\varkappa^5 - 48\varkappa\beta^6$

ε) $\lambda^2 + \mu^2 - 2\mu\lambda - \nu^2$

στ) $xy^2 - x + 1 - y^2$

Λύση

α) $(x + y)(2\alpha - \beta) + (x^2 - y^2) =$
$= (x + y)(2\alpha - \beta) + (x + y)(x - y) =$
$= (x + y)\,[(2\alpha - \beta) + (x - y)] =$
$= (x + y)\,(2\alpha - \beta + x - y)$

β) $(\alpha + 1)(2 - \alpha) + (\alpha - 2)^2 + (\alpha^2 - 4) =$
$= - (\alpha + 1)(\alpha - 2) + (\alpha - 2)^2 +$
$+ (\alpha + 2)(\alpha - 2) =$
$= (\alpha - 2)\,[- (\alpha + 1) + (\alpha - 2) + (\alpha + 2)] =$
$= (\alpha - 2)\,[- \alpha - 1 + \alpha - 2 + \alpha + 2] =$
$= (\alpha - 2)(\alpha - 1)$

γ) $\alpha^8 - 1 = (\alpha^4)^2 - 1^2 = (\alpha^4 - 1)(\alpha^4 + 1) =$
$= [(\alpha^2)^2 - 1^2]\,(\alpha^4 + 1) =$
$= (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1) =$
$= (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)$

δ) $3\varkappa^5 - 48\varkappa\beta^6 = 3\varkappa\,(\varkappa^4 - 16\beta^4) =$
$= 3\varkappa\,[(\varkappa^2)^2 - (4\beta^3)^2] =$
$= 3\varkappa\,(\varkappa^2 - 4\beta^3)(\varkappa^2 + 4\beta^3)$

ε) $\lambda^2 + \mu^2 - 2\mu\lambda - \nu^2 =$
$= (\lambda - \mu)^2 - \nu^2 = (\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)$

στ) $xy^2 - x + 1 - y^2 =$
$= x\,(y^2 - 1) - (y^2 - 1) = (y^2 - 1)(x - 1) =$
$= (y - 1)(y + 1)(x - 1)$

9. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $x^9 - 1$

β) $\varkappa^4 - \varkappa^2 - 2\varkappa - 1$

γ) $x^4 + 2x^3 + x^2 - y^2$

δ) $2rt + 1 - r^2 - t^2$

ε) $1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

στ) $x^4 + y^4 - 11x^2y^2$

ζ) $16\alpha^4 - 17\alpha^2 + 1$

Λύση

α) $x^9 - 1 = (x^3)^3 - 1^3 =$
$= (x^3 - 1)\,[(x^3)^2 + x^3 \cdot 1 + 1^2] =$
$= (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) =$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$

β) $\varkappa^4 - \varkappa^2 - 2\varkappa - 1 = \varkappa^4 - (\varkappa^2 + 2\varkappa + 1) =$
$= \varkappa^4 - (\varkappa + 1)^2 = (\varkappa^2)^2 - (\varkappa + 1)^2 =$
$= (\varkappa^2 - \varkappa - 1)(\varkappa^2 + \varkappa + 1)$

γ) $x^4 + 2x^3 + x^2 - y^2 =$
$= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 - y^2 =$
$= (x^2 + x)^2 - y^2 =$
$= (x^2 + x - y)(x^2 + x + y)$

δ) $2rt + 1 - r^2 - t^2 = 1 - (r^2 + t^2 - 2rt) =$
$= 1^2 - (r - t)^2 = (1 - r + t)(1 + r - t)$

ε) $1 - 2\alpha + 2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 =$
$= 1 - 2\alpha + \alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma) =$
$= (1 - \alpha)^2 - (\beta - \gamma)^2 =$
$= [(1 - \alpha) - (\beta - \gamma)][(1 - \alpha) + (\beta - \gamma)] =$
$= (1 - \alpha - \beta + \gamma)(1 - \alpha + \beta - \gamma)$

στ) $x^4 + y^4 - 11x^2y^2 =$
$= (x^2)^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2 - 9x^2y^2 =$
$= (x^2 - y^2)^2 - 9x^2y^2 =$
$= (x^2 - y^2)^2 - (3xy)^2 =$
$= (x^2 - y^2 - 3xy)(x^2 - y^2 + 3xy)$

ζ) $16\alpha^4 - 17\alpha^2 + 1 =$
$= (4\alpha^2)^2 - 8\alpha^2 - 9\alpha^2 + 1 =$
$= (4\alpha^2)^2 - 2 \cdot 4\alpha^2 \cdot 1 + 1 - 9\alpha^2 =$
$= (4\alpha^2 - 1)^2 - (3\alpha)^2 =$
$= (4\alpha^2 - 1 - 3\alpha)(4\alpha^2 - 1 + 3\alpha) =$
$= (4\alpha^2 - 1 - 4\alpha + \alpha)(4\alpha^2 - 1 + 4\alpha - \alpha) =$
$= [4\alpha(\alpha - 1) + (\alpha - 1)][4\alpha(\alpha + 1) -$
$- (\alpha + 1)] =$
$= (\alpha - 1)(4\alpha + 1)(\alpha + 1)(4\alpha - 1)$

10. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα:
α) $x^2 - 4x + 3$, *β)* $x^2 - 5x + 6$,
γ) $x^2 + 5x + 6$, *δ)* $\alpha^2 + 7\alpha + 12$,
ε) $\beta^2 + 9\beta + 8$, *στ)* $t^2 - t - 2$,
ζ) $\theta^4 - 13\theta^2 + 36$, *η)* $\varkappa^4 - 15\varkappa^2 - 16$

Λύση

α) $x^2 - 4x + 3 =$
$= x^2 + (-3 - 1)x + (-3)(-1) =$
$= (x - 3)(x - 1)$

β) $x^2 - 5x + 6 =$
$= x^2 + (-3 - 2)x + (-3)(-2) =$
$= (x - 3)(x - 2)$

γ) $x^2 + 5x + 6 =$
$= x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = (x + 3)(x + 2)$

δ) $\alpha^2 + 7\alpha + 12 = \alpha^2 + (4 + 3)\alpha + 4 \cdot 3 =$
$= (\alpha + 4)(\alpha + 3)$

ε) $\beta^2 + 9\beta + 8 = \beta^2 + (8 + 1)\beta + 8 \cdot 1 =$
$= (\beta + 8)(\beta + 1)$

στ) $t^2 - t - 2 = t^2 + (-2 + 1)t + (-2) \cdot 1 =$
$= (t - 2)(t + 1)$

ζ) Θέτουμε $\theta^2 = x$. Τότε $\theta^4 = x^2$. Άρα το τριώνυμο γίνεται:
$x^2 - 13x + 36 =$
$= x^2 + (-9 - 4)x + (-9)(-4) =$
$= (x - 9)(x - 4)$ και επειδή $\theta^2 = x$ έχουμε:
$(\theta^2 - 9)(\theta^2 - 4) = (\theta^2 - 3^2)(\theta^2 - 2^2) =$
$= (\theta - 3)(\theta + 3)(\theta - 2)(\theta + 2)$

η) Θέτουμε $\varkappa^2 = x$. Τότε $\varkappa^4 = x^2$. Άρα το τρώνυμο γίνεται:
$x^2 - 15x - 16 =$
$= x^2 + (1 - 16)x + 1(-16) =$
$= (x + 1)(x - 16)$ και επειδή $\varkappa^2 = x$ έχουμε:
$(\varkappa^2 + 1)(\varkappa^2 - 16) = (\varkappa^2 + 1)(\varkappa^2 - 4^2) =$
$= (\varkappa^2 + 1)(\varkappa - 4)(\varkappa + 4)$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $3x^2y - 2xy^2 + 5x^2y^2$
β) $18\alpha^3\beta - 9\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta - 3\alpha^3\beta$
γ) $2\alpha^3\beta^2\gamma + 7\alpha^2\beta\gamma x - \sqrt{3}\,\alpha^2\beta\gamma^2 y$
δ) $\frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^5y^4$

Λύση

α) $3x^2y - 2xy^2 + 5x^2y^2 =$
$= xy\,(3x - 2y + 5xy)$
β) .....

2. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $\alpha x + \alpha y + 5x + 5y$
β) $x^3 + x^2 + x + 1$
γ) $\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta$
δ) $\varkappa^2 + \varkappa\lambda - \varkappa - \lambda$
ε) $8\mu\nu^3 - 24\nu^2 - 7\varkappa\mu\nu + 21\varkappa$

Λύση

α) $\alpha x + \alpha y + 5x + 5y =$
$= \alpha\,(x + y) + 5\,(x + y) = (x + y)\,(\alpha + 5)$
β) $x^3 + x^2 + x + 1 =$
$= x^2\,(x + 1) + (x + 1) =$ .....

3. Να τραπούν σε γινόμενα οι παραστάσεις:
α) $\alpha^3x^3 - \varkappa^3x^3 + \alpha^3 - \varkappa^3$
β) $(\alpha - 1)^3\,(\alpha^2 - 4) - (\alpha^2 - 4)$
γ) $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2$
δ) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$
ε) $12\alpha x^3 - 3\alpha xy^2 - 3\alpha x\omega^2y + 6\alpha x^2\omega^2$

Λύση

α) $\alpha^3x^3 - \varkappa^3x^3 + \alpha^3 - \varkappa^3 =$
$= \alpha^3\,(x^3 + 1^3) - \varkappa^3\,(x^3 + 1) =$
$= (\alpha^3 - \varkappa^3)\,(x^3 + 1) =$ .....
β) $(\alpha - 1)^3\,(\alpha^2 - 4) - (\alpha^2 - 4) =$
$= (\alpha^2 - 4)\,[(\alpha - 1)^3 - 1] =$
$= (\alpha^2 - 2^2)\,[(\alpha - 1)^3 - 1^3] =$ .....

4. Ομοίως οι παραστάσεις:
α) $\alpha^5\beta\gamma^3 + \alpha^2\beta x^3$
β) $2\,(x + y) - 54\,(x + y)$
γ) $\alpha^5 - \alpha^2\beta^3 + x^2\beta^3 - x^2\alpha^3$
δ) $x^3 + \alpha\,(x^2 - x + 1) + 1$
ε) $x^6 - (\alpha^3 - 1)\,x^3 - \alpha^3$

Λύση

α) $\alpha^5\beta\gamma^3 + \alpha^2\beta x^3 = \alpha^2\beta\,(\alpha^3\gamma^3 + x^3) =$
$= \alpha^2\beta\,[(\alpha\gamma)^3 + x^3] =$ ......

5. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:
α) $x^2 + 3x + 2$, *β)* $x^2 + 11x + 30$,
γ) $x^2 - 9x + 14$, *δ)* $\alpha^2 - \alpha - 20$,
ε) $\lambda^4 - 41\lambda + 400$, *στ)* $\varkappa^4 + 3\varkappa - 28$

Λύση

α) $x^2 + 3x + 2 = x^2 + (2 + 1)\,x + 2 \cdot 1 =$
$= (x + 2)\,(x + 1)$
β) $x^2 - 11x + 30 =$
$= x^2 + (-5 - 6)\,x + (-5)\,(-6) =$ ......

6. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα:
α) $\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta - 4\alpha^2\beta^2$
β) $x^4 + y^4 - 6x^2y^2$
γ) $9\varkappa^4 - 3\varkappa^2\lambda^2 + \lambda^4$
δ) $\mu^4\nu^4 + \lambda^4 - 14\mu^2\nu^2\lambda^2$

Λύση

α) $\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta - 4\alpha^2\beta^2 =$
$= (\alpha - 2\beta)^2 - (2\alpha\beta)^2 =$ ....
β) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $2\alpha xy^3 - 2\alpha^2xy + 4\alpha xy^2$
β) $4ct^2 - 2c^2t + 8ct$
γ) $\alpha\,(x - y) + \lambda\,(y - x)$
δ) $(\alpha - \beta)\,x^2 - \alpha + \beta$
ε) $3x^3 - 7x^2 + 3x - 7$
στ) $(\alpha + \beta - \gamma)^2 - (\beta - \gamma)^2$
ζ) $4(\alpha - 3\beta)\,(3x - y) + 5(3\beta - \alpha)\,(x - 3y)$
η) $\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{4}\alpha x$

2. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:
α) $36\alpha^2x^2 - 4\alpha^2x^2y^2$
β) $(3\alpha^2 - \beta^2)^2 - (\alpha^2 - 3\beta^2)^2$
γ) $\alpha^8 - \beta^8$
δ) $(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha - \beta)^2$
ε) $\alpha^2 - \beta^2 - \beta + \alpha$
στ) $\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$
ζ) $x^2 - 4x + 4 - y^2$
η) $(\alpha x + \beta y)^2 - 1$

3. Ομοίως τα πολυώνυμα:

α) $(\alpha + \beta)^3 - (\gamma + \delta)^3$

β) $25\alpha^5\beta - 25\beta$

γ) $\alpha^6 - \alpha^9$

δ) $27\alpha\beta^3\gamma^4 - 12\alpha\beta\gamma^2$

ε) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

στ) $x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3$

4. Ομοίως τα πολυώνυμα:

α) $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 - x + y$

β) $\alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \alpha\beta(\alpha - \beta) - \beta\gamma(\beta + \gamma)$

γ) $(x - 1)(x + 2) - (x^2 - 4)$

δ) $(3x - 2y)(3x + y) + (4y^2 - 9x^2) - (2y - 3x)^2$

ε) $\alpha x^4 - 11\alpha x^2y^2 + \alpha y^4$

στ) $\alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2$

ζ) $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\beta^2$

η) $1 + 3\alpha^2(\alpha - \beta)^2 - 4\alpha^4(\alpha - \beta)^4$

Υπόδειξη: $1 + 2 \cdot \frac{3}{2}\alpha^2(\alpha - \beta)^2 + \frac{9}{4}\alpha^4(\alpha - \beta)^4 - \frac{25}{4}\alpha^4(\alpha - \beta)^4$

5. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 11x + 27$

β) $x^2 + 16x + 15$

γ) $\alpha^2 + 14\alpha - 32$

δ) $\beta^2 + 14\alpha + 13$

ε) $\mu^2 + 6\mu - 16$

στ) $\nu^2 - \nu - 18$

ζ) $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 28\beta^2$

η) $\theta^4 - 8\theta^2 + 15$

6. Αν $x = \beta + \gamma - 2\alpha$

$y = \gamma + \alpha - 2\beta$

$z = \alpha + \beta - 2\gamma$

να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$x^3 + y^3 + z^3$

2.6 Κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι ονομάζουμε κλασματική αλγεβρική παράσταση;

2. Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν για τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι μεταβλητές μιας κλασματικής αλγεβρικής παράστασης;

Απαντήσεις

1. Κλασματική αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε κάθε κλάσμα που περιέχει μεταβλητή στον παρονομαστή του.

Π.χ. η παράσταση $\frac{2x^2 - y}{x - 3}$ είναι μια κλασματική αλγεβρική παράσταση.

2. Οι μεταβλητές μιας κλασματικής αλγεβρικής παράστασης δεν πρέπει να πάρουν τις τιμές εκείνες για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Έτσι στην αλγεβρική παράσταση $\frac{5x - 1}{x - 4}$

πρέπει το x να μην παίρνει την τιμή 4 γιατί τότε θα μηδενίζεται ο παρονομαστής.

__Σημείωση:__ Στα παρακάτω όταν θα γράφουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις θα εννοούμε ότι ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0, δηλαδή ότι οι μεταβλητές της παράστασης δεν παίρνουν τις τιμές εκείνες που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

3. Πώς απλοποιούμε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση;

3. Για να απλοποιήσουμε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση πρέπει να αναλύσουμε τους όρους του κλάσματος σε γινόμενο παραγόντων και στη συνέχεια απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες των όρων του κλάσματος.

4. Πώς πολλαπλασιάζουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις;

4. Για να πολλαπλασιάσουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις αρκεί να σχηματίσουμε ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο όλων των παρονομαστών.

5. Πώς διαιρούμε δύο κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις;

5. Για να διαιρέσουμε δύο κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, αντιστρέφουμε τους όρους της δεύτερης παράστασης και αντί για διαίρεση κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών δεν ορίζονται οι αριθμητικές τιμές των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

α) $\frac{2}{x}$, β) $\frac{\alpha^2}{x-3}$, γ) $\frac{3\alpha}{3x-2}$,

δ) $\frac{2x^2y}{(x-2)(x+3)}$, ε) $\frac{3\kappa\lambda}{\nu^2-1}$,

στ) $\frac{\kappa^2+2\lambda}{x^2+5x}$, ζ) $\frac{5x}{x^2+2}$, η) $\frac{\alpha-\beta}{\kappa^2-9}$

Λύση

Οι τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων είναι εκείνες οι τιμές που μηδενίζουν τους παρονομαστές σε κάθε περίπτωση. Έτσι έχουμε:

α) $x = 0$
β) $x - 3 = 0$ ή $x = 3$
γ) $3x - 2 = 0$ ή $3x = 2$ ή $x = 2/3$
δ) $(x - 2)(x + 3) = 0$ ή ($x = 2$ ή $x = -3$)
ε) $\nu^2 - 1 = 0$ ή $(\nu - 1)(\nu + 1) = 0$ ή ($\nu = 1$ ή $\nu = -1$)
στ) $x^2 + 5x = 0$ ή $x(x + 5) = 0$ ή ($x = 0$ ή $x = -5$)
ζ) $x^2 + 2 = 0$
Το πολυώνυμο αυτό είναι πάντοτε διαφορετικό από 0 γιατί είναι άθροισμα θετικών αριθμών. Έτσι δεν υπάρχει τιμή για το x ώστε να μην ορίζεται η παράσταση. Δηλαδή ορίζεται για κάθε τιμή του x.
η) $\kappa^2 - 9 = 0$ ή $(\kappa - 3)(\kappa + 3) = 0$ ή ($\kappa = 3$ ή $\kappa = -3$).

2. Να απλοποιήσετε τις κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $\dfrac{5x}{x}$, β) $\dfrac{3x^2y}{6xy^2}$, γ) $\dfrac{-12\alpha^4x^2y}{-15\alpha^4y^2}$,

δ) $\dfrac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$, ε) $\dfrac{3x+15}{5x+25}$,

στ) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$,

ζ) $\dfrac{3\alpha x-5\alpha y-3\beta x+5\beta y}{\alpha^2-\beta^2+(\alpha-\beta)^2}$,

η) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

Λύση

α) $\dfrac{5x}{x}=5$

β) $\dfrac{3x^2y}{6xy^2}=\dfrac{3\cdot x\cdot x\cdot y}{2\cdot 3\cdot x\cdot y\cdot y}=\dfrac{x}{2y}$

γ) $\dfrac{-12\alpha^4x^2y}{-15\alpha^4y^2}=\dfrac{4x^2}{5y}$

δ) $\dfrac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}=\dfrac{x(4x-y)}{3y(4x-y)}=\dfrac{x}{3y}$

ε) $\dfrac{3x+15}{5x+25}=\dfrac{3(x+5)}{5(x+5)}=\dfrac{3}{5}$

στ) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}=\dfrac{x^2+(3+2)x+3\cdot 2}{x^2+(2+1)x+2\cdot 1}=$

$=\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{x+3}{x+1}$

ζ) $\dfrac{3\alpha x-5\alpha y-3\beta x+5\beta y}{\alpha^2-\beta^2+(\alpha-\beta)^2}=$

$=\dfrac{3x(\alpha-\beta)-5y(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2}=$

$=\dfrac{(\alpha-\beta)(3x-5y)}{(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]}=$

$=\dfrac{(\alpha-\beta)(3x-5y)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\alpha-\beta)}=$

$=\dfrac{(\alpha-\beta)(3x-5y)}{(\alpha-\beta)2\alpha}=\dfrac{3x-5y}{2\alpha}$

η) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}=$

$=\dfrac{x^2+(-3-1)x+(-3)\cdot(-1)}{(x-3)(x+3)}=$

$=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x-1}{x+3}$

3. *Να γίνουν οι πράξεις:*

α) $\dfrac{2x^2}{3y^2}:\dfrac{4x^2}{9y^3}$,

β) $\dfrac{-8\alpha^2}{3\beta\gamma}\cdot\dfrac{6\beta^2\gamma^3}{5\alpha^3}$,

γ) $12x^2y^2\cdot\dfrac{x^2}{6y^4}$,

δ) $\dfrac{-9\alpha^2}{12\beta}\cdot\dfrac{-2\alpha\beta}{3\gamma^2\delta}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{-\alpha^4}$

Λύση

α) Όταν έχουμε να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό. Έτσι έχουμε:

$\dfrac{2x^2}{3y^2}:\dfrac{4x^2}{9y^3}=\dfrac{2x^2}{3y^2}\cdot\dfrac{9y^3}{4x^2}=\dfrac{2x^2\cdot 9y^3}{3y^2\cdot 4x^2}=\dfrac{3y}{2}$

β) $\dfrac{-8\alpha^2}{3\beta\gamma}\cdot\dfrac{6\beta^2\gamma^3}{5\alpha^3}=-\dfrac{8\alpha^2\cdot 6\beta^2\gamma^3}{3\beta\gamma\cdot 5\alpha^3}=-\dfrac{16\beta\gamma^2}{5\alpha}$

γ) $12x^2y^2\cdot\dfrac{x^2}{6y^4}=\dfrac{12x^2y^2\cdot x^2}{6y^4}=\dfrac{2x^4}{y^2}$

δ) $\dfrac{-9\alpha^2}{12\beta}\cdot\dfrac{-2\alpha\beta}{3\gamma^2\delta}\cdot\dfrac{\alpha\beta\gamma\delta}{-\alpha^4}=$

$=-\dfrac{9\alpha^2\cdot 2\alpha\beta\cdot\alpha\beta\gamma\delta}{12\beta\cdot 3\gamma^2\delta\cdot\alpha^4}=-\dfrac{\beta}{2\gamma}$

4. *Να γίνουν οι πράξεις:*

α) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x+4}{x-2}$,

β) $\dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{2x-x^2}$,

γ) $\dfrac{\alpha^{2\nu}-1}{x^\nu+2}:\dfrac{\alpha^\nu-1}{x^{2\nu}-4}$

Λύση

α) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12}\cdot\dfrac{x+4}{x-2}=$

$=\dfrac{x^2(-2-3)x+(-2)\cdot(-3)}{x^2+(4+3)x+4\cdot 3}\cdot\dfrac{x+4}{x-2}=$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+3)}\cdot\dfrac{x+4}{x-2}=$

$=\dfrac{(x-2)(x-3)\cdot(x+4)}{(x+4)(x+3)\cdot(x-2)}=\dfrac{x-3}{x+3}$

β) $\dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{2x-x^2}=$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{x^2+(2+1)x+2\cdot 1}{-x(x-2)}=$

$=\dfrac{x(x-1)}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{(x+2)(x+1)}{-x(x-2)}=$

$=\dfrac{x(x-1)\cdot(x+2)(x+1)}{-(x+2)^2\cdot x(x-2)}=$

$=-\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-2)}$

γ) $\dfrac{\alpha^{2\nu}-1}{x^\nu+2}:\dfrac{\alpha^\nu-1}{x^{2\nu}-4}=\dfrac{(\alpha^\nu)^2-1^2}{x^\nu+2}\cdot\dfrac{x^{2\nu}-4}{\alpha^\nu-1}=$

$=\dfrac{(\alpha^\nu-1)(\alpha^\nu+1)}{x^\nu+2}\cdot\dfrac{(x^\nu)^2-2^2}{\alpha^\nu-1}=$

$=\dfrac{(\alpha^\nu-1)(\alpha^\nu+1)}{x^\nu+2}\cdot\dfrac{(x^\nu-2)(x^\nu+2)}{\alpha^\nu-1}=$

$=\dfrac{(\alpha^\nu-1)(\alpha^\nu+1)(x^\nu-2)(x^\nu+2)}{(x^\nu+2)(\alpha^\nu-1)}=$

$=(\alpha^\nu+1)(x^\nu-2)$

B. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι απλοποιήσεις:

α) $\dfrac{4x^2-y^2}{2x+y}$,

β) $\dfrac{\alpha^2-\alpha}{3\alpha\beta-\alpha}$,

γ) $\dfrac{\alpha^4-x^4}{\alpha^3x-\alpha x^3}$,

δ) $\dfrac{x^2+x}{x^2+1+2x}$,

ε) $\dfrac{\alpha^2-1}{5\alpha^2-10\alpha+5}$,

στ) $\dfrac{1-\beta^2+\beta^3-\beta^5}{1+\beta-\beta^2-\beta^3}$

Λύση

α) $\dfrac{4x^2-y^2}{2x+y}=\dfrac{(2x)^2-y^2}{2x+y}=\ldots.$

β) $\dfrac{\alpha^2-\alpha}{3\alpha\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha(3\beta-1)}=\ldots.$

γ) $\dfrac{\alpha^4-x^4}{\alpha^3x-\alpha x^3}=\dfrac{(\alpha^2)^2-(x^2)^2}{\alpha x(\alpha^2-x^2)}=\ldots.$

δ) ....

2. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha\beta}$,

β) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$,

γ) $\dfrac{\mu^2-\nu^2}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\nu-\mu}\cdot\dfrac{3}{x+y}\cdot\dfrac{4}{\mu+\nu}$

δ) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y}:\dfrac{\alpha+\beta}{(x-y)^2}$,

ε) $\dfrac{\varkappa^2\lambda^2-\lambda^4}{\varkappa^3-\lambda^3}:\dfrac{\varkappa\lambda^2+\lambda^3}{\varkappa^2+\varkappa\lambda+\lambda^2}$

Λύση

α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha\beta}=\dfrac{2\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{4\alpha\beta}=\ldots$

β) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{x-y}\cdot\dfrac{(x-y)(x+y)}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\ldots.$

γ) $\dfrac{\mu^2 - \nu^2}{x - y} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{\nu - \mu} \cdot \dfrac{3}{x + y} \cdot \dfrac{4}{\mu + \nu} =$

$= \dfrac{(\mu - \nu)(\mu + \nu)}{x - y} \cdot \dfrac{(x - y)(x + y)}{\nu - \mu} \cdot$

$\cdot \dfrac{3}{x + y} \cdot \dfrac{4}{\mu + \nu} = \dots$

δ) ....

3. Να μετατραπούν σε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

α) $\dfrac{2x}{\dfrac{2xy - y}{3y}}$, β) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta - 1}}{\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha^2\beta^2 - 1}}$,

γ) $\dfrac{\mu^3 - \nu^3}{\dfrac{\mu^2 - \nu^2}{2\mu\nu}}$, δ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha^2 - 1}}{\dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}}$

Λύση

α) $\dfrac{2x}{\dfrac{2xy - y}{3y}} = \dfrac{\dfrac{2x}{1}}{\dfrac{2xy - y}{3y}} = \dfrac{2x \cdot 3y}{2xy - y} =$

$= \dfrac{6xy}{y(2x - 1)} = \dots$

β) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta - 1}}{\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha^2\beta^2 - 1}} = \dfrac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2\beta^2 - 1)}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta)} =$

$= \dfrac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 1)}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta)} = \dots$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\dfrac{-5x^2}{2x}$, β) $\dfrac{3x^2y - 2xy^2}{xy - 5x^2y^2}$,

γ) $\dfrac{4\mu^3 - 3\nu^3}{\mu^2 - 6\mu^2\nu}$, δ) $\dfrac{3x^2}{10} \cdot 5x$,

ε) $\dfrac{2\alpha^3 - 3\alpha^2}{\alpha^2 - 2\alpha^2\beta}$, στ) $\dfrac{\alpha^2 - \beta}{2\alpha} \cdot (4\alpha - 2)$

2. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\dfrac{3\alpha - 6\beta}{\alpha - \beta} \cdot \dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - 2\alpha\beta} \cdot \dfrac{\alpha}{3}$,

β) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 8} \cdot \dfrac{x^2 - 16}{x - 3}$,

γ) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \cdot \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{1 - x^2}{(1 + \alpha x)^2 - (\alpha + x)^2}$

β) $\dfrac{10\alpha^2 - 7\alpha^3 + 10 - 7\alpha}{\alpha^2 - 2\alpha^3 + 1 - 2\alpha}$

γ) $\dfrac{x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta}{x^3 + \beta x^2 + \alpha x + \alpha\beta}$

δ) $\dfrac{\alpha\beta(x^2 + y^2) + xy(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta(x^2 - y^2) + xy(\alpha^2 - \beta^2)}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{x^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma + 2\alpha x - \gamma^2}{x^2 + \beta^2 - \alpha^2 + 2\beta x - 2\alpha\gamma - \gamma^2}$

β) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 2\beta\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2} \cdot \dfrac{\alpha + \beta - \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$

γ) $\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta} \cdot \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} \cdot \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$

δ) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 3} \cdot \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 8} : \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x}$

5. *Να κάνετε τις πράξεις:*

α) $$\frac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}}$$

β) $$\frac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\cdot\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)^2}$$

γ) $$\frac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}}{-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}}$$

δ) $$\frac{\dfrac{\beta^3+1}{\alpha\beta^3}}{\dfrac{\beta^2-\beta+1}{\beta}}$$

ε) $$\frac{\dfrac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\dfrac{x-y-\omega}{x+y-\omega}}$$

στ) $$\frac{\dfrac{x^2-y^2}{xy}}{\dfrac{2x^2+2y^2-4xy}{2xy}}$$

2.7 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. *Πώς προσθέτουμε ή αφαιρούμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις;*

Απαντήσεις

1. Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, πρέπει οι παρονομαστές να είναι ίσοι. Δηλαδή πρέπει τα κλάσματα να είναι ομώνυμα.

Αν είναι ομώνυμα, σχηματίζουμε μια αλγεβρική παράσταση με αριθμητή το άθροισμα όλων των αριθμητών και παρονομαστή τον κοινό παρονομαστή όλων των παραστάσεων.

Αν όμως οι παρονομαστές των παραστάσεων δεν είναι ίδιοι τότε εργαζόμαστε ως εξής:

• Παραγοντοποιούμε όλους τους παρονομαστές ώστε να γίνουν γινόμενα παραγόντων.

• Σχηματίζουμε το γινόμενο που αποτελείται από τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες όλων των παραγοντοποιημένων παρονομαστών. Τους παράγοντες αυτούς τους παίρνουμε με το μεγαλύτερο εμφανιζόμενο εκθέτη. Το γινόμενο αυτό λέγεται **Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π).**

• Διαιρούμε τους παρονομαστές των παραστάσεων με το Ε.Κ.Π. και το εκάστοτε πηλίκο που προκύπτει το πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμητή και τον παρονομαστή της αντίστοιχης παράστασης. Έτσι τα κλάσματα γίνονται ομώνυμα και τα προσθέτουμε όπως εξηγήσαμε παραπάνω.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{2\beta}{\alpha - 2\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha - 2\beta}$

β) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x-2}$

γ) $\alpha - x + \dfrac{x^2}{\alpha + x}$

δ) $\dfrac{d}{d-x} + \dfrac{3d}{d+x} - \dfrac{2dx}{d^2 - x^2}$

Λύση

α) $\dfrac{2\beta}{\alpha - 2\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha - 2\beta} = \dfrac{2\beta + \alpha}{\alpha - 2\beta}$

β) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x-2} =$

$= \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{(x+1)(x-2) - (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{x^2 - 2x + x - 2 - x^2 - 2x + x + 2}{(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{-2x}{(x+2)(x-2)}$

γ) $\alpha - x + \dfrac{x^2}{\alpha + x} =$

$= \dfrac{(\alpha - x)(\alpha + x)}{\alpha + x} + \dfrac{x^2}{\alpha + x} =$

$= \dfrac{(\alpha - x)(\alpha + x) + x^2}{\alpha + x} = \dfrac{\alpha^2 - x^2 + x^2}{\alpha + x} =$

$= \dfrac{\alpha^2}{\alpha + x}$

δ) $\dfrac{d}{d-x} + \dfrac{3d}{d+x} - \dfrac{2dx}{d^2 - x^2} =$

$= \dfrac{d}{d-x} + \dfrac{3d}{d+x} - \dfrac{2dx}{(d-x)(d+x)} =$

$= \dfrac{d(d+x) + 3d(d-x) - 2dx}{(d-x)(d+x)} =$

$= \dfrac{d^2 + dx + 3d^2 - 3dx - 2dx}{(d-x)(d+x)} =$

$= \dfrac{4d^2 - 4dx}{(d-x)(d+x)} = \dfrac{4d(d-x)}{(d-x)(d+x)} = \dfrac{4d}{d+x}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{x^3}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$

β) $\dfrac{4\alpha^2}{4\alpha^2 - 9\beta^2} + \dfrac{\alpha}{3\beta - 2\alpha} + \dfrac{2\beta}{3\beta + 2\alpha}$

γ) $\dfrac{2(R^2 + \varrho^2)}{(R^2 - \varrho^2)^2} - \dfrac{1}{(R - \varrho)^2} + \dfrac{1}{(R + \varrho)^2}$

Λύση

α) $\dfrac{x^3}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} =$

$= \dfrac{x^3}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x^2}{x+1} =$

$= \dfrac{x^3 - 1}{x-1} + \dfrac{1 - x^2}{x+1} =$

$= \dfrac{(x^3 - 1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{(1 - x^2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$

$= \dfrac{(x^3 - 1)(x+1) + (1 - x^2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1) - (x-1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)[(x^2 + x + 1) - (x-1)]}{(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2 + x + 1 - x + 1)}{(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2 + 2)}{(x-1)(x+1)} = x^2 + 2$

β) $\dfrac{4\alpha^2}{4\alpha^2 - 9\beta^2} + \dfrac{\alpha}{3\beta - 2\alpha} + \dfrac{2\beta}{3\beta + 2\alpha} =$

$= \dfrac{4\alpha^2}{(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)} - \dfrac{\alpha}{2\alpha - 3\beta} + \dfrac{2\beta}{2\alpha + 3\beta} =$

$= \dfrac{4\alpha^2}{(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)} - \dfrac{\alpha(2\alpha + 3\beta)}{(2\alpha - 3\beta)(2\alpha + 3\beta)} +$

$+ \dfrac{2\beta(2\alpha - 3\beta)}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} =$

$$= \frac{4\alpha^2 - \alpha(2\alpha + 3\beta) + 2\beta(2\alpha - 3\beta)}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} =$$

$$= \frac{4\alpha^2 - 2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 4\alpha\beta - 6\beta^2}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 + 4\alpha\beta - 3\alpha\beta - 6\beta^2}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} =$$

$$= \frac{2\alpha(\alpha + 2\beta) - 3\beta(\alpha + 2\beta)}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha + 2\beta)(2\alpha - 3\beta)}{(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)} = \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha + 3\beta}$$

γ) $\frac{2(R^2 + \varrho^2)}{(R^2 - \varrho^2)^2} - \frac{1}{(R - \varrho)^2} + \frac{1}{(R + \varrho)^2} =$

$$= \frac{2(R^2 + \varrho^2)}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} - \frac{1}{(R - \varrho)^2} + \frac{1}{(R + \varrho)^2} =$$

$$= \frac{2(R^2 + \varrho^2)}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} - \frac{1(R + \varrho)^2}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} +$$

$$+ \frac{1(R - \varrho)^2}{(R + \varrho)^2(R - \varrho)^2} =$$

$$= \frac{2(R^2 + \varrho^2) - (R + \varrho)^2 + (R - \varrho)^2}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} =$$

$$= \frac{2R^2 + 2\varrho^2 - R^2 - \varrho^2 - 2R\varrho + R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2}$$

$$= \frac{2R^2 + 2\varrho^2 - 4R\varrho}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} = \frac{2(R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho)}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} =$$

$$= \frac{2(R - \varrho)^2}{(R - \varrho)^2(R + \varrho)^2} = \frac{2}{(R + \varrho)^2}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{5}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$

β) $\frac{\alpha}{(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{\beta}{(x-\gamma)(x-\alpha)} + \frac{\gamma}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

γ) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x^2 - 4}$

Λύση

α) $\frac{5}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2} =$

$$= \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{3(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3(x+2)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{5 - 3(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{4 + 3(x+2)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{5 - 3x + 3}{(x-1)^2} + \frac{4 + 3x + 6}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{8 - 3x}{(x-1)^2} + \frac{10 + 3x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(8 - 3x)(x+2)^2}{(x-1)^2(x+2)^2} + \frac{(10 + 3x)(x-1)^2}{(x+2)^2(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(8 - 3x)(x^2 + 4 + 4x) + (10 + 3x)(x^2 + 1 - 2x)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{8x^2+32+32x-3x^3-12x-12x^2+10x^2+10-20x+3x^3+3x-6x^2}{(x-1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{3x + 42}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

β) $\frac{\alpha}{(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{\beta}{(x-\gamma)(x-\alpha)} + \frac{\gamma}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

$$= \frac{\alpha(x-\alpha)}{(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{\beta(x-\beta)}{(x-\gamma)(x-\alpha)} + \frac{\gamma(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha(x-\alpha) + \beta(x-\beta) + \gamma(x-\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} =$$

$$= \frac{\alpha x - \alpha^2 + \beta x - \beta^2 + \gamma x - \gamma^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} =$$

$$= \frac{-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + x(\alpha + \beta + \gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

γ) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3}{x^2 + x - 2} + \frac{1}{x^2 - 4} =$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{x + 2 + 3(x-2) + 1(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{x + 2 + 3x - 6 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{5x - 5}{(x-1)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{5(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{5}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{x^2 - 4}$$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{1}{2\alpha x + x^2} - \dfrac{1}{2\alpha x - x^2} - \dfrac{2}{x^2 - 4\alpha^2}$

β) $\dfrac{3}{2\alpha + 2} - \dfrac{2}{3\alpha - 3} + \dfrac{5\alpha + 3}{6\alpha^2 - 6}$

γ) $\dfrac{2xy}{x^3 + y^3} - \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2} + \dfrac{1}{x + y}$

Λύση

α) $\dfrac{1}{2\alpha x + x^2} - \dfrac{1}{2\alpha x - x^2} - \dfrac{2}{x^2 - 4\alpha^2} =$

$= \dfrac{1}{x(2\alpha + x)} - \dfrac{1}{x(2\alpha - x)} - \dfrac{2}{(x - 2\alpha)(x + 2\alpha)} =$

$= \dfrac{1}{x(2\alpha + x)} - \dfrac{1}{x(2\alpha - x)} + \dfrac{2}{(2\alpha - x)(2\alpha + x)} =$

$= \dfrac{1\,(2\alpha - x) - 1\,(2\alpha + x) + 2x}{x(2\alpha - x)(2\alpha + x)} =$

$= \dfrac{2\alpha - x - 2\alpha - x + 2x}{x(2\alpha - x)(2\alpha + x)} = 0$

β) $\dfrac{3}{2\alpha + 2} - \dfrac{2}{3\alpha - 3} + \dfrac{5\alpha + 3}{6\alpha^2 - 6} =$

$= \dfrac{3}{2(\alpha + 1)} - \dfrac{2}{3(\alpha - 1)} + \dfrac{5\alpha + 3}{6(\alpha^2 - 1)} =$

$= \dfrac{3}{2(\alpha + 1)} - \dfrac{2}{3(\alpha - 1)} + \dfrac{5\alpha + 3}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$

$= \dfrac{3 \cdot 3(\alpha - 1) - 2 \cdot 2(\alpha + 1) + (5\alpha + 3)}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$

$= \dfrac{9\alpha - 9 - 4\alpha - 4 + 5\alpha + 3}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$

$= \dfrac{10\alpha - 10}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \dfrac{10\,(\alpha - 1)}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} =$

$= \dfrac{5}{3\,(\alpha - 1)}$

γ) $\dfrac{2xy}{x^3 + y^3} - \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2} + \dfrac{1}{x + y} =$

$= \dfrac{2xy}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} - \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2} + \dfrac{1}{x + y}$

$= \dfrac{2xy - (x + y)(x + y) + (x^2 - xy + y^2)}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} =$

$= \dfrac{2xy - x^2 - y^2 - 2xy + x^2 - xy + y^2}{x^3 + y^3} =$

$= \dfrac{-xy}{x^3 + y^3}$

5. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}) \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$

β) $\dfrac{2x}{2y - \alpha}\,(\dfrac{y + \alpha}{3} - \dfrac{\alpha}{2})$

γ) $(\dfrac{1 + \lambda}{1 - \lambda} - \dfrac{1 - \lambda}{1 + \lambda})\,(\dfrac{3}{4\lambda} + \dfrac{\lambda}{4} - \lambda)$

Λύση

α) $(1 + \dfrac{\alpha}{\beta}) \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} = \dfrac{\beta + \alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} =$

$= \dfrac{(\beta + \alpha) \cdot \alpha}{\beta \cdot (\alpha + \beta)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

β) $\dfrac{2x}{2y - \alpha}\,(\dfrac{y + \alpha}{3} - \dfrac{\alpha}{2}) =$

$= \dfrac{2x}{2y - \alpha} \cdot \dfrac{2\,(y + \alpha) - 3\alpha}{6} =$

$= \dfrac{2x}{2y - \alpha} \cdot \dfrac{2y + 2\alpha - 3\alpha}{6} = \dfrac{2x \cdot (2y - \alpha)}{(2y - \alpha) \cdot 6} =$

$= \dfrac{x}{3}$

γ) $(\dfrac{1 + \lambda}{1 - \lambda} - \dfrac{1 - \lambda}{1 + \lambda})\,(\dfrac{3}{4\lambda} + \dfrac{\lambda}{4} - \lambda) =$

$= \dfrac{(1 + \lambda)^2 - (1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda)\,(1 + \lambda)} \cdot \dfrac{3 + \lambda^2 - 4\lambda^2}{4\lambda} =$

$= \dfrac{1 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 - \lambda^2 + 2\lambda}{(1 - \lambda)\,(1 + \lambda)} \cdot \dfrac{3 - 3\lambda^2}{4\lambda} =$

$= \dfrac{4\lambda}{(1 - \lambda)\,(1 + \lambda)} \cdot \dfrac{3\,(1 - \lambda^2)}{4\lambda} =$

$= \dfrac{4\lambda \cdot 3\,(1 - \lambda)\,(1 + \lambda)}{(1 - \lambda)\,(1 + \lambda) \cdot 4\lambda} = 3$

6. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y} : \dfrac{\alpha+\beta}{(x-y)^2}$

β) $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right) : \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

γ) $\left(\dfrac{x^3}{8} - \dfrac{8}{x^3}\right) : \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right)$

δ) $\left(\mu^4 - \dfrac{1}{\mu^2}\right) \cdot \dfrac{1}{\mu^2 + \dfrac{1}{\mu}}$

ε) $\left(\dfrac{2x+y}{x+y} + \dfrac{2y+x}{x-y} - \dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Λύση

α) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y} : \dfrac{\alpha+\beta}{(x-y)^2} =$

$= \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y} \cdot \dfrac{(x-y)^2}{\alpha+\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 \cdot (x-y)^2}{(x-y)\cdot(\alpha+\beta)} =$

$= (\alpha+\beta)\cdot(x-y)$

β) $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right) : \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} =$

$= \dfrac{\alpha(\alpha-2\beta)+\alpha(\alpha+2\beta)}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)} \cdot \dfrac{\alpha^2-4\beta^2}{2\alpha^2} =$

$= \dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\alpha^2+2\alpha\beta}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)} \cdot \dfrac{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)}{2\alpha^2} =$

$= \dfrac{2\alpha^2\cdot(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)\cdot 2\alpha^2} = 1$

γ) $\left(\dfrac{x^3}{8} - \dfrac{8}{x^3}\right) : \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{x^6-8^2}{8x^3} : \dfrac{x^2-4}{2x} =$

$= \dfrac{(x^3-8)(x^3+8)}{8x^3} \cdot \dfrac{2x}{x^2-4} =$

$= \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)}{8x^3} \cdot \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)} =$

$= \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)\cdot 2x}{8x^3\cdot(x-2)(x+2)} =$

$= \dfrac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{4x^2}$

δ) $\left(\mu^4 - \dfrac{1}{\mu^2}\right) \cdot \dfrac{1}{\mu^2+\dfrac{1}{\mu}} = \dfrac{\mu^6-1}{\mu^2} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\mu^3+1}{\mu}} =$

$= \dfrac{(\mu^3-1)(\mu^3+1)}{\mu^2} \cdot \dfrac{\mu}{\mu^3+1} =$

$= \dfrac{(\mu^3-1)(\mu^3+1)\cdot\mu}{\mu^2\cdot(\mu^3+1)} = \dfrac{\mu^3-1}{\mu}$

ε) $\left(\dfrac{2x+y}{x+y} + \dfrac{2y+x}{x-y} - \dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} =$

$= \left(\dfrac{2x+y}{x+y} + \dfrac{2y+x}{x-y} - \dfrac{x^2}{(x-y)(x+y)}\right) \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{(2x+y)(x-y)+(2y+x)(x+y)-x^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \dfrac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{2x^2-2xy+xy-y^2+2xy+2y^2+x^2+xy-x^2}{(x-y)(x+y)} \cdot$

$\cdot \dfrac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{2x^2+2xy+y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \dfrac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{(2x^2+2xy+y^2)\cdot(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)\cdot(x^2+y^2)} =$

$= \dfrac{2x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$

7. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}} - \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}}$

β) $\dfrac{1-x}{1-x+x^2} - \dfrac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)}{\dfrac{1}{x^3}+1}$

Λύση

α) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{1+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}} - \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta}{1-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}} =$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{\dfrac{\alpha-\beta+\beta}{\alpha-\beta}}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta}{\dfrac{\alpha+\beta-\beta}{\alpha+\beta}}} =$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta}{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta}{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}}} =$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \dfrac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \dfrac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\dfrac{\alpha^2-\beta(\alpha-\beta)}{\alpha}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\dfrac{\alpha^2+\beta(\alpha+\beta)}{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha^2-\beta(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha^2+\beta(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta} - \frac{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta} =$$

$$= \alpha(\alpha+\beta) - \alpha(\alpha-\beta) =$$

$$= \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2 + \alpha\beta = 2\alpha\beta$$

β) $$\frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)}{\dfrac{1}{x^3}+1} =$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1-2x}{x}}{\dfrac{1+x^3}{x^3}} =$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{\dfrac{1-2x}{x^2}}{\dfrac{1+x^3}{x^3}} =$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{x^3(1-2x)}{x^2(1+x^3)} =$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{x(1-2x)}{1+x^3} =$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} - \frac{x-2x^2}{(1+x)(1-x+x^2)} =$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)-(x-2x^2)}{(1+x)(1-x+x^2)} =$$

$$= \frac{1-x^2-x+2x^2}{(1+x)(1-x+x^2)} =$$

$$= \frac{1-x+x^2}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{1+x}$$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{4}{x+2}$

β) $\dfrac{5-x}{5+x} - \dfrac{5+x}{5-x} + \dfrac{1}{x^2-25}$

γ) $\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2+4\alpha+3} + \dfrac{1}{\alpha(\alpha+3)}$

Λύση

α) $$\frac{5}{x-2} + \frac{4}{x+2} =$$

$$= \frac{5(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \ldots.$$

β) $$\frac{5-x}{5+x} - \frac{5+x}{5-x} + \frac{1}{x^2-25} =$$

$$= \frac{5-x}{5+x} - \frac{5+x}{5-x} - \frac{1}{25-x^2} =$$

$$= \frac{5-x}{5+x} - \frac{5+x}{5-x} - \frac{1}{(5+x)(5-x)} = \ldots.$$

γ) ....

2. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y}\right) : \left(\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{x+y}\right)$

β) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$

γ) $\left(\frac{2}{3x} - x + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$

δ) $\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \cdot (x+y)$

Λύση

α) $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) =$

$= \frac{x\,(x-y) + y\,(x+y)}{(x-y)\,(x+y)} : \frac{x\,(x+y) - y\,(x-y)}{(x-y)\,(x+y)} =$

$= \ldots.$

β) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{x^2y^2}{x^2-y^2} =$

$= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{x^2y^2}{(x-y)\,(x+y)} = \ldots.$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}}$

β) $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$

γ) $\dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$

δ) $\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}} + \dfrac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \dfrac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$

ε) $\dfrac{1}{\alpha + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2\alpha}{1-\alpha}}}$

στ) $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\alpha - \beta} + \dfrac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2}{\alpha + \beta}$

Λύση

α) $\dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1+x}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{x\,(1+x)}{x+1} = \ldots.$

β) $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \ldots.$

γ) $\dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} = \dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}}{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} = \ldots.$

δ) ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x^2-5x+6}$

β) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

2. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{x^2-y^2}$

β) $\frac{7}{2\,(x+1)} - \frac{1}{6\,(x-1)} - \frac{10x-1}{3\,(x^2+x+1)}$

γ) $\frac{1}{20x+x^2} - \frac{1}{20x-x^2} - \frac{2}{x^2-4\alpha^2}$

3. Ομοίως να γίνουν οι πράξεις:

α) $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^2\beta-\beta^3} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3} + \frac{2\beta}{\beta^2-\alpha^2} - \frac{3}{\alpha+\beta}$

β) $\frac{1-2x}{3(x^2-2x+1)} + \frac{1+x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{6(x-1)}$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{x-2}{\alpha-2}+\dfrac{x+2}{\alpha+2}+\dfrac{\alpha x+4}{\alpha^2-4}$

β) $\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}+\dfrac{1}{\frac{x}{3}-1}-\dfrac{2}{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}$

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}\right):\left(\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}\right)$

β) $\dfrac{2}{1-x^2}:\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

γ) $\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3x}-x+\dfrac{x}{3}\right)$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right)(x+y)\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}$

β) $\left(\dfrac{\varkappa^2+\lambda^2}{\lambda}-\varkappa\right)\dfrac{\varkappa^2-\lambda^2}{\varkappa^2+\lambda^2}:\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\varkappa}\right)$

γ) $\left(\alpha^2-2\alpha+1+\dfrac{1-\alpha^4}{1+\alpha-2\alpha}\right):\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$

7. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}}-\left(\dfrac{1}{x}\cdot y\right)^2$

β) $\dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{1}{\alpha+\dfrac{1}{2+\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}+\dfrac{2}{\alpha+1}$

β) $\dfrac{\frac{1}{\alpha^2-1}}{1-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}}+\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha-1}$

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα των μονωνύμων:
α) $4x^2y,\ -2x^2y,\ 3x^2y$

β) $\frac{1}{2}\alpha^3\beta^2,\quad \frac{1}{3}\alpha^3\beta^2,\ -\ \frac{5}{6}\alpha^3\beta^2$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\varkappa$ ώστε η παρακάτω αλγεβρική παράσταση να είναι μονώνυμο ως προς x
$(3\varkappa+1)x+(2\varkappa-5)xy^3$.
Στη συνέχεια να βρείτε το συντελεστή του μονωνύμου που προκύπτει.

3. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
α) $2\alpha^3xy\cdot(-5\alpha^2x^3y^2)\cdot(-4\alpha xy^3)$

β) $\frac{3}{2}\alpha x^3y\cdot\left(-\ \frac{2}{3}\alpha x\beta y\right)\cdot\ \frac{1}{5}$

γ) $(2\ \alpha^{\nu}\beta^{\mu})^2\cdot(-3\ \ \alpha^{\nu+1}\beta)^3\cdot\left(-\ \frac{1}{2}\alpha\beta\right)$

δ) $\frac{3}{5}\ \alpha^{x+1}\beta^{y-2}\omega\cdot\left(-\ \frac{1}{2}\ \alpha^{x-1}\beta^{y}\omega\right)^2$

4. Για ποια τιμή του λ τα παρακάτω μονώνυμα είναι:
α) ίσα; , β) αντίθετα;
$(3\lambda-1)x^3y,\quad (2\lambda-5)x^3y$.
Ποια πρέπει να είναι η τιμή του λ σε κάθε περίπτωση ώστε τα μονώνυμα να είναι μηδενικά;

5. Να αντικαταστήσετε τα αστερά-

κια με τα κατάλληλα μονώνυμα:

α) $4x^5y^2 + * + 3x^5y^2 - 7x^5y^2 + 4x^5y^2 = 2x^5y^2$

β) $12\alpha^3\beta + * - 12\alpha^3\beta + 8\alpha\beta^3 + * = 5\alpha^3\beta$

6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα (αναγωγή ομοίων όρων)

α) $3xy^3 - 2xy^2 + 4xy^3 - 7xy^2$

β) $\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2 + 3\alpha^2\beta\gamma - 6\alpha\beta\gamma^2 - 7$

γ) $(\frac{1}{3}xy^2)^2 - \frac{1}{4}x^2y^4 - 5xy^3$

δ) $\frac{1}{2}x^{\mu}y^{\nu} + \frac{2}{3}x^{\nu}y^{\mu} - \frac{1}{5}x^{\mu}y^{\nu} + \frac{7}{5}x^{\nu}y^{\mu}$

7. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου:

$5x^2y - 2xy^3 + 2xy - 7xy^2 - 6$,

όταν $x = (½)^{-3}$, $y = -1$.

8. Να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να κάνετε τις πράξεις στα παρακάτω πολυώνυμα:

α) $5\alpha^3 - 2 + [-3\alpha^3 + 2\alpha^2 - (7\alpha + 5\alpha^4)] - [2\alpha^3 + 3\alpha^2 - (4\alpha^3 - 1)]$

β) $18x^3y - 3 \cdot [x^3y^2 + 2(xy - 1)] - 4xy^3(2xy - 1)$

γ) $-15x^2y^6 + (2xy^3)^2 - 4[xy - 2(xy - 1)] + 3$

δ) $5\alpha\beta\{-2\alpha\beta[3\alpha\beta(2\alpha\beta - 1)]\}$

9. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$3\sigma\tau^2 - 6\sigma^2\tau + (\kappa - \lambda)\sigma\tau + (2\lambda - \kappa)\sigma$,

$(\alpha - \beta)\sigma\tau^2 - (2\alpha + \beta)\sigma^2\tau + 3\sigma\tau - 2\sigma$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, κ, λ ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

10. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(2xy - 3)(3xy^2 - 2) + 4(xy - 1)(2 - xy)$

β) $(x - y)(x + y) - 2xy(x - y)(x - 3y)$

γ) $15x^3y^2\omega(2xy - 1) + (3x^2y + 2xy^2 - 5x)(x - 1)$

δ) $(2xy - \omega)(3xy - 2\omega) + 5x(x^2 - 1)(y - 2 + 3\omega)$

11. Να αναπτυχθούν οι ταυτότητες:

α) $(x + 2y)^2$, β) $(3x^2 - 1)^2$,

γ) $(2xy^2 - \omega)^2$, δ) $(-3x + 2\omega)^2$,

ε) $(-2\alpha\beta^2 - 3)^2$, στ) $(x - 2y)^3$,

ζ) $(-x + 3y)^3$, η) $(2x^2\omega + 1)^3$,

θ) $(x + y - \omega)^2$, ι) $\alpha^3 + 27$,

ια) $\alpha^3\beta^6 - 8$, ιβ) $\alpha^6 - \beta^6$

12. Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $2\alpha^2 + \frac{3}{\alpha^3} + \frac{2}{\alpha^2} + 3\alpha^3$.

13. Να γίνουν οι απλουστεύσεις των άρρητων παραστάσεων:

α) $8 - 2\sqrt{7}$, β) $7 - 4\sqrt{3}$, γ) $2(4 - \sqrt{15})$,

δ) $38 - 12\sqrt{10}$, ε) $120 + 30\sqrt{15}$,

στ) $9 + 2\sqrt{14}$

14. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $x^3 - 3\alpha^2x + 2\alpha^3$

β) $(c + t)^3 - c^3 - t^3$

γ) $x(x - 7) + 12$

δ) $(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2$

ε) $\alpha^4 + 4\beta^4 - 13\alpha^2\beta^2$

15. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα:

α) $x^2 - 3x + 2$

β) $3x^2 - 15x + 18$

γ) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})x + \sqrt{5}$

δ) $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha^2\beta x + \alpha^2\beta^2$

ε) $x^2 - 7|x| - 18$

στ) $64x^4 - 52x^2 + 9$

16. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

β) $3x^3 - 22x^2 + 48x - 32$

γ) $4x^3 + 13x^2 - 13x - 4$

δ) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$

17. Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3x^3}{6xy}$, β) $\frac{5\alpha\beta x}{30\beta\gamma x}$, γ) $\frac{-12\alpha^3\beta\ x^4}{36\alpha^2\beta^2x^3}$

δ) $\frac{63\alpha^3\beta^2x}{45\alpha^4\beta x^2}$

18. *Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα:*

α) $\dfrac{\alpha+\alpha\beta}{\beta+\beta^2}$, β) $\dfrac{3\alpha x+6\alpha^2}{5\beta x+10\alpha\beta}$,

γ) $\dfrac{7\alpha-7\beta-7\gamma}{35\alpha-35\beta-35\gamma}$, δ) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$,

ε) $\dfrac{6\mu+6}{3\mu^2+6\mu+3}$, στ) $\dfrac{4\alpha^2-9\beta^2}{12\alpha x+18\beta x}$

19. *Να υπολογιστούν τα παρακάτω αλγεβρικά αθροίσματα:*

α) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}$

β) $\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}-5+\dfrac{3\alpha\beta-\beta^2}{\beta^2}$

γ) $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma\alpha}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$

δ) $\dfrac{30\alpha}{9\alpha^2-1}+\dfrac{4}{3\alpha-1}-\dfrac{5}{3\alpha+1}$

ε) $\dfrac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3\alpha^2-3\beta^2}+\dfrac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{7}{3\alpha+3\beta}$

στ) $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$

20. *Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:*

α) $\dfrac{2\alpha}{3\beta}\cdot\dfrac{6\beta\gamma}{5\alpha^3}$

β) $\dfrac{\alpha^2\beta^2-9}{4\nu^3-\nu}\cdot\dfrac{2\nu^2+\nu}{\alpha\beta+3}$

γ) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$

δ) $\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta+\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\cdot\dfrac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}$

ε) $\dfrac{\mu^3-\nu^3}{\mu^3+\nu^3}\cdot\dfrac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\cdot\dfrac{\mu^2-\mu\nu+\nu^2}{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}$

στ) $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^2$

21. *Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:*

α) $\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

β) $\dfrac{\alpha x}{\alpha+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{x}\right)$

γ) $\left(\alpha+\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\cdot\alpha$

δ) $\dfrac{2x}{2y-\alpha}\cdot\left(\dfrac{y+\alpha}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

ε) $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

22. *Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:*

α) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4xy}$

β) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\dfrac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right)\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}$

γ) $\dfrac{1-x^2}{1+2y+y^2}\cdot\dfrac{1-y^2}{y^2+2xy+x^2}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x}{1-y}\right)$

23. *Να γίνουν οι πράξεις:*

α) $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

β) $\left(2-\alpha+\dfrac{2\alpha^2}{2+\alpha}\right):\dfrac{4\beta+\alpha^2\beta}{\alpha^2x-4x}$

γ) $\left(\dfrac{2x+y}{x+y}+\dfrac{2y+x}{x-y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

δ) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x}{1+x}\right)$

ε) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right):\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

24. *Να απλοποιηθούν τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:*

α) $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{2\alpha}-\dfrac{2x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha+x}{2x}-\dfrac{2\alpha}{\alpha+x}}$ β) $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}{1-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

γ) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}}$

δ) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}$ ε) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2+\dfrac{2x}{1-x}}}$

στ) $\dfrac{1+\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}}{\dfrac{\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}-1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}}}$

25. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1}-\dfrac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}$

β) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-\omega}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y-\omega}}\left(1-\dfrac{y^2+\omega^2-x^2}{2y\omega}\right)$

γ) $\dfrac{\dfrac{1+xy}{1-xy}+\dfrac{1-xy}{1+xy}}{\dfrac{1+xy}{1-xy}-\dfrac{1-xy}{1+xy}}+\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

δ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta+\gamma}}\cdot\left(1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)$

26. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

α) $2(x^2+1)^2=(x^2-2x-1)^2+$
$+(x^2+2x-1)^2$

β) $[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]^2=$
$=2[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4]$

γ) $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$
(Cauchy)

δ) $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)^3=\alpha^3(\alpha^3-2\beta^3)^3+$
$+\beta^3(2\alpha^3-\beta^3)^3$

ε) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$
$=3\alpha\beta\gamma$

στ) Αν $\alpha+\beta+\gamma=\tau$ τότε
$(\tau-3\alpha)^3+(\tau-3\beta)^3+(\tau-3\gamma)^3=$
$=3(\tau-3\alpha)\cdot(\tau-3\beta)\cdot(\tau-3\gamma)$

27. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

28. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο παραστάσεων που κάθε μια είναι άθροισμα δύο τετραγώνων είναι επίσης άθροισμα δύο τετραγώνων.

29. Να αποδείξετε ότι αν ένας αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα δύο τετραγώνων, και το διπλάσιό του θα είναι άθροισμα τελείων τετραγώνων.

30. Αν $\alpha^2+\beta^2<\gamma^2$ να δείξετε ότι $\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2-\beta^2)$ είναι πάντοτε αριθμός αρνητικός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

BASIC 2

Ας επιχειρήσουμε τώρα να γράψουμε στον υπολογιστή τα εξής:

```
10 PRINT (2 + 10)/3     (↵)
20 PRINT 3 ↑ 2 - 6      (↵)
30 END                  (↵)
```

[Κάθε φορά που τελειώνει μια γραμμή πατάμε RETURN (ή ENTER) (↵)].

Να προσέξουμε ότι:

- Κάθε γραμμή αποτελείται από μια εντολή και όλες μαζί φτιάχνουν ένα πρόγραμμα.
- Οι αριθμοί στην αρχή κάθε γραμμής είναι απαραίτητοι για να βάζει ο υπολογιστής σε μια σειρά τις δουλειές που έχει να κάνει.
- Η εντολή PRINT στο παραπάνω πρόγραμμα σημαίνει «υπολόγισε και τύπωσε το αποτέλεσμα».
- Η τελευταία εντολή END (τέλος προγράμματος) δεν είναι απαραίτητη σε πολλούς υπολογιστές.

Στη συνέχεια πληκτρολογούμε:

RUN (↵)

Η εντολή RUN (τρέξε το πρόγραμμα) δεν έχει μπροστά αριθμό γραμμής γι' αυτό τη λέμε «Διαταγή».

Τώρα η οθόνη δείχνει 4 (το αποτέλεσμα της γραμμής 10) και από κάτω 3 (το αποτέλεσμα της γραμμής 20).

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις που ετοιμάσατε στο κομμάτι BASIC 1.

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα υπολογίζει και θα τυπώνει τις παραστάσεις:

α) $23 \cdot 19 - 4 \cdot 5$

β) $(13 - 4) \cdot 5 - 15$

γ) $(12 \cdot 3 - 4 \cdot 5)^2 - 2 \cdot 5$

δ) $\dfrac{(17 - 4) \cdot 12}{15 + 3 \cdot 7^3}$

ε) $12^7 - 3^5 + 5 \cdot 7^3 - 2 \cdot 8^{12}$

BASIC 3

Έστω η παράσταση $2x^2 - 1$. Στη μεταβλητή x μπορούμε να δώσουμε όποια τιμή θέλουμε.

Έτσι για παράδειγμα, αν x = 3 τότε η παράσταση γίνεται:
$2 \cdot 3^2 - 1$ που είναι ίση με 17.
Θα μπορούσαμε δηλαδή να γράψουμε στον υπολογιστή:

```
10 PRINT 2*3↑2-1   (↵)
   RUN             (↵)
```

Και ο υπολογιστής θα δείξει στην οθόνη 17.
Αν όμως θέλαμε να υπολογίσουμε την τιμή για x = 5 έπρεπε να φτιάξουμε άλλο πρόγραμμα. Από τον κόπο αυτό μας απαλάσσει η εντολή INPUT. Όποτε χρησιμοποιούμε αυτή την εντολή ο υπολογιστής -αφού τρέξουμε το πρόγραμμα- περιμένει να του ορίσουμε την τιμή του x και μετά κάνει τον υπολογισμό.
Δηλαδή:

```
10 INPUT x         (↵)
20 PRINT 2*x ↑2-1  (↵)
   RUN             (↵)
```

Μετά το RUN που δώσαμε ο υπολογιστής εκτελεί την πρώτη εντολή, δηλαδή τη γραμμή 10. Σύμφωνα με την εντολή αυτή ο υπολογιστής περιμένει να του δώσουμε μια τιμή για τη μεταβλητή x. Έτσι μέχρι να δώσουμε την τιμή του x δεν θα γίνει τίποτε. Αν δώσουμε x = 3 τότε θα εμφανιστεί το αποτέλεσμα (17). Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μια ακόμα γραμμή

```
30 GO TO 10        (↵)
```

και μετά

```
   RUN             (↵)
```

Τώρα -όσοι γνωρίζουν αγγλικά, το κατάλαβαν- το πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Προσέξτε γιατί:
Ο υπολογιστής περιμένει μια τιμή στο x (λόγω της γραμμής 10), τη δίνουμε και αμέσως την υπολογίζει και την εμφανίζει στην οθόνη (λόγω της γραμμής 20). Μετά προχωράει στη γραμμή 30 η οποία του λέει να πάει ξανά στη 10 (GO TO σημαίνει πήγαινε στη), όποτε περιμένει πάλι μια άλλη τιμή στο x που θα δώσουμε.

Ασκήσεις

1. Μπορούμε τώρα για μεγαλύτερη εξάσκηση να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να δίνει τη τιμή των παραστάσεων:

α) $2x^3 + 5$
β) $x^3 - 2x + 1$
γ) $15x^2 - 12x + 7$
όταν το x παίρνει όποια τιμή θέλουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι λέγεται εξίσωση 1ου βαθμού (ή πρωτοβάθμια εξίσωση) με έναν άγνωστο;

1. Εξίσωση 1ου βαθμού λέγεται κάθε ισότητα, που περιέχει έναν άγνωστο (συνήθως το x) στην πρώτη δύναμη. Δηλαδή κάθε ισότητα της μορφής: $\alpha x = \beta$, όπου α, β γνωστοί πραγματικοί αριθμοί.

Π.χ. Η ισότητα $3x + 4 = 13$ είναι μια εξίσωση πρώτου βαθμού με άγνωστο το γράμμα x και αληθεύει μόνο όταν $x = 3$.

2. Τι λέγεται εξίσωση με δύο αγνώστους (ή γραμμική εξίσωση);

2. Εξίσωση με δύο αγνώστους λέγεται κάθε ισότητα της μορφής: $\alpha x + \beta y = \gamma$ όπου α, β, γ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί και x, y δύο μεταβλητές που ζητάμε να προσδιορίσουμε ώστε να ισχύει η ισότητα. Επειδή σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί και μία ορισμένη τιμή του y συμπεραίνουμε ότι κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους έχει άπειρα το πλήθος ζεύγη λύσεων τα οποία αν παραστήσουμε με σημεία του επιπέδου θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Γι' αυτό η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ λέγεται και **γραμμική εξίσωση**.

Βήματα επίλυσης εξίσωσης 1ου βαθμού

Για να λύσουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού μ' έναν άγνωστο ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα έχοντας υπόψη μας ότι το μέρος της εξίσωσης που βρίσκεται αριστερά του « = » λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης και το μέρος που βρίσκεται δεξιά του « = » λέγεται **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης.

Βήμα 1ο: Απαλείφουμε τους παρονομαστές, αν υπάρχουν, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών.

Βήμα 2ο: Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς, αν υπάρχουν, με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.
Βήμα 3ο: Χωρίζουμε τους γνωστούς όρους από τους άγνωστους όρους μεταφέροντας τους άγνωστους στο 1ο μέλος και τους γνωστούς στο 2ο μέλος της εξίσωσης. Προσέχουμε ώστε να αλλάζουμε το πρόσημο κάθε όρου που μεταφέρεται από το ένα μέλος στο άλλο.
Βήμα 4ο: Κάνουμε αναγωγή των ομοίων όρων.
Βήμα 5ο: Διαιρούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου (αρκεί αυτός να είναι διάφορος του μηδενός).

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{3}-\frac{x+4}{4}=\frac{x+7}{2}-4$$

Λύση

$$\frac{3x-1}{3}-\frac{x+4}{4}=\frac{x+7}{2}-4$$

[πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι το 12]

$$12\cdot\frac{3x-1}{3}-12\cdot\frac{x+4}{4}=12\cdot\frac{x+7}{2}-12\cdot 4$$

$4\cdot(3x-1)-3\cdot(x+4)=6\cdot(x+7)-48$
[εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς]
$12x-4-3x-12=6x+42-48$
[χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους]
$12x-3x-6x=42-48+4+12$
[αναγωγή ομοίων όρων]
$3x=10$
[διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 3]

$$\frac{3x}{3}=\frac{10}{3} \text{ ή } x=\frac{10}{3}$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι το $x = 10/3$.

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x+\frac{9x-1}{3}=4x+2$$

Λύση

Έχουμε: $x+\frac{9x-1}{3}=4x+2$

$$3\cdot x+3\cdot\frac{9x-1}{3}=3\cdot(4x+2)$$

$3x+9x-1=3\cdot(4x+2)$
$3x+9x-1=12x+6$
$3x+9x-12x=6+1$
$0x=7$
Επειδή το γινόμενο κάθε αριθμού x επί μηδέν είναι ίσο με το μηδέν και όχι ίσο με 7 συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση δεν έχει λύση δηλαδή είναι **αδύνατη**.

4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τα γνωστά βήματα, έχουμε:

$$\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$$

$$6\cdot\frac{x+6}{2}+6\cdot\frac{2(x+17)}{3}+6\cdot\frac{5(x-10)}{6}=6\cdot(2x+6)$$

$3(x+6)+2\cdot[2(x+17)]+5(x-10)=$
$=6(2x+6)$
$3x+18+4(x+17)+5x-50=12x+36$
$3x+18+4x+68+5x-50=12x+36$
$3x+4x+5x-12x=36+50-68-18$
$12x-12x=86-86$
$0x=0$

Επειδή κάθε αριθμός x αν πολλαπλασιαστεί με το μηδέν δίνει γινόμενο μηδέν συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει λύση οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση είναι **αόριστη** (ή **ταυτότητα**).

5. Να βρείτε 3 ζεύγη λύσεων της εξίσωσης: - 2x + 7y = 5.

Λύση

Δίνοντας τιμές στη μεταβλητή x βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y.

Για x = 1 έχουμε διαδοχικά:

$-2 \cdot 1 + 7y = 5$

$-2 + 7y = 5$

$7y = 5 + 2$

$7y = 7$

$\frac{7y}{7} = \frac{7}{7}$

y = 1 άρα το ζεύγος (1, 1) είναι μία λύση της εξίσωσης.

Όμοια για x = 8 έχουμε διαδοχικά:

$-2 \cdot 8 + 7y = 5$

$-16 + 7y = 5$

$7y = 5 + 16$

$7y = 21$

$\frac{7y}{7} = \frac{21}{7}$

y = 3 άρα το ζεύγος (8, 3) είναι μία λύση της εξίσωσης.

Για x = 15 έχουμε διαδοχικά:

$-2 \cdot 15 + 7y = 5$

$-30 + 7y = 5$

$7y = 5 + 30$

$7y = 35$

$\frac{7y}{7} = \frac{35}{7}$

y = 5. Άρα το ζεύγος (15, 5) είναι μία λύση της εξίσωσης.

6. Δίνεται η εξίσωση 4x - y = 2.
α) Να βρείτε 5 ζεύγη λύσεων της εξίσωσης.
β) Να απεικονίσετε τα ζεύγη αυτά στο επίπεδο που ορίζεται από το ορθογώνιο σύστημα αξόνων.
γ) Να εξετάσετε αν τα ζεύγη (1/2 , 0) και (- 3, - 16) είναι λύσεις της εξίσωσης.

Λύση

α) Δίνουμε 5 αυθαίρετες τιμές στη μεταβλητή x και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y.

Για x = 0 έχουμε:

$4 \cdot 0 - y = 2$ ή $-y = 2$ ή $y = -2$

Για x = 1 έχουμε:

$4 \cdot 1 - y = 2$ ή $4 - y = 2$ ή $-y = 2 - 4$ ή $-y = -2$ ή $y = 2$

Για x = 2 έχουμε:

$4 \cdot 2 - y = 2$ ή $8 - y = 2$ ή $-y = 2 - 8$ ή $-y = -6$ ή $y = 6$

Για x = - 1 έχουμε:

$4 \cdot (-1) - y = 2$ ή $-4 - y = 2$ ή $-y = 2 + 4$ ή $-y = 6$ ή $y = -6$

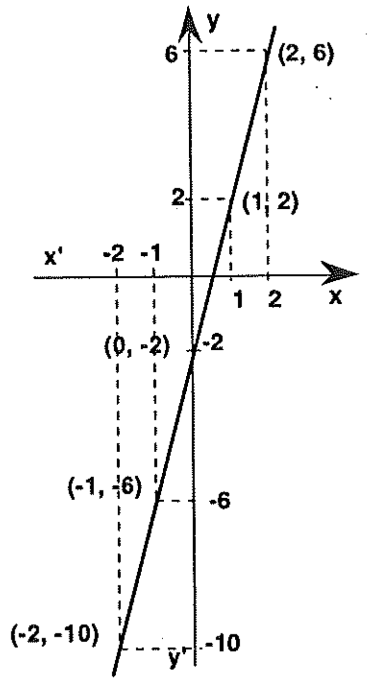
Για x = - 2 έχουμε:

$4 \cdot (-2) - y = 2$ ή $-8 - y = 2$ ή $-y = 2 + 8$ ή $-y = 10$ ή $y = -10$

Άρα τα ζεύγη (0, - 2), (1, 2), (2, 6), (- 1, - 6), (- 2, - 10) είναι λύσεις της εξίσωσης.

β) Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και απεικονίζουμε σε αυτό τα παραπάνω ζεύγη.

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης 4x - y = 2 βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



γ) Για $x = 1/2$ και $y = 0$ βρίσκουμε ότι: $4 \cdot 1/2 - 0 = 4/2 = 2$. Άρα το ζεύγος $(1/2, 0)$ επαληθεύει την εξίσωση $4x - y = 2$ οπότε είναι λύση της.
Για $x = -3$ και $y = -16$ βρίσκουμε ότι: $4 \cdot (-3) - (-16) = -12 + 16 = 4 \neq 2$. Άρα το ζεύγος $(-3, -16)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση που σημαίνει ότι το ζεύγος $(-3, -16)$ δεν είναι λύση της εξίσωσης.

7. Το άθροισμα τριών αριθμών είναι 44. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς αν γνωρίζετε ότι ο δεύτερος αριθμός είναι 3/πλάσιος του πρώτου και ο τρίτος είναι μικρότερος κατά 12 από το δεύτερο.

Λύση

Αν παραστήσουμε με x τον πρώτο αριθμό τότε ο δεύτερος είναι 3x και ο τρίτος 3x -12. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύει:
$x + 3x + (3x - 12) = 44$ ή
$x + 3x + 3x - 12 = 44$ ή
$x + 3x + 3x = 44 + 12$ ή
$7x = 56$ ή
$\frac{7x}{7} = \frac{56}{7}$ ή
$x = 8$
Επομένως ο πρώτος αριθμός είναι 8 ο δεύτερος είναι $3 \cdot 8 = 24$ και ο τρίτος είναι $24 - 12 = 12$.

8. Να βρείτε ένα διψήφιο αριθμό, αν γνωρίζετε ότι το ψηφίο των δεκάδων του είναι ίσο με τα 2/3 του ψηφίου των μονάδων και ότι αν αλλάξουμε τη σειρά των ψηφίων προκύπτει ένας άλλος διψήφιος αριθμός κατά 27 μεγαλύτερος του πρώτου.

Λύση

Έστω x το ψηφίο των δεκάδων και y το ψηφίο των μονάδων του ζητούμενου διψήφιου αριθμού. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύει: $x = 2/3 \cdot y$.
Ο αριθμός που έχει x δεκάδες και y μονάδες γράφεται $10x + y$. Αν αλλάξουμε τη σειρά των ψηφίων του τότε ο αριθμός γίνεται $10y + x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος οι δύο αριθμοί συνδέονται με την ισότητα $10y + x = (10x + y) + 27$ η οποία είναι μία εξίσωση με δύο αγνώστους.
Λύνουμε την εξίσωση:
$10y + x = (10x + y) + 27$ ή
$10y + x = 10x + y + 27$ ή
$10y + x - 10x - y = 27$ ή
$9y - 9x = 27$ ή
$9(y - x) = 27$ ή
$\frac{9(y - x)}{9} = \frac{27}{9}$ ή
$y - x = 3$ (1)
Αντικαθιστούμε το x με την τιμή $x = 2/3 \cdot y$ οπότε η (1) γίνεται:
$y - \frac{2}{3}y = 3$ ή $3y - 3 \cdot \frac{2}{3}y = 3 \cdot 3$ ή
$3y - 2y = 9$ ή $y = 9$.
Από την ισότητα (1) με αντικατάσταση της τιμής $y = 9$ έχουμε: $9 - x = 3$ ή $-x = 3 - 9$ ή $-x = -6$ ή $x = 6$. Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 69.

9. Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς x και y που επαληθεύουν την εξίσωση:
α) $3x + 5y = -12$, β) $4x - 2y = 7$.

Λύση

α) Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα.
Λύνουμε την εξίσωση ως προς x.

$3x + 5y = -12$

$3x = -12 - 5y$

$$x = \frac{-12 - 5y}{3}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε παρονομαστη τον αριθμό 3 γι' αυτό θέτουμε διαδοχικά στη θέση του y τις τιμές 0, 1, 2.

Για $y = 0$ έχουμε $x = \frac{-12 - 5\cdot 0}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

Για $y=1$ έχουμε $x = \frac{-12 - 5\cdot 1}{3} = \frac{-12-5}{3} = \frac{-17}{3}$

Για $y=2$ έχουμε $x = \frac{-12 - 5\cdot 2}{3} = \frac{-12-10}{3} = \frac{-22}{3}$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι μία ακέραια λύση της εξίσωσης είναι το ζεύγος (-4, 0) (Δεν είναι η μόνη).

β) Όμοια και εδώ λύνουμε την εξίσωση ως προς x.

$4x - 2y = 7$

$4x = 7 + 2y$

$$x = \frac{7 + 2y}{4}$$

Ο παρονομαστής είναι ο αριθμός 4, άρα θέτουμε διαδοχικά στη θέση του y τις τιμές 0, 1, 2, 3.

Για $y=0$ έχουμε $x = \frac{7+2\cdot 0}{4} = \frac{7}{4}$

Για $y=1$ έχουμε $x = \frac{7+2\cdot 1}{4} = \frac{7+2}{4} = \frac{9}{4}$

Για $y=2$ έχουμε $x = \frac{7+2\cdot 2}{4} = \frac{7+4}{4} = \frac{11}{4}$

Για $y=3$ έχουμε $x = \frac{7+2\cdot 3}{4} = \frac{7+6}{4} = \frac{13}{4}$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $4x - 2y = 7$ δεν έχει καμμία ακέραια λύση.

10. Να αναλύσετε το κλάσμα 1/12 σε άθροισμα δύο άλλων κλασμάτων που έχουν παρονομαστές 6 και 4 αντίστοιχα και αριθμητές ακέραιους.

Λύση

Έστω ότι τα ζητούμενα κλάσματα είναι $\frac{x}{6}$ και $\frac{y}{4}$. Τότε θα έχουμε:

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{1}{12}$

$12 \cdot \frac{x}{6} + 12 \cdot \frac{y}{4} = 12 \cdot \frac{1}{12}$

$2x + 3y = 1$ [Λύνουμε ως προς x]

$2x = 1 - 3y$

$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$

Ο παρονομαστής είναι ο αριθμός 2, άρα θέτουμε $y = 0, 1$.

Για $y=0$ έχουμε $x = \frac{1 - 3\cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$

Για $y=1$ έχουμε $x = \frac{1 - 3\cdot 1}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Το ζεύγος (-1, 1) είναι λύση της εξίσωσης $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{1}{12}$ άρα τα ζητούμενα κλάσματα είναι τα $-\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{4}$. Πράγματι:

$-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

1. Να βρεθεί ένας αριθμός, τέτοιος ώστε αν από τον τριπλάσιο του αφαιρέσουμε τον αριθμό 5 να προκύπτει ο διπλάσιος του αυξημένος κατά 10.

Λύση

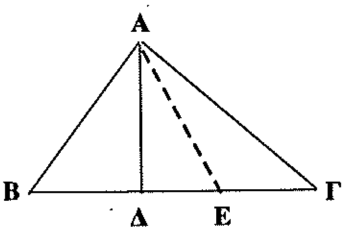
Έστω x ο ζητούμενος αριθμός τότε ο τριπλάσιος του είναι ο 3x και ο διπλάσιος του ο 2x. Συμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος θα έχουμε ....

2. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι τριπλάσιο από το πλάτος του. Αν αυξήσουμε τις διαστάσεις του κατά 2 m η περίμετρός του γίνεται 64 m. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Λύση

Έστω x το πλάτος του ορθογωνίου (παραλληλογράμμου) τότε το μήκος του είναι 3x.
Αν αυξήσουμε τις διαστάσεις του κατά 2 m, το πλάτος γίνεται x + 2 και τα μήκος 3x + 2. Οπότε ....

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = 18 m και ύψος ΑΔ = 5 m να βρεθεί η θέση ενός σημείου Ε στη ΒΓ, ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΕ να είναι τα 2/3 του εμβαδού του τριγώνου ΑΕΓ.



Λύση

Έστω x το μήκος του τμήματος ΒΕ τότε το μήκος του ΕΓ είναι 18 - x (γιατί;).
Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΕΓ έχουν κοινό ύψος ΑΔ = 5 m.
Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΕ είναι

$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 5$ ή $\frac{1}{2} \cdot 5x$ και του ΑΕΓ είναι

$\frac{1}{2} \cdot (18 - x) \cdot 5$. Σύμφωνα με το ζητούμενο του προβλήματος πρέπει .....

4. Δίνεται η εξίσωση 3x = 2 + 4y.
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα λύσεων της εξίσωσης.

x	-2	-1	0			
y				0	1	4

β) Να εξετάσετε αν τα ζεύγη (0, 0), (2, 1) και $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{16}\right)$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

Λύση

α) Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα αντικαθιστούμε το x με τις τιμές: - 2, - 1, 0 και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του y.
Όμοια αντικαθιστούμε το y με τις τιμές 0, 1, 4 και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του x.
β) .....

5. Να αναλύσετε το κλάσμα 2/15 σε άθροισμα δύο άλλων κλασμάτων που έχουν παρονομαστές 3 και 5 αντίστοιχα και αριθμητές ακέραιους.

Λύση

Έστω $\frac{x}{3}$ και $\frac{y}{5}$ τα ζητούμενα κλάσματα,

τότε $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{2}{15}$ .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. *Να λύσετε τις εξισώσεις:*

α) $-4(x-1)+2(8-x)=1-3x$

β) $3(x+1)+10-2(x-4)=21-10x$

γ) $8 \cdot [5(2-3x)-2]-x=17x-1$

δ) $\varphi-5(2\varphi-2)=45+10\varphi-3$

ε) $-5(2\omega-1)+12(2-5\omega)+\omega=-\omega$

2. *Να λύσετε τις εξισώσεις:*

α) $-[x+2(x-3)-(7x+3)]=6x$

β) $(3x+5)-[-(6x+2)-2x]=0$

γ) $x+[2(x-1)-10+2x-1]=5x+14$

3. *Να λύσετε τις εξισώσεις:*

α) $\frac{3x+4}{4}-3x=\frac{x-5}{2}$

β) $\frac{2x-1}{5}-\frac{x+3}{2}=\frac{4}{5}$

γ) $3x-7-\frac{23-x}{5}=\frac{3x}{2}$

δ) $\frac{3+x}{4}-\frac{3-x}{2}=2+\frac{5x-1}{8}$

ε) $\frac{x}{3}+5-\frac{5x}{6}=2-\frac{x}{2}$

στ) $\frac{6x}{3}+5=\frac{7+x}{2}-2x$

4. *Να λύσετε τις εξισώσεις:*

α) $\frac{7(3x+2)}{4}+\frac{2(3x-2)}{5}=\frac{x-6}{2}$

β) $\frac{5(x-10)}{6}-2x=6-\frac{x+6}{2}-\frac{2(x+17)}{3}$

γ) $\frac{x+7}{2}-(2x+\frac{x-2}{3})=5$

5. *Να λύσετε τις εξισώσεις:*

α) $\frac{2x-1}{3}-x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{6}-\frac{1}{4}$

β) $\frac{x-1}{12}-3x=\frac{x}{4}-(x-1)$

γ) $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5})=\frac{x-9}{2}$

6. *Να βρείτε έναν αριθμό ώστε αν το πενταπλάσιό του ελαττωθεί κατά 12 να είναι ίσο με το διπλάσιό του αυξημένο κατά 6.*

7. *Αν ο πατέρας είναι 36 ετών και η κόρη του είναι 13 ετών, μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια της ηλικίας της κόρης του;*

8. *Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς, x και y που να επαληθεύουν την εξίσωση:*

α) $7x+5y=18$

β) $3x-6y=11$

3.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. *Τι λέγεται εξίσωση 2ου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση μ' έναν άγνωστο;*

Απαντήσεις

1. Εξίσωση 2ου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση μ' έναν άγνωστο λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα το οποίο

ονομάζουμε **άγνωστο** (μεταβλητή), στην οποία η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου που εμφανίζεται είναι η 2η δύναμη.
Π.χ. Η εξίσωση $4x^2 - 20x = 0$ είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

2. Πώς λύνεται η εξίσωση $x^2 = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α;

2. Η εξίσωση $x^2 = \alpha$ είναι μια ειδική περίπτωση δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Εαν $\alpha > 0$ τότε: $x = \pm\sqrt{\alpha}$.

Εαν $\alpha = 0$ τότε: $x = 0$.
Εαν $\alpha < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $3x^2 - 5x = x^2 + 3x$
β) $7x^2 - 21 = 0$
γ) $7x^2 + 21 = 0$
δ) $2(3x^2 - 5) = 3(2x^2 + 1) + 4$

Λύση

α) Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή έχουμε διαδοχικά:
$3x^2 - 5x = x^2 + 3x$
$3x^2 - 5x - x^2 - 3x = 0$
[χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους]
$2x^2 - 8x = 0$
[κοινός παράγοντας ο αριθμός 2x]
$2x(x - 4) = 0$
[γινόμενο ίσο με μηδέν]
$2x = 0$ ή $x - 4 = 0$
$x = 0$ ή $x = 4$
Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 4.
β) Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.
<u>1ος τρόπος:</u>
$7x^2 - 21 = 0$
$7x^2 = 21$ [χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους]
$7x^2 : 7 = 21 : 7$ [διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου]
$x^2 = 3$ [ιδιότητα ριζών]
$x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\sqrt{3}$ και $-\sqrt{3}$. Πράγματι:
$7 \cdot (\sqrt{3})^2 - 21 = 7 \cdot 3 - 21 = 21 - 21 = 0$ και
$7 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 21 = 7 \cdot 3 - 21 = 21 - 21 = 0$

<u>2ος τρόπος:</u>
$7x^2 - 21 = 0$ [χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους]
$7x^2 = 21$ [διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου]
$7x^2 : 7 = 21 : 7$
$x^2 = 3$ ή
$x^2 - 3 = 0$ [μετασχηματίζουμε την ισότητα σε διαφορά τετραγώνων]

$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$
$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$
$x - \sqrt{3} = 0$ ή $x + \sqrt{3} = 0$
$x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$

γ) Έχουμε διαδοχικά:
$7x^2 + 21 = 0$
$7x^2 = -21$
$\frac{7x^2}{7} = -\frac{21}{7}$
$x^2 = -3$
Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση, γιατί το 1ο μέλος της είναι μη αρνητικός αριθμός (για κάθε τιμή του x) ενώ το 2ο μέλος της είναι αρνητικός αριθ-

μός. Επομένως η εξίσωση είναι **αδύνατη.**

δ) $2(3x^2 - 5) = 3(2x^2 + 1) + 4$ [επιμεριστική ιδιότητα]

$6x^2 - 10 = 6x^2 + 3 + 4$ [χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους]

$6x^2 - 6x^2 = 3 + 4 + 10$

$0x^2 = 17$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση, γιατί το 1ο μέλος της είναι ίσο με μηδέν, ενώ το 2ο μέλος της είναι ο αριθμός $17 \neq 0$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(5x - 9) \cdot (2x + 1) = 0$

β) $(2x^2 - 18) \cdot (x - 1) = 0$

γ) $-3x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = 0$

δ) $2x^2 \cdot (x^2 - x) \cdot (x^2 - 81) \cdot (3x - 1) = 0$

Λύση

α) Έχουμε διαδοχικά:

$(5x - 9) \cdot (2x + 1) = 0$ [γινόμενο ίσο με μηδέν]

$5x - 9 = 0$ ή $2x + 1 = 0$

$5x = 9$ ή $2x = -1$

$\frac{5x}{5} = \frac{9}{5}$ ή $\frac{2x}{2} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{9}{5}$ ή $x = -\frac{1}{2}$

β) Όμοια:

$(2x^2 - 18) \cdot (x - 1) = 0$

$2x^2 - 18 = 0$ ή $x - 1 = 0$

$2x^2 = 18$ ή $x = 1$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{18}{2}$

$x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0$ [διαφορά τετραγώνων]

$x^2 - 3^2 = 0$

$(x - 3) \cdot (x + 3) = 0$

$x - 3 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$x = 3$ ή $x = -3$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1, 3 και - 3.

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$-3x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = 0$

$-3x = 0$ ή $x^2 + 4 = 0$ ή $x^2 - 4 = 0$

Λύνουμε κάθε εξίσωση χωριστά.

1η: $-3x = 0$ ή $x = 0$

2η: $x^2 + 4 = 0$ ή $x^2 = -4$ αδύνατη (γιατί;)

3η: $x^2 - 4 = 0$

$(x - 2) \cdot (x + 2) = 0$

$x - 2 = 0$ ή $x + 2 = 0$

$x = 2$ ή $x = -2$

Επομένως οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0, 2 και - 2.

δ) Όμοια:

$2x^2 \cdot (x^2 - x) \cdot (x^2 - 81) \cdot (3x - 1) = 0$

$2x^2 = 0$ ή $x^2 - x = 0$ ή $x^2 - 81$ ή $3x - 1 = 0$

Οπότε διαδοχικά έχουμε:

1η: $2x^2 = 0$ ή $x = 0$

2η: $x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ ή $x - 1 = 0$

$x = 0$ ή $x = 1$

3η: $x^2 - 81 = 0$

$x^2 - 9^2 = 0$

$(x - 9)(x + 9) = 0$

$x - 9 = 0$ ή $x + 9 = 0$

$x = 9$ ή $x = -9$

4η: $3x - 1 = 0$

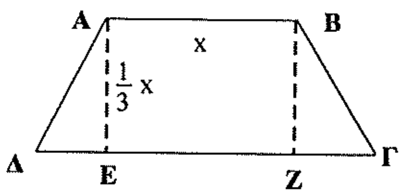
$3x = 1$

$\frac{3x}{3} = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 (διπλή), 1, 9, - 9 και 1/3.

3. Στο ισόπλευρο τραπέζιο ΑΒΓΔ με εμβαδό 8 m² η μεγάλη βάση ΓΔ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΒ. Να βρεθούν οι βάσεις και οι μη παράλληλες πλευρές του ισοπλεύρου τραπεζίου αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι το 1/3 της ΑΒ.



Λύση

Αν είναι x η μικρή βάση ΑΒ του τραπεζίου τότε η μεγάλη βάση ΓΔ είναι 2x και το ύψος ΑΕ είναι x/3.
Επειδή το εμβαδόν του ισόπλευρου τραπεζίου είναι 8 m^2, έχουμε την εξίσωση.

$$\frac{x+2x}{2}\cdot\frac{x}{3}=8 \quad [\,E_{\tau\rho\alpha\pi.}=\frac{B+\beta}{2}\cdot\upsilon]$$

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{x+2x}{2}\cdot\frac{x}{3}=8$$

$$\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{3}=8$$

$$\frac{3x^2}{6}=8$$

$$\frac{x^2}{2}=8 \text{ ή } x^2=16 \text{ ή } x^2-16=0 \text{ ή}$$

$(x-4)(x+4)=0$
από την οποία έχουμε:
$x-4=0$ ή $x+4=0$
$x=4$ ή $x=-4$
Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και - 4. Από τις λύσεις αυτές μόνο η τιμή x = 4 ικανοποιεί το πρόβλημα γιατί το ισόπλευρο τραπέζιο δεν μπορεί να έχει αρνητική πλευρά.
Οπότε η βάση ΓΔ είναι 8 m και το ύψος ΑΕ = 4/3 m.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή:
$ΑΔ^2 = ΑΕ^2 + ΔΕ^2$,

όπου $ΑΕ=\frac{x}{3}=\frac{4}{3}$ m και $ΔΕ=\frac{x}{2}=\frac{4}{2}=2$ m

Οπότε $ΑΔ^2=(\frac{4}{3})^2+2^2$

$$ΑΔ^2=\frac{16}{9}+4$$

$$ΑΔ^2=\frac{16}{9}+\frac{36}{9}$$

$$ΑΔ^2=\frac{52}{9}$$

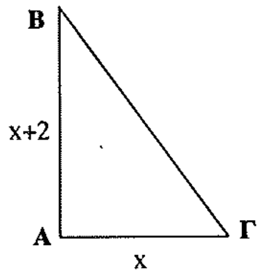
$ΑΔ=\sqrt{\frac{52}{9}}$ ή $ΑΔ=-\sqrt{\frac{52}{9}}$ απορρίπτεται

$$ΑΔ=\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{4\cdot 13}}{3}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{13}}{3}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\text{ m}$$

Άρα ΑΒ = 4 m, ΓΔ = 8 m και ΑΔ = ΒΓ =
$=\frac{2\sqrt{13}}{3}$ m

4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 12 cm^2 η μία κάθετη πλευρά του είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου.

Λύση



Αν είναι x η μικρότερη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου τότε η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά του είναι x + 2 και το εμβαδό του:

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x+2) \quad [\,E_{\tau\rho\iota\gamma.}=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ]$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος το εμβαδό του είναι 12 cm^2, επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x+2)=12 \text{ ή } \frac{x\cdot(x+2)}{2}=12 \text{ ή}$$

$x(x+2)=24$ ή $x^2+2x=24$
Η τελευταία ισότητα είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» ως εξής:
$x^2+2x=24$ ή
$x^2+2\cdot 1x=24$ ή
$x^2+2\cdot 1x+1^2-1^2=24$ [προσθέτουμε και αφαιρούμε το 1^2]
$x^2+2\cdot 1x+1^2=24+1$ [το πρώτο μέλος είναι τέλειο τετράγωνο]
$(x+1)^2=25$ ή

$(x + 1)^2 = 5^2$ οπότε

$x + 1 = 5$ ή $x + 1 = -5$

$x = 5 - 1 = 4$ ή $x = -5 - 1 = -6$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και - 6. Από τις λύσεις αυτές μόνο το 4 είναι και λύση του προβλήματος γιατί ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει πλευρά με αρνητικό μήκος.

Οπότε οι δύο κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου είναι 4 cm και 6 cm.

Με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος υπολογίζουμε και την υποτείνουσα ΒΓ. Δηλαδή:

$ΒΓ^2 = 4^2 + 6^2$ ή

$ΒΓ^2 = 16 + 36$ ή

$ΒΓ^2 = 52$ οπότε

$ΒΓ = \sqrt{52} \cong 7{,}2$ ή $ΒΓ = -\sqrt{52}$

Η τιμή $-\sqrt{52}$ απορρίπτεται (γιατί;)

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 - 8x + 6 = 0$

β) $x^2 - 8x + 15 = 0$

γ) $(x - 3)(x + 7) = x - 11$

<u>Μέθοδος:</u> Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να λύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, μ' έναν άγνωστο, με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης. Μετατρέπουμε δηλαδή τη δοσμένη δευτεροβάθμια εξίσωση σε μια εξίσωση, της οποίας το πρώτο μέλος είναι γινόμενο με πρωτοβάθμιους παράγοντες και το δεύτερο μέλος της είναι μηδέν.

Ας παρακολουθήσουμε τη διαδικασία αυτή στις παρακάτω εξισώσεις.

Λύση

α) $2x^2 - 8x + 6 = 0$ [Διαιρούμε τους όρους με 2]

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{8x}{2} + \frac{6}{2} = \frac{0}{2}$$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 3 και άθροισμα - 4. Έτσι έχουμε:

$α + β = -4$ και $α \cdot β = 3$

$α = -1$ και $β = -3$ γιατί:

$(-1) + (-3) = -4$ και $(-1) \cdot (-3) = 3$

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$x^2 + (-1 - 3)x + (-1) \cdot (-3) = 0$ ή

$(x - 1) \cdot (x - 3) = 0$ [γινόμενο ίσο με μηδέν]

$x - 1 = 0$ ή $x - 3 = 0$

$x = 1$ ή $x = 3$

β) Όμοια:

$x^2 - 8x + 15 = 0$

Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 15 και άθροισμα - 8.

Από το γινόμενο που είναι ίσο με 15 συμπεραίνουμε ότι οι δύο αριθμοί είναι ομόσημοι ενώ από το άθροισμα που είναι ίσο με - 8 συμπεραίνουμε ότι οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί.

Γινόμενο 15 έχουν οι ακέραιοι:

(- 1, - 15) και οι (- 3, - 5).

Όμως $-1 - 15 = -16 \neq -8$ και

$-3 - 5 = -8$.

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι - 3 και - 5. Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$ [γινόμενο ίσο με μηδέν]

$x - 3 = 0$ ή $x - 5 = 0$

$x = 3$ ή $x = 5$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 3 και 5.

γ) $(x - 3) \cdot (x + 7) = x - 11$

$x^2 + 7x - 3x - 21 = x - 11$

$x^2 + 4x - 21 = x - 11$

$x^2 + 4x - 21 - x + 11 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο - 10 και άθροισμα 3. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ο 5 και ο - 2.

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$(x + 5) \cdot (x - 2) = 0$

$x + 5 = 0$ ή $x - 2 = 0$

$x = -5$ ή $x = 2$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί - 5 και 2.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 = 1$
β) $x^2 = 5$
γ) $x^2 = 81$
δ) $x^2 = 21$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $x^2 = \alpha$ με $\alpha \geq 0$

τότε $x = \pm\sqrt{\alpha}$ Οπότε:

$x^2 = 1$ ή $x = \pm\sqrt{1}$ ή $x = \pm 1$ ....

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $2x^2 = 8$
β) $-3x^2 = -27$
γ) $5x^2 = 50$
δ) $4x^2 - 100 = 0$

Λύση

Όμοια:
α) $2x^2 = 8$ ή

$\frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2}$ ή $x^2 = 4$ ή $x = \pm\sqrt{4}$ ή

$x = \pm 2$

β) $-3x^2 = -27$ ή

$\frac{-3x^2}{-3} = \frac{-27}{-3}$ ή ....

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 - 3x = 0$
β) $5x^2 - 20x = 0$
γ) $-2x^2 - x = 0$
δ) $7x^2 - 6x = 0$

Λύση

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με παραγοντοποίηση.
α) $x^2 - 3x = 0$ ή
$x(x - 3) = 0$ άρα
$x = 0$ ή ($x - 3 = 0$ ή $x = 3$)
β) $5x^2 - 20x = 0$ ή
$5x(x - 4) = 0$ ή .....

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x + 6) \cdot (x - 1) = 0$
β) $x \cdot (2x - 3) \cdot (x - 8) = 0$
γ) $-3x \cdot (5x + 7) \cdot (x - 12) = 0$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα γινόμενο ίσο με μηδέν οπότε:
$(x + 6) \cdot (x - 1) = 0$ ή
$x + 6 = 0$ ή $x - 1 = 0$ άρα
$x = -6$ ή $x = 1$
β) Όμοια ....

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x^2 - 49)(2x + 1) = 0$

β) $5x(-3x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x) = 0$

γ) $(x^3 - x^2)(x^2 + 2) = 0$

δ) $(x^2 - \frac{1}{4})(x - 7)(x^2 + 3) = 0$

Λύση

α) $(x^2 - 49)(2x + 1) = 0$ ή
$(x - 7)(x + 7)(2x + 1) = 0$ τελικά
$x - 7 = 0$ ή $x + 7 = 0$ ή $2x + 1 = 0$
$x = 7$ ή $x = -7$ ή $x = -1/2$
β) Όμοια ....

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(3x + 1)^2 = 9x^2 - 1$
β) $x^3 + 5x^2 = -2(5x + x^2)$

Λύση

Μεταφέρουμε όλους τους όρους του δεύτερου μέλους στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιούμε.
α) $(3x + 1)^2 = 9x^2 - 1$ ή
$(3x + 1)^2 - (9x^2 - 1) = 0$ ή
$(3x + 1)^2 - (3x - 1)(3x + 1) = 0$ ή
$(3x + 1)[(3x + 1) - (3x - 1)] = 0$ ή
$(3x + 1)(3x + 1 - 3x + 1) = 0$ .....
β) .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x(2x+1) - 4x(x-2) = 5x$
β) $8x^2 + 24x = 0$
γ) $-4x^2 + 5 = 0$
δ) $\frac{3x^2+2x}{4} = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{12}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $9x^2 - 1 = 0$
β) $(2x+1)^2 - 16x^2 = 0$
γ) $1 - (3x-1)^2 = 0$
δ) $x^4 - 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 + 2x - 3 = 0$
β) $x^2 + 3x - 10 = 0$
γ) $x^2 - 12 = -4x$
δ) $\frac{2x^2-2}{5} = \frac{x^2-x}{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 - 49 = 0$
β) $x^2 = \frac{1}{4}$
γ) $4x^2 = 9$
δ) $16x^2 + 1 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x+3)^2 = 7(x+3)$
β) $(3x-1)(x+4) = (3x-1)$
γ) $(x+4)^2 - 8x - 32 = 0$
δ) $(x^2 - 36)(x + \sqrt{2}) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^3 - x = \sqrt{3}(x^2 - 1)$
β) $(5x - \sqrt{5})(3x - \sqrt{3}) = 0$
γ) $4x^3 - 4\sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2} = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x(x+3) = 0$
β) $-5x(x - \sqrt{3}) = 0$
γ) $(3x+1)(2x-5) = 0$
δ) $\frac{1}{2}x(x+7)(4x-5)(x^2+1) = 0$

8. Να λυθούν με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου οι παρακάτω εξισώσεις:
α) $x^2 - 5x + 6 = 0$
β) $x^2 + 3x + 2 = 0$
γ) $3x^2 - 6x - 9 = 0$
δ) $-2x^2 = -2x - 12$

9. Να βρεθεί ένας αριθμός τέτοιος ώστε το διπλάσιο τετράγωνο του να είναι ίσο με το οκταπλάσιο του.

10. Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 3 cm^2. Αν η μία κάθετη πλευρά του είναι κατά 5cm μικρότερη από την άλλη, να βρείτε τις κάθετες πλευρές του.

11. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με εμβαδό 24 cm^2. Η μία πλευρά του είναι κατά 2 m μεγαλύτερη από την άλλη. Να βρεθούν οι πλευρές του.

3.3 Τύπος λύσεων εξίσωσης 2ου βαθμού

Θεωρία

Ερωτήσεις

__1.__ Ποιος τύπος δίνει τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη γενική μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$;

Απαντήσεις

1. Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με τη γενική μορφή:
$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$, $\alpha \neq 0$ δίνονται από τον τύπο:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

__Απόδειξη:__
(Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου)
Έχουμε ότι:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ ή

$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$ ή

$\dfrac{\alpha x^2}{\alpha} + \dfrac{\beta x}{\alpha} = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ ή (διαιρούμε με $\alpha \neq 0$)

$x^2 + 2 \cdot \dfrac{\beta}{2\alpha} x + (\dfrac{\beta}{2\alpha})^2 = (\dfrac{\beta}{2\alpha})^2 - \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ή (προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $(\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$)

$(x + \dfrac{\beta}{2\alpha})^2 = \dfrac{\beta^2}{4\alpha^2} - \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ή (ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος στο πρώτο μέλος)

$(x + \dfrac{\beta}{2\alpha})^2 = \dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ ή (αν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ τότε:)

$x + \dfrac{\beta}{2\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}$ ή

$x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} \pm \dfrac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ή

$x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

__2.__ Τι λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha\neq0$ και πώς αυτή καθορίζει το πλήθος των λύσεών της;

2. Ο αριθμός $\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ λέγεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.
Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:
α) Αν $\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0}$ τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες,

τις $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

β) Αν **$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$** τότε ο τύπος των λύσεων της εξίσωσης γίνεται:

$$x = \frac{-\beta \pm 0}{2\alpha} = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι ίσες, γι' αυτό λέμε ότι η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
γ) Αν **$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$** τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις στο σύνολο R γιατί ο αριθμός $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ δεν ορίζεται. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση είναι **αδύνατη** στο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$		
Διακρίνουσα	**Πλήθος λύσεων**	**Λύσεις**
$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	2 λύσεις άνισες	$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	1 λύση (διπλή) ή 2 λύσεις ίσες	$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	καμμία λύση στους πραγματικούς	—

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2 - 11x + 24 = 0$
β) $2x^2 + 3x + 4 = 0$
γ) $-4x^2 + 20x - 25 = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση $x^2 - 11x + 24 = 0$ είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -11$ και $\gamma = 24$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 =$
$= 121 - 96 = 25 > 0$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 5}{2}$$

Δηλαδή $x = \frac{11+5}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$x = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 8 και 3.
β) Στην εξίσωση $2x^2 + 3x + 4 = 0$ είναι: $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = 4$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 =$
$= -23 < 0$ δεν ορίζεται η ρίζα του -23 και επομένως η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη (δεν έχει λύσεις).
γ) Στην εξίσωση $-4x^2 + 20x - 25 = 0$ είναι $\alpha = -4$, $\beta = 20$ και $\gamma = -25$ οπότε

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-25) =$
$= 400 - 400 = 0$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-20 \pm 0}{-8}$$

Δηλαδή $x = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $2x^2 - 10x + 5 = x^2 - 2x - 10$
β) $x^2 - 3x = -12$
γ) $x^2 - 17x = 3(2x - 3) - 17x$

Λύση

α) Μετατρέπουμε πρώτα την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και στη συνέχεια βρίσκουμε τις λύσεις. Έχουμε:
$2x^2 - 10x + 5 = x^2 - 2x - 10$
$2x^2 - 10x + 5 - x^2 + 2x + 10 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
Είναι: $\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = 15$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 =$
$= 64 - 60 = 4$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Δηλαδή $x = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ή

$x = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 5 και 3.
β) Όμοια έχουμε:
$x^2 - 3x = -12$
$x^2 - 3x + 12 = 0$
Είναι: $\alpha = 1, \beta = -3$ και $\gamma = 12$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 =$
$= 9 - 48 = -39 < 0$
Επειδή $\Delta < 0$ δεν ορίζεται η ρίζα της και επομένως η εξίσωση αυτή δεν έχει λύσεις δηλαδή είναι αδύνατη.
γ) Όμοια έχουμε:
$x^2 - 17x = 3(2x - 3) - 17x$
$x^2 - 17x = 6x - 9 - 17x$
$x^2 - 17x - 6x + 9 + 17x = 0$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
Είναι: $\alpha = 1, \beta = -6$ και $\gamma = 9$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 =$
$= 36 - 36 = 0$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 3.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(2x^2 + 7x - 15)(x^2 + x - 12) = 0$
β) $x^2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$
γ) $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$

Λύση

α) Στην εξίσωση
$(2x^2 + 7x - 15)(x^2 + x - 12) = 0$
είναι $2x^2 + 7x - 15 = 0$ ή $x^2 + x - 12 = 0$
Λύνουμε κάθε εξίσωση χωριστά.
1η: $2x^2 + 7x - 15 = 0$
$\alpha = 2, \beta = 7$ και $\gamma = -15$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) =$
$= 49 + 120 = 169$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

Δηλαδή $x = \frac{-7+13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ή

$x = \frac{-7-13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$

2η: $x^2 + x - 12 = 0$
Είναι $\alpha = 1, \beta = 1$ και $\gamma = -12$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) =$
$= 1 + 48 = 49$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

Δηλαδή $x = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ή

$x = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί 3/2, - 5, 3 και - 4.

β) $x^2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$

Μετατρέπουμε πρώτα την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και στη συνέχεια βρίσκουμε τις λύσεις της. Έχουμε διαδοχικά:

$x^2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$

$2 \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{x}{2}$

$2x^2 - 1 = x$

$2x^2 - x - 1 = 0$

Είναι $\alpha = 2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -1$ οπότε

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) =$
$= 1 + 8 = 9$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Δηλαδή $x = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ή

$x = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και - 1/2.

γ) $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$

Είναι $x - 1 = 0$ ή $x^2 - 3x + 2 = 0$ ή $x^2 + x + 1 = 0$

Έχουμε διαδοχικά:

1η: $x - 1 = 0$ ή $x = 1$

2η: $x^2 - 3x + 2 = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -3$ και $\gamma = 2$ οπότε

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 =$
$= 9 - 8 = 1$ επομένως

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Δηλαδή $x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ή

$x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

3η: $x^2 + x + 1 = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 =$
$= 1 - 4 = -3 < 0$

Άρα η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη. Επομένως οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x = 1$ (διπλή), 2.

4. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν
α) άθροισμα 18 και γινόμενο 45,
β) άθροισμα 3 και γινόμενο - 18,
γ) άθροισμα - 3 και γινόμενο - 54.

Λύση

α) Αν x ο ένας αριθμός τότε ο άλλος είναι ο 18 - x.

(Γιατί $x + (18 - x) = x + 18 - x = 18$).

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος ισχύει: $x \cdot (18 - x) = 45$ ή $18x - x^2 = 45$ ή $-x^2 + 18x - 45 = 0$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

$\Delta = 18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-45) =$
$= 324 - 180 = 144$ οπότε $x_1 = 3$ και $x_2 = 15$. Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 3, 15. Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για το β) και το γ).

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση:
$x^2 - 3x + 2 = 0$

Λύση

Είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με $\alpha = 1$, $\beta = -3$ και $\gamma = 2$.

Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = ...$

και έχει ρίζες που δίνονται από τον τύπο:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = ...$$

2. Να λύσετε την εξίσωση:
$x^2 - 6x + 9 = 0$

Λύση

Είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με $\alpha = 1$, $\beta = -6$ και $\gamma = 9$.

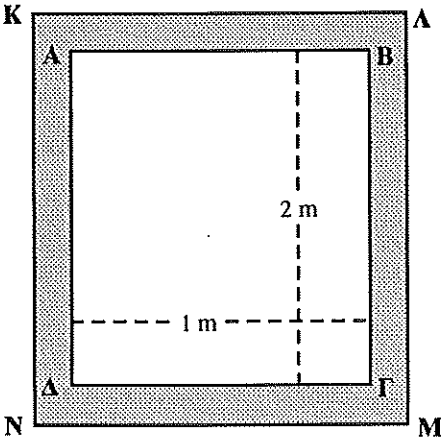
Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = ...$

3. Να λύσετε την εξίσωση:
$2x^2 - 3x + 10 = 0$

Λύση

Έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$ και $\gamma = 10$ οπότε
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 =$
$= 9 - 80 = -71 < 0$. Άρα .....

4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια αλουμινένια πόρτα της οποίας το πλαίσιο να έχει εμβαδό 0,64 m^2 και σταθερό πλάτος. Αν το τζάμι της πόρτας έχει διαστάσεις 1 m και 2 m. Να βρείτε το πλάτος του πλαισίου.



Λύση

Έστω x το πλάτος του πλαισίου. Τότε το ορθογώνιο ΚΛΜΝ έχει διαστάσεις $1 + 2x$ και $2x + 2$. Το εμβαδό του ορθογωνίου ΚΛΜΝ είναι τότε: $(1 + 2x)(2 + 2x)$. Αν από το εμβαδό του ΚΛΜΝ αφαιρέσουμε το εμβαδό του ΑΒΓΔ βρίσκουμε το εμβαδό του πλαισίου δηλαδή:
$(1 + 2x)(2 + 2x) - 2 = 0{,}64$ ή
$2 + 2x + 4x + 4x^2 - 2 = 0{,}64$ .....

5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με 2. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$2x^2 - \sqrt{2}\,x - 1 = 0$ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 + x - 6 = 0$
β) $x^2 - x - 6 = 0$
γ) $6x^2 - 5 = 7x$
δ) $2x^2 - x = 1$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $6x^2 + 15x + 9 = 0$
β) $12x^2 - 2x - 24 = 0$
γ) $15x^2 + 55x - 20 = 0$
δ) $4x^2 - 2x + 6 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(2x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 4) = 0$
β) $(4 - x) \cdot (x^2 + 6\chi - 5) = 0$
γ) $x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 10) = 0$
δ) $-2 \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (2x^2 - x - 1) = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^4 - 2x^3 - 6x - 9 = 0$
β) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 + 6x + 9 = 0$
β) $x^2 + 12x + 36 = 0$
γ) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$
δ) $2x^2 - 2\sqrt{10}\,x + 5 = 0$

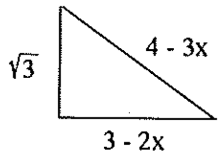
6. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(x^2 - 9x + 14)(12x^2 - x - 6) = 0$
β) $(x^2 + 2x - 15)(x^2 + x + 1) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 + 8x - 7 = -x^2 - 3x - 3$
β) $x^2 + 5x = 2(x + 9)$

8. Να βρεθούν δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα 11 και γινόμενο 28.

9. Να βρεθούν οι πλευρές του παρακάτω ορθογωνίου τριγώνου:



10. Το εμβαδό ενος ορθογωνίου είναι ίσο με 300 m^2. Αν η περίμετρός του είναι 80 m, να βρεθούν οι διαστάσεις του.

3.4 Κλασματικές εξισώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Ποια εξίσωση λέγεται κλασματική;

1. Κλασματική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση η οποία περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα που έχει παρονομαστή μια αλγεβρική παράσταση του αγνώστου.

Π.χ. Η εξίσωση: $\frac{x+1}{x-1} + 2x - \frac{3x^2-1}{3x^2-4x+1} = 1$ είναι μια κλασματική εξίσωση γιατί περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή.

2. Τι πρέπει να προσέξουμε κατά την επίλυση μιας κλασματικής εξίσωσης;

2. Κατά την επίλυση μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει να απορρίπτουμε από τις λύσεις που βρίσκουμε εκείνες που μηδενίζουν τους παρονομαστές της εξίσωσης.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$$

Λύση

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$$

[Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές]

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}$$

Για να ορίζονται οι όροι της παραπάνω εξίσωσης πρέπει:
$x \neq 0$ και $2x - 3 \neq 0$ ή $2x \neq 3$ ή $x \neq 3/2$.
Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με $x \cdot (2x - 3)$.
Έτσι έχουμε:

$$x(2x-3)\cdot\frac{1}{2x-3}-x(2x-3)\cdot\frac{3}{x(2x-3)}=$$
$$=x(2x-3)\cdot\frac{5}{x}\quad ή$$

$x-3=(2x-3)\cdot 5$ ή
$x-3=10x-15$ ή
$x-10x=-15+3$ ή
$-9x=-12$ ή

$$\frac{-9x}{-9}=\frac{-12}{-9}\quad ή\quad x=\frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι λύση της εξίσωσης (γιατί δεν έρχεται σε αντίθεση με τους περιορισμούς).

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{6}{x+2}-\frac{6}{x-2}=\frac{12x}{x^2-4}$$

Λύση

$$\frac{6}{x+2}-\frac{6}{x-2}=\frac{12x}{x^2-4}$$
$$\frac{6}{x+2}-\frac{6}{x-2}=\frac{12x}{(x-2)(x+2)}$$

Για να ορίζονται οι όροι της παραπάνω εξίσωσης πρέπει:
$x-2\neq 0$ και $x+2\neq 0$ ή
$x\neq 2$ και $x\neq -2$
Λύνουμε τώρα την εξίσωση.

$$(x-2)(x+2)\cdot\frac{6}{x+2}-(x-2)(x+2)\cdot\frac{6}{x-2}=$$
$$=(x-2)(x+2)\cdot\frac{12x}{(x-2)(x+2)}\quad ή$$

$(x-2)\cdot 6-(x+2)\cdot 6=12x$ ή
$6x-12-6x-12=12x$ ή
$-24=12x$ ή

$$\frac{12x}{12}=\frac{-24}{12}\quad ή\quad x=-2$$

Η τιμή $x=-2$ απορρίπτεται γιατί μηδενίζει τους παρονομαστές επομένως η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη.

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$$

Λύση

Οι τιμές που μηδενίζουν τους παρονομαστές είναι οι $x=0$ και $x=-3$.
Για να ορίζονται λοιπόν οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq -3$.
Οπότε:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x+3}$$ **[πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με 2Χ+Χ=3)**

$$2x(x+3)\cdot\frac{1}{x}+2x(x+3)\cdot\frac{3}{2}=$$
$$=2x(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\quad ή$$

$2(x+3)+x(x+3)\cdot 3=2x$ ή
$2x+6+3x(x+3)=2x$ ή
$2x+6+3x^2+9x=2x$ ή
$3x^2+9x+6=0$
[Διαιρούμε και τα δυο μέλη με 3]
$x^2+3x+2=0$
Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με
$\alpha=1$, $\beta=3$ και $\gamma=2$ οπότε:
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$ και

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm 1}{2}$$

Άρα $x=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ (δεκτή) ή

$x=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ (δεκτή)

4. Ένας μανάβης πούλησε μια ποσότητα λεμονιών αντί 2.400 δρχ. και μια ποσότητα πορτοκαλιών, που ήταν 6 κιλά μικρότερη, αντί 1.440 δρχ. Αν πουλούσε τα λεμόνια με την τιμή πώλησης (ανά κιλό) των πορτοκαλιών και αντιστρόφως θα εισέπραττε και από τα δύο προϊόντα 3.720 δρχ.
α) Να βρείτε πόσα κιλά λεμόνια και πόσα κιλά πορτοκάλια πούλησε.
β) Πόσο πούλησε το κιλό τα λεμόνια και πόσο τα πορτοκάλια;

Λύση

α) Έστω ότι η ποσότητα των λεμονιών ήταν x κιλά οπότε η ποσότητα των πορτοκαλιών ήταν x - 6 κιλά.

Από τα x κιλά λεμόνια εισέπραξε 2.400 δρχ. οπότε από το ένα κιλό εισέπραξε $\frac{2.400}{x}$ δρχ. Επίσης από τα x - 6 κιλά πορτοκάλια εισέπραξε 1.440 δρχ., οπότε από το ένα κιλό εισέπραξε $\frac{1.440}{x-6}$ δρχ. Αν πουλούσε τα x κιλά λεμόνια προς $\frac{1.440}{x-6}$ δρχ. το κιλό θα εισέπραττε $\frac{1.440}{x-6} \cdot x$ δρχ.

Αν πουλούσε τα x - 6 κιλά πορτοκάλια προς $\frac{2.400}{x}$ δρχ. το κιλό θα εισέπραττε $\frac{2.400}{x} \cdot (x-6)$ δρχ. Επομένως:

$$\frac{1440}{x-6} \cdot x + \frac{2400}{x} \cdot (x-6) = 3720$$

Για να ορίζονται οι όροι της παραπάνω εξίσωσης πρέπει: $x \neq 0$ και $x - 6 \neq 0$ ή $x \neq 6$.

Λύνουμε τώρα την εξίσωση.

$$\frac{1440 \cdot x}{x-6} + \frac{2400 \cdot (x-6)}{x} = 3720$$

$$x(x-6) \cdot \frac{1440 \cdot x}{x-6} +$$

$$+ x(x-6) \cdot \frac{2400 \cdot (x-6)}{x} = 3720 \cdot x(x-6)$$

$1440\,x^2 + 2400\,(x-6)^2 = 3720 \cdot x(x-6)$
$1440\,x^2 + 2400\,(x^2 - 12x + 36) =$
$= 3720\,(x^2 - 6x)$
$1440\,x^2 + 2400\,x^2 - 28800\,x + 86400 =$
$= 3720\,x^2 - 22320\,x$
$3840\,x^2 - 28800\,x + 86400 =$
$= 3720\,x^2 - 22320\,x$
$3840\,x^2 - 3720\,x^2 - 28800x + 22320x +$
$+ 86400 = 0$
$120\,x^2 - 6480\,x + 86400 = 0$
[Διαιρούμε με 120]
$x^2 - 54x + 720 = 0$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού με $\alpha = 1$, $\beta = -54$ και $\gamma = 720$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-54)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 720 = 2916 - 2880 = 36$.

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-54) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{54 \pm 6}{2}$$

Άρα $x = \frac{54+6}{2} = \frac{60}{2} = 30$ ή

$x = \frac{54-6}{2} = \frac{48}{2} = 24$

Διακρίνουμε λοιπόν 2 περιπτώσεις.

1η: Αν x = 30 κιλά λεμόνια τότε τα πορτοκάλια είναι x - 6 = 30 - 6 = 24 κιλά.

2η: Αν x = 24 κιλά λεμόνια τότε τα πορτοκάλια είναι x - 6 = 24 - 6 = 18 κιλά.

β) Στην πρώτη περίπτωση τα λεμόνια τα πούλησε προς 2400/30 = 80 δρχ. το κιλό και τα πορτοκάλια προς 1440/24 = 60 δρχ. το κιλό.

Ενώ στη δεύτερη περίπτωση πούλησε τα λεμόνια προς 2400/24 = 100 δρχ. το κιλό και τα πορτοκάλια προς 1440/18 = 80 δρχ. το κιλό.

5. Δύο αυτοκίνητα αναχωρούν από δύο πόλεις Α και Β που απέχουν 400 km με σκοπό να συναντηθούν κάπου ενδιάμεσα της διαδρομής ΑΒ. Το πρώτο αυτοκίνητο αναχώρησε μισή ώρα αργότερα από το δεύτερο και κινήθηκε με μέση ταχύτητα κατά 20 km/h μεγαλύτερη από τη μέση ταχύτητα του δεύτερου. Αν τα αυτοκίνητα συναντήθηκαν στη μέση της διαδρομής ΑΒ να υπολογίσετε τις ταχύτητες των αυτοκινήτων.

Λύση

Αν x km/h η μέση ταχύτητα του αργού αυτοκινήτου, τότε του άλλου θα είναι x + 20 km/h. Το μέσο της διαδρομής ΑΒ απέχει 400 : 2 = 200 km από τις άλλες πόλεις, επομένως οι χρόνοι που χρειάζονται για να διανύσουν την απόσταση των 200 km είναι σε ώρες $\frac{200}{x}$ και $\frac{200}{x+20}$ αντιστοίχως.

Επειδή το πρώτο αυτοκίνητο αναχώρησε με καθυστέρηση μισής ώρας, οι χρόνοι αυτοί διαφέρουν κατά 1/2 της ώρας. Έτσι έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+20} = \frac{1}{2}$$

Για να ορίζονται οι όροι της παρα-πάνω εξίσωσης πρέπει: $x \neq 0$ και $x + 20 \neq 0$ ή $x \neq -20$.
Λύνουμε τώρα την εξίσωση.

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+20} = \frac{1}{2}$$ [πολ/ζουμε τα μέλη της εξίσωσης με $2x(x + 20)$]

$$2x(x+20)\cdot\frac{200}{x} - 2x(x+20)\cdot\frac{200}{x+20} = 2x(x+20)\cdot\frac{1}{2}$$

$2(x + 20)\cdot 200 - 2x\cdot 200 = x\cdot(x + 20)$
$400(x + 20) - 400x = x^2 + 20x$
$400x + 8000 - 400x = x^2 + 20x$
$x^2 + 20x - 8000 = 0$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με $\alpha = 1$, $\beta=20$ και $\gamma = -8000$.
Οπότε: $\Delta=\beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4\cdot 1\cdot(-8000) = 400 + 32000 = 32400$. Επομένως:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{32400}}{2\cdot 1} = \frac{-20 \pm 1}{2}$$

Άρα $x = \frac{-20+180}{2} = \frac{160}{2} = 80$ ή
$x = \frac{-20-180}{2} = \frac{-200}{2} = -100$

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 80$ είναι η λύση του προβλήματος γιατί η ταχύτητα θεωρείται θετική.
(Η τιμή $x = -100$ απορρίπτεται).
Επομένως οι ζητούμενες ταχύτητες των αυτοκινήτων είναι 80 km/h και 80 + 20 = 100 km/h.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{3}{1-x} = \frac{7}{x+1}$$

Λύση

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενα παραγόντων.

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{3}{1-x} = \frac{7}{x+1} \quad \text{ή}$$
$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{3}{-(x-1)} = \frac{7}{x+1} \quad \text{ή}$$
$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{x-1} = \frac{7}{x+1}$$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. που είναι το $(x - 1)(x + 1)$.
Πρέπει $(x - 1)(x + 1) \neq 0$ οπότε
$x - 1 \neq 0$ και $x + 1 \neq 0$ ή
$x \neq 1$ και $x \neq -1$.
Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

$$(x-1)(x+1)\cdot\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} - (x-1)(x+1)\cdot\frac{3}{x-1} = (x-1)(x+1)\cdot\frac{7}{x+1}$$

....

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{x-1} = 1 - x$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{x-1} = 1 - x \quad \text{ή}$$
$$\frac{1}{-(x-1)} + \frac{x^2}{x-1} = 1 - x \quad \text{ή}$$
$$-\frac{1}{x-1} + \frac{x^2}{x-1} = 1 - x$$

Βρίσκουμε το ΕΚΠ που είναι το x-1.
Πρέπει $x - 1 \neq 0$ ή $x \neq 1$.
Απαλείφουμε τους παρονομαστές ....

3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2x^2+1}{x^2-x}=\frac{1}{x}$$

Λύση

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστες.

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2x^2+1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}$$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π .....

4. Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 7. Το άθροισμα των αντιστρόφων τους ισούται με το αντίστροφο του γινομένου τους αυξημένο κατά ένα. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

Λύση

Έστω x ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς. Τότε ο μικρότερος είναι ο x - 7. Οι αντίστροφοί τους είναι αντίστοιχα οι αριθμοί $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x-7}$.

Το γινόμενό τους είναι x(x - 7) οπότε ο αντίστροφος του γινομένου τους είναι ο αριθμός $\frac{1}{x(x-7)}$.

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x(x-7)}+1$$

Λύνουμε την κλασματική εξίσωση .....

5. Ένας έμπορος λαδιού διαθέτει δυο είδη δοχείων $Δ_1$, $Δ_2$ και 500 κιλά ελαιόλαδο. Το δοχείο $Δ_2$ χωράει 5 κιλά λάδι παραπάνω απ' ότι το δοχείο $Δ_1$. Αν βάλει το λάδι σε δοχεία $Δ_1$ χρειάζεται 5 δοχεία λιγότερα. Πόσα κιλά χωράει κάθε δοχείο από το κάθε είδος $Δ_1$, $Δ_2$;

Λύση

Έστω ότι το δοχείο $Δ_1$ χωράει x κιλά τότε το δοχείο $Δ_2$ χωράει x + 5.

Τα 500 κιλά λάδι χωράνε σε $\frac{500}{x+5}$ δοχεία $Δ_2$ και $\frac{500}{x}$ δοχεία $Δ_1$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε:

$\frac{500}{x+5}+5=\frac{500}{x}$ οπότε ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{14}{x+4}-\frac{3}{x}=\frac{5}{x+2}$

β) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5-x}=\frac{21}{30}$

γ) $\frac{-2}{x-3}=\frac{5}{x+2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{8}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}=-\frac{2}{x+1}$

β) $\frac{x}{x+1}-1=-\frac{x}{x+4}$

γ) $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{1}{6}=\frac{2x-3}{x-2}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{4x+4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{2x^2-2}$

β) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

γ) $\frac{12}{x+6}-\frac{10}{2x+8}-\frac{4}{x+2}=0$

δ) $\frac{x}{2x-1}-\frac{1}{27}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4x+4}{x+3}-\frac{7}{2}+\frac{x+9}{x-3}=\frac{7(x+13)}{x^2-9}$

β) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{1-2x}{x+1} = \frac{x-7}{x-1} + 4$

γ) $\frac{2x+1}{x+1} + \frac{1-x}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = 0$

5. Σε πόσες ώρες διανύει ένας ποδηλάτης 160 km εάν γνωρίζετε ότι, εάν αυξήσει την ταχύτητά του κατά 8 km/h θα χρειαστεί μια ώρα λιγότερο να διανύσει την ίδια απόσταση;

6. Να βρείτε διψήφιο αριθμό τέτοιο, ώστε το ψηφίο των μονάδων του να είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων και αν διαιρεθεί με το γινόμενο των ψηφίων του να δίνει υπόλοιπο 3.

7. Μια τάξη της Γ' γυμνασίου αγόρασε δώρο για τον καθηγητή των Μαθηματικών αντί 3.600 δρχ. Αν οι μαθητές ήταν κατά 5 λιγότεροι θα έδινε ο καθένας 24 δρχ. περισσότερες. Πόσοι ήταν οι μαθητές;

8. Ένας αριθμός ισούται με το 1/3 του αντιστρόφου του ελαττωμένο κατά 1/6 . Να βρεθεί ο αριθμός.

9. Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 5. Το άθροισμα των αντιστρόφων τους ισούται με το διπλάσιο του αντιστρόφου του γινομένου τους. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

10. Με τις δισκέτες floppy disk που θα πουλούσε κάποιος υπολογίζει να εισπράξει 5.000 δρχ. Διαπιστώνει ότι οι 5 δισκέτες είναι ελαττωματικές. Για να πάρει τα ίδια χρήματα από τις υπόλοιπες πρέπει να πουλήσει την κάθε μια κατά 50 δρχ. ακριβότερα. Πόσες δισκέτες έχει;

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να λύσετε τους τύπους:

α) $F = m \cdot \frac{v^2}{R}$ ως προς R

β) $Q = c \cdot m \cdot (\theta_2 - \theta_1)$ ως προς θ_1

γ) $E = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$ ως προς λ

δ) $V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 v$ ως προς v

2. Δίνεται ο τύπος

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{1+\alpha\ \theta_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{1+\alpha\ \theta_2}$$

να λυθεί:

α) ως προς P_2

β) ως προς θ_1

γ) ως προς α

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

β) $(x-1)^2 + (x^2-1) = 0$

γ) $2x^3 - 2x = x^2 - 1$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-5}{2x-8} + \frac{4}{x^2-16} = \frac{2x+11}{2x+8}$

β) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{x^2-3x+2} + 4$

5. Να εξετάσετε αν έχουν τις ίδιες λύσεις οι εξισώσεις:

$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{1}{x+2}$ και

$\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} + 2x$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{4x}{x-2} + \frac{2x}{3-x} = \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

β) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{x-2}$

7. Να επιλύσετε στο R τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x-3+\frac{2}{x}}{x^2-2x}-\dfrac{6}{x}=x-\dfrac{1}{x^2}$

β) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}+\dfrac{2}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{2x-30}{15}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{1}{\omega^2+5}-\dfrac{1}{\omega^2+\omega-20}=0$

β) $\dfrac{\omega}{\omega+4}+\dfrac{4}{2\omega^2+7\omega-4}=\dfrac{\omega+1}{2\omega-1}$

γ) $\dfrac{1}{\omega^2+3\omega+2}-\dfrac{1}{\omega+1}=\dfrac{\omega+1}{2\omega+4}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0$

β) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{3}{x^2-3x}$

γ) $\dfrac{2x}{x-2+6x^2}-\dfrac{2+3x}{5x-4+6x^2}=\dfrac{x}{9x^2+18x+8}$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{1-\frac{5}{x^2+1}}{\frac{x^2}{x^2+1}}=0$

β) $\dfrac{\omega-\frac{\omega}{\omega-1}}{2\omega-\frac{\omega}{\omega+1}}=0$

11. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί και το εμβαδόν τους είναι 182 m^2. Να βρείτε τις διαστάσεις του.

12. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 52 m και το εμβαδόν του 165 m^2. Να υπολογιστούν οι διαστάσεις του.

13. Ένας συνεταιρισμός φορτηγών αυτοκινήτων ανέλαβε τη μεταφορά ενός φορτίου 720 τόνων. Κανονίστηκε ώστε όλα τα φορτηγά να μεταφέρουν το ίδιο βάρος. Επειδή όμως 6 αυτοκίνητα μπήκαν στο συνεργείο για επισκευή, το καθένα από τα υπόλοιπα μετάφερε 4 τόνους παραπάνω από όσο αναλογούσε στην αρχή. Πόσα αυτοκίνητα είχε ο συνεταιρισμός;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

BASIC 4

Στα προηγούμενα κομμάτια της «BASIC» είχαμε δει ότι μια μεταβλητή γινόταν πιο εύχρηστη αν την εισάγουμε με την εντολή INPUT.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 2 μεταβλητές χρησιμοποιώντας συγχρόνως 2 INPUTS π.χ.

```
10 INPUT A      (↵)
20 INPUT B      (↵)
30 PRINT A*B    (↵)
40 GO TO 10     (↵)
```

Όπως καταλαβαίνουμε, εμείς θα δίνουμε ό,τι τιμές θέλουμε για Α και Β και ο υπολογιστής θα τις πολλαπλασιάζει.
Φυσικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σειρά 30 με την
30 PRINT A + B ή με την
30 PRINT A - B ή με την
30 PRINT A : B
για να εκτελέσει πρόσθεση, αφαίρεση ή διαίρεση αντίστοιχα.
Αν γνωρίζουμε από πριν όλες τις τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιούμε τότε μπορούμε να φτιάξουμε πρόγραμμα με τις εντολές READ και DATA.

Έστω ότι η μεταβλητή Α έχει τις τιμές 10, 20, 30, 40, 50 και η Β τις τιμές 15, 25, 35, 45, 55.
Τότε το πρόγραμμα θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

```
10 READ A, B                  (↵)
20 DATA 10,15,20,25,
     30,35,40,45,50,55        (↵)
30 PRINT A*B                  (↵)
40 GO TO 10                   (↵)
50 END                        (↵)
```

Ο υπολογιστής με το πρόγραμμα αυτό διαβάζει (γραμμή 10) το πρώτο ζευγάρι τιμών (10, 15) (γραμμή 20), κάνει τον πολλαπλασιασμό, τον τυπώνει (γραμμή 30) και στη συνέχεια αναγκάζεται (γραμμή 40) να επιστρέψει για να διαβάσει το επόμενο ζευγάρι τιμών (γραμμή 10) κ.ο.κ.
Προσοχή: οι μεταβλητές Α και Β έχουν τοποθετηθεί στη γραμμή 20 εναλλάξ, δηλαδή

10	15	20	25
↓	↓	↓	↓
A	B	A	B

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα παρόμοιο με το προηγούμενο δίνοντας δικές σας τιμές για τα Α και Β. Μελετήστε τη λειτουργία του προγράμματος.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα χρησιμοποιώντας 3 INPUTS για τα Α, Β, Γ και υπολογίστε τις παραστάσεις: α) (Α + Β) ˙ Γ και β) Α ˙ Γ + Β ˙ Γ

BASIC 5

Γνωρίζουμε ότι ο γενικός τύπος μιας εξίσωσης 2ου βαθμού είναι $αx^2 + βx + γ = 0$, με $α \neq 0$. Για τον υπολογισμό των ριζών x_1 και x_2 πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ποσότητα $Δ = β^2 - 4αγ$ (διακρίνουσα). Αν αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν ($Δ \geq 0$) τότε οι ρίζες υπολογίζονται από τον τύπο:

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$$

Αν όμως $Δ < 0$ τότε δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες.
Αν λοιπόν εμείς με χρήση 3 INPUTS δώσουμε τιμές στους συντελεστές α, β και γ της εξίσωσης, τότε μπορούμε εύκολα να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει τις λύσεις της εξίσωσης 2ου βαθμού.
Π.χ.

```
10 INPUT α                                   (↵)
20 INPUT β                                   (↵)
30 INPUT γ                                   (↵)
40 LET Δ = β↑2 - 4*α*γ                       (↵)
50 IF Δ < 0 THEN GO TO 90                    (↵)
60 PRINT x1 = (- β + SQRΔ) / 2*α             (↵)
70 PRINT x2 = (- β - SQRΔ) / 2*α             (↵)
80 GO TO 10                                  (↵)
90 PRINT «Δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες»    (↵)
100 GO TO 10                                 (↵)
```

Παρατηρήστε ότι αφού δώσουμε τους αριθμούς α, β, γ τότε (στη γραμμή 40) υπολογίζει τη διακρίνουσα και στη συνέχεια (στη γραμμή 50) αν η διακρίνουσα είναι αρνητική τότε πηγαίνει κατ' ευθείαν στη γραμμή 90 (IF ... THEN).
Αν η υπόθεση της 50 είναι ψευδής (δηλαδή $\Delta \geq 0$) τότε αδιαφορεί για τη γραμμή 50 και συνεχίζει στην 60 αφού υπολογίζει τις ρίζες.
(Το πρόγραμμα θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τις εντολές READ και DATA αν είναι γνωστές οι εξισώσεις εκ των προτέρων).

Άσκηση

Να φτιάξετε ένα πρόγραμμα για να υπολογίσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 - 5x + 6 = 0$
β) $2x^2 + 3x - 7 = 0$
γ) $x^2 - 4x + 4 = 0$
δ) $3x^2 - x + 4 = 0$
με δύο τρόπους:
1. με χρήση της εντολής INPUT,
2. με χρήση των εντολών READ και DATA.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Συναρτήσεις

4.1 Η έννοια της συνάρτησης

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση; Αναφέρετε παράδειγμα.

1. **Συνάρτηση** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής x αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή της μεταβλητής y.

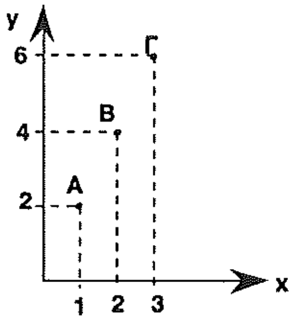
Π.χ. Αγοράζουμε ψωμί που το κάθε κιλό κοστίζει 120 δρχ. Τότε:
Το 1 κιλό κοστίζει 120 δρχ.
Τα 2 κιλά κοστίζουν $120 \cdot 2$ δρχ.
Τα 3 κιλά κοστίζουν $120 \cdot 3$ δρχ.
Γενικά τα x κιλά κοστίζουν $120 \cdot x$ δρχ.
Αν λοιπόν παραστήσουμε με y το κόστος των ψωμιών θα έχουμε: $\mathbf{y = 120 \cdot x}$.

<u>**Σημείωση:**</u> Κάθε συνάρτηση τη συμβολίζουμε μ' ένα γράμμα, συνήθως το f. Η τιμή της συνάρτησης f σε κάποια τιμή της μεταβλητής x είναι ο αριθμός $\mathbf{y = f(x)}$.

2. Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$;

2. **Γραφική παράσταση** της συνάρτησης $y = f(x)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$ που απεικονίζουμε σ' ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

Π.χ. Αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$ είναι τα σημεία Α, Β, Γ που φαίνονται στο σχήμα:



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να προσδιορισθούν οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 1}{x - 3}$ όταν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές: -2, -1, 1, 2.

Λύση

Για να βρούμε το f(- 2) υπολογίζουμε την τιμή του κλάσματος

$\dfrac{3x^2 + x + 1}{x - 3}$ για x = - 2 δηλαδή:

$$f(-2) = \frac{3(-2)^2 + (-2) + 1}{-2-3} = \frac{3 \cdot 4 - 2 + 1}{-5} =$$

$$= \frac{12 - 2 + 1}{-5} = -\frac{11}{5}$$

Ομοίως έχουμε:

$$f(-1) = \frac{3(-1)^2 + (-1) + 1}{-1-3} = \frac{3 \cdot 1 - 1 + 1}{-4} =$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 1 + 1}{1 - 3} = \frac{3 + 1 + 1}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2^2 + 2 + 1}{2 - 3} = \frac{3 \cdot 4 + 2 + 1}{-1} = -15$$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

α) Βρείτε τα f(0), f(1), f(2), f($\sqrt{2}$).

β) Δείξτε ότι: $f(\sqrt{2}) = f(1) - 2f(2) - 5\sqrt{2}$

Λύση

α) Είναι: $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$

$f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 1 - 5 + 3 = -1$

$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 4 - 10 + 3 = -3$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 5 \cdot \sqrt{2} + 3 = 2 - 5\sqrt{2} + 3 =$

$= 5 - 5\sqrt{2}$

β) Είναι: $f(1) - 2f(2) - 5\sqrt{2} =$

$= -1 - 2 \cdot (-3) - 5\sqrt{2} = -1 + 6 - 5\sqrt{2} =$

$= 5 - 5\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$

3. Ποιες τιμές πρέπει να πάρει η μεταβλητή x ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν αριθμητική τιμή πραγματικό αριθμό.

α) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$ *β)* $g(x) = \dfrac{3x + 5}{16 - x^2}$

γ) $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$ *δ)* $p(x) = \dfrac{x + 2}{x(x + 3)}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το x παίρνει τιμές από το σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Επειδή όμως οι συναρτήσεις αυτές έχουν παρονομαστή που έχει τη μεταβλητή x θα πρέπει το x να παίρνει τέτοιες τιμές ώστε ο παρονομαστής να είναι διάφορος από το 0 άρα βρίσκουμε για κάθε συνάρτηση τις τιμές του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή τους και τις εξαιρούμε από το σύνολο R. Έτσι έχουμε:

α) $x^2 - 1 = 0$ ή $x^2 = 1$ ή $x = \pm 1$ άρα το x μπορεί να πάρει κάθε πραγματική τιμή εκτός από τις τιμές - 1 και 1.

β) $16 - x^2 = 0$ ή $x^2 = 16$ ή

$x = \pm\sqrt{16}$ ή $x = \pm 4$

άρα το x μπορεί να πάρει κάθε πραγματική τιμή εκτός από τις τιμές - 4 και 4.

γ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Άρα $x = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ή

ή $x = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Επομένως πρέπει $x \neq 2$, $x \neq 3$.

δ) $x(x + 3) = 0$ ή

$x=0$ ή ($x + 3 = 0$ ή $x = -3$)

άρα πρέπει $x \neq 0$, $x \neq -3$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{3}{x-3} \text{ και } g(x) = \frac{5}{x+3}.$$

Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, ($x \neq \pm 3$) ισχύει η σχέση f(x) = g(x).

Λύση

Είναι $f(x) = g(x)$ ή $\frac{3}{x-3} = \frac{5}{x+3}$ ή

$3(x + 3) = 5(x - 3)$ ή

$3x + 9 = 5x - 15$ ή

$5x - 3x = 15 + 9$ ή

$2x = 24$ ή $x = 12$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3}$.

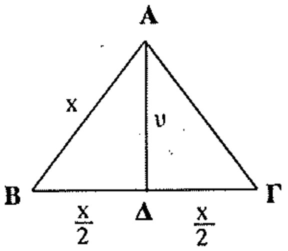
Να βρείτε τι τιμές μπορεί να πάρει το x ώστε οι αντίστοιχες τιμές f(x) να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Έχουμε ότι το f(x) είναι η τετραγωνική ρίζα κάποιου αριθμού άρα το x θα πρέπει να παίρνει τέτοιες τιμές ώστε να ορίζεται η τετραγωνική ρίζα του x + 3. Δηλαδή οι κατάλληλες τιμές που μπορεί να πάρει το x είναι αυτές για τις οποίες $x + 3 \geq 0$ δηλ. πρέπει $x \geq -3$. Άρα το x μπορεί να πάρει τιμές από το σύνολο R των πραγματικών αριθμών που είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το - 3.

6. Να βρεθεί το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς x ως συνάρτηση του x.

Λύση



Υπολογίζουμε το ύψος του τριγώνου από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ:

$\upsilon^2 = x^2 - (\frac{x}{2})^2$ ή $\upsilon^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$ ή

$\upsilon^2 = \frac{3x^2}{4}$ ή $\upsilon = \sqrt{\frac{3x^2}{4}}$ ή $\upsilon = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

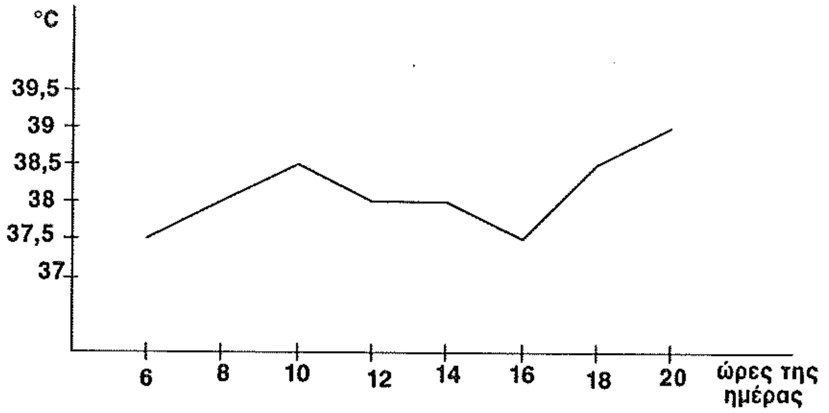
Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$E = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ή $E = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Επομένως η συνάρτηση που ζητάμε είναι:

$$E(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

7. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που μας δίνει τη θερμοκρασία ενός ασθενούς κατά τις διάφορες χρονικές στιγμές της ημέρας.



i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)								

ii) Να βρείτε τη μέγιστη θερμοκρασία του ασθενούς και σε ποια χρονική στιγμή σημειώθηκε αυτή.

Λύση

i) Όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ο πίνακας γίνεται:

x	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)	37,5	38	38,5	38	38	37,5	38,5	39

ii) Όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση ή από τον πίνακα η μέγιστη τιμή είναι 39° C και σημειώθηκε την ώρα 20.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x) = (x - 3)^2$ και $g(x) = (2x - 5)^2$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει η σχέση $f(x) - g(x) = 0$.

Λύση

Η σχέση $f(x) - g(x) = 0$ γίνεται:
$(x - 3)^2 - (2x - 5)^2 = 0$ ή
$(x - 3 + 2x - 5)(x - 3 - 2x + 5) = 0$ ή
$(3x - 8)(x - 2) = 0$ ή
$3x - 8 = 0$ ή $x = 8/3$
$x - 2 = 0$ ή $x = 2$
Άρα για $x=2$ ή $x = 8/3$ ισχύει η σχέση.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2-2}$ όταν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές -2, -1, 0, 1, 2.

Λύση

Είναι $f(-2) = \dfrac{2(-2)^3 + (-2)^2 + 1}{(-2)^2 - 2} = ...$

$f(-1) = \dfrac{2(-1)^3 + (-1)^2 + 1}{(-1)^2 - 2} = ...$

$f(0) = ...$
$f(1) = ...$
$f(2) = ...$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = \dfrac{x - 3}{2}$

να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	0	-2			-3
f(x)			-1	-2	

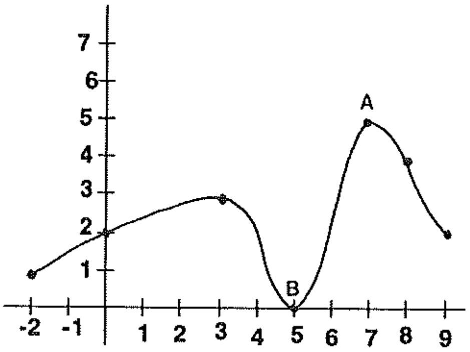
Λύση

Έχουμε $f(0) = \frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2}$

ενώ $f(x) = -1$ ή $\frac{x-3}{2} = -1$ ή

$x - 3 = -2$ ή $x = 1$ .....

3. Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f:



i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	-2	0			7	8	
f(x)			3	0			2

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και για ποιες τιμές του x παίρνει αυτές τις τιμές.

Λύση

i) Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι $f(-2) = 1$ .....
ii) Η μέγιστη τιμή είναι στο σημείο A και η ελάχιστη στο B άρα ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$. ***Να βρείτε τις τιμές***

$f(-1), f(-2), f(-3), f(1), f(2), f(3)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:
i) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

ii) $g(x) = \frac{x+3}{2x^2+1}$

iii) $h(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x + 1$
Να υπολογίσετε τα $f(-1), f(-3), g(-2), g(3), h(-2), h(2)$ ***και κατόπιν τις τιμές των παραστάσεων:***
$A = f(-1) - g(-2) + h(2)$
$B = f(-3) + g(3) - h(-2)$

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$f(x) = 3x^2 + 2x - 6$. ***Αφού υπολογίσετε τα*** $f(1), f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ ***να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:***

$f(\sqrt{2})\text{-}f(\sqrt{3}) + 8f(1) \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

4. Να βρείτε τι τιμές μπορεί να πάρει ο x ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν αριθμητική τιμή πραγματικό αριθμό.

α) $f_1(x) = \frac{x+3}{9-x^2}$

β) $f_2(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$

γ) $f_3(x) = \frac{x^2+3}{x^2+8}$

δ) $f_4(x) = \frac{1}{x} + 2x$

ε) $f_5(x) = \frac{x^2+3x-1}{(x+2)(x^2-5x+6)}$

5. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

β) $g(x) = \sqrt{2x + 1}$

γ) $h(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{-x + 5}$

δ) $p(x) = \sqrt{\frac{3x + 1}{2} - \frac{2x - 3}{3}}$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

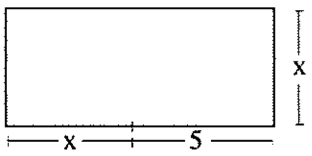
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ και $g(x) = \frac{3x - 5}{x + 1}$

Να βρεθούν τα x για τα οποία ισχύει
i) $f(x) = 3$

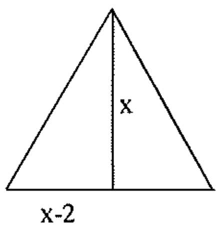
ii) $g(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$

7. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων.

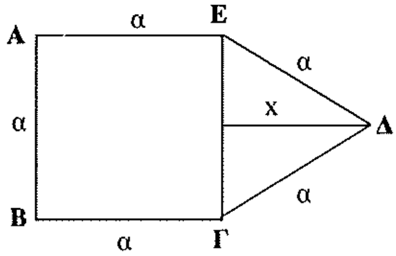
α)



β)



8. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδόν του παρακάτω τετραγώνου και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα.



x	1	2	3	4
f(x)				

4.2 Η συνάρτηση y = αx

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx; Αναφέρατε παράδειγμα.

Απαντήσεις

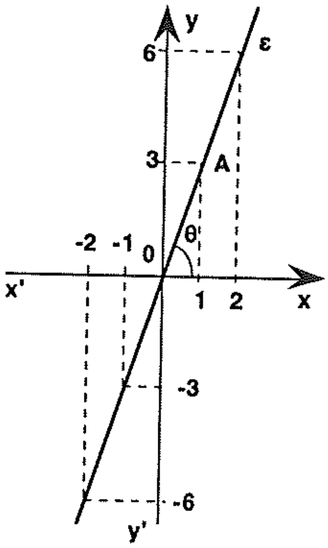
1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω η συνάρτηση y = 3x. Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης δίνοντας τυχαίες πραγματικές τιμές στη μεταβλητή x.

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

Επειδή ένα από τα ζεύγη (x, y) είναι το (0, 0), συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της y = αx διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η δε γραφική της παράσταση είναι η ευθεία ε.



Παρατηρούμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία θ που έχει εφθ = = 3/1 = 3.
Η y = 3x λέγεται και **εξίσωση ευθείας**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

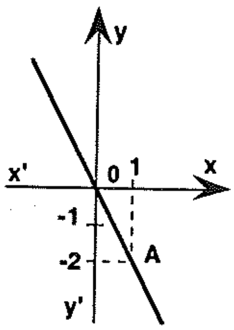
1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
α) y = - 2x, β) y = 4x, γ) y = 1/2 · x

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = - 2x είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0,0). Γνωρίζουμε ότι για να ορισθεί μια ευθεία χρειάζονται δύο τουλάχιστον σημεία. Αρκεί λοιπόν να βρούμε άλλο ένα σημείο από το οποίο διέρχεται αυτή. Έτσι έχουμε:

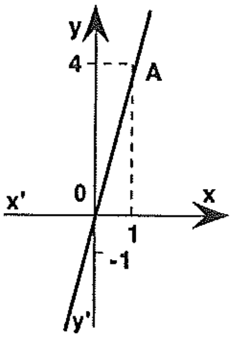
x	0	1
y	0	-2

Άρα η γραφική παράσταση της ευθείας διέρχεται από το σημείο Ο(0,0) και το Α(1, - 2). Έχουμε λοιπόν:



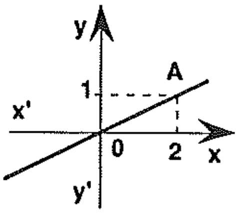
β) Ομοίως για την y = 4x.

x	0	1
y	0	4



γ) Και για την $y = \frac{1}{2} \cdot x$ έχουμε:

x	0	2
y	0	1



2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο α) (2, 6), β) (- 3, 2).

Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας θα είναι της μορφής $y = αx$, άρα θα ισχύει:

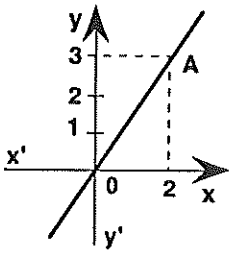
$6 = α \cdot 2$ ή $α = \frac{6}{2} = 3$ και η ευθεία θα

θα είναι η $y = 3x$.

β) Ομοίως από την $y = αx$ έχουμε:

$2 = α \cdot (-3)$ ή $α = -\frac{2}{3}$ άρα $y = -\frac{2}{3}x$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας από το σχήμα που ακολουθεί:



Λύση

Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επομένως είναι της μορφής $y = αx$ και επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2, 3) θα έχουμε:

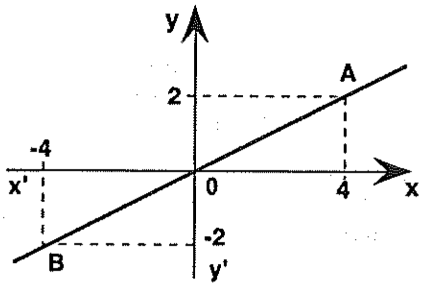
$3 = α \cdot 2$ ή $α = \frac{3}{2}$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η: $y = \frac{3}{2} \cdot x$.

4. Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας $y = \frac{1}{2} \cdot x$ για $-4 \leq x \leq 4$.

Λύση

Οι τιμές που θα δώσουμε στο x πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του - 4 και μικρότερες ή ίσες του 4, άρα:

x	-4	4
y	-2	2



Η γραφική παράσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y = -x$ και $y = x$.

Λύση

Οι ευθείες $y = -x$ και $y = x$ είναι της μορφής $y = \alpha x$, επομένως διέρχονται από το (0, 0). Κατασκευάζουμε τους πίνακες τιμών:

$y = -x$ και $y = x$

x	0	1
y	0	

x		
y		

Άρα η γραφική παράσταση ....

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της μορφής $y = \alpha x$ που διέρχεται από το σημείο:
α) Α(-3, -1), β) Β(-2, 1), γ) Γ(3, -2)

Λύση

α) Το σημείο Α(-3, -1) εφ' όσον ανήκει στη γραφική παράσταση της ευθείας $y = \alpha x$ θα την επαληθεύει. Δηλαδή: $-1 = \alpha \cdot (-3)$ απ' όπου υπολογίζουμε το α.
Ομοίως τα β) και γ).

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $y = -3x$, β) $y = 3x$, γ) $y = \frac{x}{3}$,
δ) $y = -\frac{2}{3}x$.

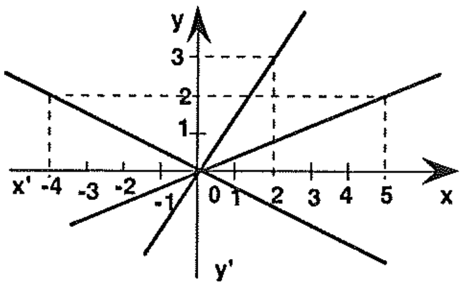
2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο.
α) (- 1, - 2), β) (2, 3), γ) (- 3, 1),
δ) $(-\frac{2}{3}, 4)$.

3. Να προσδιορίσετε το α ώστε η ευθεία $y = \alpha x$ να διέρχεται από το σημείο:

i) (- 2, 4), ii) (5, - 10), iii) $(-\frac{4}{3}, 4)$

4. Να προσδιορίσετε το α ώστε η ευθεία $y = \alpha x$ να διέρχεται από το σημείο Α(- 3, 6) και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας για $-4 \leq x \leq 0$.

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών του παρακάτω σχήματος:



6. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$y = |x|$ για $-2 \leq x \leq 2$.

7. Αν $-2 < x < 7$ να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
α) $2x - y = 0$, β) $x + 3y = 0$.

4.3 Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $y = \alpha x + \beta$; Να αναφέρετε παράδειγμα.

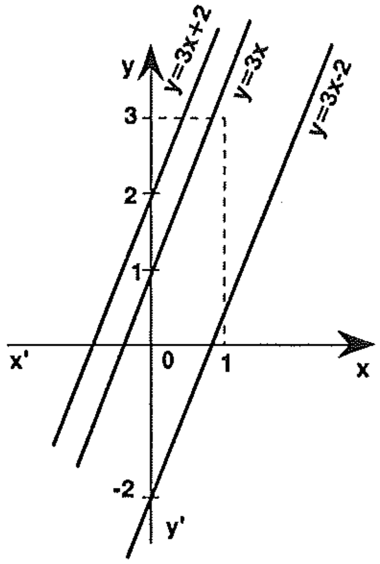
Απαντήσεις

1. Η $y = \alpha x + \beta$ έχει ως γραφική παράσταση μια ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $y = \alpha x$ που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, \beta)$.
Παράδειγμα: Έστω οι συναρτήσεις: $y = 3x$, $y = 3x + 2$ και $y = 3x - 2$.

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις αυτές, δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή x.

x	-2	-1	0	1	2
y = 3x	-6	-3	0	3	6
y = 3x + 2	-4	-1	2	5	8
y = 3x - 2	-8	-5	-2	1	4

Άρα η γραφική παράσταση αυτών είναι:



Παρατηρούμε ότι οι τιμές της $y = 3x + 2$ είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερες από της $y = 3x$ και της $y = 3x - 2$ κατά δύο μονάδες μικρότερες.
Τέμνουν δε τον άξονα y'y αντίστοιχα στα σημεία $(0, 2)$ και $(0, -2)$.

2. Δείξτε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία.

2. Έστω η εξίσωση (Ι) $\alpha x + \beta y = \gamma$ όπου α, β, γ είναι αριθμητικοί συντελεστές. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ τότε η (Ι) γίνεται:

$$\beta y = -\alpha x + \gamma \quad \text{ή} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{που}$$

παριστάνει ευθεία.

β) Αν $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ τότε η (Ι) γίνεται: $\alpha x = \gamma$ ή $x = \gamma/\alpha$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη στον y'y και τέμνει τον x'x στο σημείο γ/α.

γ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε η (Ι) γίνεται: $y = \gamma/\beta$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη στον x'x και τέμνει τον y'y στο σημείο γ/β.

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει μια ευθεία ε και λέγεται **εξίσωση της ευθείας ε.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $y = -3x + 2$, β) $y = 2x - 3$

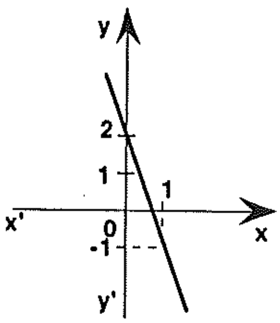
Λύση

α) Η $y = -3x + 2$ είναι της μορφής: $y = \alpha x + \beta$ η οποία όπως γνωρίζουμε είναι μία ευθεία. Αρκεί λοιπόν να βρούμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται αυτή. Έτσι για $x = 0$ είναι $y = 2$ και για $x = 1$ είναι $y = -3 + 2 = -1$.

Άρα έχουμε:

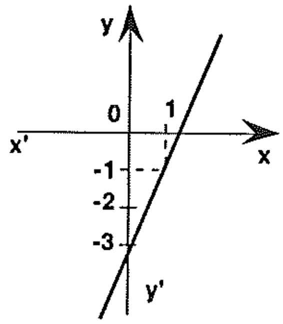
x	0	1
y	2	-1

και η γραφική της παράσταση είναι:



β) Ομοίως για την $y = 2x - 3$.

x	0	1
y	-3	-1



2. Να εξετάσετε αν τα σημεία: Α(-3, 2), Β(2, 5), Γ(10, -3), Δ(7, 20) ανήκουν στην ευθεία $y = -x + 7$.

Λύση

Για $x = -3$ έχουμε $y = -(-3) + 7 = 10$, άρα το Α(- 3, 2) δεν ανήκει στην ευθεία $y = -x + 7$.
Για $x = 2$ έχουμε $y = -2 + 7 = 5$, άρα το Β ανήκει σ' αυτή.
Για $x = 10$ έχουμε $y = -10 + 7 = 3$, άρα το Γ ανήκει στην ευθεία και για $x = 7$ έχουμε $y = -7 + 20 = 13$, άρα το Δ δεν ανήκει στην ευθεία.

3. Να βρείτε το α ώστε η ευθεία: $y = \alpha x + 3$ να διέρχεται από το σημείο Α(- 8, 19).

Λύση

Επειδή το σημείο Α(- 8, 19) ανήκει στην ευθεία έχουμε: $19 = \alpha \cdot (-8) + 3$ ή $19 - 3 = -8\alpha$ ή $-8\alpha = 16$ ή
$\alpha = -16/8$ ή $\alpha = -2$
Άρα η ευθεία είναι η $y = -2x + 3$.

4. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλες:

$$y = \frac{3}{2}x + 3,\ y = 1{,}5x + 2,\ y = x - 2,$$

$$y = 3x - 1,\ y = 3x + 7,\ y = 1{,}5x,\ y = 3x$$

Λύση

Οι ευθείες $y = \frac{3}{2}x + 3$ και $y = 1{,}5x + 2$

είναι παράλληλες γιατί είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 1{,}5x$. Ομοίως και οι $y = 3x - 1$, $y = 3x + 7$ γιατί είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 3x$.

5. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε η ευθεία $y = -3x + \lambda$ να τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη $x = -2$.

Λύση

Όλα τα σημεία του x'x έχουν τεταγμένη 0, άρα το σημείο είναι το (- 2, 0) και ισχύει: $0 = -3 \cdot (-2) + \lambda$ ή
$0 = 6 + \lambda$ ή $\lambda = -6$. Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -3x + 6$.

6. Να βρεθούν τα κ, λ ∈ R έτσι ώστε η ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ να τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη $y = -3$ και διέρχεται από το σημείο Α(2, 5).

Λύση

Το σημείο του άξονα y'y με τεταγμένη - 3 έχει τετμημένη 0 άρα:
$-3 = \kappa \cdot 0 + \lambda$ οπότε $\lambda = -3$.
Και επειδή η ευθεία $y = \kappa x - 3$ διέρχεται από το (2, - 5) θα ισχύει:
$-5 = \kappa \cdot 2 - 3$ ή $2\kappa = -5 + 3$ ή
$2\kappa = -2$ ή $\kappa = -1$.
Άρα η ευθεία είναι η $y = -x - 3$.

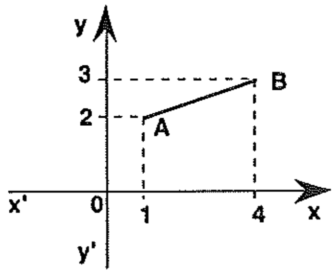
7. Να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
α) $x - 3y = -5$ με $1 \le x \le 4$ και
β) $3x - 2y = 3$ για $x \ge 3$.

Λύση

α) Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών δίνοντας στο x τις τιμές 1 και 4.

x	1	4
y	2	3

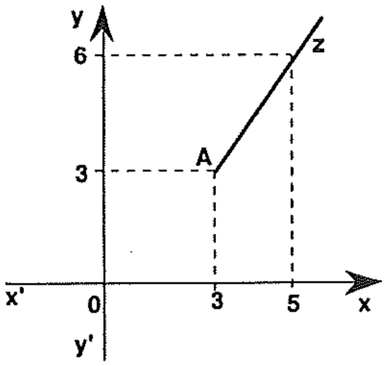
Επειδή το x παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες με 1 και μικρότερες ή ίσες με 4 η γραφική παράσταση της ευθείας $x - 3y = -5$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



β) Όμοια σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών για την ευθεία $3x - 2y = 3$ δίνοντας τιμές στο x μεγαλύτερες ή ίσες του 3.

x	3	5
y	3	6

Επειδή το x παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 3 η γραφική παράσταση της ευθείας $3x - 2y = 3$ είναι η ημιευθεία Αz.



Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y = x + 1$ και $y = -x + 1$.

Λύση

Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών για κάθε μια ευθεία.

$y = x + 1$

x	1	2
y		

$y = -x + 1$

x	1	2
y		

και στη συνέχεια ......

2. Να εξετάσετε αν η ευθεία: $y = -2x + 5$ διέρχεται από τα σημεία Α(1, 3), Β(2, 7), Γ(- 3, 11), Δ(0, 3), Ε(0, 5).

Λύση

Εξετάζουμε αν το σημείο Α(1, 3) επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας: $y = -2x + 5$. Για $x = 1$ και $y = 3$ έχουμε: $3 = -2 \cdot 1 + 5$ ή $3 = 3$ το οποίο ισχύει άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α. Ομοίως για το Β, Γ, Δ και Ε.

3. Δίνεται η συνάρτηση $y = -5x + 6$. Να γίνει η γραφική της παράσταση α) για $x \geq 2$, β) για $x \leq -3$, γ) για $2 \leq x \leq 3$, δ) για $x \in R$.

Λύση

α) Στην περίπτωση αυτή το x παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 2, άρα

x	2	3
y	-4	

και η γραφική παράσταση θα είναι η ημιευθεία .....

β) Στην περίπτωση αυτή θα είναι το ευθύγραμμο τμήμα ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $y = -1/3 \cdot x + 7$, β) $y = -x + 1$, γ) $y = -2x - 1$, δ) $y = x - 1$.

2. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α(- 2, 1), Β(-1, -4), Γ(3, -8), Δ(-7, 2), Ε(3, 7) ανήκουν στην ευθεία $y = -x - 5$.

3. Να βρείτε το α, ώστε η ευθεία: $y = \alpha x - 7$ να διέρχεται από το σημείο Α(1, - 3) και κατόπιν να σχεδιάσετε την ευθεία.

4. Να βρείτε το Β ώστε η ευθεία: $y = -3x + \beta$ να διέρχεται από το σημείο Α(- 2, 7) και κατόπιν να σχεδιάσετε την ευθεία.

5. Να βρείτε ποιες από τις ευθείες είναι παράλληλες:
$y = -2x + 1$, $y = 5/2 \cdot x + 3$, $y = x - 1$, $y + 2x = 4$, $y = 2{,}5x$, $y - 5/2\, x + 1 = 0$

6. Να βρεθούν τα α, β ώστε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ να τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη - 3 και να διέρχεται και από το σημείο Α(4, 7), κατόπιν να τη σχεδιάσετε.

7. Να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
α) $3x - 5y = 15$ με $x \geq -1$
β) $x - 2y = 1$ με $x \leq 3$
γ) $-x + 3y = 6$ με $-3 \leq x \leq 3$

8. Να βρεθεί σε ποια σημεία τέμνουν τους άξονες οι ευθείες με εξισώσεις:
α) $x-4y=8$, β) $2x+3y=6$, γ) $5x+7y=14$

4.4 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποια συνάρτηση λέγεται τετραγωνική;

1. Κάθε συνάρτηση της μορφής: **$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$** λέγεται **τετραγωνική συνάρτηση.**
Π.χ. $y = x^2$, $y = 2x^2 + 3x$, $y = x^2 - 5x + 6$

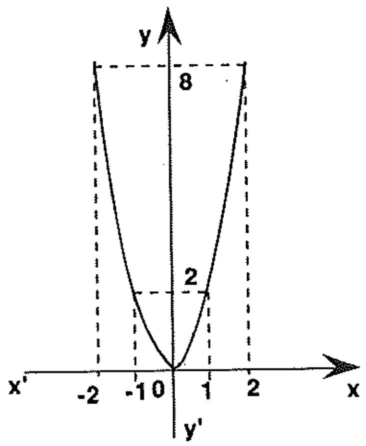
2. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2$; Δώστε ένα παράδειγμα.

2. Αν στην τετραγωνική συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) είναι $\beta = 0$ και $\gamma = 0$ τότε προκύπτει η συνάρτηση $y = \alpha x^2$.
Η γραφική παράσταση της είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή.**

Ανάλογα με την τιμή του α παρατηρούμε τα εξής:
α) Αν **$\alpha > 0$** η παραβολή βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα x'x, έχει άξονα συμμετρίας τον y'y, παρουσιάζει ελάχιστο και έχει κορυφή το O(0, 0).
β) Αν **$\alpha < 0$** η παραβολή βρίσκεται «κάτω» από τον x'x, έχει άξονα συμμετρίας τον y'y, παρουσιάζει μέγιστο, και έχει κορυφή το O(0, 0).
<u>Παράδειγμα:</u>
α) Έστω η συνάρτηση $y = 2x^2$. Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

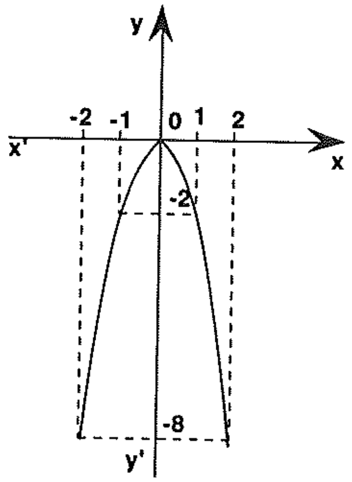
Άρα η γραφική παράσταση της δίνεται από το σχήμα:



β) Έστω και η συνάρτηση $y = -2x^2$. Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

Οπότε η γραφική παράσταση της $y = -2x^2$ είναι:



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές $y = 3x^2$ και $y = -3x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τι παρατηρείτε;

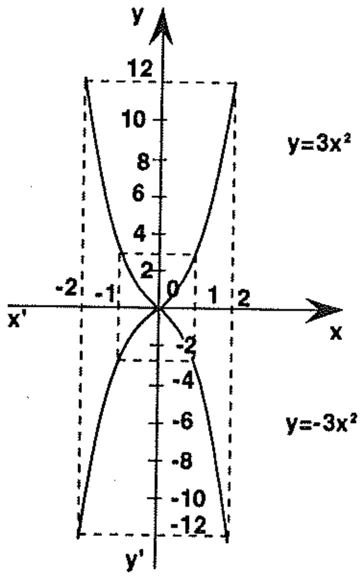
Λύση

Η γραφική τους παράσταση είναι μία παραβολή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών.

x	-2	-1	0	1	2
$y=3x^2$	12	3	0	3	12

x	-2	-1	0	1	2
$y=-3x^2$	-12	- 3	0	-3	-12

και οι γραφικές παραστάσεις είναι:



Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον x'x.

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω παραβολές έχουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο.

α) $y = -\frac{1}{2}x^2$, *β)* $y = \sqrt{3}x^2$

γ) $y = -\frac{3}{5}x^2$, *δ)* $y = 7x^2$

Λύση

α) Επειδή $\alpha = -1/2 < 0$, η $y = -1/2\ x^2$ έχει ελάχιστη τιμή ίση με την τεταγμένη 0 της κορυφής της O(0, 0) για x=0.

β) Επειδή $\alpha = \sqrt{3} > 0$ η $y = \sqrt{3}\ x^2$

έχει μέγιστη τιμή ίση με την τεταγμένη 0 της κορυφής της O(0, 0) για x=0.
γ) Επειδή $\alpha = -3/5 < 0$ η $y = -3/5\ x^2$ έχει ελάχιστη τιμή ίση με την τεταγμένη 0 της κορυφής της O(0, 0) για x=0.
δ) Επειδή $\alpha = 7 > 0$ η $y = 7x^2$ έχει μέγιστη τιμή ίση με την τεταγμένη 0 της κορυφής της O(0, 0) για x = 0.

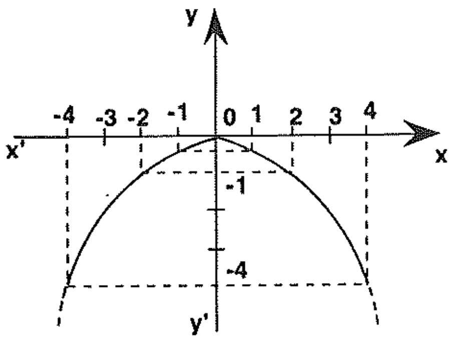
3. Να σχεδιάσετε την παραβολή:
$y = -1/4\ x^2$ για $-4 \le x \le 4$.

Λύση

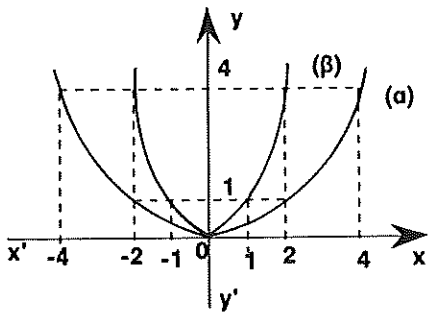
Σχηματίζουμε τον πίνακα των τιμών

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	-1/4	0	-1/4	-1	-4

και η γραφική παράσταση είναι:



4. Να βρεθεί η εξίσωση των παραβολών του σχήματος.



Λύση

Οι παραβολές αυτές διέρχονται από το O(0, 0) άρα είναι της μορφής $y = \alpha x^2$.
Η καμπύλη (α) διέρχεται από το (2,1) άρα $1 = \alpha \cdot 2^2$ ή $4\alpha = 1$ ή $\alpha = 1/4$ άρα είναι η $y = 1/4\ x^2$.
Η καμπύλη (β) διέρχεται από το (1,1) άρα $1 = \alpha \cdot 1^2$ ή $\alpha = 1$ άρα είναι η $y = x^2$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

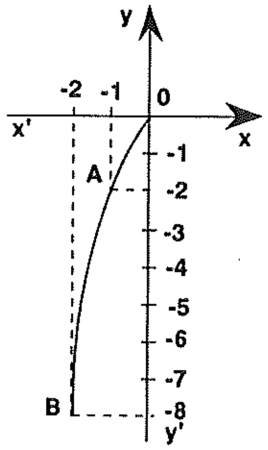
1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τι παρατηρείτε για τις διάφορες τιμές του α;

Λύση

Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$					
$y=2x^2$					
$y=3x^2$					
$y=4x^2$					

2. α) Να συμπληρωθεί το διάγραμμα της παραβολής του σχήματος.
β) Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την παραβολή αυτή.



Λύση

Βρίσκουμε το συμμετρικό κάθε σημείου της ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y και από τον τύπο $y = αx^2$ γνωρίζοντας ότι διέρχεται από το σημείο (- 1, - 2) βρίσκουμε την παραβολή.

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιαστούν οι παραβολές:

α) $y = -\frac{1}{3}x^2$, *β)* $y = \frac{2}{5}x^2$,

γ) $y = 0{,}5x^2$, *δ)* $y = -\frac{3}{4}x^2$

2. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = -5x^2$ *και κατόπιν τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x'x. Ποια είναι η εξίσωσή της;*

3. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις παρουσιάζουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο.

α) $y = -7x^2$, *β)* $y = 20x^2$,
γ) $y = 0{,}3x^2$, *δ)* $y = -0{,}3x^2$.

4. Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y = \frac{1}{2}x^2$ *για* $-4 \leq x \leq 4$

β) $y = \frac{1}{3}x^2$ *για* $x \geq 0$

γ) $y = -2x^2$ *για* $x \leq 2$

5. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής, αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο:
α) (- 3, 4), *β)* (- 9, 8),
γ) (- 1, 2), *δ)* (2, 4).

4.5 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$. Δώστε ένα παράδειγμα.

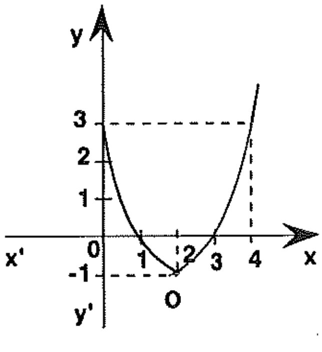
Απαντήσεις

1. Η γραφική παράσταση της (τετραγωνικής) συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) είναι μία παραβολή που έχει μέγιστη τιμή αν $\alpha < 0$ και ελάχιστη τιμή αν $\alpha > 0$. Η παραβολή αυτή έχει κορυφή το σημείο $O(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha})$.

Για να τη σχεδιάσουμε λοιπόν βρίσκουμε τις συντεταγμένες της κορυφής της και κάνουμε τον πίνακα τιμών.
Π.χ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο O με συντεταγμένες: $-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4}{2} = 2$ και $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -\frac{16 - 12}{4} = -\frac{4}{4} = -1$, δηλαδή O(2, - 1). Ο δε πίνακας τιμών είναι:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές:
α) $y = 2x^2 + 1$, β) $y = -2x^2 + 1$.

Λύση

α) Βρίσκουμε την κορυφή Ο' της παραβολής $y = 2x^2 + 1$.

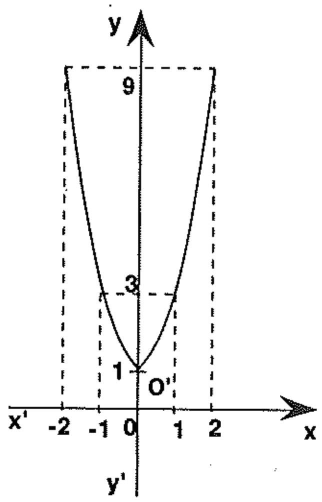
$$O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right) \text{ όπου } -\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ και}$$

$$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{-4 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2} = 1, \text{ δηλαδή}$$

Ο'(0, 1) και στη συνέχεια σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	3	9

Άρα η ζητούμενη παραβολή είναι:



β) Ομοίως η κορυφή της παραβολής είναι:

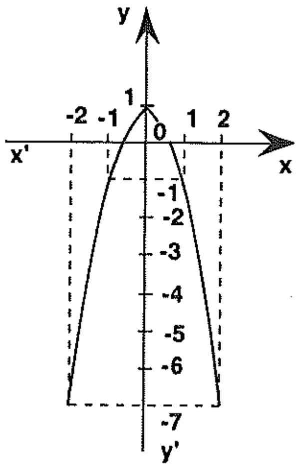
$$O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right) \text{ όπου } -\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ και}$$

$$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{-4 \cdot (-2) \cdot 1}{4 \cdot (-2)} = 1, \text{ δηλαδή}$$

Ο'(0, 1) και ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-1	1	-1	-7

Άρα η ζητούμενη παραβολή είναι η:



2. Να σχεδιάσετε τις παραβολές:
α) $y = x^2 - 3x + 2$, β) $y = -x^2 + 5x - 6$ και να βρείτε αν έχουν ελάχιστο ή μέγιστο και ποιο είναι αυτό.

Λύση

α) Βρίσκουμε την κορυφή της παραβολής $y = x^2 - 3x + 2$.

$$O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right) \text{ όπου } -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{3}{2} \text{ και}$$

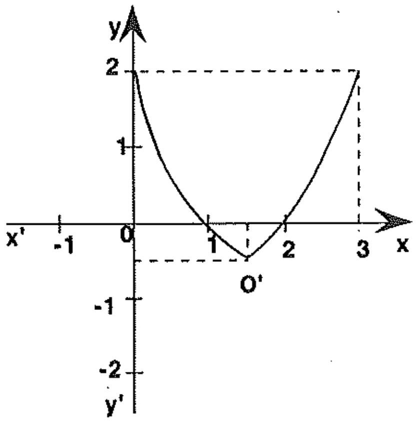
$$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{9 - 4 \cdot 2}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4}, \text{ δηλαδή}$$

$$O'\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 3/2 και θα βρίσκεται «πάνω» από την ευθεία y = - 1/4 γιατί α = 1 > 0. Παρουσιάζει ελάχιστο το - 1/4 για x = 3/2.
Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών της:

x	0	1	3/2	2	3
y	2	0	-1/4	0	2

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



β) Βρίσκουμε την κορυφή της παραβολής $y = -x^2 + 5x - 6$.

$O'(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha})$ όπου $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{5}{2\cdot(-1)} =$

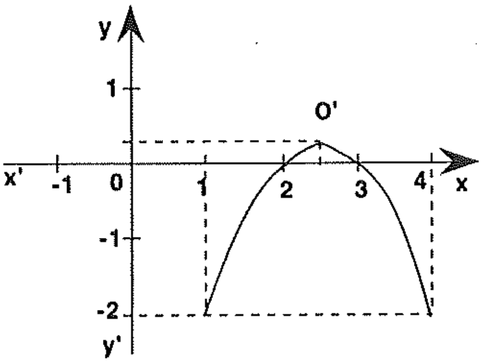
$= \frac{5}{2}$ και $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{5^2 - 4\cdot(-6)\cdot(-1)}{4\cdot(-1)} = \frac{1}{4}$,

δηλαδή $O'(\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$.

Επομένως η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 5/2$ και βρίσκεται «κάτω» από την ευθεία $y = 1/4$ γιατί $\alpha = -1 < 0$. Παρουσιάζει μέγιστο το 1/4 για $x = 5/2$.
Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών της:

x	1	2	5/2	3	4
y	-2	0	1/4	0	-2

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



3. Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο και ποιο είναι χωρίς να γίνει η γραφική παράσταση.
α) $y = -x^2 + 7x - 12$, β) $y = 3x^2 - 6x + 4$
γ) $y = 8x^2 - 3x$

Λύση

α) Επειδή $\alpha = -1 < 0$ η συνάρτηση έχει μέγιστο το

$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{7^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-12)}{4\cdot(-1)} =$

$= -\frac{49 - 48}{-4} = \frac{1}{4}$ για την τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha} =$

$= -\frac{7}{2\cdot(-1)} = \frac{7}{2}$

β) Επειδή $\alpha = 3 > 0$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο το

$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 3} = -\frac{36 - 48}{12} =$

$= 1$ για την τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-6}{2\cdot 3} = 1$

γ) Επειδή $\alpha = 8 > 0$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο το

$-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-3)^2 - 4\cdot 8\cdot 0}{4\cdot 8} = -\frac{9}{32}$ για

την τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-3}{2\cdot 8} = \frac{3}{16}$

4. Να βρεθούν τα α και $\beta \in R$ αν είναι γνωστό ότι τα σημεία A(0, 4) και B(1, 2) ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x^2 + \alpha x + \beta$.

Λύση

Επειδή το σημείο A(0, 4) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα επαληθεύει την εξίσωση $y = x^2 + \alpha x + \beta$, δηλαδή $4 = 0^2 + \alpha\cdot 0 + \beta$ ή $\beta = 4$. Το ίδιο και το σημείο B(1, 2) δηλαδή $2 = 1^2 + \alpha\cdot 1 + 4$ ή $\alpha = 2 - 1 - 4$ ή $\alpha = -3$.
Άρα η συνάρτηση είναι η $y=x^2-3x+4$.

5. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $y = x^2 - 11x + 30$ τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

Λύση

Τα σημεία που τέμνει η συνάρτηση τον άξονα x'x είναι τα σημεία που έχουν τετμημένη 0. Δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 11x + 30 = 0$ δηλαδή $x = 6$ ή $x = 5$.
Τα δε σημεία που τέμνει η συνάρτηση τον άξονα y'y είναι τα σημεία με τεταγμένη 0. Δηλαδή $y = 0^2 - 11 \cdot 0 + 30$ ή $y = 30$.
Άρα τα σημεία τομής με τον x'x είναι τα (6, 0) και (5, 0) και με τον y'y το (0, 30).

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $y = 2x^2 + 3$, β) $y = -3x^2 + 2$

Λύση

Βρίσκουμε τις κορυφές των παραβολών και στη συνέχεια σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών τους .....

2. Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο και ποιο είναι αυτό.
α) $y = -2x^2 + 3x - 1$
β) $y = -3x^2 + 2x - 3$
γ) $y = 2x^2 + 5x - 6$

Λύση

Αν $\alpha > 0$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο ενώ αν $\alpha < 0$ η συνάρτηση έχει μέγιστο. Άρα .....

3. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες x'x και y'y των παραβολών:
α) $y = x^2 - 7x + 10$
β) $y = -x^2 + 8x - 15$

Λύση

Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι αυτά που έχουν τεταγμένη y=0, ενώ με τον άξονα y'y αυτά που έχούν τετμημένη x = 0. Άρα .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $y = -3x^2 + 2$, β) $y = 3x^2 + 5$,
γ) $y = 2x^2 - 3$

2. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών και σε κάθε περίπτωση να βρεθεί το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης.
α) $y = 3x^2 - 5x + 2$
β) $y = x^2 - 5x + 6$
γ) $y = x^2 - 4x + 3$

3. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών:
α) $y = x^2 - 2x + 1$ για $-2 \leq x \leq 3$
β) $y = x^2 - 6x + 5$ για $1 \leq x \leq 5$

4. Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστο και ποιες ελάχιστο και ποιο είναι αυτό χωρίς να γίνει η γραφική τους παράσταση.
α) $y = -3x^2 + 2x - 1$
β) $y = 5x^2 - 3x + 3$

5. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + \alpha x + \beta$ αν είναι γνωστό ότι τα σημεία A(0, 3) και B(4, -2) είναι σημεία της γραφικής της παράστασης.

6. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 - 7x + 2$ και της ευθείας $y = -4$.

7. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των παραβολών:
α) $y = 2x^2 + 3x + 7$, $y = x^2 + 5x + 6$
β) $y = 2x^2 - 1$, $y = -x^2 - 3$

8. Να βρεθούν τα κοινά σημεία με τους άξονες x'x και y'y των παραβολών:
α) $y = x^2 - 5x + 4$
β) $y = x^2 - 8x + 15$

4.6 Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. *Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha/x$, $\alpha \neq 0$. Δώστε ένα παράδειγμα.*

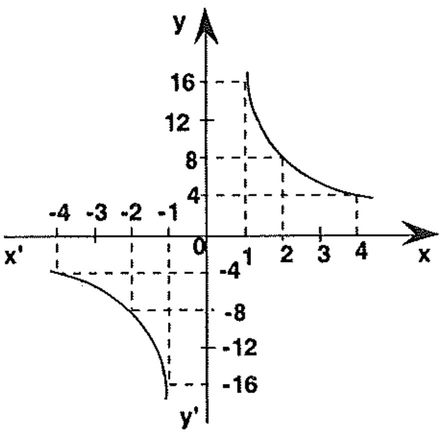
Απαντήσεις

1. Η συνάρτηση $y = \alpha/x$, $\alpha \neq 0$ έχει ως γραφική παράσταση μια καμπύλη που αποτελείται από δυο κλάδους και λέγεται **υπερβολή**. Οι κλάδοι αυτοί έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και πλησιάζουν τους άξονες x'x και y'y χωρίς να τους τέμνουν γι' αυτό οι άξονες λέγονται **ασύμπτωτοι** της υπερβολής. Για τη γραφική της παράσταση χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών με τουλάχιστον 6 τιμές, τρεις θετικές και τρεις αρνητικές.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η συνάρτηση $y = \frac{16}{x}$. Ο πίνακας των τιμών της είναι:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-4	-8	-16	16	8	4

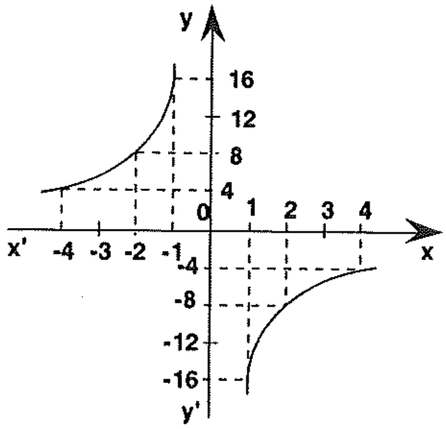
Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $y = -\frac{16}{x}$. Ο πίνακας των τιμών της είναι:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-4	-8	-16	16	8	4

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $\alpha > 0$ η υπερβολή $y = \alpha/x$ έχει δύο κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο ενώ αν $\alpha < 0$ έχει δύο κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

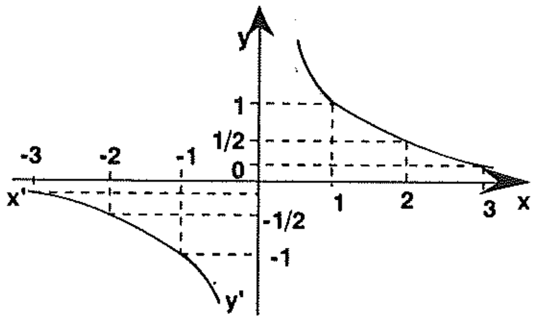
α) $y = \frac{1}{x}$ *και β)* $y = -\frac{1}{x}$.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1/x$ είναι μια υπερβολή με δύο κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο γιατί $\alpha = 1 > 0$ και ασύμπτωτες τους άξονες x'x και y'y. Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών και έχουμε:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1/3	-1/2	-1	1	1/2	1/3

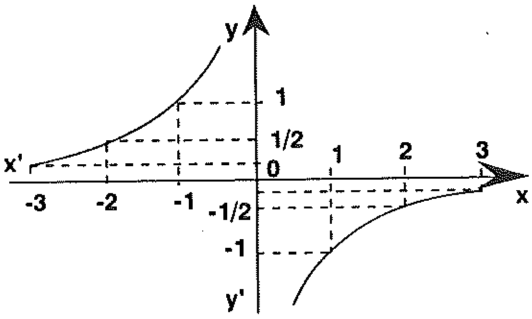
Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -1/x$ είναι μια υπερβολή με δύο κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο γιατί $\alpha = -1 < 0$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες x'x και y'y. Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών της:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	1/3	1/2	1	-1	-1/2	-1/3

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



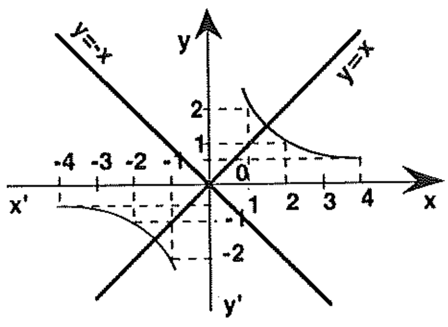
2. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = α/x αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο A(-1, -2) και κατόπιν να εξετάσετε αν έχει κέντρο συμμετρίας ή άξονες συμμετρίας.

Λύση

Επειδή το A είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης, δηλαδή $-2 = α/(-1)$ ή $α = (-1)\cdot(-2)$ ή $α = 2$ άρα η συνάρτηση είναι η $y = 2/x$ και η γραφική της παράσταση είναι μια υπερβολή με δύο κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Σχηματίζουμε τον πίνακα των τιμών της:

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	-1/2	-1	-2	2	1	1/2

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Βλέπουμε λοιπόν ότι έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις ευθείες y= = x και y = - x.

3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y = 6/x και y= - 6/x στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος.

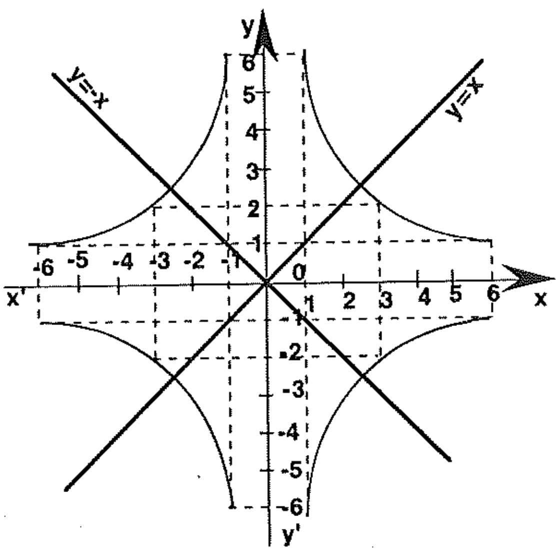
Λύση

Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι υπερβολές με δύο κλάδους. Σχηματίζουμε τους πίνακες των τιμών για κάθε μια.

x	-6	-3	-1	1	3	6
y=6/x	-1	-2	-6	6	2	1

x	-6	-3	-1	1	3	6
y=-6/x	1	2	6	-6	-2	-1

Άρα η γραφικές τους παραστάσεις είναι:



Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι άξονες συμμετρίας είναι οι x'x, y'y και οι ευθείες y = x και y = - x.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{100}{x}$ *,β)* $y = -\ \frac{100}{x}$.

Λύση

Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι υπερβολές. Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα τιμών τους .....

α)

x	-100	-50	-20	20	50	100
y						

β) ......

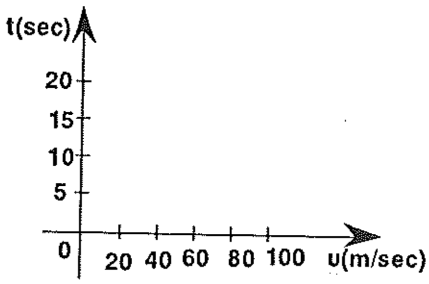
2. Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τον πίνακα.

υ(m/sec)	100	50	25	10	5
t(sec)	1	2	4	10	20

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του χρόνου ως συνάρτηση της ταχύτητας.

Λύση

Σχεδιάζουμε το σύστημα των ορθογωνίων αξόνων xOy και σημειώνουμε τα σημεία (100, 1), (50, 2), ...



Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{8}{x}$, *β)* $y = -\ \frac{8}{x}$,

γ) $y = \frac{25}{x}$, *δ)* $y = \frac{50}{x}$

2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a/x$ αν γνωρίζετε ότι το σημείο $A(-5, -2)$ είναι σημείο αυτής.

3. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $y = \frac{5}{x}$ *για* $x > 0$

β) $y = \frac{3}{x}$ *για* $2 \leq x \leq 9$

γ) $y = -\ \frac{2}{x}$ *για* $-15 < x < 0$

4. Αν η συνάρτηση $y = a/x$ διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση και να βρείτε τους άξονες συμμετρίας της.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = -3x$ και $y = 3/x$ να βρεθούν τα κοινά σημεία τους.

6. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $y = -x$ και $y = -2/x$.

7. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = \frac{1}{x}$.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να βρείτε σε ποιο σύνολο πρέπει να ανήκει το x ώστε να ορίζονται οι συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$,

β) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x(x-1)}$,

γ) $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$,

δ) $p(x) = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{3}{x-1}$

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x) = -x^2 + 5x - 1,\ x \in R$.
α) Βρείτε τα: $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$f(1) + f(-1) + 5\sqrt{3} = f(\sqrt{3})$.

3. Να βρείτε τα σημεία που τέμνουν τους άξονες x'x και y'y οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
α) $x - 3y = 2$, β) $y = x - 2$, γ) $y = 2$,
δ) $y = x^2 - 4$, ε) $y = x^2 - 3x + 2$,
στ) $y = x^2 + 1$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x) = (x-2)^2,\ x \in R$ και
$g(x) = (x+3)^2,\ x \in R$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in R$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, $x \neq 2$ και $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x \neq -3$.
Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεών τους.

6. Δίνεται η συνάρτηση:
$f(x) = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x+3}$, με $x \neq 1$ και $x \neq -3$.
Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) - 1 = 0$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις:
$f(x) = (-3x+1)(x-2)$ και
$g(x) = x^2 - (x-1)^2$.
α) Να βρεθεί τι είδους γραμμές παριστάνουν και
β) να βρεθούν τα κοινά σημεία, αν υπάρχουν, των γραμμών αυτών.

8. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:
α) $f(x) = 2x - 1$, β) $f(x) = -2x$,
γ) $f(x) = 2x^2$, δ) $f(x) = -3/x$,
ε) $f(x) = x^2 - 2x$, στ) $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

9. Δίνεται η συνάρτηση:
$f(x) = \kappa x^2 + 3x + \lambda$. Να βρεθούν τα κ, λ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, -2)$ και $B(-1, 3)$.

10. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων: $f(x) = -x^2$ και $g(x) = 4x - 5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων και με τη βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση.

11. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις διέρχονται από το ίδιο σημείο: $f(x) = x + 2$,
$g(x) = 2x^2 - 7x + 8$ και $h(x) = 3/x$.

12. Το άθροισμα της βάσης και του αντίστοιχου ύψους ενός τριγώνου είναι 30 cm.
α) Αν η βάση είναι 3x cm, να εκφράσετε το ύψος ως συνάρτηση του x.
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ως συνάρτηση του x.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του εμβαδού για $0 \leq x \leq 8$.
δ) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε τα μήκη της βάσης και του ύψους ώστε το τρίγωνο να έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

BASIC 6

Στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιήσαμε τις εντολές READ - DATA για να υποχρεώσουμε τον υπολογιστή να επαναλάβει ορισμένες εργασίες του προγράμματος. Κάτι παρόμοιο μπορούμε να κάνουμε με τις εντολές FOR και NEXT. Πληκτρολογήστε το επόμενο πρόγραμμα:

```
10 FOR x=2 TO 4 STEP 1    (↵)
20 PRINT 2x+3             (↵)
30 NEXT x                 (↵)
40 END                    (↵)
RUN                       (↵)
```

Τότε στην οθόνη θα εμφανιστούν οι αριθμοί:

7 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x+3, αν x=2)
9 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x+3, αν x=3)
11 (το αποτέλεσμα της πράξης 2x+3, αν x=4)

<u>Δηλαδή</u> υπολογίζει διαδοχικά όσες τιμές του θέσουμε αρχίζοντας από την πρώτη x = 2, αυξάνοντας κάθε φορά το βήμα κατά 1 (STEP 1) και τελειώνει όταν x = 4.
Φυσικά θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τα όρια του x καθώς και τα βήματα που κάνει κάθε φορά ανάλογα με τις ανάγκες μας.

Ένα πρόγραμμα σαν το προηγούμενο λέγεται βρόγχος (FOR - NEXT) ή κύκλωμα (FOR - NEXT) ή Loop και μπορεί να είναι μέρος ενός μεγαλύτερος προγράμματος.

Ασκήσεις

1. Να φτιάξετε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τον πίνακα της συνάρτησης y = - 3x + 2.

x	-2	-1	0	1	2
y					

2. Ομοίως για τη συνάρτηση: $y = 2x^2 + 1$.

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y							

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Στατιστική

5.1 Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό και τι άτομα του πληθυσμού;

1. Πληθυσμό ονομάζουμε κάθε σύνολο του οποίου τα στοιχεία εξετάζουμε ως προς μια ιδιότητά του. Τα στοιχεία του συνόλου «πληθυσμός» ονομάζονται **άτομα.**

Παράδειγμα: Σε μια βιβλιοθήκη βρίσκονται 1.250 βιβλία. Εξετάζουμε τα βιβλία αυτά ως προς το περιεχόμενό τους (Μαθηματικά, Λογοτεχνικά - Ιστορικά κ.λπ.). Τότε πληθυσμός είναι τα 1.250 αυτά βιβλία και άτομα είναι κάθε ένα από τα βιβλία αυτά.

2. Τι ονομάζουμε δείγμα από έναν πληθυσμό;

2. Δείγμα από έναν πληθυσμό ονομάζουμε ένα μέρος του πληθυσμού κατάλληλα επιλεγμένο το οποίο εξετάζουμε ως προς κάποια ιδιότητά του, τα δε συμπεράσματα που βγάζουμε ισχύουν για όλο τον πληθυσμό.

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε το σύνολο των μαθητών της Ελλάδας ως προς την κατάσταση της υγείας των δοντιών τους. Επειδή δεν είναι δυνατόν να εξετάσουμε όλους τους μαθητές, εξετάζουμε ένα μέρος του συνόλου π.χ. τους μαθητές ορισμένων μόνο σχολείων από διάφορα μέρη της Ελλάδας κατάλληλα επιλεγμένων. Λέμε τότε ότι οι μαθητές αυτών των σχολείων αποτελούν ένα δείγμα.

3. Τι ονομάζουμε στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις;

3. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εξέταση των ατόμων ενός δείγματος του πληθυσμού ως προς κάποια ιδιότητά τους ονομάζονται **στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις.**

4. Τι ονομάζουμε μέγεθος ενός δείγματος;

4. **Μέγεθος** ενός δείγματος ονομάζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός δείγματος και το συμβολίζουμε με το γράμμα **n**.

5. Τι ονομάζουμε συχνότητα μιας παρατήρησης;

5. **Συχνότητα** μιας παρατήρησης ονομάζουμε τον αριθμό που μας δείχνει το πλήθος των ατόμων ενός δείγματος στα οποία εμφανίστηκε η παρατήρηση αυτή.

Η συχνότητα μιας τιμής συμβολίζεται με το γράμμα **ν**.

Παράδειγμα: Από την εξέταση των 1.250 βιβλίων της βιβλιοθήκης προέκυψε ότι: 190 βιβλία είναι Λογοτεχνικά, 250 βιβλία είναι Ιστορικά, 415 βιβλία είναι Νομικά, 37 βιβλία είναι Μαθηματικά, 301 βιβλία είναι Εγκυκλοπαιδικά και 57 βιβλία είναι Βιογραφικά.

Παρατηρούμε ότι η τιμή «Νομικά» εμφανίστηκε 415 φορές. Ο αριθμός 415 λέγεται συχνότητα της τιμής «Νομικά».

6. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας παρατήρησης;

6. **Σχετική συχνότητα** μιας παρατήρησης ονομάζουμε το πηλίκο της συχνότητας ν που έχει η παρατήρηση αυτή προς τον αριθμό n που δηλώνει το πλήθος των ατόμων του δείγματος. Η σχετική συχνότητα συμβολίζεται με το γράμμα f. Δηλαδή: $\mathbf{f = \frac{v}{n}}$. Συνήθως τη σχετική συχνότητα την υπολογίζουμε επί τοις εκατό, δηλαδή: $\mathbf{f\,\% = \frac{v}{n} \cdot 100}$.

Παράδειγμα: Η σχετική συχνότητα της τιμής «Νομικά» στο παράδειγμα της προηγούμενης ερώτησης είναι: $f = 415/1250 = 0{,}332$ ή $f\% = 415/1250 \cdot 100 = 33{,}2\ \%$.

Παρατηρήσεις:

α) Η σχετική συχνότητα f οποιασδήποτε παρατήρησης, παίρνει τιμές από το μηδέν έως το 1, δηλαδή $0 \le f \le 1$.

β) Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων όλων των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι ίσο με 1.

7. Τι ονομάζουμε μέση τιμή $\bar{x}$ μιας κατανομής;

7. **Μέση τιμή $\bar{x}$** μιας κατανομής ονομάζουμε το πηλίκο του αθροίσματος **Σx** όλων των παρατηρήσεων προς το πλήθος n των παρατηρήσεων.

Δηλαδή: $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

Π.χ. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10 φορές και παίρνουμε τις ενδείξεις: 3, 1, 6, 2, 4, 6, 5, 6, 1, 5. Ζητάμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των ενδείξεων. Ισχύει:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{3+1+6+2+4+6+5+6+1+5}{10} = \frac{39}{10} = 3{,}9 \cong 4$$

8. Πώς βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων;

8. Για να βρούμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάνουμε τα παρακάτω:

α) Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις με σειρά από τη μικρότερη προς τη με-

γαλύτερη.
β) Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό (μονό) τότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση.
γ) Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο (ζυγό) τότε υπάρχουν δύο μεσαίες παρατηρήσεις οπότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων αυτών παρατηρήσεων.
Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα ζάρι 13 φορές και παίρνουμε τις ενδείξεις: 4, 1, 3, 6, 4, 1, 2, 1, 6, 5, 6, 1, 5. Ζητάμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων. Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. 1, 1, 1, 1, 2, 3, **4**, 4, 5, 5, 6, 6, 6. Η μεσαία παρατήρηση 4 είναι η διάμεσος της κατανομής.
Αν όμως ρίχναμε το ζάρι 12 φορές και οι παρατηρήσεις ήταν: 4, 1, 3, 6, 4, 1, 2, 1, 6, 5, 6, 1. Τότε: 1, 1, 1, 1, 2, **3**, **4**, 4, 5, 6, 6, 6. Υπάρχουν δύο μεσαίες παρατηρήσεις. Στην περίπτωση αυτή η διάμεσος είναι ο αριθμός:

$$\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

9. Τι ονομάζουμε μέτρα θέσεως μιας κατανομής;

9. **Μέτρα θέσεως** μιας κατανομής ονομάζουμε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων γιατί οι δύο αυτοί αριθμοί μας δίνουν πληροφορίες για τη θέση των παρατηρήσεων πάνω σ' έναν άξονα.

10. Πότε κάνουμε ομαδοποίηση των παρατηρήσεων; Τι είναι οι κλάσεις και τι κέντρο μιας κλάσης;

10. Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων κάνουμε στην περίπτωση που έχουμε πολλές παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους.
Τότε βρίσκουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή των παρατηρήσεων και το διάστημα που προκύπτει το χωρίζουμε σε μικρότερα διαστήματα που λέγονται **κλάσεις**. Οι κλάσεις αυτές μπορεί να έχουν το ίδιο πλάτος ή διαφορετικά πλάτη, ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός των κλάσεων, τόσο πιο ακριβή συμπεράσματα βγάζουμε. Ο αριθμός που ισαπέχει από τα άκρα μιας κλάσης λέγεται **κέντρο** της κλάσης.

11. Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων μιας ομαδοποιημένης κατανομής;

11. **Πολύγωνο συχνοτήτων** μιας ομαδοποιημένης κατανομής ονομάζουμε την τεθλασμένη γραμμή που προκύπτει αν ενώσουμε διαδοχικά τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων του ιστογράμματος συχνοτήτων.

Παρατήρηση:
Αν το ιστόγραμμα είναι των σχετικών συχνοτήτων τότε η τεθλασμένη γραμμή λέγεται **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.**

12. Τι ονομάζουμε καμπύλη συχνοτήτων μιας ομαδοποιημένης κατανομής;

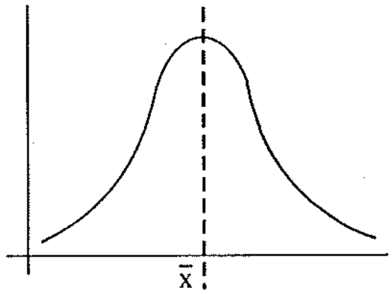
12. **Καμπύλη συχνοτήτων** μιας ομαδοποιημένης κατανομής ονομάζουμε το πολύγωνο συχνοτήτων που προκύπτει όταν τα ορθογώνια του ιστογράμματος συχνοτήτων μιας κατανο-

μής έχουν πολύ μικρό πλάτος και έτσι αντί για τεθλασμένη παρουσιάζεται ως λεία γραμμή.

13. Τι γνωρίζετε για την κανονική κατανομή;

13. Στην κανονική κατανομή η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή (δηλαδή η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα) είναι **ίσες**.

Επίσης η καμπύλη συχνοτήτων που στην κανονική κατανομή λέγεται και **κανονική καμπύλη** είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = \bar{x}$.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος των αριθμών: 48, 13, 57, 34, 38, 41, 22, 49, 7.

Λύση

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ των αριθμών αυτών ισούται με το πηλίκο του αθροίσματός τους προς το πλήθος τους, δηλαδή:

$$\bar{x} = \frac{48+13+57+34+38+41+22+49+7}{9} =$$

$$= \frac{309}{9} = 34{,}33$$

β) Για να βρούμε τη διάμεσο τοποθετούμε τους αριθμούς σε σειρά αυξανόμενου μεγέθους: 7, 13, 22, 34, 38, 41, 48, 49, 57. Ο μεσαίος αριθμός δηλαδή ο 38 είναι η διάμεσος.

2. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 42 μαθητών στα Μαθηματικά.

Βαθμός	6	7	8	9	10	11	12
Μαθητές	2	2	1	1	5	6	4

Βαθμός	13	14	15	16	17	18	19	20
Μαθητές	3	4	4	3	2	2	1	2

α) Να κάνετε την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο της κατανομής.
γ) Να κατασκευάσετε την κατανομή αυτή με ραβδόγραμμα.

Λύση

α) Η κατανομή συχνοτήτων (ν) είναι δοσμένη από το πρόβλημα. Η σχετική συχνότητα f υπολογίζεται από τον τύπο $f = \nu/n$, όπου n το μέγεθος του δείγματος και είναι $n = 42$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός x	Μαθητές ν	f	f %	ν · x
6	2	0,0476	4,76	12
7	2	0,0476	4,76	14
8	1	0,024	2,4	8
9	1	0,024	2,4	9
10	5	0,12	12	50
11	6	0,143	14,3	66
12	4	0,095	9,5	48
13	3	0,071	7,1	39
14	4	0,095	9,5	56
15	4	0,095	9,5	60
16	3	0,071	7,1	48
17	2	0,0476	4,76	34
18	2	0,0476	4,76	36
19	1	0,024	2,4	19
20	2	0,0476	4,76	40
	42	1	100	539

β) Για τη μέση τιμή $\overline{x}$ έχουμε:

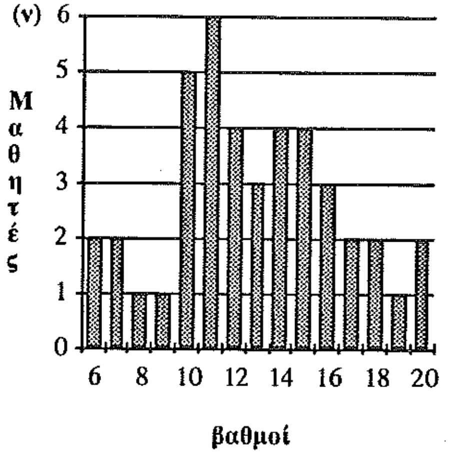
$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ όπου $\Sigma x = 539$ και $n = 42$ οπότε

$\overline{x} = \dfrac{539}{42} = 12{,}833$

Για να βρούμε τη διάμεσο γράφουμε τους 42 βαθμούς σε σειρά αυξανόμενου μεγέθους δηλαδή: 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, ..., 18, 18, 19, 20, 20. Το πλήθος τους είναι 42 (άρτιο) άρα η διάμεσός τους είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων, δηλαδή:

$\dfrac{12+13}{2} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$

γ) Στο σχήμα βλέπουμε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



3. Η μέση τιμή πώλησης αυτοκινήτων σε μια αντιπροσωπεία είναι 3.500.000 δρχ. το αυτοκίνητο. Αν γίνει αύξηση κατά 5% στην τιμή πώλησης, ποια θα είναι η μεταβολή στη μέση τιμή πώλησης;

Λύση

Αν γίνει αύξηση κατά 5% στην τιμή πώλησης τότε και η μέση τιμή πώλησης θα αυξηθεί κατά 5% δηλαδή:

$\dfrac{3.500.000 \cdot 5}{100} = \dfrac{17.500.000}{100} = 175.000$ δρχ.

4. Η κατανάλωση νερού σε λίτρα (lt) 60 οικογενειών σε μια ημέρα φαίνεται στον πίνακα:

Νερό σε lt x	Αριθ. οικογενειών (ν)
$0 \le x \le 30$	2
$30 \le x \le 40$	10
$40 \le x \le 60$	20
$60 \le x \le 80$	15
$80 \le x \le 100$	12
$100 \le x < 140$	1

α) Να εκτιμήσετε τη μέση κατανάλωση των οικογενειών αυτών σε νερό.
β) Να σχεδιάσετε ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις σχετικές συχνότητες και τα γινόμενα ν · x.

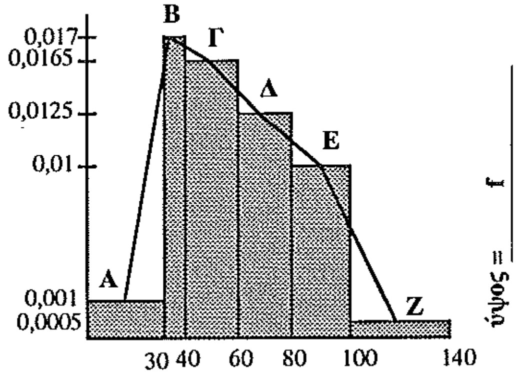
Νερό σε lt x	Κέντρο κλάσης	ν	f	ν · x
$0 \le x < 30$	15	2	0,03	30
$30 \le x < 40$	35	10	0,17	350
$40 \le x < 60$	50	20	0,33	1000
$60 \le x < 80$	70	15	0,25	1050
$80 \le x < 100$	90	12	0,20	1080
$100 \le x < 140$	120	1	0,02	120
		60	1	3630

Άρα $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{3630}{60} = 60{,}5$ lt.

β) Ο πίνακας που ακολουθεί θα μας διευκολύνει να σχεδιάσουμε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Διάστημα	Πλάτος διαστήματος	f	f / πλατ.
$0 \le x < 30$	30 - 0 = 30	0,03	0,001
$30 \le x < 40$	40 - 30 = 10	0,17	0,017
$40 \le x < 60$	60 - 40 = 20	0,33	0,0165
$60 \le x < 80$	80 - 60 = 20	0,25	0,0125
$80 \le x < 100$	100 - 80 = 20	0,20	0,01
$100 \le x < 140$	140 - 100 = 40	0,02	0,0005

Το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται στο σχήμα.



Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων είναι η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕΖ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Σε έξι διαδοχικούς μήνες ένας μαθητής έβαλε στον κουμπαρά του 1100, 1500, 900, 4700, 2300, 5130 δρχ. Ποιος είναι ο μέσος όρος και ποια η διάμεσος των οικονομιών του στη διάρκεια των παραπάνω έξι μηνών;

Λύση

Ο μέσος όρος είναι η μέση τιμή $\overline{x} = ...$ Για να βρούμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός άρα .....

2. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τις γεννήσεις κατά τη διάρκεια ενός χρόνου σε 30 πόλεις.

Γεννήσεις x	Συχνότητα (ν)
$39 \le x < 43$	4
$43 \le x < 46$	0
$46 \le x < 51$	0
$51 \le x < 55$	1
$55 \le x < 60$	4
$60 \le x < 63$	5
$63 \le x < 68$	3
$68 \le x < 71$	7
$71 \le x < 77$	4
$77 \le x < 80$	2

α) Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή της κατανομής.
γ) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα των συχνοτήτων.
δ) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Λύση

α) Βρίσκουμε το κέντρο κάθε κλάσης. Της πρώτης κλάσης είναι:

$$\frac{39+43}{2}=41$$

Της δεύτερης κλάσης είναι .....
Ο πίνακας κατανομής των συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο επόμενος:

Γεννήσεις x	Κέντρο κλάσης	ν	f%	ν · x
$39 \le x < 43$	41	4	13,3	164
$43 \le x < 46$	44,5	0	0	
$46 \le x < 51$		0		
$51 \le x < 55$		1		
$55 \le x < 60$		4		
$60 \le x < 63$		5		
$63 \le x < 68$		3	10	
$68 \le x < 71$		7		
$71 \le x < 77$	74	4		296
$77 \le x < 80$		2		
		30	100	

β) Η μέση τιμή $\overline{x}$ είναι:

$$\overline{x}=\frac{\Sigma x}{30}=.....$$

γ) ....., δ) ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρακάτω παρατηρήσεων:
α) 3, 7, 1, 6, 4, 10, 13
β) 5, 12, 6, 51, 40, 23

2. Οι τιμές έξι βιβλίων είναι: 1500, 1700, 1800, 1850, 2100 και 900 δρχ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε σε μια εβδομάδα 9, 12, 25, 6, 10, 8 βιβλία αντίστοιχα από τα παραπάνω βιβλία. Ποια είναι κατά μέσο όρο η είσπραξη ανά βιβλίο;

3. Οι πόντοι που πέτυχαν 100 παίκτες του μπάσκετ σ' ένα χρόνο φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πόντοι	Παίκτες
$0 \le x < 30$	5
$30 \le x < 50$	25
$50 \le x < 100$	30
$100 \le x < 150$	10
$150 \le x < 200$	20
$200 \le x < 300$	10

α) Να γίνει κατανομή σχετικών συχνοτήτων.
β) Να εκτιμηθεί η μέση τιμή.
γ) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.

4. Σε ένα φορτηγό έχουν φορτώσει 250 κιβώτια. Τα βάρη των κιβωτίων κατανέμονται όπως στον πίνακα που ακολουθεί.

Βάρος σε gr	Κιβώτια
$10 \le x < 15$	30
$15 \le x < 18$	40
$18 \le x < 20$	50
$20 \le x < 25$	20
$25 \le x < 28$	10

α) Να εκτιμήσετε το φορτίο του φορτηγού σε τόννους.
β) Να εκτιμήσετε το μέσο βάρος κάθε κιβωτίου.
γ) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων καθώς και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

5. Οι ώρες λειτουργίας 150 μηχανών ενός εργοστασίου για ένα μήνα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ώρες	Μηχανές
$0 \le x < 20$	10
$20 \le x < 60$	20
$60 \le x < 140$	30
$140 \le x < 200$	20
$200 \le x < 250$	40
$250 \le x < 300$	10
$300 \le x < 360$	20

α) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή των ωρών λειτουργίας των μηχανών.
β) Τι ποσοστό μηχανών έχει λιγότερο από 200 ώρες λειτουργίας;
γ) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων.
δ) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

5.2 Αθροιστική συχνότητα

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε αθροιστική συχνότητα μιας παρατήρησης x;

1. Αθροιστική συχνότητα μιας παρατήρησης x ονομάζουμε το άθροισμα των συχνοτήτων όλων των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της x.
Π.χ.

Αριθμός παιδιών x	Συχνότητα ν	Αθροιστική συχνότητα
0	10	10
1	26	36
2	30	66
3	22	88
4	7	95
5	3	98
6	2	100
	100	

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει την κατανομή 100 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Η αθροιστική συχνότητα της τιμής 4 είναι:
$7 + 22 + 30 + 26 + 10 = 95$ που σημαίνει ότι 95 οικογένειες έχουν μέχρι και 4 παιδιά.

2. Τι ονομάζουμε σχετική αθροιστική συχνότητα μιας παρατήρησης x;

2. Σχετική αθροιστική συχνότητα μιας παρατήρησης x ονομάζουμε το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων όλων των παρατηρήσεων που είναι

μικρότερες ή ίσες της x.
Π.χ.

Αριθμός παιδιών x	Συχνότητα ν	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική σχ. συχν.
0	10	10%	10
1	26	26%	36
2	30	30%	66
3	22	22%	88
4	7	7%	95
5	3	3%	98
6	2	2%	100
	100	100%	

Η σχετική αθροιστική συχνότητα της παρατήρησης 2 είναι 66 που σημαίνει ότι 66% των οικογενειών έχουν μέχρι και 2 παιδιά.

3. Πώς βρίσκουμε την αθροιστική συχνότητα μιας κλάσεως μιας ομαδοποιημένης κατανομής;

3. Για να βρούμε την αθροιστική συχνότητα μιας κλάσεως μιας ομαδοποιημένης κατανομής αρκεί να αθροίσουμε τη συχνότητα αυτής της κλάσεως με όλες τις προηγούμενές της.
Π.χ.

Ύψος x cm	Συχνότητα ν	Αθροιστική συχνότητα
$150 \leq x < 155$	1	1
$155 \leq x < 160$	2	3
$160 \leq x < 165$	3	6
$165 \leq x < 170$	8	14
$170 \leq x < 175$	10	24
$175 \leq x < 180$	7	31
$180 \leq x < 185$	6	37
	37	

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει τις επιδόσεις 37 μαθητών στο άλμα εις ύψος.
Η αθροιστική συχνότητα της κλάσεως 165 - 170 είναι $8 + 3 + 2 + 1 = 14$. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι 14 μαθητές έχουν επίδοση μέχρι 170 cm ή μικρότερη.

4. Πώς βρίσκουμε τη σχετική αθροιστική συχνότητα μιας κλάσεως μιας ομαδοποιημένης κατανομής;

4. Αρκεί να αθροίσουμε τη σχετική αθροιστική συχνότητα της κλάσεως αυτής με όλες τις άλλες προηγούμενες σχετικές συχνότητες.
Π.χ.

Ύψος x cm	Συχνότητα ν	Σχετική συχνότητα f%	Αθροιστική σχετ. συχν.
150 ≤ x < 155	1	2,7	2,7
155 ≤ x < 160	2	5,4	8,1
160 ≤ x < 165	3	8,1	16,2
165 ≤ x < 170	8	21,7	37,9
170 ≤ x < 175	10	27	64,9
175 ≤ x < 180	7	18,9	83,8
180 ≤ x < 185	6	16,2	100
	37	100	

Η σχετική αθροιστική συχνότητα της κλάσεως 165 - 170 είναι 37,9 που σημαίνει ότι το 37,9% των μαθητών έχουν επίδοση μέχρι 170 cm στο άλμα εις ύψος.

5. Πώς σχεδιάζουμε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων σε μία ομαδοποιημένη κατανομή;

5. Για να σχεδιάσουμε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων σε μία ομαδοποιημένη κατανομή κάνουμε τα εξής:

α) Βρίσκουμε την αθροιστική συχνότητα.

β) Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Στον οριζόντιο άξονα παίρνουμε τα δεξιά άκρα των κλάσεων και στον κατακόρυφο άξονα παίρνουμε τις αθροιστικές συχνότητες των αντίστοιχων κλάσεων.

γ) Ορίζουμε τα σημεία εκείνα που έχουν τετμημένη το δεξιό άκρο της κλάσεως και τεταγμένη την αθροιστική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσεως.

δ) Ενώνουμε διαδοχικά τα σημεία αυτά με ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι θα πάρουμε μια τεθλασμένη γραμμή που λέγεται **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Οι εισπράξεις σε χιλιάδες δρχ. ενός εμπορικού καταστήματος σε 25 εργάσιμες μέρες είναι:

Εισπράξεις σε χιλιάδες	Μέρες ν
0 ≤ x < 5	1
5 ≤ x < 10	3
10 ≤ x < 15	7
15 ≤ x < 20	9
20 ≤ x < 25	5

α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να βρεθεί πόσες μέρες είχε κάτω από 10 χιλιάδες δρχ. είσπραξη και πόσες πάνω από 15 χιλιάδες δρχ.

γ) Να γίνει το ιστόγραμμα και το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο της κατανομής.

Λύση

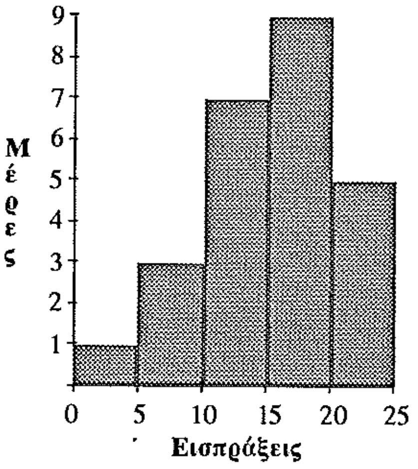
α) Κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

Εισπράξεις x	Συχνότητα ν	Αθροιστική συχνότητα
$0 \le x < 5$	1	1
$5 \le x < 10$	3	4
$10 \le x < 15$	7	11
$15 \le x < 20$	9	20
$20 \le x < 25$	5	25
	25	

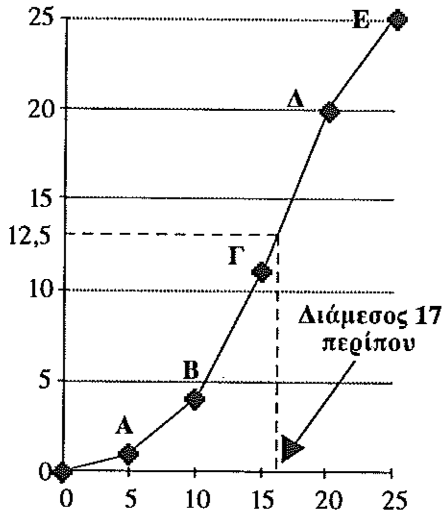
β) Ο αριθμός των ημερών που το εμπορικό κατάστημα είχε κάτω από 10.000 δρχ. είσπραξη είναι η αθροιστική συχνότητα της κλάσης $5 \le x < 10$ δηλαδή 4 ημέρες.

Για να βρούμε πόσες μέρες είχε πάνω από 15.000 δρχ. είσπραξη πρέπει να αφαιρέσουμε από το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή το 25, όλες τις ημέρες που είχε κάτω από 15.000 δρχ. είσπραξη (δηλαδή να αφαιρέσουμε την αθροιστική συχνότητα της κλάσης $10 \le x < 15$). Έτσι έχουμε: $25 - 11 = 14$ μέρες.

γ) Το ιστόγραμμα είναι:



Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι το παρακάτω όπου Α(5, 1), Β(10, 4), Γ(15, 11), Δ(20, 20), Ε(25, 25).



2. Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τη διάρκεια, σε πρώτα λεπτά 250 τηλεφωνημάτων.

min x	Τηλεφωνήμ. ν
$0 \le x < 2$	50
$2 \le x < 4$	25
$4 \le x < 6$	80
$6 \le x < 8$	55
$8 \le x < 10$	30
$10 \le x < 15$	10

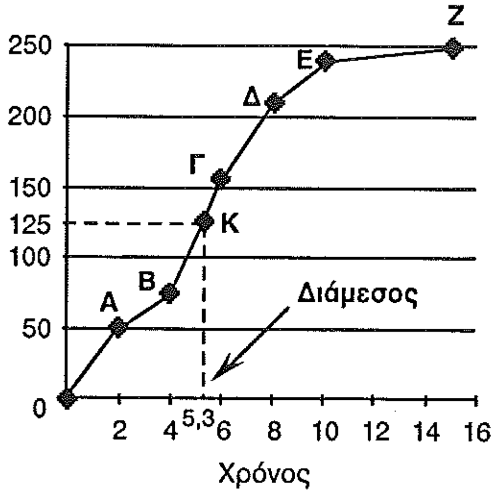
α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις αθροιστικές συχνότητες, τις σχετικές συχνότητες, τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες.

β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο της κατανομής.

Λύση

min x	Αρ. τηλ. ν	Αθρ. συχν.	Σχ. συχν.	Σχ. αθρ.
$0 \le x < 2$	50	50	20	20
$2 \le x < 4$	25	75	10	30
$4 \le x < 6$	80	155	32	62
$6 \le x < 8$	55	210	22	84
$8 \le x < 10$	30	240	12	96
$10 \le x < 15$	10	250	4	100
	250		100	

β) Σχεδιάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων όπως περιγράφετε στην ερώτηση 5 της θεωρίας.



Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι η τεθλασμένη ΟΑΒΓΔΕΖ του σχήματος.
Το μέγεθος του δείγματος είναι 250, άρα η διάμεσος αντιστοιχεί στην

$\frac{250}{2} = 125$ παρατήρηση περίπου.

Το σημείο Κ του πολυγώνου με τεταγμένη 125 έχει τετμημένη 5,3 περίπου.
Άρα η διάμεσος είναι περίπου 5,3.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Μια μηχανή κατασκευάζει βίδες με διαφορετικές διαμέτρους. Παίρνουμε ένα δείγμα από 80 βίδες και μετράμε τις διαμέτρους τους. Η κατανομή τους ως προς τη διάμετρο φαίνεται στον πίνακα.

Διάμετρος σε mm	Βίδες ν
$10 \leq x < 14$	6
$14 \leq x < 16$	12
$16 \leq x < 20$	20
$20 \leq x < 24$	24
$24 \leq x < 30$	18

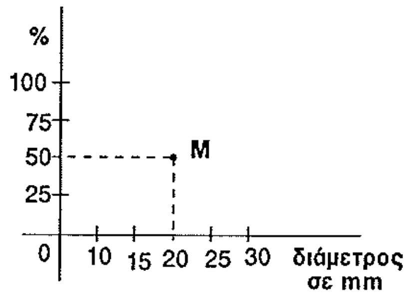
α) Να βρείτε τις αθροιστικές συχνότητες της κατανομής.
β) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και από αυτό να εκτιμήσετε τη διάμεσο της κατανομής.

Λύση

α) Από τα παραπάνω δεδομένα σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Διάμετρ. σε mm	Συχν. ν	Αθρ. συχν.	Σχ. συχν.	Σχ. αθρ.
$10\leq x< 14$	6	6	7,5	......
$14\leq x< 16$	12	......	......	22,5
$16\leq x< 20$	20	......	25	......
$20\leq x< 24$	24	62	......	......
$24\leq x< 30$	18	......	......	100
	80		100	

β) Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων είναι:



Η διάμεσος αντιστοιχεί στην τετμημένη του σημείου Μ του πολυγώνου το οποίο έχει τεταγμένη το 50%. Η τετμημένη του Μ είναι περίπου 20,4 άρα η διάμεσος είναι 20,4.

2. Μετρήσαμε το βάθος μιας λίμνης και μετά από 400 μετρήσεις σχηματίσαμε τον παρακάτω πίνακα.

Βάθος σε m	Συχνότητα ν
$0 \le x < 2$	80
$2 \le x < 4$	180
$4 \le x < 6$	60
$6 \le x < 8$	50
$8 \le x < 15$	30

α) Να βρείτε τις αθροιστικές και τις σχετικές συχνότητες.
β) Να βρείτε πόσες μετρήσεις έδειξαν βάθος μικρότερο από 6 m και πόσες έδειξαν βάθος μεγαλύτερο ή ίσο από 4 m.
γ) Ποιο ποσοστό μετρήσεων έδειξε βάθος μεγαλύτερο ή ίσο από 2 m και μικρότερο από 8 m.

Λύση

α) Με τη βοήθεια του δοσμένου πίνακα σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα.

Βάθος x σε m	Συχν. ν	Αθρ. συχν.	Σχ. συχν.	Σχ. αθρ.
$0 \le x < 2$	80	80	20	20
$2 \le x < 4$	180	260	45	....
$4 \le x < 6$	60	....	......	....
$6 \le x < 8$	50	....	......	....
$8 \le x < 15$	30	....	......	....
	100		100	

β) Από τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι .... μετρήσεις έδειξαν βάθος μικρότερο από 6 m.
Από την ίδια στήλη βλέπουμε ότι .... μετρήσεις έδειξαν βάθος μεγαλύτερο ή ίσο από 4 m.
γ) Από τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων βλέπουμε ότι:
βάθος μικρότερο από 2 m έχουν το 20% των μετρήσεων,
βάθος μικρότερο από 8 m έχουν το .... των μετρήσεων.
Άρα βάθος μεγαλύτερο ή ίσο από 2 m και μικρότερο από 8 m έχει ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σε μια πόλη το μέγιστο ύψος των οικοδομών είναι 30 m. Πήραμε ένα δείγμα από 600 οικοδομές και η κατανομή των υψών τους βρέθηκε ότι είναι:

Ύψος x σε m	Συχνότητα ν
$0 \le x < 4$	30
$4 \le x < 7$	120
$7 \le x < 14$	180
$14 \le x < 20$	90
$20 \le x < 26$	150
$26 \le x < 30$	30
	600

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα αθροιστικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
β) Ποιο ποσοστό οικοδομών είναι ψηλότερο από 20 m;
γ) Να σχεδιάσετε πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε από αυτό τη διάμεσο.

2. Ο μισθός 2.000 υπαλλήλων σε χιλιάδες δραχμές κατανέμεται όπως στον πίνακα.

Μισθός x σε χιλιάδες	Υπάλληλοι ν
$0 \le x < 50$	20
$50 \le x < 70$	120
$70 \le x < 80$	300
$80 \le x < 90$	400
$90 \le x < 100$	600
$100 \le x < 110$	280
$110 \le x < 130$	180
$130 \le x < 170$	90
$170 \le x < 250$	10
	2000

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με αθροιστικές και σχετικές αθροιστικές συχνότητες.
β) Να βρείτε ποιο ποσοστό υπαλλήλων παίρνει μισθό μεγαλύτερο από 130 χιλιάδες δρχ. και ποιο ποσοστό παίρνει μεγαλύτερο ή ίσο από 50 χιλιάδες και μικρότερο από 110 χιλιάδες.
γ) Να σχεδιάσετε πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.
δ) Να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

5.3 Μέτρα διασποράς

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Τι ονομάζουμε μέτρα ή παράμετρους διασποράς;

1. Η μέση τιμή $\bar{x}$ δεν αρκεί για να περιγράψει πλήρως μια κατανομή. Για το λόγο αυτό εισάγουμε στη Στατιστική τα **μέτρα** ή τις **παράμετρους διασποράς** οι οποίοι είναι αριθμοί που μας δείχνουν τη θέση των παρατηρήσεων γύρω από τη μέση τιμή.

2. Τι ονομάζουμε εύρος της μεταβολής;

2. Το εύρος της μεταβολής είναι μια παράμετρος διασποράς. Ονομάζουμε **εύρος της μεταβολής** τη διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

3. Τι είναι η τυπική απόκλιση (σ) μιας κατανομής και πώς υπολογίζεται;

3. Η **τυπική απόκλιση** (σ) μιας κατανομής είναι μια παράμετρος διασποράς που μας πληροφορεί για το πόσο είναι διασπαρμένες οι τιμές γύρω από τη μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής.

Η τυπική απόκλιση υπολογίζεται αλγεβρικά με τον τύπο: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

όπου **x** οι παρατηρήσεις και **n** το μέγεθος του δείγματος της κατανομής.
Μικρή τυπική απόκλιση σημαίνει ότι οι τιμές είναι συγκεντρωμένες κοντά στη μέση τιμή ενώ μεγάλη τυπική απόκλιση σημαίνει ότι οι τιμές είναι διασπαρμένες μακρυά από τη μέση τιμή.

4. Τι πληροφορίες μας δίνει η τυπική απόκλιση στην κανονική κατανομή;

4. Σε μία κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση σ έχει βρεθεί ότι:
α) Το 68% των τιμών βρίσκονται μεταξύ $\bar{x} - \sigma$ και $\bar{x} + \sigma$.
β) Το 95% των τιμών βρίσκονται μεταξύ $\bar{x} - 2\sigma$ και $\bar{x} + 2\sigma$.
γ) Το 99,7% των τιμών βρίσκονται μεταξύ $\bar{x} - 3\sigma$ και $\bar{x} + 3\sigma$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Μια εταιρία απασχολεί δέκα εργαζόμενους. Οι μισθοί τους σε χιλιάδες δραχμές είναι οι εξής: 95, 80, 100, 120, 90, 80, 95, 110, 150, 90. Να βρεθεί το εύρος της κατανομής και η τυπική απόκλιση.

Λύση

α) Η μεγαλύτερη τιμή είναι 150 και η μικρότερη 80, άρα το εύρος της κατανομής είναι: 150 - 80 = 70.
β) Η τυπική απόκλιση σ δίνεται από

τον τύπο: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ όπου $\bar{x}$ η μέση

και n το μέγεθος του δείγματος.
Βρίσκουμε τη μέση τιμή.

$$\bar{x} = \frac{95+80+100+120+90+80+95+110+150+90}{10}$$

$$= \frac{1010}{10} = 101, \text{ άρα } \bar{x} = 101$$

Βρίσκουμε το άθροισμα $\Sigma(x - \bar{x})^2$.

$\Sigma(x - \bar{x})^2 = (95 - 101)^2 + (80 - 101)^2 +$
$+(100 - 101)^2 + (120 - 101)^2 + (90 - 101)^2 +$
$+(80 - 101)^2 + (95 - 101)^2 + (110 - 101)^2 +$
$+(150 - 101)^2 + (90 - 101)^2 =$
$= (-6)^2 + (-21)^2 + (-1)^2 + 19^2 + (-11)^2 +$
$+ (-21)^2 + (-6)^2 + 9^2 + 49^2 + (-11)^2 =$
$= 36 + 441 + 1 + 361 + 121 + 441 + 36$
$+ 81 + 2401 + 121 =$
$= 4040$ άρα

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{4040}{10}} = \sqrt{404} = 20{,}1$$

Άρα σ = 20,1.

2. Μια ομάδα μπάσκετ έδωσε 20 αγώνες. Η κατανομή του αριθμού των πόντων που πέτυχε σε κάθε αγώνα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός πόντων x	Αριθμός αγώνων ν
$40 \le x < 60$	1
$60 \le x < 70$	2
$70 \le x < 80$	5
$80 \le x < 90$	4
$90 \le x < 100$	6
$100 \le x < 120$	2

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.
β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση σ της κατανομής.

Λύση

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός πόντων	Κέντ. κλάσ.	Συχν. ν	ν·x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$\nu(x-\bar{x})^2$
$40 \le x < 60$	50	1	50	-34,25	1173,06	1173,06
$60 \le x < 70$	65	2	130	-19,25	370,56	741,12
$70 \le x < 80$	75	5	375	-9,25	85,56	427,8
$80 \le x < 90$	85	4	340	0,75	0,56	2,24
$90 \le x < 100$	95	6	570	10,75	115,56	693,36
$100 \le x < 120$	110	2	220	25,75	663,06	1326,12
		20	1685			4363,7

α) Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι:
$\Sigma x = 50 + 130 + 375 + 340 + 570 + 220 =$
$= 1685$.
Άρα η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1685}{20} = 84{,}25, \text{ άρα } \bar{x} = 84{,}25.$$

β) Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι:
$\Sigma\nu(x - \overline{x})^2 = 4363{,}7$
άρα από τον τύπο

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \overline{x})^2}{n}}$ έχουμε: $\sigma = \sqrt{\frac{4363{,}7}{20}} =$

$= \sqrt{218{,}185} = 14{,}771$

Άρα $\sigma = 14{,}771$.

3. Σ' ένα νοσοκομείο νοσηλεύτηκαν 150 ασθενείς. Αν δεχθούμε ότι ο χρόνος παραμονής τους στο νοσοκομείο σε ημέρες είναι μια κανονική κατανομή με μέση τιμή $\overline{x}$ = 15 και τυπική απόκλιση σ = 4, να βρείτε το ποσοστό παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ α) 11 και 19, β) 7 και 23, γ) 3 και 27.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή το 68% των τιμών βρίσκονται μεταξύ $\overline{x} - \sigma$ και $\overline{x} + \sigma$. Το 95% βρίσκονται μεταξύ $\overline{x} - 2\sigma$ και $\overline{x} + 2\sigma$ και το 99,7% μεταξύ $\overline{x} - 3\sigma$ και $\overline{x} + 3\sigma$. Άρα

α) $\overline{x} - \sigma = 15 - 4 = 11$ και $\overline{x} + \sigma = 15 + 4 = 19$, οπότε μεταξύ 11 και 19 ημερών νοσηλεύτηκε το 68% των ασθενών.

β) $\overline{x} - 2\sigma = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$ και $\overline{x} + 2\sigma = 15 + 2 \cdot 4 = 15 + 8 = 23$, οπότε μεταξύ 7 και 23 ημερών νοσηλεύτηκε το 95% των ασθενών.

γ) $\overline{x} - 3\sigma = 15 - 3 \cdot 4 = 15 - 12 = 3$ και $\overline{x} + 3\sigma = 15 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27$, οπότε μεταξύ 3 και 27 ημερών νοσηλεύτηκε το 99,7% των ασθενών.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Για ένα δείγμα μεγέθους 28 έχουμε ότι: $\Sigma(x - \overline{x})^2 = 364$. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση σ.

Λύση

Η τυπική απόκλιση σ δίνεται από

τον τύπο: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \overline{x})^2}{n}}$ όπου $\overline{x}$ η μέση

και n το μέγεθος του δείγματος.
Οπότε ......

2. Ο επόμενος πίνακας παριστάνει τις ηλικίες 50 υπαλλήλων μίας υπηρεσίας. Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{x}$ και η τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων αυτών.

Ηλικίες σε έτη	Αριθμός υπαλλήλων ν
$20 \le x < 25$	5
$25 \le x < 30$	8
$30 \le x < 40$	15
$40 \le x < 45$	10
$45 \le x < 50$	7
$50 \le x < 65$	5

Λύση

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα.

Ηλικίες σε έτη	Κέντ. κλάσ.	Συχν. ν	$\nu \cdot x$	$x - \overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$\nu(x-\overline{x})^2$
$20 \le x < 25$	22,5	5				
$25 \le x < 30$	27,5	8	220			
$30 \le x < 40$	35	15				
$40 \le x < 45$	42,5	10				
$45 \le x < 50$	47,5	7	332,5			
$50 \le x < 65$	57,5	5				
		50				

α) Από τον πίνακα έχουμε:
$\Sigma x = ...$

άρα $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = ...$

β) Από τον πίνακα έχουμε:
$\Sigma\nu(x - \overline{x})^2 = ...$

άρα $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\nu(x - \overline{x})^2}{n}} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Για ένα δείγμα μεγέθους 120 έχουμε ότι: $\Sigma(x - \bar{x})^2 = 6600$. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.*

***2.** Για μια κατανομή γνωρίζουμε ότι $\Sigma x = 2100$ και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 84$. Αν η τυπική απόκλιση είναι 14, να βρείτε το άθροισμα $\Sigma(x - \bar{x})^2$.*

***3.** Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή $\bar{x} = 150$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 40$. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται:*
α) μεταξύ 110 και 190,
β) μεταξύ 70 και 230,
γ) μεταξύ 30 και 270.

***4.** Ρίχνουμε συγχρόνως τρία ζάρια και σημειώνουμε το άθροισμα των τριών ενδείξεων. Επαναλάμβανουμε το πείραμα 100 φορές οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα.*

Άθροισμα ενδείξεων	Συχνότητα ν
$4 \le x < 6$	7
$6 \le x < 8$	13
$8 \le x < 10$	17
$10 \le x < 12$	18
$12 \le x < 14$	29
$14 \le x < 16$	11
$16 \le x < 18$	5
	100

α) Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$.
β) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση σ.

5.4 Η έννοια της πιθανότητας

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

***1.** Τι είναι οι πιθανότητες;*

1. Οι πιθανότητες είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που εξετάζει φαινόμενα στα οποία δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμά τους.

Π.χ. Μέσα από ένα κλουβί που έχει 4 αρσενικά και 7 θηλυκά καναρίνια παίρνουμε στην τύχη ένα καναρίνι. Τότε είναι πιθανόν να πάρουμε αρσενικό ή θηλυκό καναρίνι.

***2.** Τι ονομάζουμε ισοπίθανες περιπτώσεις;*

2. Αν κατά τη μελέτη ενός φαινομένου (ρίχνουμε ένα ζάρι ή ρίχνουμε ένα νόμισμα) όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να εμφανιστούν έχουν την ίδια πιθανότητα τότε λέμε ότι έχουμε **ισοπίθανες περιπτώσεις.**

3. Πώς βρίσκουμε την πιθανότητα, να πραγματοποιηθεί, ένα ισοπίθανο ενδεχόμενο;

3. Ονομάζουμε Α το ενδεχόμενο. Με Ρ(Α) θα συμβολίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου, τότε:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Π.χ. Ρίχνουμε ένα ζάρι και ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «η πάνω όψη του να φέρει 6». Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι 1 (γιατί το ζάρι έχει μία έδρα μόνο με την ένδειξη 6) και το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι 6 (γιατί το ζάρι έχει 6 έδρες). Οπότε: Ρ(Α) = 1/6.

4. Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται αδύνατο;

4. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **αδύνατο** αν η πιθανότητά του για να πραγματοποιηθεί είναι μηδέν.

Π.χ. Η πιθανότητα Ρ(Α) του ενδεχομένου Α: «η ένδειξη του ζαριού να είναι 7» είναι μηδέν.

5. Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται βέβαιο;

5. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **βέβαιο** αν η πιθανότητά του για να πραγματοποιηθεί ισούται με τη μονάδα.

Π.χ. Μέσα από ένα κουτί που περιέχει μόνο 5 κόκκινες μπάλες βγάζουμε μία. Η πιθανότητα Ρ(Α) του ενδεχομένου Α: «η μπάλα να είναι κόκκινη» είναι 1, γιατί: Ρ(Α) = 5/5 = 1.

6. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται αντίθετα;

6. Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **αντίθετα** όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.

Π.χ. Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Τα ενδεχόμενα Α: «η ένδειξη να είναι γράμματα» και Β: «η ένδειξη να είναι κεφάλι» είναι αντίθετα.

Παρατήρηση:

Σε δύο αντίθετα ενδεχόμενα Α, Β οι πιθανότητές τους Ρ(Α), Ρ(Β) έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα, δηλαδή: Ρ(Α) + Ρ(Β) = 1.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε να φέρουμε: α) το 5, β) αριθμό μεγαλύτερο του 2.

Λύση

α) Έστω Α το ενδεχόμενο «η ένδειξη του ζαριού να είναι το 5». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι μία (να φέρουμε 5), ενώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι 6 (δηλαδή να φέρουμε 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6). Οπότε: Ρ(Α) = 1/6.

β) Έστω Β το ενδεχόμενο «η ένδειξη του ζαριού να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 2». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Β είναι 4 (δηλαδή να φέρουμε 3 ή 4 ή 5 ή 6), ενώ όταν ρίχνουμε το ζάρι οι δυνατές περιπτώσεις είναι

6. Οπότε: $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Ένα κλουβί έχει 5 αρσενικά καναρίνια και 8 θηλυκά. Παίρνουμε στην τύχη ένα καναρίνι. Να βρείτε τις πιθανότητες: α) το καναρίνι να είναι αρσενικό, β) το καναρίνι να είναι θηλυκό.

Λύση

Έστω Α το ενδεχόμενο «το καναρίνι να είναι αρσενικό». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι 5 (υπάρχουν 5 αρσενικά) και οι δυνατές περιπτώσεις είναι 13 (υπάρχουν 5 + 8 = 13 πουλιά στο κλουβί).

Τότε $P(A) = \frac{5}{13}$.

Έστω Θ το ενδεχόμενο «το καναρίνι να είναι θηλυκό». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 8 (υπάρχουν 8 θηλυκά) και οι δυνατές περιπτώσεις είναι 13.

Τότε $P(B) = \frac{8}{13}$.

3. Έχουμε δύο κουτιά Π και Κ. Το κουτί Π έχει 20 πράσινες μπίλιες και το Κ έχει 12 κόκκινες μπίλιες. Παίρνουμε 2 από το κουτί Π και τις ρίχνουμε στο Κ. Ύστερα παίρνουμε μία μπίλια από το Κ. Τι πιθανότητα έχει να είναι πράσινη;

Λύση

Όταν ρίξουμε τις 2 πράσινες μπίλιες από το κουτί Π στο κουτί Κ, τότε το Κ θα έχει 14 συνολικά μπίλιες (12 κόκκινες και 2 πράσινες). Έστω Α λοιπόν το ενδεχόμενο «η μπίλια να είναι πράσινη». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι 2 (γιατί το Κ έχει μόνο 2 πράσινες μπίλιες) και οι δυνατές περιπτώσεις είναι 14.

Οπότε: $P(A) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

4. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο ζάρια.
α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη ενδείξεων που μπορεί να εμφανιστούν.
β) Τι πιθανότητα υπάρχει ώστε τα ζάρια να δείχνουν στην επάνω έδρα τους και τα δύο τον αριθμό έξι;
γ) Τι πιθανότητα υπάρχει ώστε να δείχνουν πέντε και έξι;
δ) Τι πιθανότητα υπάρχει ώστε το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 10;

Λύση

α) Τα δυνατά ζεύγη ενδείξεων είναι:
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)
Το πλήθος τους είναι 36.

β) $P(\text{εξάρες}) = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \frac{1}{18}$

γ) $P(\text{πέντε και έξι}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

δ) $P(\text{άθροισμα δέκα}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

5. Ένα κουτί έχει 10 αριθμημένες μπάλες. Κάθε μία μπάλα φέρει έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Παίρνουμε στην τύχη μία από αυτές και έστω x η ένδειξή της. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
α) $P(x > 5)$
β) $P(x \leq 6)$
γ) $P(x \geq 8)$
δ) $P(x \geq 12)$

Λύση

α) $P(x > 5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

β) $P(x \leq 6) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

γ) $P(x \geq 8) = \frac{3}{10}$

δ) $P(x \geq 12) = \frac{0}{10} = 0$ (αδύνατο ενδεχόμενο)

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Μια μηχανή παράγει 1000 ποτήρια την ημέρα με πιθανότητα 2% να είναι ελαττωματικά. Πόσα γερά ποτήρια αναμένεται να φτιάξει η μηχανή σε 10 μέρες;

Λύση

Έστω Α το ενδεχόμενο «το ποτήρι να είναι ελαττωματικό» και Β το ενδεχόμενο «το ποτήρι να είναι γερό». Από τα δεδομένα του προβλήματος

έχουμε: $P(A) = \frac{2}{100} = 0,02$.

Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι αντίθετα άρα

$P(A) + P(B) = 1$ ή

$P(B) = 1 - P(A)$ ή

$P(B) = 1 - 0,02$ ή

$P(B) = 0,98$

Δηλαδή η πιθανότητα να είναι γερό το ποτήρι είναι 98%. Οπότε .....

2. Σ' ένα κουτί υπάρχουν 480 μπίλιες. Από αυτές 180 είναι λευκές, 200 κόκκινες και 100 καφέ. Παίρνουμε μία στην τύχη. Να βρεθούν οι πιθανότητες ώστε:

α) να είναι λευκή,

β) να μην είναι καφέ,

γ) να μην είναι λευκή ή καφέ.

Λύση

α) Έστω Α το ενδεχόμενο «η μπίλια να είναι λευκή». Τότε: $P(A) =$ .....

β) Έστω Β το ενδεχόμενο «η μπίλια να μην είναι καφέ». Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι: $480 - 100 = 380$. Οπότε $P(B) =$ .....

γ) .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μια οικογένεια έχει δύο παιδιά. Αν το ένα παιδί είναι κορίτσι, ποια είναι η πιθανότητα και το άλλο παιδί να είναι κορίτσι;

2. Σ' ένα κουτί υπάρχουν πέντε μικρές αριθμημένες μπάλες. Κάθε μία φέρει έναν από τους αριθμούς 1, 3, 7, 8, 10. Παίρνουμε στην τύχη μία από αυτές και ονομάζουμε x την ένδειξή της. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) $P(x > 3)$

β) $P(x \leq 9)$

γ) $P(x > 7)$

3. Ένα κουτί περιέχει 15 μαύρες, 10 άσπρες και 2 κίτρινες σφαίρες. Παίρνουμε μία στην τύχη. Να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα να μην είναι μαύρη.

4. Αν η πρώτη σφαίρα που πήραμε από το κουτί της άσκησης (3) ήταν μαύρη, τι πιθανότητα έχει η δεύτερη σφαίρα που θα πάρουμε (χωρίς να τοποθετήσουμε ξανά την πρώτη στο κουτί), να είναι κίτρινη;

5. Ρίχνουμε συγχρόνως δύο ζάρια. Να βρείτε τις πιθανότητες ώστε να έρθουν: α) τεσσάρες, β) ενδείξεις με άθροισμα 8.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Σε μία φιλανθρωπική εκδήλωση προσφέρθηκαν για κλήρωση 500 δώρα. Η κατανομή της τιμής των δώρων σε δρχ. φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

δρχ.	Αριθμός δώρων
$0 < x \le 1000$	120
$1000 \le x < 1500$	80
$1500 \le x < 2000$	70
$2000 \le x < 3000$	90
$3000 \le x < 4000$	50
$4000 \le x < 6000$	40
$6000 \le x < 10000$	30
$10000 \le x < 20000$	20
	500

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με αθροιστικές και σχετικές αθροιστικές συχνότητες.
β) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και με τη βοήθεια αυτού να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

2. Τα 16 τμήματα ενός Γυμνασίου της Αθήνας έχουν τους εξής μαθητές: 41, 37, 38, 40, 39, 41, 41, 37, 39, 39, 38, 38, 40, 39, 37, 39.
α) Να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
β) Να κάνετε το διάγραμμα και το πολύγωνο των συχνοτήτων και το διάγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων.
γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής «αριθμός μαθητών».

3. Πήραμε ένα δείγμα 70 οικογενειών μιας πόλης και το εξετάσαμε ως προς το ενοίκιο που πληρώνει η κάθε μία. Το αποτέλεσμα της εξέτασης φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

Ενοίκιο σε χιλ. δρχ.	Αριθμός οικογενειών
$30 \le x \le 35$	8
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 45$	16
$45 \le x < 50$	15
$50 \le x < 55$	10
$55 \le x < 60$	8
$60 \le x < 65$	3
	70

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση.

4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος και να βρείτε τις πιθανότητες να φέρουμε:
α) ακριβώς μία «κεφαλή» (Κ),
β) στην πρώτη ρίψη «γράμματα» (Γ),
γ) τουλάχιστον μία «κεφαλή»,
δ) τουλάχιστον δύο «κεφαλές».

5. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 3 ή 7».

6. Μία κάλπη έχει ένα κόκκινο, δύο κίτρινα και τρία πράσινα μολύβια του ίδιου μεγέθους. Παίρνουμε δύο μολύβια στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) και τα δύο μολύβια να είναι πράσινα,
β) το ένα να είναι κίτρινο και το άλλο πράσινο.

7. Από μία παρέα 5 αγοριών και 5 κοριτσιών επιλέγουμε στην τύχη 4 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα να διαλέξουμε 2 αγόρια και 2 κορίτσια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

BASIC 7

Μάθαμε ότι για τον υπολογισμό της μέσης τιμής x μιας κατανομής πρέπει να προσθέσουμε όλες τις παρατηρήσεις και να διαιρέσουμε το άθροισμα S με το πλήθος τους N.
Το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει τη μέση τιμή N αριθμών (π.χ. το μέσο όρο των βαθμών ενός μαθητή) ως εξής:

```
10 LET S = 0                          (↵)
20 INPUT «Πόσα μαθήματα;», N          (↵)
30 FOR I = 1 TO N                     (↵)
40 INPUT «Βαθμός:», A                 (↵)
50 LET S = S + A                      (↵)
60 NEXT I                             (↵)
70 LET x = S/N                        (↵)
80 PRINT «Ο μέσος όρος είναι x =», x  (↵)
```

Παρατηρήστε ότι πρώτα μας ζητάει να ορίσουμε το πλήθος των μαθημάτων και στη συνέχεια έναν, έναν τους βαθμούς. Κάθε φορά που δίνουμε ένα βαθμό, τον προσθέτει στο μερικό άθροισμα και περιμένει τον επόμενο. Όταν τελειώσουν όλοι οι βαθμοί που θα δώσουμε (δηλαδή όταν το I = N) τότε υπολογίζει και τυπώνει το μέσο όρο.

Άσκηση

Χρησιμοποιείστε τις ασκήσεις του κεφαλαίου που μόλις μάθατε για να δημιουργήσετε αντίστοιχα προγράμματα. Μπορείτε να εργαστείτε και με τις εντολές READ και DATA, για την εισαγωγή των παρατηρήσεων μιας κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Ισότητα - Ομοιότητα σχημάτων

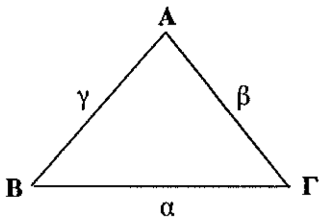
6.1 Τρίγωνα (επαναλήψεις - συμπληρώσεις)

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

1. *Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ΑΒΓ;*

1. Τα **κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι **τρεις πλευρές** του και οι **τρεις γωνίες** του. Δηλαδή αν ΑΒΓ το τρίγωνο, τότε:



Οι πλευρές είναι: ΑΒ = γ, ΒΓ = α, ΓΑ = β.

Οι γωνίες είναι: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$.

2. *Ποιες σχέσεις συνδέουν τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;*

2. α) Οι γωνίες οποιουδήποτε τριγώνου έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$$

β) Σε οποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο, δηλαδή:

$$\alpha < \beta + \gamma, \quad \beta < \alpha + \gamma, \quad \gamma < \alpha + \beta$$ **(Τριγωνική ανισότητα)**

3. *Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;*

3. Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι: οι διάμεσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι.

6. 2 Ίσα τρίγωνα

Θεωρία

Ερωτήσεις | **Απαντήσεις**

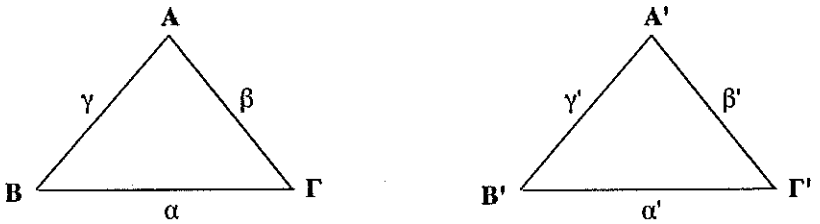
__1.__ Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα;

1. Δύο τρίγωνα λέγονται **ίσα** όταν έχουν όλα τα κύρια στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα.

__2.__ Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων;

2. Τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων είναι τα εξής:

I. Όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
II. Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
III. Όταν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

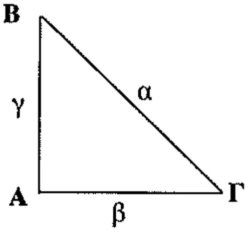


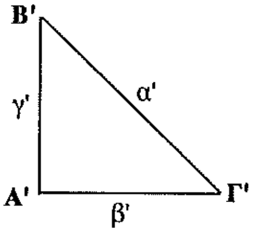
	τρίγωνο ΑΒΓ = τρίγωνο Α'Β'Γ' αν:		
I.	$\alpha = \alpha'$	$\beta = \beta'$	$\gamma = \gamma'$
II.	$\beta = \beta'$	$\gamma = \gamma'$	$\widehat{A} = \widehat{A'}$
III.	$\alpha = \alpha'$	$\widehat{B} = \widehat{B'}$	$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$

__3.__ Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων;

3. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν ισχύουν τα εξής:

α) Μία πλευρά και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με μία αντίστοιχη πλευρά και οξεία γωνία του άλλου.
β) Δύο πλευρές του ενός είναι ίσες με δύο αντίστοιχες πλευρές του άλλου.





τρίγωνο ΑΒΓ = τρίγωνο Α'Β'Γ' αν:			
I.	**II.**	**III.**	**IV.**
$\beta = \beta'$	$\alpha = \alpha'$	$\alpha = \alpha'$	$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$	$\gamma = \gamma'$	$\widehat{B} = \widehat{B'}$	$\widehat{B} = \widehat{B'}$

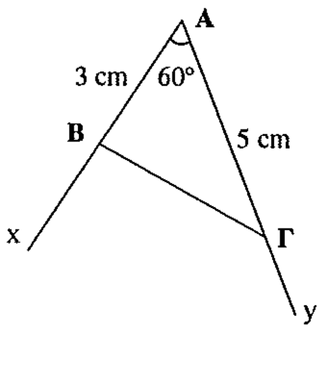
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 60° και β = 5 cm, γ = 3 cm.

Λύση

Κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{xAy} = 60°$.

Στις πλευρές της γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΒ = γ = 3 cm και ΑΓ = β = 5 cm. Ενώνουμε μετά τα σημεία Β και Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 45°, γωνία Β = 55° και ΑΒ = 4 cm.

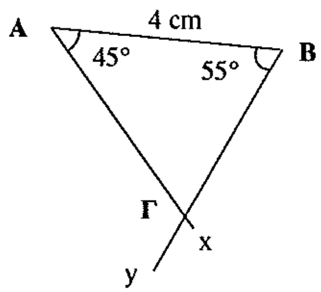
Λύση

Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm. Με πλευρά την ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε γωνία

$\widehat{BAx} = 45°$. Μετά κατασκευάζουμε γωνία

$\widehat{ABy} = 55°$ προς το ίδιο μέρος του ΑΒ.

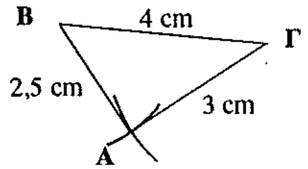
Οι ημιευθείες Αx και Βy τέμνονται στο Γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2,5 cm, ΒΓ = 4 cm και ΑΓ = 3 cm.

Λύση

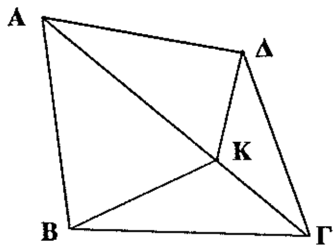
Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = 4 cm και χαράζουμε κύκλους (Β, 2,5) και (Γ, 3). Το σημείο που τέμνονται οι κύκλοι είναι το σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



4. Σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ να πάρετε ένα εσωτερικό του σημείο Κ. Δείξτε ότι:

$$KA+KB+K\Gamma+K\Delta > \frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A}{2}$$

Λύση



Παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΑΚΒ, ΑΚΔ, ΔΚΓ, ΓΚΒ για τα οποία σύμφωνα με την ισότητα που ισχύει για τις πλευρές ενός τριγώνου ισχύει:

Τριγ. ΑΚΒ: $KA + KB > AB$ (1)
Τριγ. ΑΚΔ: $KA + K\Delta > A\Delta$ (2)
Τριγ. ΔΚΓ: $K\Delta + K\Gamma > \Delta\Gamma$ (3)
Τριγ. ΓΚΒ: $K\Gamma + KB > B\Gamma$ (4)

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) κατά μέλη και έχουμε:

$2KA + 2KB + 2K\Gamma + 2K\Delta > AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$ ή

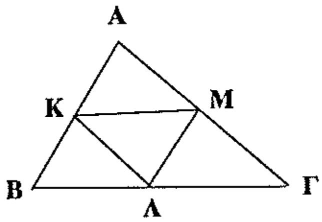
$2(KA+KB+K\Gamma+K\Delta) > AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A$

$$KA+KB+K\Gamma+K\Delta > \frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A}{2}$$

5. Να πάρετε τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ και να δείξετε ότι: ΚΛ + ΛΜ + ΜΚ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ.

Λύση

Κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΚΛΜ με κορυφές τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Για τα τρίγωνα ΑΚΜ, ΒΚΛ και ΓΛΜ έχουμε:

Τρίγ. ΑΚΜ: $KM < AK + AM$ ή
$KM < AB/2 + A\Gamma/2$ (1)
Τρίγ. ΒΚΛ: $K\Lambda < BK + B\Lambda$ ή
$K\Lambda < AB/2 + B\Gamma/2$ (2)
Τρίγ. ΓΛΜ: $M\Lambda < \Gamma\Lambda + \Gamma M$ ή
$M\Lambda < B\Gamma/2 + A\Gamma/2$ (3)

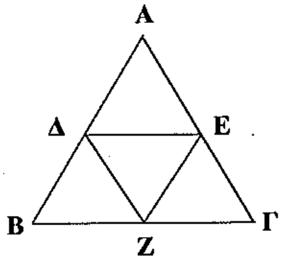
Προσθέτουμε τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και έχουμε:

$$KM+K\Lambda+M\Lambda < \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{A\Gamma}{2}$$

$$KM + K\Lambda + M\Lambda < AB + B\Gamma + A\Gamma$$

6. Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ τμήμα ΑΔ και στην πλευρά ΑΓ τμήμα ΑΕ έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Αν Ζ το μέσο της ΒΓ δείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



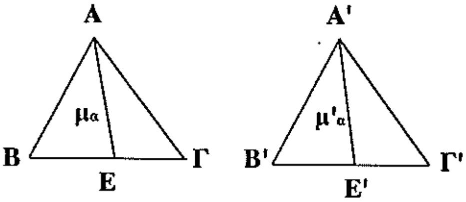
Επειδή ΑΔ = ΑΕ και ΑΒ = ΑΓ έπεται ότι ΒΔ = ΕΓ (1).
Για να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές θα δείξουμε ότι ΔΖ = ΕΖ. Η ΔΖ είναι πλευρά του τριγώνου ΒΔΖ και η ΖΕ πλευρά του τριγώνου ΕΖΓ. Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΖΕ.

Αυτά έχουν $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ γιατί το ΑΒΓ είναι

ισοσκελές, ΒΖ = ΖΓ γιατί το Ζ είναι μέσο της ΒΓ και ΔΒ = ΓΕ λόγω της (1). Άρα λόγω του ότι τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΖΕ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία ίση είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα. Άρα ΔΖ = ΖΕ. Οπότε το τρίγωνο ΔΖΕ ισοσκελές.

7. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ' και $\mu_\alpha = \mu_\alpha'$ (με μ_α συμβολίζουμε τη διάμεσο προς την πλευρά ΒΓ). Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

Λύση



Επειδή Ε και Ε' τα μέσα των πλευρών ΒΓ και Β'Γ' και επειδή ΒΓ = Β'Γ' έπεται ότι ΒΕ = Β'Ε'. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α'Β'Ε' έχουν: ΑΒ = Α'Β', ΑΕ = Α'Ε' και ΒΕ = Β'Ε'. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α'Β'Ε' είναι ίσα

Άρα $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'

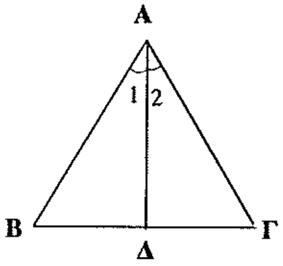
έχουν: ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ' και

$\widehat{B} = \widehat{B}'$.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

8. Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν ένα ύψος του είναι και διχοτόμος του.

Λύση



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του και η διχοτόμος της γωνίας

$\widehat{A}$. Είναι $\widehat{\Delta} = 90°$ και $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

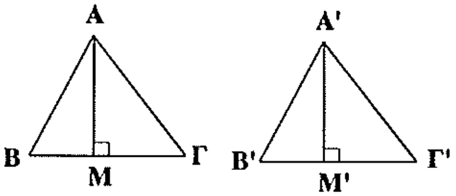
Για να δείξουμε ότι το ΑΒΓ είναι ισοσκελές πρέπει να δείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν: την ΑΔ κοινή πλευρά

και $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ

και ΑΓΔ είναι ίσα. Άρα ΑΒ = ΑΓ.

9. Δίνονται τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Να δείξετε ότι αν ΑΜ και Α'Μ' είναι αντίστοιχα τα ύψη προς την πλευρά ΒΓ, τότε ΑΜ = Α'Μ'.

Λύση



Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα έπεται ότι έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα ένα προς ένα. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ'

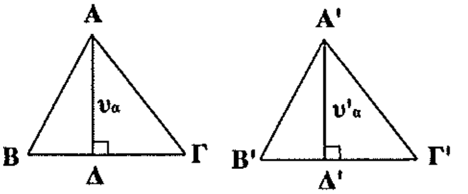
έχουν αντίστοιχα: $\widehat{B} = \widehat{B}'$ και ΑΒ = Α'Β'

άρα είναι ίσα μεταξύ τους. Οπότε ΑΜ = Α'Μ'.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν: ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ' και $υ_α$ = $υ_α$'. Να δείξετε ότι είναι ίσα.

Λύση



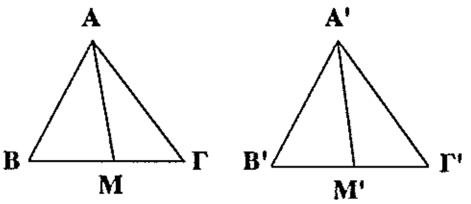
Με $υ_α$, $υ_α$' συμβολίζουμε τα ύψη προς την πλευρά ΒΓ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' έχουν αντίστοιχα: ΑΒ = Α'Β' και ΑΔ = Α'Δ'. Άρα είναι

ίσα. Οπότε $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ

και Α'Β'Γ' έχουν ......

2. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. Να δείξετε ότι αν ΑΜ και Α'Μ' είναι οι διάμεσοι προς την ΒΓ και Β'Γ' αντιστοίχως, τότε ΑΜ = Α'Μ'.

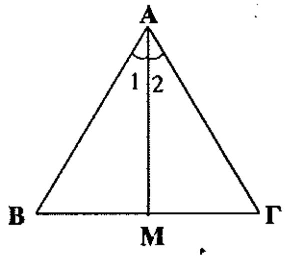
Λύση



Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα, τότε έχουν και όλα τους τα στοιχεία ίσα ένα προς ένα. Είναι ΒΓ = Β'Γ' και επειδή Μ και Μ' τα μέσα του έπεται ότι ΒΜ = Β'Μ' (1). Τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ' έχουν ......

3. Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν μία διχοτόμος του είναι και διάμεσός του.

Λύση

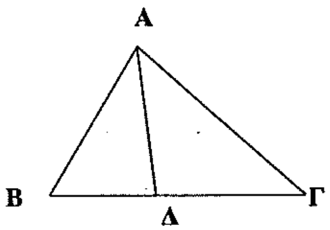


Έστω ΑΜ η διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Θα δείξουμε ότι ΑΒ = ΑΓ. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουν αντίστοιχα ......

4. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΒΓ. Να δείξετε ότι:

$$ΑΔ > \frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2}$$

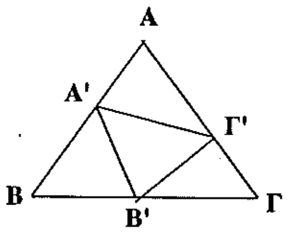
Λύση



Φέρνουμε την ΑΔ και σχηματίζουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ για τα οποία ισχύει:
Τρίγ. ΑΒΔ: ΑΔ + ΒΔ > ΑΒ (1)
Τρίγ. ΑΔΓ: ΑΔ + ΔΓ > ΑΓ (2)
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε ......

5. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισόπλευρου τριγώνου παίρνουμε τμήματα ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ'. Να δείξετε ότι το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι ισόπλευρο.

Λύση



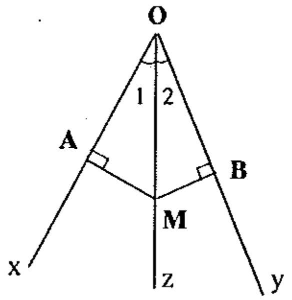
Εφόσον το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

τότε ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Επειδή δε ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' τότε θα είναι και Α'Β = Β'Γ = Γ'Α (1).
Θα δείξουμε ότι Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Α'. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΑ'Γ', ΒΒ'Α', ΓΒ'Γ' που έχουν .....

6. Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές της γωνίας.

Λύση

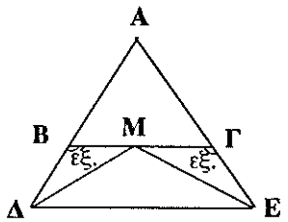


Έστω $\widehat{xOy}$ η γωνία και Oz η διχοτόμος της, τότε θα είναι $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο της διχοτόμου και ΜΑ, ΜΒ οι κάθετες από το Μ προς τις πλευρές της γωνίας. Οι ΜΑ και ΜΒ είναι οι αποστάσεις. Θα δείξουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ και ΟΜΒ έχουν ......

7. Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΑΒ προς το Β παίρνουμε τμήμα ΒΔ και στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΕ = ΒΔ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



Επειδή το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τότε

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} = \widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}}$ επειδή είναι παραπληρώματα ίσων γωνιών.

Για να δείξουμε ότι ΜΒΓ είναι ισοσκελές, αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα, οπότε και ΜΔ = ΜΕ ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3,5 cm, γωνία Β = 35° και γωνία Γ = 70°.

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3 cm, ΑΓ = 2 cm και γωνία Α = 50°.

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 cm, ΑΓ = 3,8 cm και ΒΓ = 4,2 cm.

4. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) με ΒΓ = 5,5 cm και ΑΒ = 3 cm.

5. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) με ΑΒ = 4,8 cm και γωνία Β = 40°.

6. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΔ = μ_a. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) < \mu_a < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

7. *Να πάρετε εσωτερικό σημείο Κ ενός τριγώνου ΑΒΓ και να δείξετε ότι:*

$$KA + KB + K\Gamma > \frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$$

8. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ' και $\delta_\alpha = \delta_\alpha'$ (όπου δ_α, δ_α' οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Α'). Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.*

9. *Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν ένα ύψος του είναι και διάμεσός του.*

10. *Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα, να δείξετε ότι οι αντίστοιχοι διχοτόμοι προς τις πλευρές ΒΓ και Β'Γ' είναι ίσες μεταξύ τους.*

11. *Το τρίγωνο που κατασκευάζεται από τα μέσα των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.*

12. *Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ ένα σημείο της διχοτόμου του. Η ΒΜ τέμνει την ΑΓ στο Κ και η ΓΜ τέμνει την ΑΒ στο Λ. Να δείξετε ότι: α) ΑΚ = ΑΛ, β) ΒΚ = ΓΛ.*

13. *Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ = ΒΓ και γωνία Δ ίση με τη γωνία Γ. Να δείξετε ότι οι γωνίες Α και Β είναι ίσες.*

14. *Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε ΑΔ = ΑΕ. Οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Μ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές και ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.*

6.3 Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

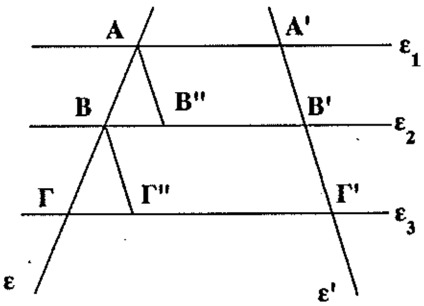
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. *Να αποδείξετε την πρόταση: «Όταν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία (ε), τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία (ε') που τις τέμνει.»*

Απαντήσεις

1. «Όταν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία (ε), τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία (ε') που τις τέμνει.»
Δηλαδή αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και ΑΒ = ΒΓ τότε θα είναι και Α'Β' = Β'Γ'.



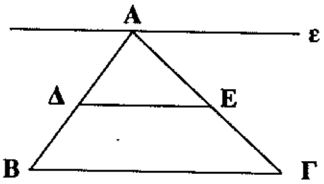
Απόδειξη:
Φέρνουμε ΑΒ" // Α'Β' και ΒΓ" // Β'Γ'. Τα τρίγωνα ΑΒΒ" και ΒΓΓ" είναι ίσα

γιατί: ΑΒ = ΒΓ, $\widehat{BAB''} = \widehat{\Gamma B\Gamma''}$ και $\widehat{ABB''} = \widehat{B\Gamma\Gamma''}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα ΑΒ" = ΒΓ" (1). Τα τετράπλευρα ΑΑ'Β'Β" και ΒΒ'Γ'Γ" είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Επομένως ΑΒ" = Α'Β' και ΒΓ" = Β'Γ'. Οπότε λόγω της σχέσης (1) έχουμε ότι: Α'Β' = Β'Γ'.

2. Να αποδείξετε την πρόταση: «Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του τριγώνου, τότε αυτή θα περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς».

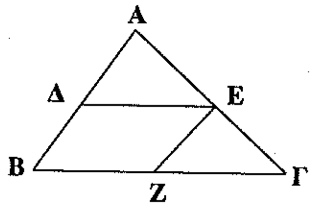
2. «Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του τριγώνου, τότε αυτή θα περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς».



Απόδειξη:
Έστω Δ το μέσο της ΑΒ και ΔΕ // ΒΓ. Φέρνουμε από το Α ευθεία ε παράλληλη προς την ΒΓ και την ΔΕ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΔΕ, ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα ΑΔ και ΔΒ στην ΑΒ, οπότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα στην ΑΓ. Δηλαδή ΑΕ = ΕΓ, άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

3. Να αποδείξετε την πρόταση: «Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της».

3. «Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της».



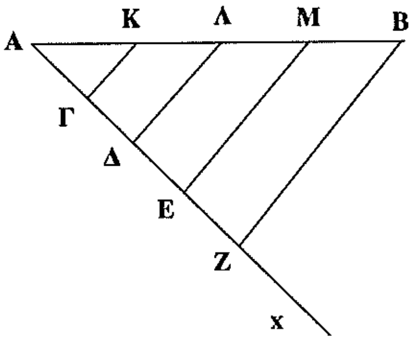
Απόδειξη:
Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ. Αφού η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ περνά από το μέσο Ε της ΑΓ τότε η ΔΕ βρίσκεται πάνω σ' αυτήν την παράλληλη οπότε ΔΕ //ΒΓ.
Φέρνουμε από το Ε παράλληλη προς την ΑΒ. Αυτή θα περάσει από το μέσο Ζ της ΒΓ. Το τετράπλευρο ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΔΕ = ΒΖ.

Επειδή όμως Ζ μέσο της ΒΓ, τότε $\Delta E = BZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να πάρετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm και να το χωρίσετε σε 4 ίσα μεταξύ τους τμήματα.

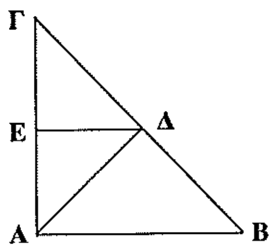
Λύση



Παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και φέρνουμε μία πλάγια ημιευθεία Αx. Πάνω στην Αx παίρνουμε 4 ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ. Ενώνουμε το Ζ με το Β και από τα Ε, Δ, Γ φέρνουμε παράλληλες προς την ΖΒ που τέμνουν την ΑΒ στα Μ, Λ, Κ αντίστοιχα.
Οι παράλληλες ΖΒ, ΕΜ, ΔΛ, ΓΚ ορίζουν πάνω στην Αx τα ίσα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, επομένως θα ορίζουν και στην ΑΒ ίσα τμήματα. Άρα ΑΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΒ.

2. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

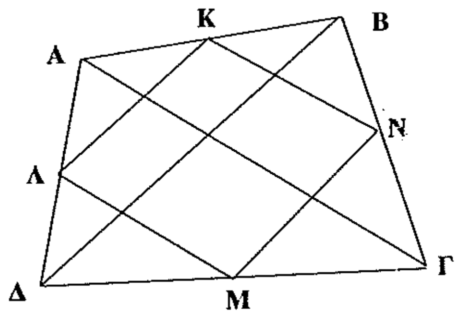
Λύση



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διάμεσός του. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε που είναι το μέσο της. Η γωνία Ε θα είναι ορθή γιατί και η Α είναι ορθή. Άρα η ΔΕ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ. Οπότε το Δ ισαπέχει από τα άκρα του ΑΓ. Δηλαδή ΑΔ = ΔΓ. Είναι όμως ΔΓ = ΒΓ/2, οπότε και ΑΔ = ΒΓ/2. Άρα η διάμεσος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

3. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση



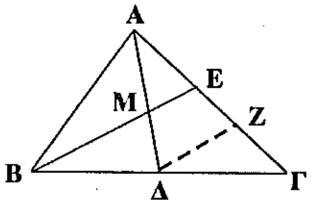
Φέρνουμε τη διαγώνιο ΔΒ. Στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΛΚ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ, άρα ΛΚ // ΔΒ (1). Στο τρίγωνο ΓΔΒ η ΜΝ συνδέει τα μέσα των ΓΔ και ΓΒ άρα ΜΝ // ΔΒ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι ΛΚ // ΜΝ. Φέρνουμε και τη διαγώνιο ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή η ΚΝ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ έπεται ότι ΚΝ // ΑΓ (3). Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΛΜ // ΑΓ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι ΚΝ // ΛΜ. Επειδή ΛΚ // ΜΝ και ΚΝ // ΛΜ το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Έστω ΑΔ η διάμεσος ενός τριγώνου ΑΒΓ και Μ το μέσο της. Η ΒΜ

τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δείξετε ότι

$ΓΕ = \frac{2}{3} ΑΓ$

Λύση



Φέρνουμε τη ΔΖ παράλληλη προς τη ΒΕ. Για το τρίγωνο ΑΔΖ επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ και ΜΕ // ΔΖ το Ε θα είναι μέσο της ΑΖ. Άρα ΑΕ = ΕΖ (1).

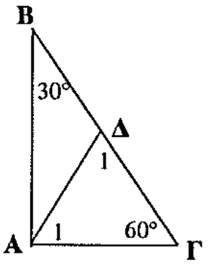
Για το τρίγωνο ΒΕΓ επειδή ΔΖ // ΒΕ και Δ το μέσο της ΒΓ τότε το Ζ είναι μέσο της ΕΓ. Άρα ΕΖ = ΖΓ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΑΕ = ΕΖ = ΖΓ.

Άρα $ΕΓ = ΕΖ + ΖΓ = \frac{2}{3} \cdot ΑΓ$.

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο αν η μία οξεία γωνία του είναι 30°, να δείξετε ότι η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή τη γωνία είναι το μισό της υποτείνουσας.

Λύση



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με

$\widehat{B} = 30°$. Θα δείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Έστω ΑΔ η διάμεσος προς την υποτείνουσα. Τότε (άσκηση 2) $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ ή

ΑΔ = ΔΓ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ επειδή

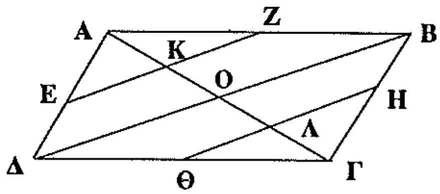
ΑΔ = ΔΓ τότε $\widehat{A_1} = \widehat{Γ}$, δηλαδή $\widehat{A_1} = 60°$.

Οπότε επειδή $\widehat{A_1} + \widehat{Γ} + \widehat{Δ_1} = 180°$ η $\widehat{Δ_1} = 60°$.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

Επομένως $ΑΓ = ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

6. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Εαν τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι μέσα των πλευρών του, να δείξετε ότι ΑΚ = ΚΟ = ΟΛ = ΛΓ.



Λύση

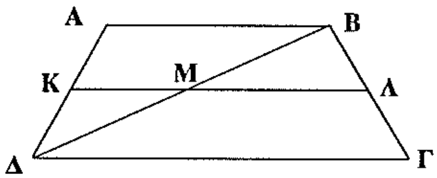
Επειδή Ε, Ζ τα μέσα των ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα τότε ΕΖ // ΔΒ. Στο τρίγωνο ΑΔΟ η ΕΚ // ΔΟ οπότε το Κ είναι μέσο της ΑΟ και ΑΚ = ΚΟ = = ΑΟ/2 (1).

Επειδή Θ, Η τα μέσα των ΔΓ και ΓΒ αντίστοιχα τότε ΘΗ // ΔΒ. Στο τρίγωνο ΔΓΟ η ΘΛ // ΔΟ οπότε το Λ είναι μέσο της ΓΟ και ΛΓ = ΟΛ = = ΟΓ/2 (2).

Επειδή όμως οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούνται είναι ΑΟ = ΓΟ. Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:
ΑΚ = ΚΟ = ΟΛ = ΟΚ.

7. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των άνισων πλευρών τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου.

Λύση



Έστω το τραπέζιο ΑΒΓΔ και Κ το μέσο της ΑΔ και Λ το μέσο της ΒΓ θα

δείξουμε ότι $ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΒΓ}{2}$.

Επειδή ΑΚ = ΚΔ και ΒΛ = ΛΓ τότε η ΚΛ είναι παράλληλη προς τις βάσεις ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου.
Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ που τέμνει την ΚΛ στο Μ. Το Μ είναι το μέσο της ΒΔ γιατί Κ το μέσο της ΑΔ και ΚΜ // ΑΒ. Άρα στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $KM = \frac{AB}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο ΒΔΓ είναι $M\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

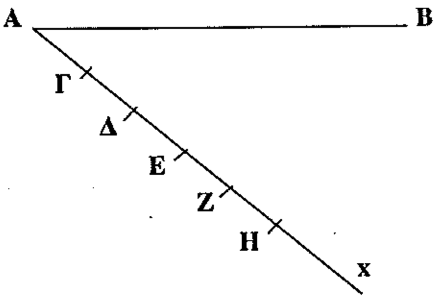
Οπότε $KM + M\Lambda = \frac{AB}{2} + \frac{\Delta\Gamma}{2}$ ή

$K\Lambda = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να πάρετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6 cm και να το χωρίσετε σε 5 ίσα μεταξύ τους τμήματα.

Λύση

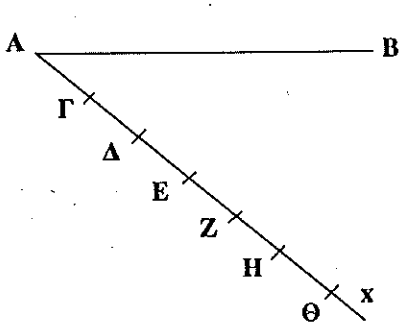


Παίρνουμε το τμήμα ΑΒ = 6 cm και μία πλάγια ημιευθεία Αx. Πάνω στην Αx παίρνουμε διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΗ .....

2. Σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm να πάρετε τμήματα:

$\frac{1}{6}AB, \ \frac{4}{6}AB, \ \frac{5}{6}AB.$

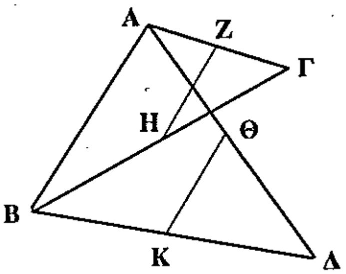
Λύση



Παίρνουμε το τμήμα ΑΒ = 5 cm και την ημιευθεία Αx. Πάνω στην Αx παίρνουμε τμήματα: ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ .....

3. Εαν Ζ, Η, Θ, Κ τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ αντίστοιχα, να συγκρίνετε τα ΖΗ και ΘΚ.

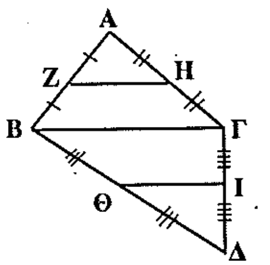
Λύση



Στο τρίγωνο ΑΓΒ το Ζ είναι μέσο της ΑΓ και το Η μέσο της ΒΓ άρα

$HZ = \frac{AB}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΔ ....

4. Στο παρακάτω σχήμα δείξτε ότι ΖΗ = ΘΙ.

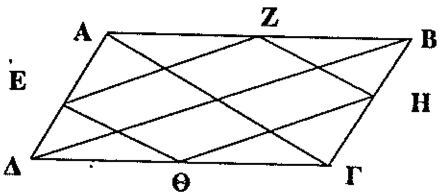


Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ παρατηρούμε ότι το Ζ είναι μέσο της ΑΒ και το Η μέσο της ΑΓ. Άρα ΖΗ = ΒΓ/2. Ομοίως .....

5. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο που δημιουργείται από τα μέσα των πλευρών παραλληλογράμμου είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

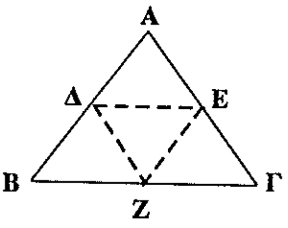


Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θα δείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Γι' αυτό πρέπει να δείξουμε ότι ΖΕ // ΗΘ και ΖΗ // ΕΘ.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ παρατηρούμε ότι το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Ε μέσο της ΑΒ. Άρα ΖΕ // ΔΒ. Στο τρίγωνο ΔΒΓ το Η είναι μέσο της ΔΓ και το Θ μέσο της ΒΓ. Άρα ΗΘ // ΔΒ. Οπότε επειδή ΖΕ // ΔΒ και ΗΘ // ΔΒ έχουμε ότι ΖΕ // ΗΘ. Ομοίως .....

6. Οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα των πλευρών ενός ισοπλεύρου τριγώνου χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα.

Λύση

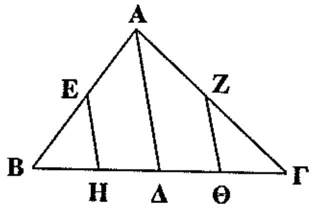


Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = α και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Τότε θα είναι: ΑΔ = ΔΒ = ΒΖ = ΖΓ = ΓΕ = ΕΑ = $\frac{\alpha}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι μέσο της ΑΒ και το Ε μέσο της ΑΓ. Άρα ΔΕ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Το τρίγωνο ΑΔΕ λοιπόν έχει τρεις πλευρές τις ΑΔ, ΑΕ, ΔΕ ίσες με α/2. Ομοίως .....

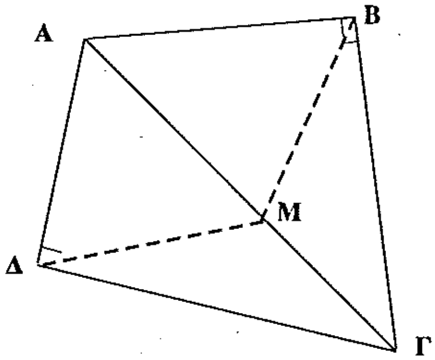
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και τις παράλληλες προς τη διάμεσο από τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ χωρίζεται σε τέσσερα ίσα μέρη.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι το Ε είναι μέσο της ΑΒ και ΕΗ παράλληλη στην ΑΔ. Άρα το Η είναι μέσο της ΒΔ, δηλαδή ΒΗ = ΗΔ. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ .....

8. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές. Να δείξετε ότι αν Μ είναι το μέσο της ΑΓ, τότε ΒΜ = ΔΜ.



Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η ΒΜ είναι διάμεσος. Σύμφωνα με τη λυμένη άσκηση 2 της ίδιας παραγράφου θα είναι ΒΜ = $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να χωρίσετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 8 cm σε τρία ίσα μεταξύ τους τμήματα.

2. Δίνεται τμήμα ΑΒ = 7 cm. Να κατασκευάσετε τα τμήματα:

i) $\frac{1}{4}$*ΑΒ, ii)* $\frac{3}{4}$*ΑΒ, iii)* $\frac{5}{4}$*ΑΒ.*

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διάμεσός του. Να δείξετε ότι το τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ χωρίζει τη διάμεσο ΑΔ σε δύο ίσα μέρη.

4. Αν σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα τότε το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

5. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

6.4 Θεώρημα του Θαλή

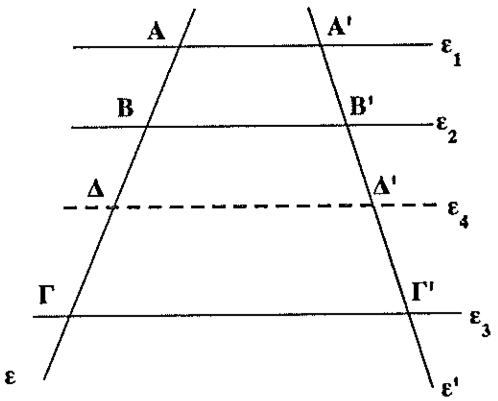
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

Απαντήσεις

1. Το θεώρημα του Θαλή λέει:
«Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία ευθεία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη ευθεία».



2. Να αποδείξετε το θεώρημα του Θαλή όταν οι τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν τις ε και ε' (σχ. 1) σε σημεία ώστε ΒΓ = 2ΑΒ.

2. Απόδειξη:

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} =$

$= \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ (θ. Θαλή).

Ας υποθέσουμε ότι ΒΓ = 2ΑΒ (1) και ας φέρουμε μία ευθεία ε_4 παράλληλη προς τις ε_1, ε_2, ε_3 που τέμνει τις ε και ε' στα Δ και Δ' αντίστοιχα έτσι ώστε: ΒΔ = ΔΓ.
Τότε θα είναι και Β'Δ' = Δ'Γ'.
Επειδή ΒΓ = 2ΑΒ και ΒΔ = ΔΓ σημαίνει ότι ΑΒ = ΒΔ = ΔΓ. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου θα είναι Α'Β' = Β'Δ' = Δ'Γ'.
Οπότε Β'Γ' = 2Α'Β' (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

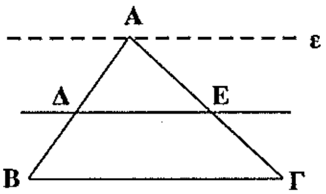
$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{2\,AB}{2\,A'B'}$ ή $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Είναι επίσης ΑΓ = 3ΑΒ και Α'Γ' = 3Α'Β' άρα $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{3AB}{3A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$.

3. Τι συμβαίνει όταν φέρουμε μία παράλληλη προς μία πλευρά ενός τριγώνου;

3. Κάθε ευθεία παράλληλη προς μία πλευρά ενός τριγώνου χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές σε τμήματα που έχουν ίσους λόγους.

Δηλαδή: $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ή $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$ κ.λπ.



Απόδειξη:
Αν ΔΕ // ΒΓ και από το Α φέρουμε ε // ΒΓ τότε από το θεώρημα του Θαλή τα τμήματα της ΑΒ θα είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα της ΑΓ.

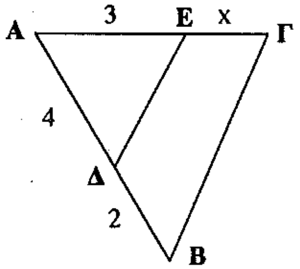
Άρα $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ και από τις αναλογίες αυτές προκύπτουν οι $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$,

$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$ κ.λπ.

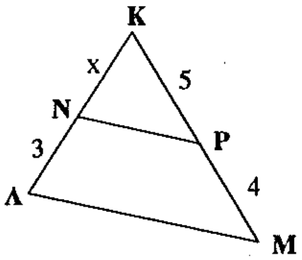
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το τμήμα x σε κάθε περίπτωση.

α)



β)



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα χωρίζει τις ΑΒ και ΑΓ σε ίσους λόγους. Οπότε:

$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ ή $\frac{4}{2} = \frac{3}{x}$ ή

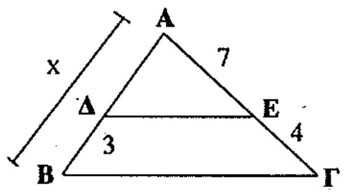
$4x = 6$ ή $x = 6/4$ ή $x = 1{,}5$

β) Στο τρίγωνο ΚΛΜ η ΝΡ είναι παράλληλη στη ΛΜ άρα έχουμε ομοίως:

$\frac{ΚΝ}{ΝΛ} = \frac{ΚΡ}{ΡΜ}$ ή $\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$ ή

$4x = 15$ ή $x = 15/4$ ή $x = 3{,}75$

2. Να υπολογίσετε το τμήμα x στο παρακάτω σχήμα αν ΔΕ // ΒΓ.

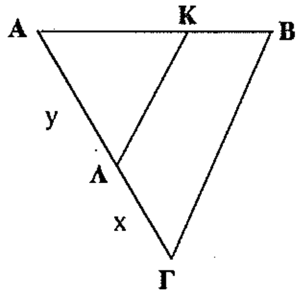


Λύση

Έχουμε: $\frac{ΑΒ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ}$ ή $\frac{x}{3} = \frac{7+4}{4}$ ή

$\frac{x}{3} = \frac{11}{4}$ ή $4x = 33$ ή $x = \frac{33}{4}$

3. Στο παρακάτω τρίγωνο είναι ΑΓ = 7, ΑΒ = 6, ΑΚ = 4, ΛΓ = x, ΑΛ = y. Να βρεθούν τα x και y αν ΛΚ // ΒΓ.



Λύση

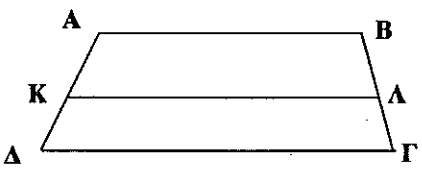
Είναι: $\frac{ΑΓ}{ΑΛ} = \frac{ΑΒ}{ΑΚ}$ ή $\frac{7}{y} = \frac{6}{4}$ ή $6y = 28$

ή $y = \frac{28}{6}$

Επίσης: $ΛΓ = ΑΓ - ΑΛ$ ή $x = 7 - \frac{28}{6}$ ή

$x = \frac{42 - 28}{6}$ ή $x = \frac{14}{6}$

4. Στο παρακάτω σχήμα η ΚΛ είναι παράλληλη προς τις βάσεις ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Εάν ΑΚ = 10, ΒΓ = 8 και ΛΓ = 3, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΔ.



Λύση

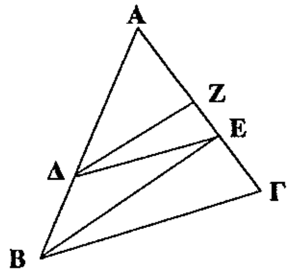
Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή για τις τρεις παράλληλες ΑΒ, ΓΔ, ΚΛ έχουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΚΔ}=\frac{ΒΓ}{ΛΓ} \text{ ή } \frac{ΑΚ+ΚΔ}{ΚΔ}=\frac{ΒΓ}{ΛΓ} \text{ ή}$$

$$\frac{10+ΚΔ}{ΚΔ}=\frac{8}{3} \text{ ή } 3(10+ΚΔ)=8\,ΚΔ \text{ ή}$$

$30+3\,ΚΔ=8\,ΚΔ$ ή $30=5\,ΚΔ$ ή $ΚΔ=6$.

5. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ // ΒΓ και η ΔΖ // ΒΕ. Αν είναι ΑΔ = 12, ΔΒ = 3 και ΕΓ = 2, να βρεθεί η ΖΕ.



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ και έτσι έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ} \text{ ή } \frac{12}{3}=\frac{ΑΕ}{2} \text{ ή}$$

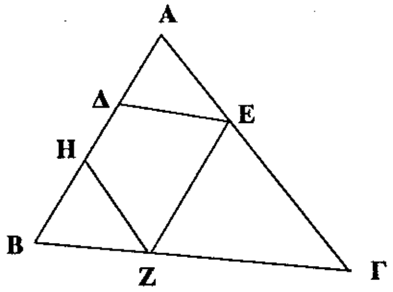
$12\cdot 2=3\cdot ΑΕ$ ή $ΑΕ=24/3$ ή
$ΑΕ=8$.
Στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΔΖ // ΒΕ και έτσι έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΖ}{ΖΕ} \text{ ή } \frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ-ΖΕ}{ΖΕ} \text{ ή}$$

$$\frac{12}{3}=\frac{8-ΖΕ}{ΖΕ} \text{ ή } 12\cdot ΖΕ=3(8-ΖΕ) \text{ ή}$$

$12\cdot ΖΕ=24-3\cdot ΖΕ$ ή
$12\cdot ΖΕ+3\cdot ΖΕ=24$ ή
$15\cdot ΖΕ=24$ ή $ΖΕ=24/15$ ή
$ΖΕ=1{,}6$.

6. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ // ΒΓ, η ΕΖ // ΑΒ και η ΖΗ // ΑΓ. Αν ΑΒ = 18, ΑΓ = 33, ΒΓ = 24 και ΔΑ = 6, να βρεθούν τα ΑΕ = x, ΖΓ = y, ΒΗ = ω.



Λύση

Επειδή ΔΕ // ΒΓ έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ} \text{ ή } \frac{6}{18}=\frac{x}{33} \text{ ή } 18x=6\cdot 33$$

$$\text{ή } x=\frac{198}{18} \text{ ή } x=11.$$

Επειδή ΕΖ // ΑΒ έχουμε:

$$\frac{ΕΓ}{ΑΓ}=\frac{ΓΖ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{33-11}{33}=\frac{y}{24} \text{ ή } \frac{22}{33}=\frac{y}{24}$$

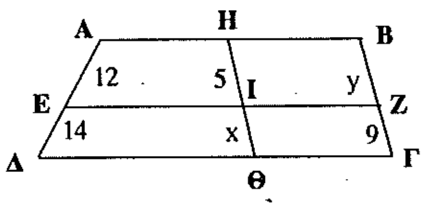
$$\text{ή } 33y=22\cdot 24 \text{ ή } y=\frac{528}{33} \text{ ή } y=16.$$

Επειδή ΖΗ // ΑΓ έχουμε:

$$\frac{ΒΗ}{ΑΒ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{ω}{18}=\frac{24-16}{24} \text{ ή } \frac{ω}{18}=\frac{8}{24}$$

$$\text{ή } 24ω=8\cdot 18 \text{ ή } ω=\frac{144}{24} \text{ ή } ω=6.$$

7. Αν ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ // ΔΓ στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος να υπολογιστούν τα x και y.



Λύση

Λόγω της παραλληλίας για τα τμήματα ΑΒ, ΕΖ, ΔΓ έχουμε από το θεώρημα του Θαλή:

$\frac{AE}{E\Delta} = \frac{HI}{I\Theta}$ (1) και $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$ (2)

Η (1) δίνει: $\frac{12}{14} = \frac{5}{x}$ ή $12x = 5 \cdot 14$ ή

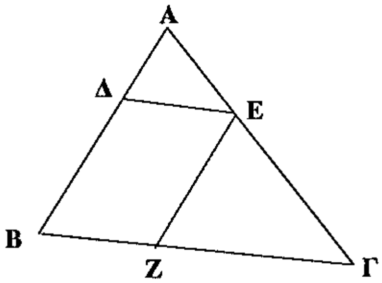
$x = \frac{70}{12}$

Η (2) δίνει: $\frac{12}{14} = \frac{y}{9}$ ή $14y = 9 \cdot 12$ ή

$y = \frac{108}{14}$

8. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ. Δείξτε ότι:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$



Λύση

Επειδή ΔΕ // ΒΓ από το θεώρημα Θαλή έχουμε:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ (1)

Ομοίως επειδή ΕΖ // ΑΒ έχουμε:

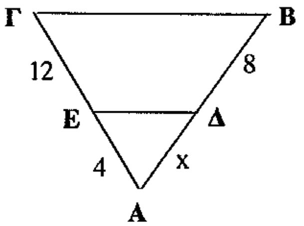
$\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το τμήμα x.

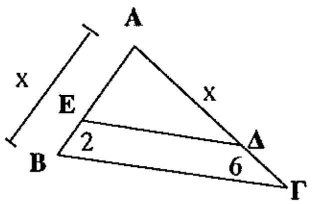


Λύση

Είναι ΔΕ // ΒΓ. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή θα έχουμε:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ ή .....

2. Να υπολογίσετε το x στο παρακάτω σχήμα:

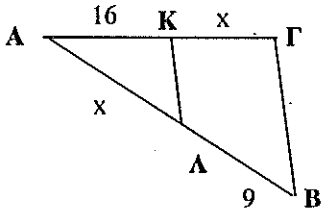


Λύση

Είναι ΔΕ // ΒΓ. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$\frac{AE}{EB} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$ ή $\frac{x-2}{2} = \frac{x}{6}$ ή .....

3. Να υπολογίσετε το x στο παρακάτω σχήμα:

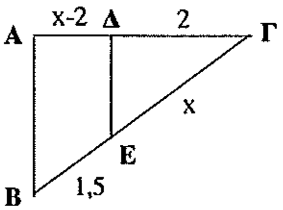


Λύση

Επειδή ΔΕ // ΒΓ εφαρμόζεται το θεώρημα του Θαλή και έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{EΓ} \quad ή \ .....$$

4. ***Να υπολογίσετε το x στο παρακάτω σχήμα:***



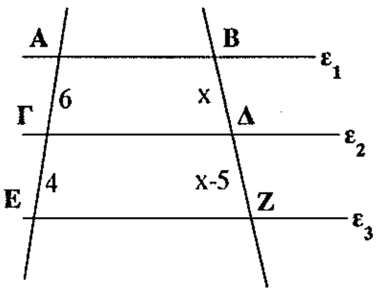
Λύση

Είναι ΔΕ // ΑΒ. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{ΔΓ} = \frac{BE}{EΓ} \quad ή \quad \frac{x-2}{2} = \frac{1{,}5}{x} \quad ή$$

$$(x-2)x = 3 \quad ή \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad ή \ ....$$

5. ***Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε το x.***



Λύση

Επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 είναι παράλληλες εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

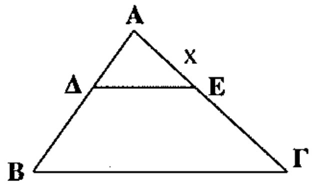
$$\frac{AΓ}{ΓE} = \frac{BΔ}{ΔZ} \quad ή \quad \frac{6}{4} = \frac{x}{x-5} \quad ή \ ....$$

6. ***Στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε:***

$$\frac{Α\Delta}{\Delta B} = \frac{3}{5}$$

Εάν φέρουμε από το Δ παράλληλη προς τη ΒΓ αυτή τέμνει την ΑΓ στο Ε, να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΕ και ΕΓ. Δίνεται ΑΓ=16.

Λύση



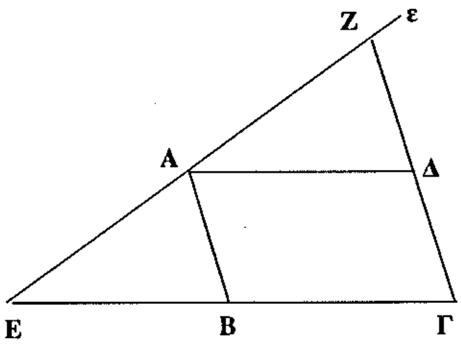
Έστω x το τμήμα ΑΕ οπότε το ΕΓ είναι 16 - x. Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι:

$$\frac{Α\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{EΓ} \quad ή \quad \frac{3}{5} = \frac{x}{16-x} \quad ή \ ....$$

7. ***Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία εξωτερική του παραλληλογράμμου, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι:***

$$\frac{ΓΔ}{ΓZ} + \frac{ΓB}{ΓE} = 1$$

Λύση



Στις ασκήσεις που παρουσιάζεται άθροισμα λόγων, κατασκευάζουμε τους λόγους ξεχωριστά τον καθένα και τους προσθέτουμε.
Επειδή ΑΒ // ΓΖ από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΓΒ}{ΓΕ} = \frac{ΖΑ}{ΖΕ} \quad (1)$$

Επειδή ΑΔ // ΕΓ από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

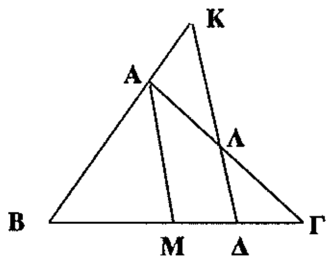
$$\frac{ΓΔ}{ΓΖ} = \frac{ΕΑ}{ΕΖ} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε .....

8. Από ένα σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου, που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AΓ}{AΛ}$$

Λύση



Φέρνουμε την ευθεία (ε) // ΑΜ, που τέμνει την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ. Επειδή (ε) // ΑΜ εφαρμόζεται το θεώρημα του Θαλή για τις ΒΚ και ΒΔ που τέμνουν τις παράλληλες και έχουμε:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BM}{MΔ} \quad (1)$$

Ομοίως για τις ΑΓ και ΓΜ που τέμνουν τις παράλληλες ΑΜ και (ε) το θεώρημα του Θαλή δίνει:

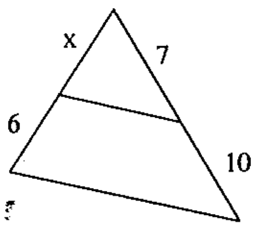
$$\frac{AΓ}{AΛ} = \frac{MΓ}{MΔ} \quad (2)$$

Επειδή λόγω της διαμέσου είναι ΒΜ = ΜΓ, έχουμε .....

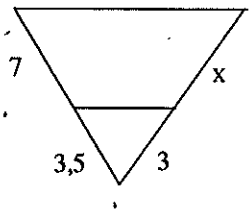
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το τμήμα x στις παρακάτω περιπτώσεις:

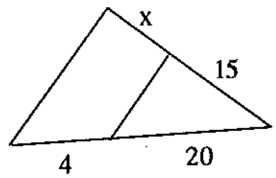
α)



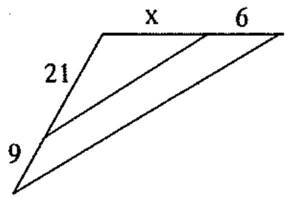
β)



γ)

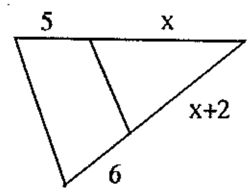


δ)

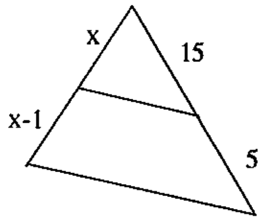


2. Να υπολογίσετε το τμήμα x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)



β)



3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 10, ΑΒ = 20 από σημείο Δ της πλευράς ΑΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν ΑΔ = 4 τότε να υπολογίσετε το ΑΕ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ παράλληλη της ΒΓ. Αν ΑΔ = 5, ΔΓ = 6, ΑΕ = 8, ΕΒ = x, να υπολογίσετε το τμήμα x.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{2}{3}$ από το οποίο φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΕ.

6. Από σημείο Κ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου που τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Λ, Ν. Να δείξετε ότι η ΚΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΝ.

6.5 Όμοια πολύγωνα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πότε δύο πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών λέγονται όμοια;

2. Τι λέγονται αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων;

3. Τι λέγεται λόγος ομοιότητας ομοίων πολυγώνων;

4. Να αποδειχθεί ότι δύο κανονικά εξάγωνα είναι όμοια.

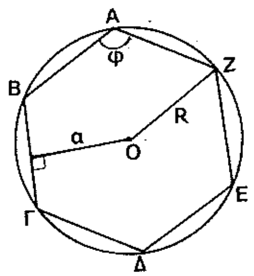
Απαντήσεις

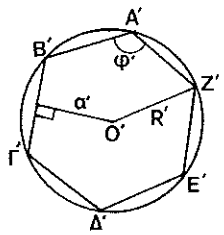
1. Δύο πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

2. Αντίστοιχες πλευρές δύο ομοίων πολυγώνων λέγονται οι πλευρές που συνδέουν τις κορυφές ίσων γωνιών.

3. Λόγος ομοιότητας δύο ομοίων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο αντίστοιχων πλευρών τους.

4. Έστω δύο κανονικά εξάγωνα, τα ΑΒΓΔΕΖ και Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' με πλευρά λ και λ' αντίστοιχα.





Εφόσον ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ = λ και Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ' = Δ'Ε' = Ε'Ζ' = Ζ'Α' = λ' τότε θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΖ}{Ε'Ζ'} = \frac{ΖΑ}{Ζ'Α'} = \frac{λ}{λ'}.$$

Επίσης επειδή οι γωνίες των κανονικών πολυγώνων είναι ίσες μεταξύ τους, εδώ θα έχουμε: $\widehat{φ} = \widehat{φ}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot 360° = 120°$ (γιατί κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του αντίστοιχου τόξου).

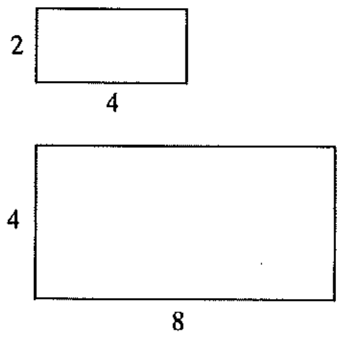
Επομένως τα δύο πολύγωνα είναι όμοια, εφόσον έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι: **τα κανονικά πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι όμοια.**

Από το παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι και τα υπόλοιπα τμήματα των πολυγώνων θα είναι ανάλογα. Δηλαδή:

$$\frac{R}{R'} = \frac{α}{α'} = \frac{λ}{λ'}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Τα ορθογώνια στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια; Αν ναι, να βρείτε το λόγο ομοιότητας.

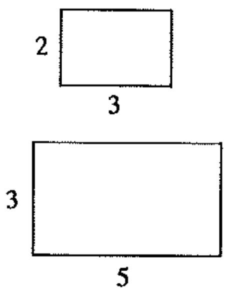


Λύση

Για να είναι όμοια δύο πολύγωνα πρέπει οι γωνίες του ενός να είναι ίσες με τις γωνίες του άλλου, και οι πλευρές του ενός να είναι ανάλογες με τις πλευρές του άλλου.

Εφόσον λοιπόν τα τετράπλευρα του σχήματος είναι ορθογώνια έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες. Παρατηρούμε επίσης ότι: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Άρα τα ορθογώνια του σχήματος είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1/2.

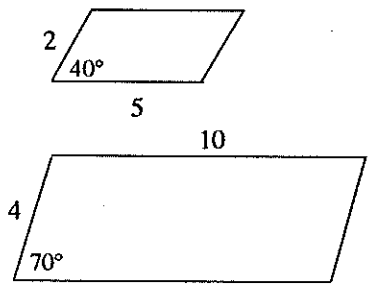
2. Να ελέγξετε αν τα ορθογώνια του παρακάτω σχήματος είναι όμοια.



Λύση

Οι γωνίες των τετραπλεύρων του σχήματος είναι ίσες εφόσον αυτά είναι ορθογώνια. Παρατηρούμε όμως ότι: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$. Άρα αφού δεν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες δεν είναι όμοια.

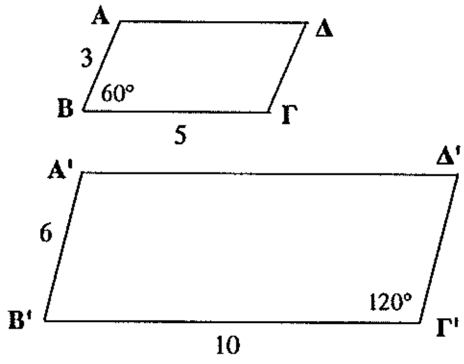
3. Να ελέγξετε αν τα παρακάτω τετράπλευρα είναι όμοια.



Λύση

Παρατηρούμε ότι οι πλευρές είναι ανάλογες γιατί: $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$. Όμως οι γωνίες δεν είναι ίσες. Επομένως τα τετράπλευρα δεν είναι όμοια.

4. Να εξετάσετε αν τα παραλληλόγραμμα του παρακάτω σχήματος είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.



Λύση

Για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι γωνίες $\widehat{\Delta} = \widehat{B} = 60°$ και οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου και μάλιστα $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 120°$.

Για το παραλληλόγραμμο Α'Β'Γ'Δ' έχουμε $\widehat{\Gamma'} = \widehat{A'} = 120°$ και $\widehat{B'} = \widehat{\Delta'} = 60°$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του. Επομένως: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι: $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$. Άρα τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

5. Δίνονται δύο κανονικά εξάγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους με ακτίνες 3 cm και 10 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητάς τους.

Λύση

Τα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια, και μάλιστα ο λόγος ομοιότητας ισούται με το λόγο των ακτίνων των κύκλων στους οποίους αυτά είναι εγγεγραμμένα. Επομένως ο λόγος ομοιότητας ισούται με $\frac{3}{10}$.

6. Δίνονται δύο κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών σε κύκλους

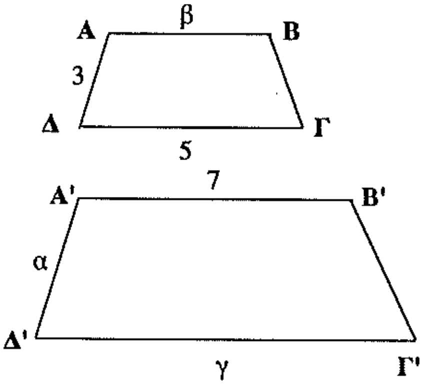
με ακτίνες 5 cm και 12 cm αντίστοιχα. Αν η πλευρά του πρώτου είναι 4 cm, να βρεθεί η πλευρά του δεύτερου.

Λύση

Τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 5/12. Έστω x η πλευρά του δεύτερου πολυγώνου. Τότε:

$\frac{4}{x} = \frac{5}{12}$ δηλαδή $5x = 48$ ή $x = 9{,}6$ cm

7. Τα τραπέζια του σχήματος είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2/5. Να βρεθούν τα τμήματα α, β, γ.



Λύση

Εφόσον τα τραπέζια είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$ πρέπει:

$\frac{3}{\alpha} = \frac{2}{5}$ (1), $\frac{\beta}{7} = \frac{2}{5}$ (2), $\frac{5}{\gamma} = \frac{2}{5}$ (3).

Η σχέση (1) δίνει: $2\alpha = 15$ ή $\alpha = 7{,}5$.
Η σχέση (2) δίνει: $5\beta = 14$ ή $\beta = 2{,}8$.
Η σχέση (3) δίνει: $2\gamma = 25$ ή $\gamma = 12{,}5$.

8. Να δείξετε ότι ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Λύση

Έστω δύο όμοια πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α'Β'Γ'Δ'Ε' με λόγο ομοιότητας λ

Επειδή: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$

$= \lambda$ τότε $AB = \lambda \cdot A'B'$, $B\Gamma = \lambda \cdot B'\Gamma'$, $\Gamma\Delta = \lambda \cdot \Gamma'\Delta'$, $\Delta E = \lambda \cdot \Delta'E'$, $EA = \lambda \cdot E'A'$. Ο λόγος των περιμέτρων ισούται με:

$$\frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'} =$$

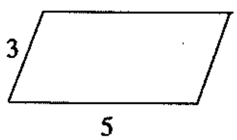
$$= \frac{\lambda A'B'+\lambda B'\Gamma'+\lambda\Gamma'\Delta'+\lambda\Delta'E'+\lambda E'A'}{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'} =$$

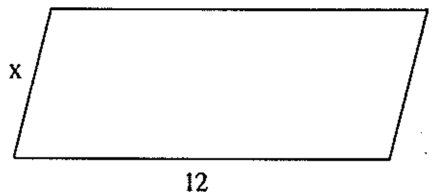
$$= \frac{\lambda(A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A')}{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'} = \lambda$$

Επομένως **ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.**

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Τα παραλληλόγραμμα του σχήματος είναι όμοια. Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας και η πλευρά x.





Λύση

Ο λόγος ομοιότητας δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το λόγο των αντίστοιχων πλευρών τους. Επομένως εδώ ο λόγος ομοιότητας είναι:

$\frac{5}{12}$. Άρα $\frac{3}{x} = \frac{5}{12}$ .....

2. Δίνονται δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών εγγεγραμμένα σε κύκλους με ακτίνες 4 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η πλευρά του πρώτου, αν η πλευρά του δεύτερου είναι 15 cm.

Λύση

Τα κανονικά πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι όμοια και ισχύει:

$\frac{R}{R'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ όπου R, R' οι ακτίνες των κύκλων στους οποίους είναι εγγεγραμμένα και λ, λ' οι πλευρές τους αντίστοιχα. Έστω x η πλευρά του πρώτου. Τότε ......

3. Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν διαστάσεις 6 cm, 9 cm και 14 cm, 21 cm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

Λύση

Εφόσον είναι ορθογώνια έχουν ίσες γωνίες. Μένει να διαπιστώσουμε αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Πρέπει $\frac{6}{9} = \frac{14}{21}$ .....

4. Δίνονται δύο κανονικά εξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ και Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' με λόγο ομοιότητας $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{5}$. Αν η περίμετρος του ΑΒΓΔΕΖ είναι 40 cm, να βρεθεί η περίμετρος του Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'.

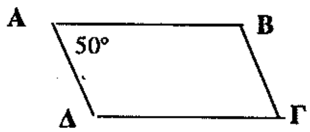
Λύση

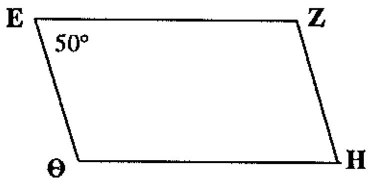
Έστω x η περίμετρος του Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'. Επειδή ο λόγος των περιμέτρων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους έχουμε:

$\frac{40}{x} = \frac{2}{5}$ ή .....

5. Δίνονται δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με γωνίες Α και Ε ίσες με 50°, ΑΒ = 7 cm, ΕΖ = 21 cm και $\frac{A\Theta}{E\Theta} = \frac{1}{3}$. Είναι όμοια;

Λύση





Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι:

$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 50°$ και $\hat{\Delta} = \hat{B} = 180° - 50° = 130°$.

Στο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ είναι:

$\hat{E} = \hat{H} = 50°$ και $\hat{Z} = \hat{\Theta} = 180° - 50° = 130°$.

Άρα τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. Μένει να δείξουμε ότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες ......

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο με πλευρές α = 5 cm και β = 9 cm. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ενός άλλου παραλληλογράμμου όμοιο προς το πρώτο, αν ο λόγος ομοιότητας είναι 4.

Λύση

Έστω x και y τα μήκη των πλευρών του δεύτερου παραλληλογράμμου. Τότε:

$\frac{x}{5} = \frac{y}{9} = 4$ .....

7. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι 2 cm, 5 cm, 3 cm, 7 cm. Να βρεθούν οι πλευρές ενός άλλου τετραπλεύρου όμοιου προς το πρώτο με λόγο ομοιότητας 1/2.

Λύση

Έστω α, β, γ, δ τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου. Λόγω της ομοιότητας έχουμε:

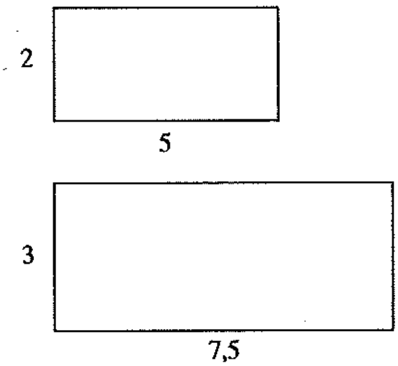
$\frac{2}{\alpha} = \frac{5}{\beta} = \frac{3}{\gamma} = \frac{7}{\delta} = \frac{1}{2}$. Είναι λοιπόν:

$\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = 4$. Ομοίως .....

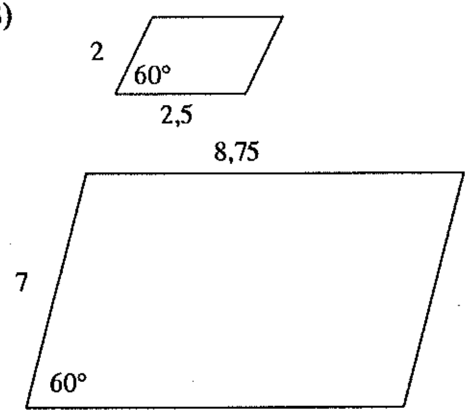
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω παραλληλόγραμμα είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.

α)

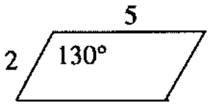


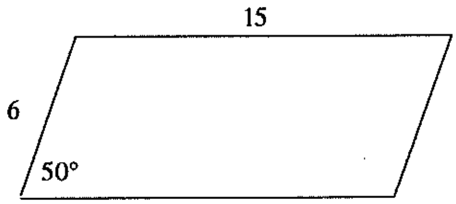
β)



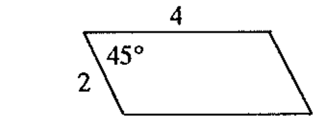
2. Εξακριβώστε αν τα παρακάτω παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

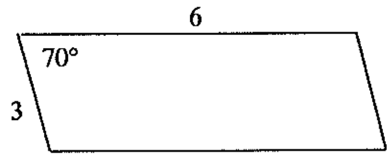
α)



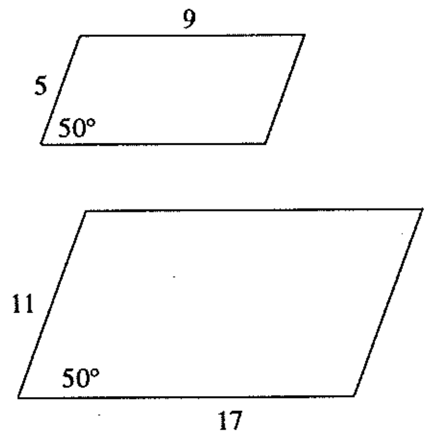


β)





γ)



3. Δείξτε ότι όλα τα τετράγωνα είναι μεταξύ τους όμοια.

***4.** Δύο κανονικά εξάγωνα είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνων 6 cm και 13 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί αν είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους.*

***5.** Δύο κανονικά πολύγωνα με πλευρές 2 cm και 7 cm αντίστοιχα, είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνων 8 cm και x cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η ακτίνα x του δεύτερου κύκλου.*

***6.** Ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές α = 5 και β = 8 είναι όμοιο με άλλο παραλληλόγραμμο μεγαλύτερο και ο λόγος ομοιότητάς τους είναι 2/3. Να βρεθούν οι πλευρές του δεύτερου παραλληλογράμμου.*

6.6 Όμοια τρίγωνα

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

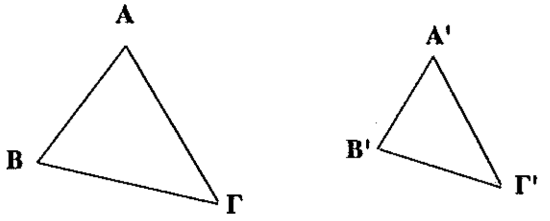
***1.** Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;*

1. Δύο τρίγωνα είναι όμοια στις ακόλουθες περιπτώσεις:
α) Όταν οι γωνίες του ενός είναι ίσες μία προς μία με τις γωνίες του άλλου.
β) Όταν οι πλευρές του ενός είναι ανάλογες με τις πλευρές του άλλου.

***2.** Δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία είναι όμοια;*

2. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' που ας υποθέσουμε ότι έχουν:

$\hat{A} = \hat{A'}$ και $\hat{B} = \hat{B'}$. Τότε:

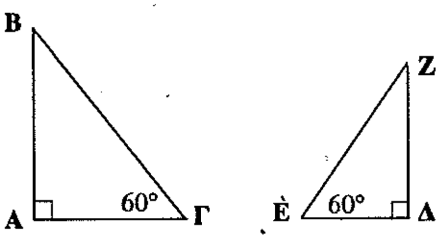


$\hat{\Gamma} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - (\hat{A'} + \hat{B'}) = \hat{\Gamma'}$.

Επομένως δύο τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες τους μία προς μία ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες. Άρα είναι όμοια.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι όμοια; Αν ναι, να γράψετε τους ίσους λόγους.

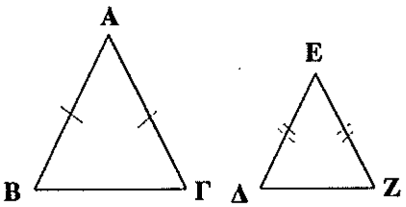


Λύση

Παρατηρούμε ότι τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια και έχουν και μία γωνία ίση. Επομένως είναι όμοια.

Άρα: $\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$.

2. Δίνονται δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ΑΒ = ΑΓ και ΔΕ = ΕΖ και γωνίες Α και Ε ίσες μεταξύ τους. Δείξτε ότι είναι όμοια και γράψτε τους ίσους λόγους.



Λύση

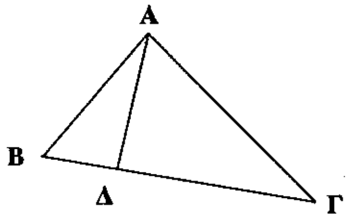
Επειδή ΑΒΓ και ΔΕΖ ισοσκελή τρίγωνα τότε: $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ και $\widehat{Δ} = \widehat{Ζ}$.
Είναι λοιπόν: $2\widehat{Β} = 180° - \widehat{Α}$ και $2\widehat{Δ} = 180° - \widehat{Ε}$. Επειδή $\widehat{Α} = \widehat{Ε}$ τότε $2\widehat{Β} = 2\widehat{Δ}$ ή $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

Άρα: $\frac{ΑΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΔΖ}$.

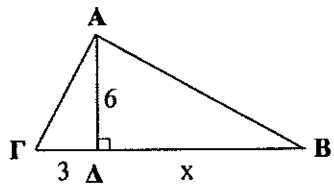
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να δείξετε ότι τα τρία τρίγωνα που σχηματίζονται είναι όμοια.

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ που είναι ορθογώνια έχουν τη γωνία Β κοινή. Επομένως είναι όμοια.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ που είναι ορθογώνια, έχουν τη γωνία Γ κοινή. Επομένως είναι όμοια.
Παρατηρούμε ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια με το ΑΒΓ. Άρα και μεταξύ τους όμοια.

4. Να υπολογίσετε το τμήμα x του παρακάτω σχήματος.



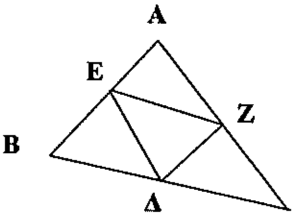
Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια όπως δείξαμε στη λυμένη άσκηση 3. Επομένως:

$\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΔΓ}{ΑΓ}$ ή $\frac{6}{x} = \frac{3}{6}$ ή $3x = 36$ ή $x = 12$.

5. Να δείξετε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ και να γράψετε τους ίσους λόγους.

Λύση

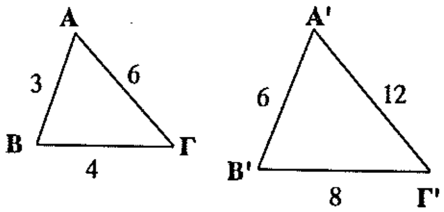


Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επειδή Δ, Ε, Ζ μέσα των πλευρών τότε: ΕΖ // ΒΓ, ΕΔ // ΑΓ, ΖΔ // ΑΒ.

Στο παραλληλόγραμμο ΑΕΔΖ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι ίσες, γιατί είναι απέναντι. Ομοίως στο παραλληλόγραμμο ΕΖΔΒ έχουμε $\widehat{B} = \widehat{Z}$ και στο ΕΖΓΔ έχουμε $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$. Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

Άρα: $\dfrac{AB}{Z\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{E\Delta} = \dfrac{B\Gamma}{EZ}$.

6. Δείξτε ότι τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι όμοια και βρείτε τις ίσες γωνίες τους.



Λύση

Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια γιατί έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Οπότε: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$.

7. Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$. Να βρείτε την πλευρά ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, αν ξέρετε ότι η ΑΒ που είναι η αντίστοιχή της στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι 12 cm.

Λύση

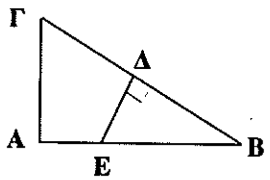
Εφόσον τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και οι πλευρές τους ΕΖ, ΑΒ έχουν λόγο:

$\dfrac{AB}{EZ} = \dfrac{2}{3}$ ή $\dfrac{12}{EZ} = \dfrac{2}{3}$ ή $2EZ = 36$ ή $EZ = 18$ cm.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Σε τυχαίο σημείο Δ της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετη στην υποτείνουσα, που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ είναι όμοια και βρείτε τους ίσους λόγους.

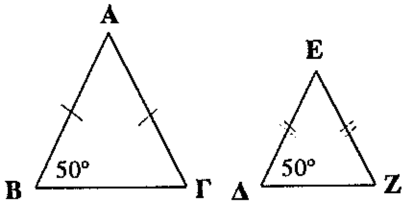
Λύση



Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία Β κοινή. Άρα ......

2. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΔΕΖ (ΔΕ = ΔΖ) με τη γωνία Β = 50° και τη γωνία Ε = 50°. Δείξτε ότι είναι όμοια και βρείτε τους ίσους λόγους.

Λύση

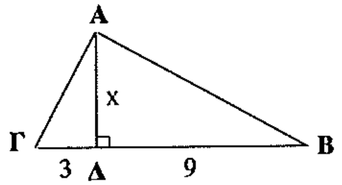


Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισοσκελή έχουμε ότι:

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 50°$ και $\widehat{E} = \widehat{Z} = 50°$.

Επομένως .....

3. Να υπολογίσετε το τμήμα x στο παρακάτω σχήμα.

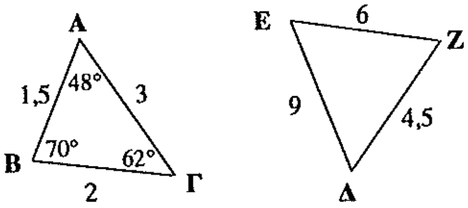


Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ΑΔ το ύψος του. Σύμφωνα με τη λυμένη άσκηση 3 τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια.

Άρα: $\frac{ΑΔ}{ΓΔ} = \frac{ΒΔ}{ΑΔ}$ ή .....

4. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.



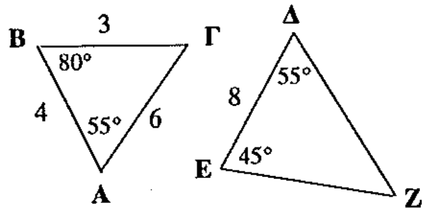
Λύση

Παρατηρούμε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{1}{3}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες. Επομένως είναι όμοια. Άρα θα έχουν και τις γωνίες τους ίσες. Η γωνία Α είναι απέναντι από την πλευρά ΒΓ, που είναι ανάλογη με την πλευρά ΕΖ.

Οπότε: $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 48°$ ......

5. Να βρείτε τις πλευρές ΔΕ και ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ.



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{\Gamma} = 180° -$

$- (80° + 55°) = 45°$ ενώ στο τρίγωνο ΔΕΖ

η γωνία $\widehat{Z} = 180° - (45° + 55°) = 80°$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι όμοια και είναι:

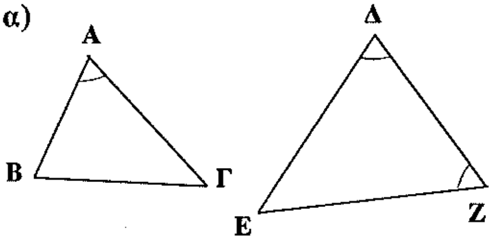
$\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{6}{8}$ οπότε και $\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{6}{8}$ και

$\frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{6}{8}$ .....

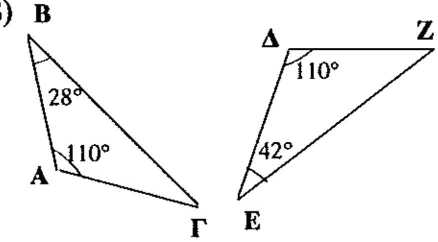
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Να βρείτε αν τα τρίγωνα είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.*

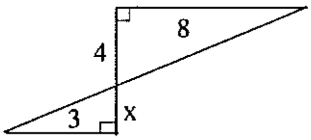
α)



β)



***2.** Να βρείτε το τμήμα x στο παρακάτω σχήμα.*



***3.** Ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Δείξτε ότι:*

$$\frac{O\Delta}{OB} = \frac{O\Gamma}{OA} = \frac{\Delta\Gamma}{AB}$$

***4.** Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ και τα ύψη τους προς τις ανάλογες πλευρές ΑΒ και ΔΕ. Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων είναι κ να βρεθεί ο λόγος των υψών τους.*

***5.** Σε τρίγωνο η μία πλευρά του και το ύψος προς αυτή την πλευρά είναι αντίστοιχα 3 και 4. Σε άλλο όμοιο τρίγωνο το αντίστοιχο ύψος είναι 10. Να βρεθεί η πλευρά του, προς την οποία φέρεται αυτό το ύψος.*

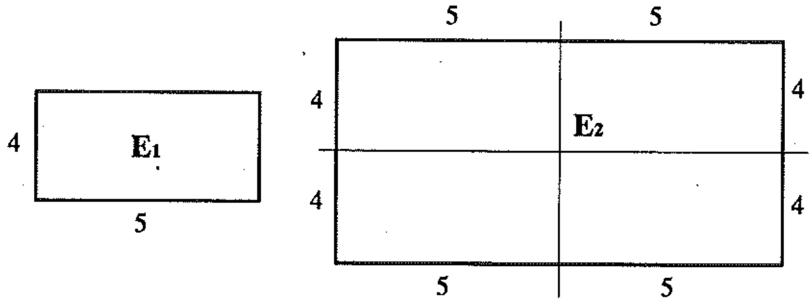
***6.** Σε κύκλο (Ο, ρ) δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ε. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΔΕ είναι όμοια και να βρείτε τους όμοιους λόγους.*

***7.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α φέρνουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ. Να δείξετε ότι: α) $\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma$, β) $\gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B$ και γ) $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.*

6.7 Εμβαδά όμοιων σχημάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις	Απαντήσεις
1. Με τι είναι ίσος ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων;	**1. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας των σχημάτων.**



Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω παραλληλόγραμμα είναι όμοια με λόγο 1/2.
Το εμβαδό E_1 είναι 20 τετραγωνικές μονάδες και το εμβαδό E_2 είναι 80 τετραγωνικές μονάδες.

Άρα: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.

2. *Ποιες είναι οι μονάδες εμβαδού και ποια η σχέση μεταξύ τους;*

2. Οι μονάδες εμβαδού που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα είναι οι εξής:

1 m^2 (τετραγωνικό μέτρο)
1 dm^2 (τετραγωνικό δεκατόμετρο)
1 cm^2 (τετραγωνικό εκατοστό)
1 mm^2 (τετραγωνικό χιλιοστό)
1 στρέμμα
1 km^2 (τετραγωνικό χιλιόμετρο)
Η σχέση μεταξύ τους είναι:
$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$
$1\ km^2 = 10^6\ m^2$
1 στρέμμα $= 10^3\ m^2$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Σε χάρτη με κλίμακα 1:1000 είναι χαρτογραφημένο οικόπεδο 2 στρεμμάτων. Πόσα cm^2 καταλαμβάνει στο χάρτη;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το σχήμα μιας περιοχής στο χάρτη είναι όμοιο με το σχήμα της περιοχής στο έδαφος και ο λόγος ομοιότητας είναι η κλίμακα του χάρτη.
Επομένως αν x είναι τα cm^2 που καταλαμβάνει το οικόπεδο στο χάρτη, τότε:

$$\frac{x\ cm^2}{2\ \text{στρεμ.}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \text{ ή}$$

$$\frac{x\ cm^2}{2 \cdot 10^3\ m^2} = \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 \text{ ή}$$

$$\frac{x\ cm^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 10^4\ cm^2} = \frac{1}{10^6} \text{ ή}$$

$$10^6 x = 2 \cdot 10^7 \text{ ή}$$

$$x = \frac{2 \cdot 10^7}{10^6} \text{ ή } x = 20\ cm^2.$$

2. Ένας αγρός που χαρτογραφήθηκε σε χάρτη κλίμακας 1:10.000 καταλαμβάνει έκταση 50 cm². Πόσα στρέμματα είναι ο αγρός;

Λύση

Έστω x το εμβαδόν του αγρού. Τότε έχουμε:

$\frac{50}{x} = \left(\frac{1}{10^4}\right)^2$ ή $\frac{50}{x} = \frac{1}{10^8}$ ή

$x = 50 \cdot 10^8\ cm^2 = 50 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}\ m^2 =$

$= 50 \cdot 10^4\ m^2$ ή $x = 500.000\ m^2$ ή

$x = 500$ στρεμ.

3. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 6 και 9 είναι όμοιο με ένα άλλο ορθογώνιο που έχει 4/πλάσιο εμβαδόν από το πρώτο. Να βρείτε τις διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου.

Λύση

Εφόσον ο λόγος εμβαδών είναι 1/4

τότε ο λόγος ομοιότητας είναι $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Άρα αν x, y οι διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου τότε:

$\frac{6}{x} = \frac{9}{y} = \frac{1}{2}$ οπότε έχουμε:

$\frac{6}{x} = \frac{1}{2}$ ή $x = 12$ και $\frac{9}{y} = \frac{1}{2}$ ή $y = 18$.

4. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει εμβαδό 49 cm². Να βρεθεί το εμβαδό ενός άλλου ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά τα 3/7 της πλευράς του πρώτου.

Λύση

Έστω α η πλευρά του πρώτου ισόπλευρου τριγώνου, τότε $\frac{3}{7} \cdot \alpha$ η πλευρά του δεύτερου ισόπλευρου. Τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια γιατί έχουν ίσες τις γωνίες τους. Επομένως αν x το εμβαδόν του δεύτερου ισόπλευρου, τότε:

$\left(\frac{\alpha}{\frac{3}{7}\alpha}\right)^2 = \frac{49}{x}$ ή $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{x}$ ή

$\frac{49}{9} = \frac{49}{x}$ ή $x = 9\ cm^2$.

5. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές 4 cm, 6 cm και 7 cm. Να βρεθούν οι πλευρές άλλου τριγώνου όμοιο με το πρώτο με διπλάσιο εμβαδόν.

Λύση

Επειδή τα δύο τρίγωνα είναι όμοια,

τότε θα ισχύει: $\frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{7}{\omega}$, όπου x, y, ω

οι πλευρές του δεύτερου τριγώνου. Εφόσον το εμβαδό του δεύτερου τριγώνου είναι διπλάσιο από το εμβαδό του πρώτου τότε ο λόγος των εμβα-

δων είναι $\frac{1}{2}$ και ο λόγος ομοιότητας θα

είναι: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Άρα: $\frac{4}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $x = 4\sqrt{2}$ cm

$\frac{6}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $y = 6\sqrt{2}$ cm και

$\frac{7}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $\omega = 7\sqrt{2}$ cm.

6. Κύκλος ακτίνας ρ = 5 cm έχει εμβαδόν διπλάσιο από έναν άλλο κύκλο. Να βρεθεί η ακτίνα του δεύτερου κύκλου.

Λύση

Ο λόγος των εμβαδών είναι 2, άρα ο

λόγος ομοιότητας θα είναι: $\sqrt{2}$.

Επομένως αν R η ακτίνα του δεύτερου κύκλου έχουμε:

$\frac{\rho}{R} = \sqrt{2}$ ή $\frac{5}{R} = \sqrt{2}$ ή $R = \frac{5}{\sqrt{2}}$ ή

$R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι 24 cm², να βρεθεί το εμβαδόν του ΔΕΖ.

Λύση

Έστω x το εμβαδόν του ΔΕΖ. Τότε ισχύει:

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{x}$ ή $\frac{4}{9} = \frac{24}{x}$ ή .....

2. Να βρεθεί το εμβαδό κανονικού εξαγώνου με πλευρά λ = 5 cm όταν ένα άλλο κανονικό εξάγωνο με πλευρά λ' = 10 cm έχει εμβαδό 300 $\sqrt{3}$ cm².

Λύση

Όπως ξέρουμε τα κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο εξαγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Άρα έχουμε:

$(\frac{5}{10})^2 = \frac{x}{300\sqrt{3}}$ ή .....

3. Ορθογώνιο με διαστάσεις 3 cm και 5 cm είναι όμοιο με άλλο ορθογώνιο που έχει τριπλάσιο εμβαδόν. Να βρεθούν οι διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου.

Λύση

Επειδή ο λόγος του εμβαδού του πρώτου προς το δεύτερο ορθογώνιο

είναι $\frac{1}{3}$ τότε ο λόγος ομοιότητας είναι:

$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Οπότε αν x, y οι διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου τότε:

$\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....

4. Να βρεθεί πόσα cm² καταλαμβάνει οικόπεδο 4 στρεμμάτων σε ένα χάρτη κλίμακας 1:1000.

Λύση

Έστω x cm² καταλαμβάνει το οικόπεδο στο χάρτη τότε επειδή 4 στρέμματα = 4000 m² = 40.000.000 cm² = $4 \cdot 10^7$ cm² έχουμε:

$\frac{x}{4 \cdot 10^7} = (\frac{1}{1000})^2$ ή .....

5. Να βρεθεί πόσα στρέμματα είναι αγρός που χαρτογραφημένος σε χάρτη 1:10.000 καταλαμβάνει έκταση 15 cm².

Λύση

Έστω x cm² το εμβαδόν του αγρού. Τότε έχουμε:

$\frac{15}{x} = (\frac{1}{10^4})^2$ ή .....

6. Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 3 cm. Να βρεθεί το ύψος προς τη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου ΔΕΖ με εμβαδόν 40 cm² όταν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι 15 cm².

Λύση

Έστω x το ύψος προς τη βάση του τριγώνου ΔΕΖ. Τότε ισχύει:

$(\frac{3}{x})^2 = \frac{15}{40}$ ή $\frac{9}{x^2} = \frac{15}{40}$ ή .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. *Δύο όμοια σχήματα έχουν λόγο εμβαδών 4/3. Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας λ.*

2. *Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας δύο τετραγώνων όταν το πρώτο έχει τετραπλάσιο εμβαδό από το πρώτο.*

3. *Να βρεθεί το εμβαδό οικοπέδου σε στρέμματα, όταν αυτό χαρτογραφημένο σε χάρτη κλίμακας 1:1000 καταλαμβάνει έκταση 20 cm^2.*

4. *Σε πόσα cm^2 χάρτη κλίμακας 1:10.000 αντιστοιχούν 15 στρέμματα αγρού;*

5. *Δίνεται τρίγωνο με πλευρές 2 cm, 4 cm, 5 cm. Να βρεθούν οι πλευρές άλλου τριγώνου που έχει τετραπλάσιο εμβαδό από το πρώτο.*

6. *Δύο κανονικά πεντάγωνα έχουν λόγο εμβαδών 2. Αν το απόστημα του πρώτου είναι 3 cm, να βρεθεί το απόστημα του δεύτερου.*

7. *Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνων 9 cm και 12 cm αντίστοιχα. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών τους.*

6. 8 Όγκοι ομοίων σχημάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Με τι ισούται ο λόγος των όγκων δύο όμοιων στερεών;

Απαντήσεις

1. Ο λόγος των όγκων δύο ομοίων στερεών ισούται με τον κύβο του λόγου ομοιότητας αυτών.

2. Ποιες είναι οι πιο γνωστές μονάδες μέτρησης όγκου και ποια η σχέση μεταξύ τους;

2. Οι πιο γνωστές μονάδες μέτρησης όγκου είναι:
1 m^3 (κυβικό μέτρο)
1 dm^3 (κυβικό δεκατόμετρο)
1 cm^3 (κυβικό εκατοστό)
1 mm^3 (κυβικό χιλιοστό)
1 lt (λίτρο)

Η σχέση που έχουν μεταξύ τους είναι:
1 $m^3 = 10^3$ $dm^3 = 10^6$ $cm^3 = 10^9$ mm^3 και
1 lt = 1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1000 ml.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο λόγος των πλευρών δύο κύβων που έχουν όγκους 8 cm^3 και 27 cm^3 αντίστοιχα.

Λύση

Έστω λ ο λόγος των πλευρών των δύο κύβων. Τότε:

$$\lambda^3 = \frac{8}{27} \text{ ή } \lambda^3 = \frac{2^3}{3^3} \text{ ή } \lambda = \frac{2}{3}.$$

2. Ο λόγος ομοιότητας δύο ομοίων κυλίνδρων είναι 1/2. Αν ο όγκος του μεγαλύτερου είναι 64 cm^3, να βρεθεί ο όγκος του μικρότερου κυλίνδρου.

Λύση

Έστω x ο όγκος του μικρότερου κυλίνδρου. Τότε έχουμε:

$$\frac{x}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ ή } \frac{x}{64} = \frac{1}{8} \text{ ή } 8x = 64 \text{ ή}$$

$x = 8\ cm^3$.

3. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 3 cm, 4 cm, 5 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις άλλου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου όμοιου με το πρώτο με όγκο 8 φορές μεγαλύτερο.

Λύση

Έστω x, y, ω οι διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \left(\frac{4}{y}\right)^3 = \left(\frac{5}{\omega}\right)^3$$

Δηλαδή: $\frac{3^3}{x^3} = \frac{1}{8}$ ή $x^3 = 3^3 \cdot 2^3$ ή $x = 6$ cm

$\frac{4^3}{y^3} = \frac{1}{8}$ ή $y^3 = 4^3 \cdot 2^3$ ή $y = 8$ cm

$\frac{5^3}{\omega^3} = \frac{1}{8}$ ή $\omega^3 = 5^3 \cdot 2^3$ ή $\omega = 10$ cm

4. Οι ακτίνες των βάσεων δύο όμοιων κώνων είναι ρ = 2 cm και ρ' = 8 cm. Να βρείτε πόσες φορές μεγαλύτερος είναι ο όγκος του δεύτερου κώνου.

Λύση

Επειδή οι κώνοι είναι όμοιοι, ο λόγος ομοιότητας είναι:

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Αν V ο όγκος του πρώτου και V' ο όγκος του δεύτερου κώνου τότε έχουμε:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \text{ ή } \frac{V}{V'} = \frac{1}{64} \text{ ή } V' = 64\,V.$$

Δηλαδή ο δεύτερος κώνος έχει 64 φορές μεγαλύτερο όγκο.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο λόγος των πλευρών δύο κύβων αν ο ένας έχει 125 φορές μεγαλύτερο όγκο από τον άλλο.

Λύση

Έστω λ ο λόγος των πλευρών των δύο κύβων, τότε: $\lambda^3 = 125$ ή ......

2. Δύο όμοιες πυραμίδες έχουν αντίστοιχα ύψη $υ_1$ = 3 m, $υ_2$ = 4 m. Αν ο όγκος της πρώτης είναι 216 m^3, να βρείτε τον όγκο της άλλης πυραμίδας.

Λύση

Έστω x ο όγκος της δεύτερης πυραμίδας, τότε έχουμε:

$(\frac{3}{4})^3 = \frac{216}{x}$ ή ......

3. Ένας κώνος έχει ακτίνα βάσης 2 cm και όγκο 64 cm³. Να βρείτε την ακτίνα βάσης ενός άλλου κώνου όμοιου με τον πρώτο και όγκου 256 cm³.

Λύση

Έστω x η ακτίνα βάσης του δεύτερου κώνου. Τότε λόγω της ομοιότητας θα ισχύει:

$(\frac{2}{x})^3 = \frac{64}{256}$ ή ......

4. Δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που είναι όμοια έχουν μήκη 5 cm και 3 cm. Να βρεθεί ο όγκος του δεύτερου αν ο όγκος του πρώτου είναι 125 cm³.

Λύση

Έστω x ο όγκος του δεύτερου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τότε έχουμε:

$(\frac{5}{3})^3 = \frac{125}{x}$ ή ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε το λόγο των όγκων δύο όμοιων στερεών όταν ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{1}{3}$.

2. Δύο όμοια στερεά έχουν λόγο όγκων $\frac{8}{27}$. Να βρείτε το λόγο ομοιότητας.

3. Δύο όμοιοι κώνοι έχουν ύψη $υ_1$ = 2 cm και $υ_2$ = 5 cm. Αν ο μικρότερος έχει όγκο 32 cm³, να βρεθεί ο όγκος του μεγαλύτερου.

4. Μία κυλινδρική δεξαμενή καυσίμων έχει ακτίνα ρ = 10 m. Να βρείτε πόσες φορές μπορεί να γεμίσει καύσιμα ένα αυτοκίνητο που έχει δεξαμενή καυσίμων όμοια με την πρώτη και ακτίνα βάσης 0,25 m.

5. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 3 cm, 5 cm, 7 cm είναι όμοιο με άλλο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει 27 φορές μεγαλύτερο όγκο. Να βρείτε τις διαστάσεις του δεύτερου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο με $\alpha = 2$ cm, $\beta = 3$ cm, $\gamma = 2{,}4$ cm.

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο με γωνία $A = 38°$, $\beta = 4$ cm και $\gamma = 3{,}2$ cm.

3. Στις πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου κατασκευάζουμε τρία ισόπλευρα τρίγωνα, που βρίσκονται εξωτερικά του αρχικού. Να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις τρεις εξωτερικές κορυφές των νέων τριγώνων είναι ισόπλευρο.

4. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ, ΓΕ, ΑΖ αντίστοιχα ίσα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

5. Αν δ_α, δ_β, δ_γ οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε να δείξετε ότι $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma > \tau$, όπου

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι: $\delta_\alpha > \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$)

6. Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 10 cm σε 6 ίσα μέρη.

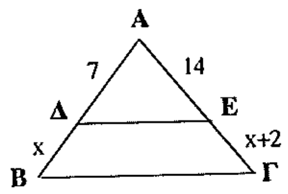
7. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις γωνίες Β και Δ ορθές. Να δείξετε ότι αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα τότε η ΜΝ είναι κάθετη στη ΒΔ.

8. Ευθεία ΔΕ παράλληλη προς τη βάση ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει το ύψος ΑΚ σε δύο τμήματα ΑΟ και ΟΚ που έχουν λόγο $\frac{AO}{OK} = 3$.

Να δείξετε:

i) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.
ii) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας.
iii) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών τους.

9. Να υπολογίσετε το τμήμα x του παρακάτω σχήματος αν ΔΕ // ΒΓ.



10. Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε και φέρνουμε τις παράλληλες ΔΚ και ΕΛ προς την ΑΓ και τις παράλληλες ΔΖ και ΕΖ προς την ΑΒ. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{ZH}{K\Lambda} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

11. Δύο τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση και τις προσκείμενες σ' αυτή πλευρές ανάλογες είναι όμοια.

12. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 4 cm και ΓΑ = 5 cm. Να βρεθούν οι πλευρές ενός άλλου τριγώνου ΔΕΖ αν ξέρουμε ότι είναι όμοιο με το ΑΒΓ και η περίμετρός του είναι 36 cm. Να βρείτε και το λόγο των εμβαδών των δύο τριγώνων.

13. Δίνονται δύο όμοιοι κώνοι με ύψη αντίστοιχα 4 cm και 9 cm. Να βρεθεί η ακτίνα, το εμβαδό και ο όγκος του δεύτερου κώνου αν ξέρουμε ότι η ακτίνα, το εμβαδό και ο όγκος του πρώτου είναι αντίστοιχα 6 cm, 75,4 cm², 37,7 cm³.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

BASIC 8

Όπως όλοι γνωρίζετε στον υπολογιστή, μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφικές εικόνες από τις πιο απλές ως τις πιο σύνθετες. Οι εντολές που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι PLOT (για το σημείο), DRAW (για χάραξη ευθειών) και CIRCLE (για τη δημιουργία κύκλων).
Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι από υπολογιστή σε υπολογιστή υπάρχουν διαφορές ως προς τον τρόπο που χρησιμοποιούνται οι εντολές αυτές. Για το λόγο αυτό θα ήταν χρήσιμο να συμβουλευτείτε το βιβλίο οδηγιών του υπολογιστή σας.
Η εντολή PLOT συνοδεύεται από δυο αριθμούς x, y (συντεταγμένες). Ο x δηλώνει την οριζόντια απόσταση και ο y την κάθετη.
Από τους δυο αριθμούς x, y συνοδεύεται και η εντολή DRAW αλλά η σημασία τους εξαρτάται από τον υπολογιστή σας.
Η εντολή CIRCLE συνοδεύεται από 3 αριθμούς x, y, z εκ των οποίων οι δυο πρώτοι δηλώνουν το σημείο του κέντρου και ο τρίτος την ακτίνα του κύκλου. Ας προσπαθήσουμε να πληκτρολογήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα.

```
10 PLOT  20,30    (↵)
20 DRAW  70,30    (↵)
30 DRAW  70,80    (↵)
40 DRAW  20,80    (↵)
50 DRAW  20,30    (↵)
   RUN            (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκε ένα τετράγωνο.

Έστω το πρόγραμμα:

```
10 CIRCLE 80,100,30   (↵)
20 CIRCLE 80,100,50   (↵)
30 CIRCLE 80,100,70   (↵)
   RUN                (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχεδιάστηκαν τρεις ομόκεντροι κύκλοι.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει έξι ομόκεντρους κύκλους που η ακτίνα τους να διαφέρει κατά 10 ξεκινώντας από το 20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο κύκλους που εφάπτονται στην ίδια ευθεία.

BASIC 9

Πληκτρολογήστε το παρακάτω πρόγραμμα:

```
10 PLOT 30,40      (↵)
20 DRAW 120,40     (↵)
30 PLOT 30,40      (↵)
40 DRAW 120,60     (↵)
   RUN             (↵)
```

Παρατηρούμε ότι σχηματίστηκε μια γωνία.

Αν συνεχίσουμε με τις:

```
50 PLOT 30,40      (↵)
60 DRAW 30,120     (↵)
   RUN             (↵)
```

Θα παρατηρήσουμε ότι σχηματίζονται τώρα δυο εφεξής γωνίες και μάλιστα συμπληρωματικές.

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο εφεξής γωνίες και παραπληρωματικές αν η κορυφή είναι το σημείο 60,20.

2. Φτιάξτε πρόγραμμα που να σχεδιάζει δυο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Τριγωνομετρία

7.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιοι είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ω;

2. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας φ σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο;

Απαντήσεις

1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ω είναι οι αριθμοί: **ημω** (ημίτονο ω), **συνω** (συνημίτονο ω) και **εφω** (εφαπτομένη ω).

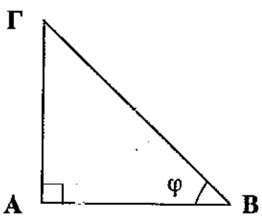
2. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας φ σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ορίζονται ως εξής:

$$\text{ημφ} = \frac{\textbf{απέναντι πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνφ} = \frac{\textbf{προσκείμενη πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφφ} = \frac{\textbf{απέναντι πλευρά}}{\textbf{προσκείμενη πλευρά}}$$

Π.χ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:



$$\text{ημφ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\text{συνφ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\text{εφφ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο συμπληρωματικών γωνιών.

2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές δηλαδή $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90°$ άρα $\widehat{B} = 90° - \widehat{\Gamma}$ (1).

Έχουμε: $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$.

Άρα ημΒ = συνΓ και από τη σχέση (1) έχουμε: **ημ(90° - Γ) = συνΓ.**

Ομοίως: $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma}$ και $\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma}$.

Άρα συνΒ = ημΓ και από τη σχέση (1) έχουμε: **συν(90° - Γ) = ημΓ.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

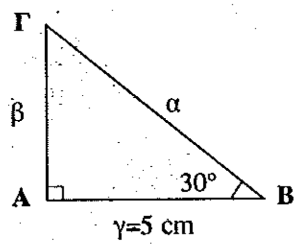
1. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 30°$, $\gamma = 5$ cm

ii) $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 25°$, $\beta = 7$ cm

Λύση

i)



Είναι $\widehat{\Gamma} = 90° - \widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma \text{ (προσκείμενη κάθετη)}}{\alpha \text{ (υποτείνουσα)}}$

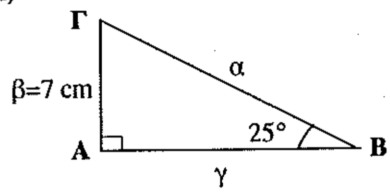
ή $\alpha = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu B}$ ή $\alpha = \frac{5}{\sigma\upsilon\nu 30°}$ ή

$\alpha = \frac{5}{0{,}86} \cong 5{,}77$

και $\varepsilon\varphi 30° = \frac{\beta}{\gamma}$ ή $\beta = \gamma \cdot \varepsilon\varphi 30°$ ή

$\beta = 5 \cdot 0{,}57 = 2{,}88$

ii)



Είναι $\widehat{\Gamma} = 90° - \widehat{B} = 90° - 25° = 65°$.

Έχουμε: $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$ ή $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ ή

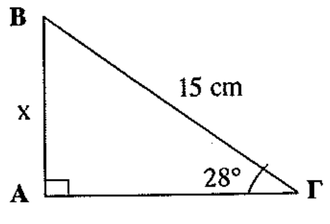
$\alpha = \frac{7}{\eta\mu 25°}$ ή $\alpha = \frac{7}{0{,}42} \cong 16{,}56$ cm

και $\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ ή $\gamma = \frac{\beta}{\varepsilon\varphi B}$ ή $\gamma = \frac{7}{\varepsilon\varphi 25°}$

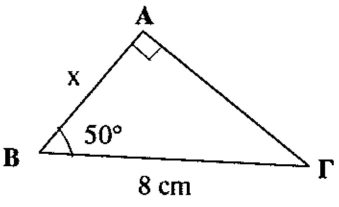
ή $\gamma = \frac{7}{0{,}46} \cong 15{,}01$ cm

2. Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα:

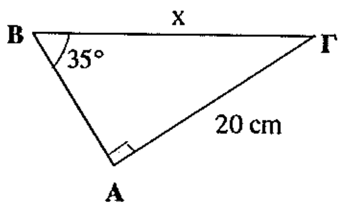
α)



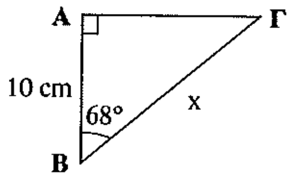
β)



γ)



δ)



Λύση

α) Έχουμε: $ημ28° = \frac{x}{15}$ ή $x = 15 \cdot ημ28°$

ή $x = 15 \cdot 0{,}46$ ή $x \cong 7{,}04$ cm

β) Έχουμε: $συν50° = \frac{x}{8}$ ή $x = 8 \cdot συν50°$

ή $x = 8 \cdot 0{,}64$ ή $x \cong 5{,}14$ cm

γ) Έχουμε: $ημ35° = \frac{20}{x}$ ή $x = \frac{20}{ημ35°}$

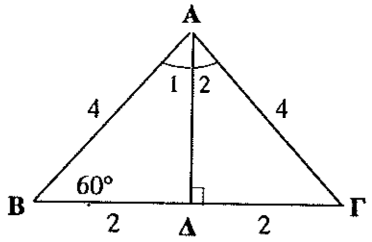
ή $x = \frac{20}{0{,}57}$ ή $x \cong 34{,}86$ cm

δ) Έχουμε: $συν68° = \frac{10}{x}$ ή $x = \frac{10}{συν68°}$

ή $x = \frac{10}{0{,}37}$ ή $x \cong 26{,}69$ cm

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30° και 60° χρησιμοποιώντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α = 4 cm στο οποίο θα φέρετε το ύψος του ΑΔ.

Λύση



Από το ισόπλευρο τρίγωνο έχουμε ότι η γωνία Β είναι ίση με 60° και επειδή ΑΔ ύψος θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

Είναι $\widehat{Δ} = 90°$, $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm και

$\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2} = 30°$.

Άρα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$συν60° = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$ημ30° = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Με πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2$ ή

$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$ ή

$ΑΔ^2 = 4^2 - 2^2$ ή

$ΑΔ^2 = 16 - 4$ ή

$ΑΔ^2 = 12$ ή

$$ΑΔ = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Άρα: $ημ60° = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

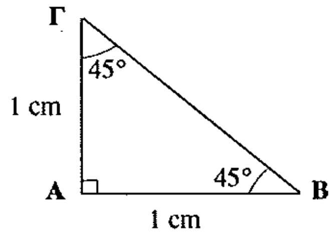
και $συν30° = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$εφ60° = \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$εφ30° = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 45°.

Λύση



Γράφουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 cm. Κάθε οξεία γωνία του τριγώνου είναι 45°. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή
$ΒΓ^2 = 1^2 + 1^2$ ή
$ΒΓ^2 = 2$ ή

$ΒΓ = \sqrt{2}$

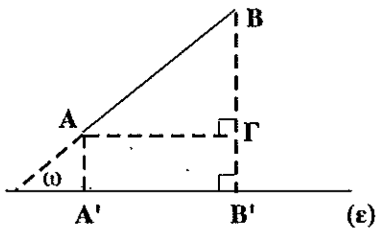
Άρα $ημ45° = \dfrac{ΑΒ}{ΒΓ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$συν45° = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

και $εφ45° = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} = \dfrac{1}{1} = 1$

5. Αν ΑΒ = 15 cm και ω = 30°, να υπολογίσετε την προβολή του ΑΒ στην ευθεία (ε).



Λύση

Αν φέρουμε την ΑΑ' κάθετη στην ευθεία (ε) και τη ΒΒ' κάθετη στην (ε) τα Α' και Β' λέγονται προβολές των Α και Β στην (ε) και το Α'Β' προβολή του ΑΒ στην (ε). Φέρνουμε την ΑΓ κάθετη στη ΒΒ' οπότε η γωνία ΒΑΓ = ω = 30° ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΓ και (ε) που τέμνονται από την ΑΒ.
Από το ορθογώνιο ΑΓΒ'Α' έχουμε Α'Β' = ΑΓ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$συν30° = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$ ή $ΑΓ = ΑΒ \cdot συν30°$ ή

$Α'Β' = 15 \cdot συν30°$ ή $Α'Β' = 15 \cdot 0{,}86$

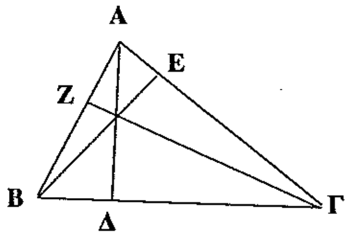
$\cong 12{,}99$ cm

6. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

$\boldsymbol{Ε = \frac{1}{2} αβ\ ημΓ}$ ***ή*** $\boldsymbol{Ε = \frac{1}{2} βγ\ ημΑ}$ ***ή***

$\boldsymbol{Ε = \frac{1}{2} αγ\ ημΒ.}$

Λύση



Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Γνωρίζουμε ότι: $Ε = \dfrac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ$ ή

$Ε = \dfrac{1}{2} \cdot α \cdot ΑΔ$ (Ι).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $ΑΔ = ΑΓ \cdot ημΓ$ ή $ΑΔ = β \cdot ημΓ$

άρα από την (Ι) έχουμε: $Ε = \dfrac{1}{2} \cdot αβ \cdot ημΓ$.

Αν πάρουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε $ΑΔ = ΑΒ \cdot ημΒ$ ή $ΑΔ = = γ \cdot ημΒ$ οπότε η (Ι) γίνεται:

$Ε = \dfrac{1}{2} \cdot αγ \cdot ημΒ$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται

και η $Ε = \dfrac{1}{2} \cdot βγ \cdot ημΑ$.

7. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης:

$A = ημ30° + συν60° + 2συν30° -$
$- 2ημ60° + 2ημ45°$.

Λύση

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 45°, 60° έχουμε:

$$ημ30° = \frac{1}{2},\ συν60° = \frac{1}{2},\ συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } ημ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε με αντικατάσταση στην παράσταση Α έχουμε:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 1 + \sqrt{2}.$$

8. Αν η γωνία $φ = 60°$, να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = ημ^2φ + 4συν^2\frac{φ}{2} - 2ημ\frac{3φ}{2} + 3συν\frac{3φ}{2}$$

Λύση

Έχουμε ότι $ημφ = ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα

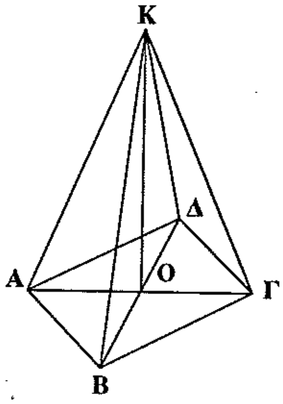
$$ημ^2φ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$
$$συν\frac{φ}{2} = συν\frac{60°}{2} = συν30° = \frac{1}{2} \text{ άρα}$$
$$συν^2\frac{φ}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$ημ\frac{3φ}{2} = ημ\frac{3 \cdot 60°}{2} = ημ90° = 1,$$
$$συν\frac{3φ}{2} = συν\frac{3 \cdot 60°}{2} = συν90° = 0.$$

Άρα $A = \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 =$

$$= \frac{3}{4} + 1 - 2 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

9. Η πλευρά της βάσης μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι 4 m και το ύψος της πυραμίδας είναι 7 m. Να υπολογισθούν οι ακμές της πυραμίδας και οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τις διαγώνιες της βάσης της.

Λύση



Η βάση της πυραμίδας είναι τετράγωνο άρα η γωνία Β είναι ίση με 90° και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο επομένως:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 4^2 + 4^2$ ή

$ΑΓ^2 = 32$ ή $ΑΓ = \sqrt{32}$

Επίσης το τρίγωνο ΚΟΑ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία ΚΟΑ είναι ίση με 90°. Επομένως: $ΚΑ^2 = ΚΟ^2 + ΟΑ^2$

με $ΟΑ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ άρα

$ΚΑ^2 = 7^2 + (2\sqrt{2})^2$ ή

$ΚΑ^2 = 49 + 4 \cdot 2 = 49 + 8 = 57$ ή

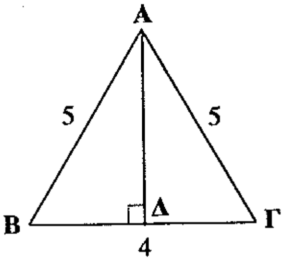
$ΚΑ^2 = 57$ ή $ΚΑ = \sqrt{57} \cong 7{,}54$ m.

Από το τρίγωνο ΚΟΑ έχουμε:

$ημA = \frac{ΚΟ}{ΚΑ} = \frac{7}{7{,}54} \cong 0{,}92$ m όπου από πίνακες έχουμε $\widehat{A} \cong 68°$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών του παρακάτω ισοσκελούς τριγώνου.



Λύση

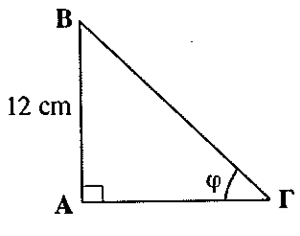
Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και με πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε στο τρίγωνο ΑΔΒ το ύψος του οπότε:

$\eta\mu B = \dfrac{A\Delta}{AB} = ...$

$\sigma\upsilon\nu B = ...$

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) με ΑΒ = 12 cm και εφΓ = 0,577. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

Λύση



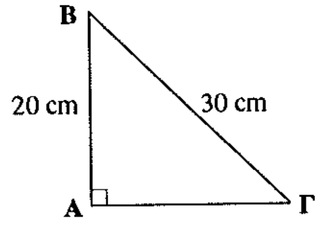
$\varepsilon\varphi\Gamma = 0{,}577$ άρα $\widehat{\Gamma} = ...$

$\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma = \dfrac{AB}{\varepsilon\varphi\Gamma} = ...$

Οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα ΒΓ = ...

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) με ΑΒ = 20 cm και ΒΓ = 30 cm. Να υπολογισθούν οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου.

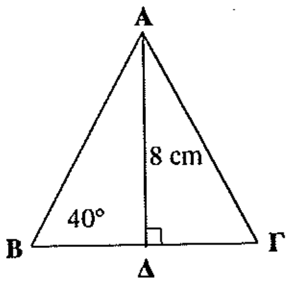
Λύση



$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{AB}{B\Gamma} = ...$

4. Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με γωνία Β ίση με 40°. Αν το ύψος από την κορυφή Α είναι ΑΔ = 8 cm, να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

Λύση

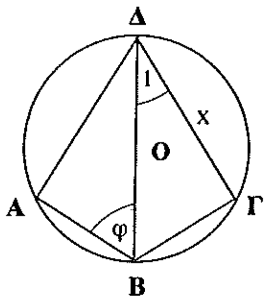


Είναι $\eta\mu B = \dfrac{A\Delta}{AB}$ ή $AB = ...$

Με πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ βρίσκουμε και τη ΒΔ. Άρα ......

5. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη γωνία φ καθώς και την πλευρά x αν είναι:
ΒΔ = 10 cm
ΑΔ = 8 cm

$\widehat{A_1} = 38°$

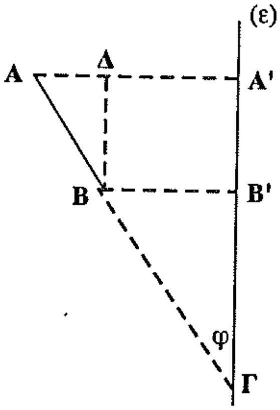


Λύση

Είναι ημφ = $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ οπότε από τριγωνομετρικούς πίνακες $\widehat{φ}$ = ...

Επίσης συν$Δ_1$ = $\frac{x}{ΒΔ}$ ή x = ...

6. Να υπολογίσετε την προβολή Α'Β' του ΑΒ = 15 cm πάνω στην ευθεία (ε). Δίνεται ότι: φ = 35°.



Λύση

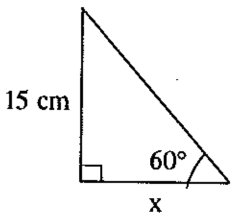
Είναι $\widehat{ΑΒΔ}$ = $\widehat{φ}$ (εντός εναλλάξ).

Οπότε στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε: ......

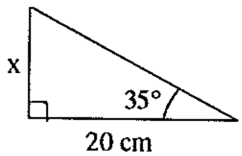
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί το x σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα:

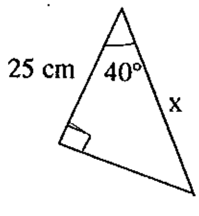
α)



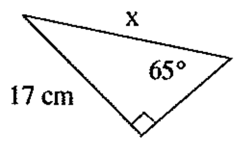
β)



γ)



δ)



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\widehat{B} = 30°, α = 25$ cm

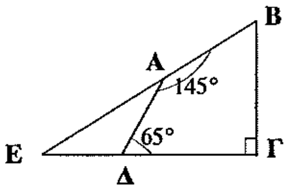
β) $\widehat{B} = 80°, β = 35$ cm

γ) $\widehat{Γ} = 60°, γ = 10$ cm

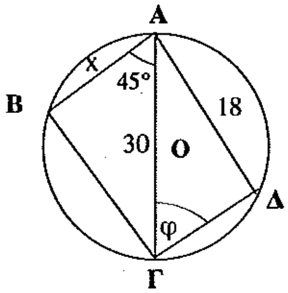
δ) $\widehat{Γ} = 65°, β = 15$ cm

ε) $\widehat{B} = 50°, γ = 45$ cm

3. Αν είναι ΑΒ = 15 cm, να υπολογίσετε την προβολή του ΑΒ πάνω στην ΕΓ.



4. Να υπολογίσετε τη γωνία φ και το x στο παρακάτω σχήμα.



5. Η πλευρά της βάσης μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι α = 10 cm και το ύψος της είναι υ = 20 cm. Να υπολογίσετε τις ακμές της πυραμίδας καθώς και τις γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τις διαγώνιες της βάσης της.

6. Η πλευρά ενός ρόμβου είναι 7 cm και η γωνία που σχηματίζει με μία από τις διαγωνίους είναι 50°. Να βρεθεί το μήκος κάθε διαγωνίου.

7. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) έχει τη γωνία Β ίση με 35°. Αν το ύψος από την κορυφή είναι ΑΔ = 7 cm, να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

8. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) έχει ΑΒ = 18 cm και εφΒ = 0,8. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου.

9. Οι ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι ΑΒ = ΑΓ = 10 cm και η βάση του είναι ΒΓ = 8 cm. Να βρεθούν οι γωνίες του.

10. Να υπολογισθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A = 2\eta\mu 30° - 3\sigma\upsilon\nu 60° + 2\ \eta\mu 45°$$

$$B = \frac{3\eta\mu 45° - 2\sigma\upsilon\nu 45°}{\varepsilon\varphi 60° - \varepsilon\varphi 30°}$$

$$\Gamma = \frac{2\eta\mu^2 30° + 4\sigma\upsilon\nu^2 60°}{\sigma\upsilon\nu^2 45° - \eta\mu^2 60°}$$

11. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

α) $\eta\mu 90° = 2\eta\mu 45° \cdot \sigma\upsilon\nu 45°$

β) $\sigma\upsilon\nu 90° = 1 - 2\eta\mu^2 45° = 2\sigma\upsilon\nu^2 45° - 1 = \sigma\upsilon\nu^2 45° - \eta\mu^2 45°$

12. Αν φ = 60°, να υπολογισθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A = \eta\mu\varphi - 2\eta\mu^2\varphi + \varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{3\varphi}{2}$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} + \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\frac{3\varphi}{2}$$

$$\Gamma = \frac{2\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} - 3\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}{\eta\mu\frac{3\varphi}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{3\varphi}{2}}$$

7.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας

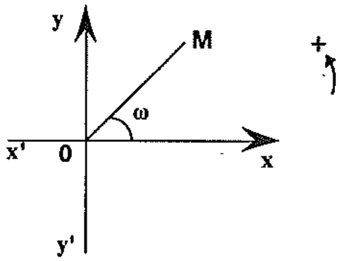
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς μπορούμε να ορίσουμε μ' ένα σημείο Μ μια γωνία ω σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;

Απαντήσεις

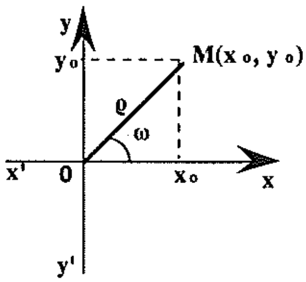
1. Αν δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και ένα σημείο Μ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που ορίζει αυτό, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη γωνία xOM = ω που σχηματίζεται όταν η ημιευθεία Ox περιστραφεί γύρω από το Ο κατά φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά) μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία ΟΜ.



2. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας ω;

2. Μία οποιαδήποτε γωνία $\widehat{\omega} = \widehat{xOM}$ που είναι ορισμένη πάνω σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με τη βοήθεια του σημείου $M(x_o, y_o)$, έχει τριγωνομετρικούς αριθμούς που ορίζονται από τους τύπους:

$$ημω = \frac{y_o}{\varrho}, \quad συνω = \frac{x_o}{\varrho}, \quad εφω = \frac{y_o}{x_o} \quad \text{όπου } \varrho = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$$



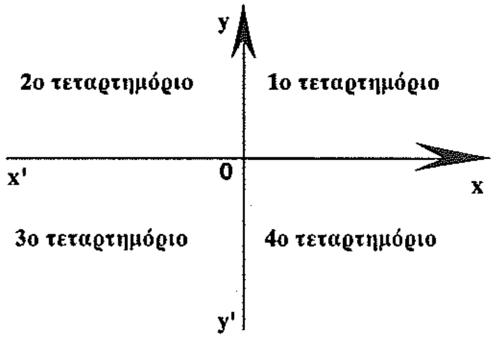
3. Ποιες τιμές μπορούν να πάρουν οι αριθμοί ημω και συνω;

3. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας ω μπορούν να πάρουν τιμές μεταξύ των αριθμών -1 και 1. Δηλαδή:

-1 ≤ ημω ≤ 1 και
-1 ≤ συνω ≤ 1

4. Τι ονομάζονται τεταρτημόρια ενός συστήματος αξόνων;

4. Τα τμήματα του επιπέδου που ορίζονται από ένα σύστημα αξόνων και περιλαμβάνονται μεταξύ των αξόνων ονομάζονται **τεταρτημόρια**.



Το πρώτο τεταρτημόριο είναι αυτό που περιλαμβάνεται μεταξύ των θετικών ημιαξόνων του συστήματος, τα δε υπόλοιπα αριθμούνται διαδοχικά σύμφωνα με τη θετική φορά περιστροφής.

5. Τι γνωρίζετε για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών ημω, συνω, εφω σε κάθε ένα από τα τεταρτημόρια ενός συστήματος αξόνων;

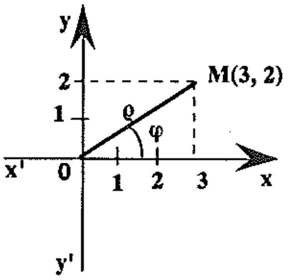
5. Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών ημω, συνω, εφω εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο Μ. Σε κάθε ένα τεταρτημόριο το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Τεταρτημόριο	**1ο**	**2ο**	**3ο**	**4ο**
ημω	+	+	—	—
συνω	+	—	—	+
εφω	+	—	+	—

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται το σημείο Μ(3, 2). Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας xOM = φ.

Λύση



Έχουμε $\varrho = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

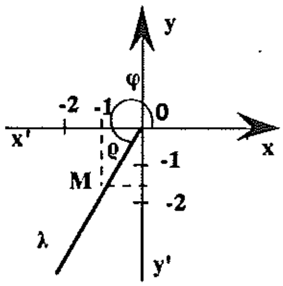
$$ημφ = \frac{y}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \cong 0{,}55\ ,$$

$$συνφ = \frac{x}{\varrho} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cong 0{,}83 \text{ και}$$

$$εφφ = \frac{y}{x} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

2. Σ' ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων σχεδιάστε μία γωνία xOM = 240°. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της.

Λύση



Σχεδιάζουμε με το μοιρογνωμόνιο μία γωνία 240° και πάνω στην πλευρά της Ολ παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο με συντεταγμένες $(-1, -\sqrt{3})$.

Έχουμε λοιπόν $\varrho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} =$

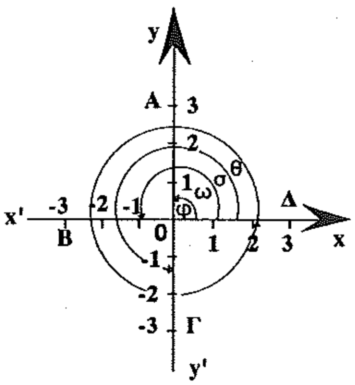
$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

οπότε $ημ240° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $συν240° = \frac{-1}{2}$

και $εφ240° = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$.

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών: α) 90°, β) 180°, γ) 270°, δ) 360°.

Λύση



α) Παίρνουμε ένα σημείο Α(0, 3) της πλευράς Oy της γωνίας φ = xOy = =90° και έχουμε: ρ = 3 και

$$ημ90° = \frac{y}{\varrho} = \frac{3}{3} = 1\ ,\ συν90° = \frac{x}{\varrho} = \frac{0}{3} = 0$$

και η εφ90° δεν ορίζεται γιατί x = 0

και το κλάσμα $\frac{y}{x}$ δεν έχει νόημα.

β) Παίρνουμε ένα σημείο Β(-3, 0) της πλευράς Ox' της γωνίας ω = xOx' = =180° και έχουμε: ρ = 3 και

$$ημ180° = \frac{y}{\varrho} = \frac{0}{3} = 0\ ,\ συν180° = \frac{x}{\varrho} = \frac{-3}{3} =$$

$$= -1 \text{ και } εφ180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-3} = 0.$$

γ) Παίρνουμε ένα σημείο Γ(0, -3) της πλευράς Oy' της γωνίας σ = xOy' = =270° και έχουμε: ρ = 3 και

$ημ270° = \frac{y}{ρ} = \frac{-3}{3} = -1$, $συν270° = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{3} =$

$= 0$ και η εφ270° δεν ορίζεται γιατί

$x=0$ και το κλάσμα $\frac{y}{x}$ δεν έχει νόημα.

δ) Παίρνουμε ένα σημείο Δ(3, 0) πάνω στην πλευρά Οx της γωνίας θ = xOx = 360° και έχουμε: ρ = 3 και

$ημ360° = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{3} = 0$, $συν360° = \frac{x}{ρ} = \frac{3}{3} =$

$= 1$ και $εφ360° = \frac{y}{x} = \frac{0}{3} = 0$.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα δημιουργούμε τον πίνακα:

	0°	90°	180°	270°	360°
ημφ	0	1	0	-1	0
συνφ	1	0	-1	0	1
εφφ	0	—	0	—	0

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2ημ270° + 3συν180°}{ημ180° + συν360°}$$

Λύση

Έχουμε ότι ημ270° = -1, συν180°= -1, ημ180° = 0 και συν360° = 1, άρα:

$$A = \frac{2ημ270° + 3συν180°}{ημ180° + συν360°} =$$

$$= \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)}{0+1} = \frac{-2-3}{1} = -5.$$

5. Να βρεθεί το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:
α) 100°, β) 120°, γ) 195°, δ) 260°, ε) 290°, στ) 350°.

Λύση

Οι γωνίες 100° και 120° βρίσκονται στο 2ο τεταρτημόριο άρα έχουν ημίτονο θετικό και συνημίτονο και εφαπτομένη αρνητικά.
Οι γωνίες 195° και 260° βρίσκονται στο 3ο τεταρτημόριο άρα έχουν ημίτονο και συνημίτονο αρνητικά και εφαπτομένη θετική.
Οι γωνίες 290° και 350° βρίσκονται στο 4ο τεταρτημόριο άρα έχουν ημίτονο και εφαπτομένη αρνητικά και συνημίτονο θετικό.

6. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή των παραστάσεων:
α) Α = 2ημx + 1,
β) Β = 2ημx + 3συνx,
γ) Γ = 2ημx - 3συνx +3.

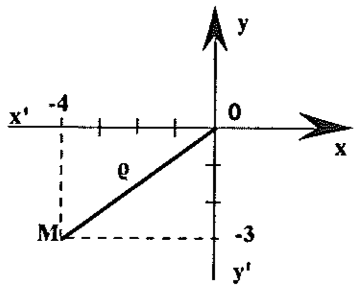
Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι:
$-1 \leq ημx \leq 1$ ή (πολ/ζω με 2)
$2 \cdot (-1) \leq 2ημx \leq 2 \cdot 1$ ή (προσθέτω 1)
$-2 + 1 \leq 2ημx + 1 \leq 2 + 1$ ή
$-1 \leq A \leq 3$
Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι το -1 και η μέγιστη τιμή το 3.
β) Έχουμε:
$-1 \leq ημx \leq 1$ ή $-2 \leq 2ημx \leq 2$ (1)
$-1 \leq συνx \leq 1$ ή $-3 \leq 3συνx \leq 3$ (2)
Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:
$-5 \leq 2ημx + 3συνx \leq 5$ ή $-5 \leq B \leq 5$.
Άρα η ελάχιστη τιμή της Β είναι το -5 και η μέγιστη το 5.
γ) Έχουμε:
$-1 \leq ημx \leq 1$ ή $-2 \leq 2ημx \leq 2$ (1)
$-1 \leq συνx \leq 1$ ή $3 \geq -3συνx \geq -3$ ή
$-3 \leq -3συνx \leq 3$ (2)
Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:
$-5 \leq 2ημx - 3συνx \leq 5$ ή
$-5 + 3 \leq 2ημx - 3συνx + 3 \leq 5 + 3$ ή
$-2 \leq Γ \leq 8$.
Άρα η ελάχιστη τιμή της Γ είναι το -2 και η μέγιστη το 8.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

***1.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας xOM όπου M σημείο με συντεταγμένες: (-4, -3).*

Λύση



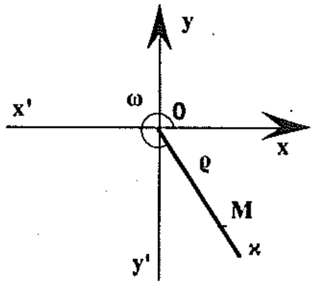
Έχουμε $\varrho = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = ...$

οπότε ημφ = $\dfrac{y}{\varrho} = ...$, συνφ = $\dfrac{x}{\varrho} = ...$

και εφ360° = $\dfrac{y}{x} = ...$

***2.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω = =300°.*

Λύση



Σχεδιάζουμε με το μοιρογνωμόνιο μία γωνία xOϰ = 300° και πάνω στην πλευρά της Oϰ παίρνουμε ένα σημείο M με συντεταγμένες .....

***3.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:*
Α = 2συνx + 7ημx

Λύση

Από τις σχέσεις:
$-1 \le$ ημx ≤ 1 και $-1 \le$ συνx ≤ 1 έχουμε
....

***4.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:*

$$A = \frac{2\sigma\upsilon\nu 90^\circ - 3\eta\mu 270^\circ + \varepsilon\varphi^5 180^\circ}{\eta\mu 270^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ}$$

$$B = \frac{\eta\mu^2 90^\circ - (2\sigma\upsilon\nu 180^\circ)^2 + 4\sigma\upsilon\nu^3 0^\circ}{\varepsilon\varphi 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 180^\circ}$$

Λύση

$$A = \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) + 0^5}{-1 - 1} = ...$$

Ομοίως:
Β = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Να σχεδιάσετε σ' ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy τα σημεία:*
α) Α(4, 5), β) Β(-2, 5), γ) Γ(-3, -4), δ) Δ(4, -2) και να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\widehat{xOA}$, $\widehat{xOB}$, $\widehat{xO\Gamma}$ και $\widehat{xO\Delta}$.

***2.** Σ' ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γωνία xOM = 190°. Να υπολογίσετε τους τριγωνο-*

μετρικούς αριθμούς αυτής.

***3.** Με τον ίδιο τρόπο να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: α) 130°, β) 220°, γ) 340°.*

***4.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:*

$A = ημ180° - συν90° + 3ημ90° - ημ270°$

$$B = \frac{3ημ270° + 2συν180°}{2ημ270° - 3συν180°}$$

***5.** Να υπολογίσετε το πρόσημο των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών χωρίς να τους βρείτε:*
α) ημ95°, β) συν165°, γ) εφ350°, δ) συν190°, ε) ημ290°.

***6.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:*
α) 2ημx + 5συνy
β) 3ημx - 2
γ) 2συνx - 1
δ) 3συνx + 2ημy

7.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Θεωρία

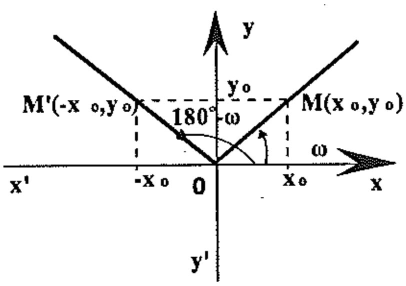
Ερωτήσεις

***1.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών.*

Απαντήσεις

1. Θεωρούμε δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y δηλαδή τα σημεία $M(x_0, y_0)$ και $M'(-x_0, y_0)$.

Έστω $\widehat{xOM} = ω$. Τότε θα είναι $\widehat{xOM'} = 180° - ω$ και $OM = OM' = ρ$.



Άρα $ημω = \frac{y}{ρ}$, $ημ(180° - ω) = \frac{y}{ρ} = ημω$

$συνω = \frac{x}{ρ}$, $συν(180° - ω) = \frac{-x}{ρ} = -\frac{x}{ρ} = -συνω$

$εφω = \frac{y}{x}$, $εφ(180° - ω) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -εφω$

Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{aligned} ημ(180° - ω) &= ημω \\ συν(180° - ω) &= -συνω \\ εφ(180° - ω) &= -εφω \end{aligned}}$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:
α) ημ120°, β) συν130°,
γ) ημ140°, δ) εφ160°.

Λύση

α) Είναι: ημ120° = ημ(180° - 60°) =
= ημ60° ≅ 0,86

β) συν130°=συν(180°- 50°)= -συν50°≅
≅ - 0,64

γ) ημ140° = ημ(180° - 40°) = ημ40° ≅
≅ 0,64

δ) εφ160° = εφ(180° - 20°) = εφ20° ≅
≅ - 0,36

2. Να υπολογίσετε τη γωνία x αν $0° < x < 180°$ και ημx = 0,5.

Λύση

Από πίνακες βρίσκουμε ότι η γωνία x που έχει ημίτονο 0,5 είναι 30°. Αλλά ισχύει: ημ(180° - x) = ημx και επειδή x = 30° έχουμε ότι 180° - x = =150°. Επομένως και η γωνία 150° έχει ημίτονο 0,5.

3. Αν $90° \le x \le 180°$ και 2συνx =- $\sqrt{3}$

να υπολογισθεί η γωνία x.

Λύση

Από τη σχέση 2συνx = - $\sqrt{3}$ έχουμε:

συνx = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Αλλά επειδή ισχύει

συν(180° - x) = - συνx = - (- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

και από τους τριγωνομετρικούς πίνακες

η γωνία που έχει συνημίτονο $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι 30°.

Άρα 180° - x = 30° ή x = 180° - 30°
ή x = 150°.

4. Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων:
Α = συν120° + εφ150° - ημ130°
Β = 2ημ130° + 3συν135° - 2εφ125°

Λύση

Είναι:
συν120°= συν(180° - 60°) = - συν60°=
= - 0,5

εφ150°=εφ(180°- 30°)= - εφ30°≅ -0,57

ημ130°= ημ(180°- 50°)= ημ50° ≅ 0,76

Άρα Α = - 0,5 + (- 0,57) - 0,76 = -1,83

Επίσης:
συν135° = συν(180°- 45°) = -συν45° =
= -0,70

εφ125° = εφ(180° - 55°) = - εφ55° =
= - 1,42

Άρα Β = 2·0,76 + 3·(-0,70) -2·(-1,42)=
= 1,52 - 2,1 + 2,84 = 2,26

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: α) 132°, β) 172°, γ) 148°.

Λύση

Είναι:
ημ132° = ημ(180° - 48°) = ημ48° ≅ ....

2. Αν $0° \le x \le 180°$ και $ημ^2x = 1/2$ να υπολογίσετε το x.

Λύση

$ημ^2x = \frac{1}{2}$ ή ημx = $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

επειδή $0° \le x \le 180°$ το ημx ≥ 0 άρα

ημx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και από πίνακες x = ...

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς πίνακες, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών:*
α) 120°, β) 130°, γ) 135°, δ) 140°, ε) 145°, στ) 150°, ζ) 160°, η) 170°.

***2.** Με βάση την προηγούμενη άσκηση να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:*

$A = 2ημ130° + 3συν135° - εφ140°$

$$B = \frac{ημ145° - 2συν150°}{συν160° + εφ170°}$$

$$Γ = \frac{ημ^2 135° - συν^2 160°}{2 + εφ^2 160°}$$

***3.** Αν $0° \le x \le 180°$ και $2ημx - \sqrt{3} = 0$ να υπολογίσετε το x.*

***4.** Αν $90° \le x \le 180°$ και $2συνx + 1 = 0$ να υπολογίσετε το x.*

***5.** Αν $0° \le x \le 180°$ και $εφx = -2$, να υπολογίσετε το x.*

***6.** Αν $0° \le x \le 180°$ και $συν^2 x = 1/2$, να υπολογίσετε το x.*

***7.** Αν $0° \le x \le 180°$ και $ημ^2 x = 3/4$, να υπολογίσετε το x.*

7.4 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Θεωρία

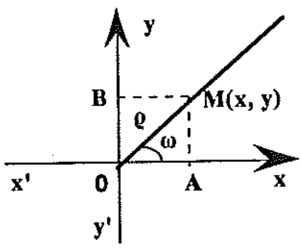
Ερωτήσεις

***1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω εκτός από 90° και 270° ισχύει:*

$$εφω = \frac{ημω}{συνω}$$

Απαντήσεις

1. Έστω το σημείο M(x, y) τοποθετημένο στο επίπεδο που ορίζεται από το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Για τη γωνία $\widehat{xOM} = ω$ έχουμε ότι: $ημω = \frac{y}{ρ}$ και $συνω = \frac{x}{ρ}$ όπου $ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$ άρα

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{y \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \frac{y}{x} = εφω$$

δηλαδή: $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$

> *2. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:*
> *$ημ^2ω + συν^2ω = 1$*

2. Από το προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$ημ^2ω + συν^2ω = (ημω)^2 + (συνω)^2 =$

$= (\dfrac{y}{ϱ})^2 + (\dfrac{x}{ϱ})^2 = \dfrac{y^2}{ϱ^2} + \dfrac{x^2}{ϱ^2} = \dfrac{y^2 + x^2}{ϱ^2} =$

(από το Π.θ. στο τρίγωνο ΟΑΜ) $= \dfrac{ϱ^2}{ϱ^2} = 1$

Άρα: $\mathbf{ημ^2ω + συν^2ω = 1}$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί η σχέση:
$(ημx + συνx)^2 = 2 - (ημx - συνx)^2$

Λύση

Το α' μέλος της σχέσης γίνεται:

$(ημx + συνx)^2 =$
$= ημ^2x + συν^2x + 2ημxσυνx =$
$= 1 + 2ημxσυνx$

Το β' μέλος της σχέσης γίνεται:

$2 - (ημx - συνx)^2 =$
$= 2 - (ημ^2x + συν^2x - 2ημxσυνx) =$
$= 2 - (1 - 2ημxσυνx) =$
$= 2 - 1 + 2ημxσυνx =$
$= 1 + 2ημxσυνx$

Άρα ισχύει:
$(ημx + συνx)^2 = 2 - (ημx - συνx)^2$.

2. Να αποδειχθεί ότι:

$1 + εφ^2x = \dfrac{1}{συν^2x}$

Λύση

Το α' μέλος γίνεται:

$1 + εφ^2x = 1 + \dfrac{ημ^2x}{συν^2x} = \dfrac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x} =$

$= \dfrac{1}{συν^2x}$

3. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:
α) $ημx = εφx \cdot συνx$

β) $συνx = \dfrac{ημx}{εφx}$

Λύση

α) Παίρνουμε το β' μέλος της παράστασης:

$εφx \cdot συνx = \dfrac{ημx}{συνx} \cdot συνx = \dfrac{ημx \cdot συνx}{συνx} =$

$= ημx$

β) Ομοίως το β' μέλος:

$\dfrac{ημx}{εφx} = \dfrac{ημx}{\dfrac{ημx}{συνx}} = \dfrac{συνx \cdot ημx}{ημx} = συνx$

4. Αν $90° \le x \le 180°$ και $ημx = \dfrac{1}{2}$,

να υπολογισθούν:
α) το συνx και β) η εφx.

Λύση

α) Από τον τύπο $ημ^2x + συν^2x = 1$ έχουμε: $συν^2x = 1 - ημ^2x$ ή

$συν^2x = 1 - (\dfrac{1}{2})^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ δηλ.

$συν^2x = \dfrac{3}{4}$ και επειδή $90° \le x \le 180°$ το

$συνx \le 0$ επομένως $συνx = -\sqrt{\dfrac{3}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

β) Από τον τύπο $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ έχουμε με αντικατάσταση $εφx = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= -\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Αν $εφx = -\sqrt{3}$ και $90° \leq x \leq 180°$ να υπολογισθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

Λύση

Από τη σχέση $1 + εφ^2x = \frac{1}{συν^2x}$ (άσκηση 2) έχουμε: $συν^2x = \frac{1}{1 + εφ^2x} = \frac{1}{1 + (-\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ και επειδή $90° \leq x \leq 180°$ το $συνx \leq 0$ και επομένως $συνx = -\sqrt{\frac{1}{4}} =$

$= -\frac{1}{2}$.

Από δε τη σχέση $ημx = εφx \cdot συνx =$

$= (-\sqrt{3}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Αν $συνx = -12/13$ και $90° \leq x \leq 180°$ να υπολογισθούν:
α) το ημx και β) η εφx.

Λύση

α) Από τη σχέση: $ημ^2x + συν^2x = 1$ έχουμε: $ημ^2x = 1 - συν^2x = ...$

β) Ισχύει: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = ...$

5. Αν $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $90° \leq x \leq 180°$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{ημ^2x + 2συνxημx}{εφ^2x - 1}$$

Λύση

Υπολογίζουμε το συνx από τη σχέση: $1 + εφ^2x = 1/συν^2x$ λαμβάνοντας υπόψη ότι $συνx \leq 0$ γιατί $90° \leq x \leq 180°$. Στη συνέχεια από τη σχέση $εφx = ημx/συνx$ υπολογίζουμε το .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $0° \leq x \leq 90°$ *και* $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

β) $0° \leq x \leq 90°$ *και* $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

γ) $90° \leq x \leq 180°$ *και* $ημx = \frac{1}{2}$

δ) $90° \leq x \leq 180°$ *και* $συνx = -\frac{3}{4}$

2. Ομοίως της γωνίας x αν:

α) $0° \leq x \leq 90°$ *και* $εφx = \frac{12}{15}$

β) $90° \leq x \leq 180°$ *και* $εφx = 2,5$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{ημ^2x + 2συν^2x - εφx}{1 - 2ημxσυνx}$$

αν $90° \leq x \leq 180°$ *και* $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Να αποδείξετε ότι:
$ημxσυνx \cdot (1 + εφ^2x) = εφx$.

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} - \frac{\eta\mu x \varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x - 1}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi x + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1}{\varepsilon\varphi x - \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + 1} = \frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{3 + 2\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x$$

8. Αν $180^\circ \leq x \leq 270^\circ$ και ισχύει η σχέση $4\eta\mu^2 x - 1 = 0$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x.

9. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι σταθεροί αριθμοί.

$A=2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$

$B= \eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x-2\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x+\eta\mu^2 x$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1} = \frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

11. Να αποδείξετε ότι:

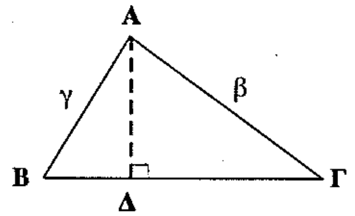
$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1) = 2\,\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu x$

7.5 Νόμος ημιτόνων

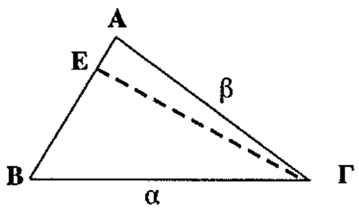
Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Απαντήσεις

1. Νόμος των ημιτόνων: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

Απόδειξη:

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (Σχήμα 1) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΑ έχουμε ότι:

$$\eta\mu B = \frac{A\Delta}{\gamma} \quad \acute{\eta} \quad A\Delta = \gamma \cdot \eta\mu B \quad (1)$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ότι:

$$\eta\mu \Gamma = \frac{A\Delta}{\beta} \quad \acute{\eta} \quad A\Delta = \beta \cdot \eta\mu \Gamma \quad (2)$$

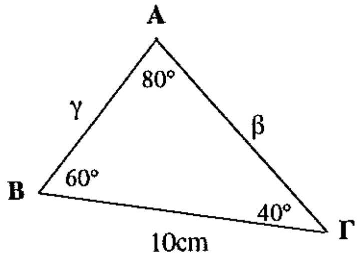
Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:

$$\gamma \cdot \eta\mu B = \beta \cdot \eta\mu \Gamma \quad \acute{\eta} \quad \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$ (αν αντί για το ύψος ΑΔ φέρουμε το ύψος ΕΓ όπως φαίνεται στο σχήμα 2). Άρα τελικά $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις πλευρές β και γ του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή

$\frac{10}{\eta\mu 80^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 40^\circ}$

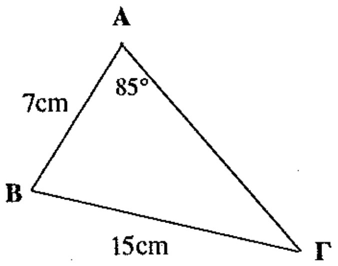
Άρα $\beta = \frac{10}{\eta\mu 80^\circ} \cdot \eta\mu 60^\circ$ ή $\beta \cong \frac{10}{0{,}98} \cdot 0{,}86$

$\cong 8{,}77$ cm

και $\gamma = \frac{10}{\eta\mu 80^\circ} \cdot \eta\mu 40^\circ$ ή $\gamma \cong \frac{10}{0{,}98} \cdot 0{,}64$

$\cong 6{,}53$ cm.

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή $\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \eta\mu A$ ή

$\eta\mu \Gamma = \frac{7}{15} \cdot \eta\mu 85^\circ$ ή $\eta\mu \Gamma \cong 0{,}46 \cdot 0{,}99$

$\cong 0{,}454$ άρα $\widehat{\Gamma} \cong 27^\circ$.

Επομένως $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή

$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{\Gamma})$ ή

$\widehat{B} = 180^\circ - (85^\circ + 27^\circ) = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

3. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\widehat{A}=36^\circ$, $\widehat{\Gamma}=65^\circ$ ***και*** $\alpha=20$ ***cm***

β) $\widehat{A}=130^\circ$, $\widehat{\Gamma}=20^\circ$ ***και*** $\gamma=20$ ***cm***

Λύση

α) Για τη γωνία Β έχουμε:

$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{\Gamma})$ ή

$\widehat{B} = 180^\circ - (36^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή

$\frac{20}{\eta\mu 36^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 79^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 65^\circ}$

Άρα $\beta = \frac{20}{\eta\mu 36^\circ} \cdot \eta\mu 79^\circ$ ή $\beta \cong \frac{20}{0{,}58} \cdot 0{,}98$

$\cong 33{,}79$ cm.

και $\gamma = \dfrac{20}{\eta\mu 36°} \cdot \eta\mu 65°$ ή $\gamma \cong \dfrac{20}{0{,}58} \cdot 0{,}90$

$\cong 31$ cm.

β) Για τη γωνία Β έχουμε:

$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{\Gamma})$ ή

$\widehat{B} = 180° - (130° + 20°) = 30°$.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu 130°} = \dfrac{\beta}{\eta\mu 30°} = \dfrac{20}{\eta\mu 20°}$

Άρα $\alpha = \dfrac{20}{\eta\mu 20°} \cdot \eta\mu 130°$ ή

$\alpha = \dfrac{20}{\eta\mu 20°} \cdot \eta\mu(180° - 50°)$ ή

$\alpha = \dfrac{20}{\eta\mu 20°} \cdot \eta\mu 50°$ ή $\alpha \cong \dfrac{20}{0{,}34} \cdot 0{,}76 \cong$

$\cong 44{,}7$ cm

και $\beta = \dfrac{20}{\eta\mu 20°} \cdot \eta\mu 30°$ ή $\gamma \cong \dfrac{20}{0{,}34} \cdot 0{,}50$

$\cong 29{,}41$ cm.

4. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν:

$\widehat{A}=60°$, $\alpha=5$ cm και $\beta=3$ cm

Λύση

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ ή $\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \eta\mu A$ ή

$\eta\mu B = \dfrac{3}{5} \cdot \eta\mu 60°$ ή $\eta\mu B \cong 0{,}6 \cdot 0{,}86 \cong$

$\cong 0{,}51$ άρα $\widehat{B} \cong 31°$ και επειδή

$\eta\mu(180° - 31°) = \eta\mu 31°$ ισχύει

$\widehat{B} = 180° - 31° = 149°$ το οποίο όμως είναι

αδύνατο γιατί $\widehat{B} + \widehat{A} = 149° + 60° =$

$= 209° > 180°$, άρα $\widehat{B} = 31°$.

Επομένως $\widehat{\Gamma} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B})$ ή

$\widehat{B} = 180° - (60° + 31°) = 89°$.

Η δε πλευρά γ δίνεται από τη σχέση:

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή $\gamma = \dfrac{\alpha}{\eta\mu A} \cdot \eta\mu \Gamma$ ή

$\gamma = \dfrac{5}{\eta\mu 60°} \cdot \eta\mu 89°$ ή $\gamma = \dfrac{5}{0{,}85} \cdot 0{,}99 \cong$

$\cong 5{,}81$ cm.

5. Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν:

$\widehat{B}=25°$, $\beta=5$ cm και $\gamma=9$ cm.

Λύση

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ή $\dfrac{5}{\eta\mu 25°} = \dfrac{9}{\eta\mu \Gamma}$ ή

$\eta\mu \Gamma = \dfrac{9}{5} \cdot \eta\mu 25°$ ή $\eta\mu \Gamma \cong 1{,}8 \cdot 0{,}42 \cong$

$\cong 0{,}756$ άρα $\widehat{\Gamma} \cong 49°$ και επειδή

$\eta\mu(180° - \Gamma) = \eta\mu \Gamma$ ισχύει

$\widehat{\Gamma} = 180° - 49° = 131°$.

Άρα έχουμε δύο περιπτώσεις:

α) $\widehat{B} = 25°$, $\widehat{\Gamma} = 49°$ και

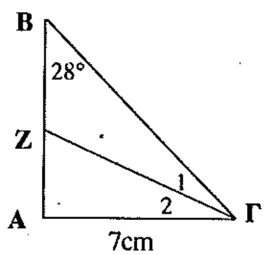
$\widehat{A} = 180° - (25° + 49°) = 106°$.

β) $\widehat{B} = 25°$, $\widehat{\Gamma} = 131°$ και

$\widehat{A} = 180° - (131° + 25°) = 24°$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) με γωνία Β = 28° και β = 7 cm. Να υπολογισθεί η διχοτόμος του ΓΖ καθώς και τα τμήματα ΖΒ και ΖΑ στα οποία χωρίζει την πλευρά ΑΒ.

Λύση



Επειδή ΑΒΓ ορθογώνιο έχουμε:

$ημB = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ή $ΒΓ = \frac{ΑΓ}{ημB} = \frac{7}{ημ28°} =$

$= \frac{7}{0,46} \cong 15$ cm.

Επίσης $\widehat{Γ} = 90° - \widehat{B} = 90° - 28° = 62°$

άρα $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2 = \frac{62°}{2} = 31°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ έχουμε:

$συνΓ_2 = \frac{ΑΓ}{ΓΖ}$ ή $ΓΖ = \frac{ΑΓ}{συνΓ_2} = \frac{7}{συν31°} =$

$= \frac{7}{0,85} \cong 8,2$ cm.

Στο τρίγωνο ΒΖΓ εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$\frac{ΖΓ}{ημ28°} = \frac{ΖΒ}{ημ31°}$ ή $\frac{8,2}{0,46} = \frac{ΖΒ}{0,51}$ ή

$ΖΒ = \frac{0,51 \cdot 8,2}{0,46}$ ή $ΖΒ = 9,09$ cm.

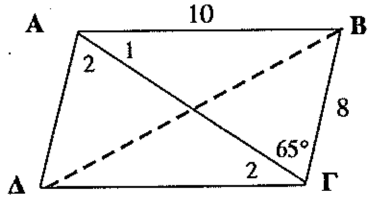
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ έχουμε:

$εφΓ_2 = \frac{ΖΑ}{ΑΓ}$ ή $ΖΑ = ΑΓ \cdot εφ\,Γ_2 =$

$= 7 \cdot εφ31° = 7 \cdot 0,6 \cong 4,2$ cm.

7. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 10 cm και ΒΓ = 8 cm. Αν η γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος ΑΓ με τη ΒΓ είναι 65°, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου του ΑΓ.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$\frac{ΑΒ}{ημΓ_1} = \frac{ΒΓ}{ημΑ_1}$ ή $\frac{10}{ημ65°} = \frac{8}{ημΑ_1}$ ή

$ημ\,Α_1 = \frac{8}{10} \cdot ημ65°$ ή $ημ\,Α_1 = \frac{8}{10} \cdot 0,9 \cong$

$\cong 0,72$ άρα $\widehat{Α_1} = 46°$.

Οπότε $\widehat{B} = 180° - (\widehat{Α_1} + \widehat{Γ_1}) =$

$= 180° - (65° + 46°) = 69°$.

$\frac{ΑΓ}{ημB} = \frac{ΑΒ}{ημΓ_1}$ ή $\frac{ΑΓ}{ημ69°} = \frac{10}{ημ65°}$ ή

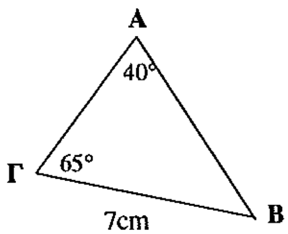
$ΑΓ = \frac{10}{ημ65°} \cdot ημ69°$ ή $ΑΓ = \frac{10}{0,9} \cdot 0,93$

$\cong 10,33$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ αν γωνία Α = 40°, γωνία Γ = 65° και ΒΓ = 7 cm.

Λύση

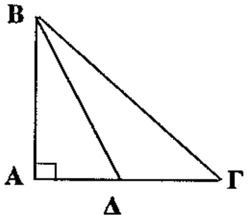


Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$\frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ}$ ή .....

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Γ = 32° και ΑΒ = 5 cm. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΒΔ. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΒΔΓ.

Λύση



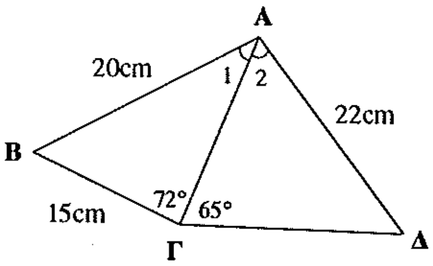
Είναι $ημΓ = \frac{AB}{BΓ}$ ή $BΓ = ...$

Είναι $\widehat{B} = 90° - \widehat{Γ} = ...$ άρα $\frac{\widehat{B}}{2} = ...$

και $συν\frac{B}{2} = \frac{AB}{BΔ} = ...$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΒΔΓ .....

3. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε: α) τη γωνία Β, β) την πλευρά ΑΓ και γ) τη γωνία Δ.



Λύση

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$$\frac{AB}{ημΓ_1} = \frac{BΓ}{ημA_1} \text{ ή } ημ\,A_1 = ...$$

Άρα $\widehat{A_1} = ...$ και $\widehat{B} = ...$

Και από το νόμο των ημιτόνων πάλι στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

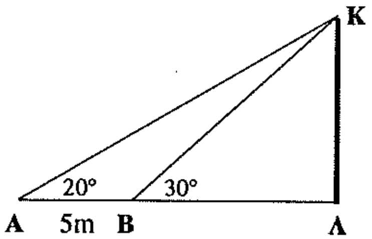
$$\frac{AΓ}{ημB} = \frac{AB}{ημΓ_1} \text{ ή } AΓ = ...$$

Και τέλος με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$\frac{AΓ}{ημΔ} = \frac{AΔ}{ημΓ_2} \text{ ή } ημΔ = \frac{AΓ}{AΔ} \cdot ημ\,Γ_2 \text{ ή}$$

$ημΔ = ...$

4. Να υπολογίσετε το ύψος ΚΛ του δένδρου αν παρατηρήσαμε την κορυφή του Κ από δύο σημεία Α και Β με γωνίες ύψους 20° και 30° αντίστοιχα. Η απόσταση ΑΒ είναι 5 m.



Λύση

Παρατηρούμε ότι $\widehat{ABK} = 180° - 30° =$

$= 150°$ άρα $\widehat{AKB} = ...$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΚ και έχουμε:

$$\frac{BK}{ημA} = \frac{AB}{ημAKB} \text{ ή } BK = \frac{AB}{ημAKB} \cdot ημA$$

ή $BK = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις πλευρές β και γ τριγώνου ΑΒΓ με α = 25 cm, γωνία Β = 50° και γωνία Γ = 30°.

2. Να υπολογισθούν οι γωνίες Α και Β τριγώνου ΑΒΓ με γωνία Γ = 25°, γ = 12 cm και α = 15 cm.

3. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\widehat{A}=25°$, $\widehat{B}=28°$ *και* $\beta=10$ *cm*

β) $\widehat{A}=110°$, $\widehat{B}=15°$ *και* $\beta=12$ *cm*

γ) $\widehat{A}=45°$, $\widehat{B}=85°$ *και* $\beta=18$ *cm*

4. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ με:

α) $\widehat{A}=50°$, $\alpha=20$ *cm και* $\beta=18$ *cm*

β) $\widehat{A}=65°$, $\alpha=15$ *cm και* $\beta=20$ *cm*

γ) $\widehat{A}=105°$, $\alpha=18$ *cm και* $\beta=22$ *cm*

5. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες τριγώνου ΑΒΓ με:

α) $\widehat{B}=27°$, $\beta=7$ *cm και* $\gamma=9$ *cm*

β) $\widehat{B}=30°$, $\beta=8$ *cm και* $\gamma=11$ *cm*

γ) $\widehat{B}=12°$, $\beta=9$ *cm και* $\gamma=13$ *cm*

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο (γωνία Α = 90°) με γωνία Β = 27° και β = 11 cm. Να υπολογίσετε τη διχοτόμο του ΓΖ καθώς και τα τμήματα στα οποία χωρίζει αυτή την πλευρά ΑΒ.

7. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Γ > 90° είναι γωνία Α = 22° και β = 15 cm. Αν το ύψος ΑΔ είναι 10 cm, να βρεθούν η πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΓΔ.

8. Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ με γωνία Β = 80°, β = 20 cm και γ = 12 cm.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 25 cm και ΒΓ = 20 cm. Αν η γωνία ΔΑΓ είναι 86°, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Γ = 47°, γωνία Β = 62° και γ = 7 cm. Να υπολογίσετε τη διχοτόμο του ΑΔ καθώς και τη ΔΕ όπου Ε το ίχνος της καθέτου ΔΕ προς την ΑΓ.

7.6 Νόμος συνημιτόνων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το νόμο των συνημιτόνων.

Απαντήσεις

1. Νόμος των συνημιτόνων: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

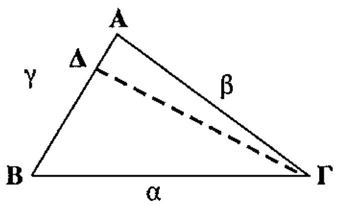
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$ ή

$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B$ ή

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΓΔ ύψος του.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε: $\alpha^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (1).

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta}$ ή $\Gamma\Delta = \beta\eta\mu A$ (2) και

$\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta}$ ή $A\Delta = \beta\sigma\upsilon\nu A$ (3).

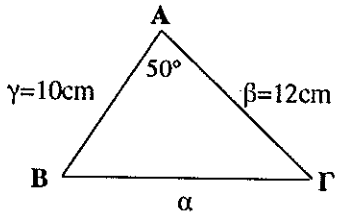
Άρα η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) γίνεται:

$\alpha^2 = (\gamma - \beta\sigma\upsilon\nu A)^2 + (\beta\eta\mu A)^2 = \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A + \beta^2\eta\mu^2 A =$
$= \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \beta^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \eta\mu^2 A) = \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \beta^2 \cdot 1 =$
$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες δύο προτάσεις για τις πλευρές β και γ.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η πλευρά α στο τρίγωνο ΑΒΓ.



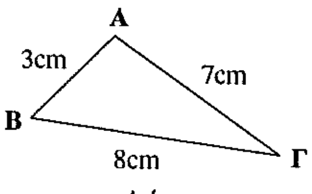
Λύση

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ ή
$\alpha^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 50°$ ή
$\alpha^2 = 144 + 100 - 240 \cdot 0{,}64$ ή
$\alpha^2 = 244 - 153{,}6$ ή
$\alpha^2 = 90{,}4$ ή

$\alpha = \sqrt{90{,}4} \cong 9{,}5$ cm.

2. Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ ή
$2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ ή

$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$ ή

$\sigma\upsilon\nu A = \frac{7^2 + 3^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{49 + 9 - 64}{42} =$

$= -\frac{6}{42} = -\dot{0}{,}14.$

Άρα συνΑ = - 0,14. Όμως από τους πίνακες η γωνία που έχει συνημίτονο 0,14 είναι η 82° περίπου.

Άρα συνΑ= -συν82°=-συν(180°-98°)= = - (- συν98°) = συν98°.

Άρα η γωνία Α είναι ίση με 98°.

Ομοίως για τη γωνία Β θα έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$ ή

$\sigma\upsilon\nu B = \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{64 + 9 - 49}{48} =$

$= \frac{24}{48} = 0{,}5$ δηλ. $\widehat{B} = 60°$.

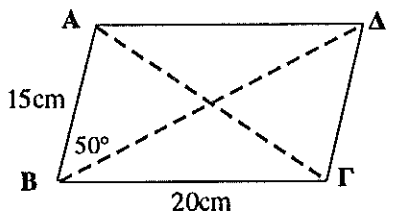
Και από τη σχέση $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$

έχουμε $\widehat{\Gamma} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) =$

$= 180^2 - (98° + 60°) = 180° - 158° = 22°.$

3. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 15 cm, ΒΓ = 20 cm και γωνία ΑΒΓ = 50°. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων για την πλευρά ΑΓ και έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συνΒ$ ή
$ΑΓ^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot συν50°$ ή
$ΑΓ^2 = 225 + 400 - 600 \cdot 0{,}64$ ή
$ΑΓ^2 = 625 - 384$ ή
$ΑΓ^2 = 241$ ή

$ΑΓ = \sqrt{241} \cong 15{,}5$ cm.

Η γωνία Α είναι παραπληρωματική γωνία της Β γιατί είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ και ΑΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

Άρα $\widehat{A} = 180° - 50° = 130°$.

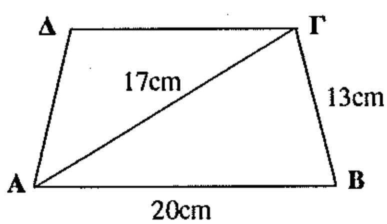
Επίσης ΑΔ = ΒΓ = 20 cm.
Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ και έχουμε:

$ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΔ \cdot συνΑ$ ή
$ΒΔ^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot συν130°$ ή
$ΒΔ^2 = 225 + 400 - 600 \cdot συν(180° - 50°)$ ή
$ΒΔ^2 = 625 - 600 \cdot (-συν50°)$ ή
$ΒΔ^2 = 625 + 600 \cdot 0{,}64$ ή
$ΒΔ^2 = 625 + 384$ ή
$ΒΔ^2 = 1009$ ή

$ΒΔ = \sqrt{1009} \cong 31{,}7$ cm.

4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ = 20 cm, ΑΓ = 17 cm και ΒΓ = 13 cm. Να υπολογισθούν οι γωνίες του.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων και έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συνΒ$ ή
$2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συνΒ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - ΑΓ^2$ ή

$$συνΒ = \frac{ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - ΑΓ^2}{2ΑΒ \cdot ΒΓ} \quad ή$$

$$συνΒ = \frac{20^2 + 13^2 - 17^2}{2 \cdot 20 \cdot 13} =$$

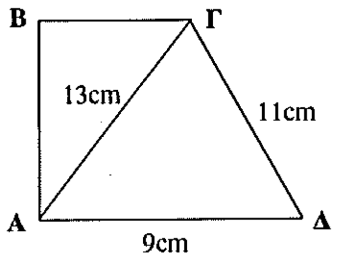
$$= \frac{400 + 169 - 289}{520} = \frac{280}{520} = 0{,}53.$$

Από πίνακες βρίσκουμε ότι η γωνία Β είναι ίση με 57,5° και επειδή οι γωνίες Β και Γ είναι παραπληρωματικές έχουμε:

$\widehat{Γ} = 180° - 57{,}5° = 122{,}5°$.

5. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με γωνίες Α και Β ορθές και ΑΔ = 9 cm, ΑΓ = 13 cm, ΔΓ = 11 cm. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΔΓ εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων και έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συνΔ$ ή
$2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συνΔ = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - ΑΓ^2$ ή

$$συνΔ = \frac{ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - ΑΓ^2}{2ΑΔ \cdot ΓΔ} \quad ή$$

$$συνΔ = \frac{9^2 + 11^2 - 13^2}{2 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{81 + 121 - 169}{198} =$$

$$= \frac{33}{198} = 0{,}166 \text{ δηλ. } \widehat{Δ} \cong 80°.$$

Και επειδή $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{Γ} + \widehat{Δ} = 360°$ έχουμε

$\widehat{Γ} = 360° - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{Δ}) =$

$= 360° - (90° + 90° + 80°) = 100°$.

6. Να εξηγήσετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι:
α) $A = 90°$ τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
β) $A > 90°$ τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
γ) $A < 90°$ τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$

Λύση

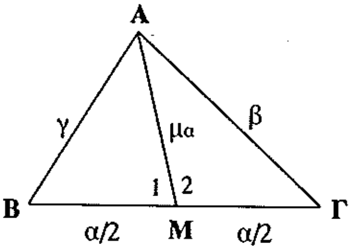
Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ (I).
α) Αν $A = 90°$ τότε $\sigma\upsilon\nu A = 0$ οπότε η (I) γίνεται: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.
β) Αν $A > 90°$ τότε $\sigma\upsilon\nu A < 0$ οπότε $-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A > 0$. Ελέγχουμε το πρόσημο της διαφοράς $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2)$ και έχουμε:
$\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) =$
$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A - (\beta^2 + \gamma^2) =$
$= -2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A > 0$.
Άρα $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) > 0$ ή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.
γ) Αν $A < 90°$ τότε $\sigma\upsilon\nu A > 0$ οπότε $-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A < 0$. Επομένως:
$\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) =$
$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A - (\beta^2 + \gamma^2) =$
$= -2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A < 0$.
Δηλαδή $\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2) < 0$ ή $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$.

7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

όπου μ_α η διάμεσος από την κορυφή Α (θεώρημα διαμέσων).

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ με

$\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180°$ και $MB = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΜΒ από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\mu_\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu M_1 \text{ ή}$$

$$\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \mu_\alpha \cdot \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu M_1 \text{ (I).}$$

Στο τρίγωνο ΑΜΓ από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\beta^2 = \mu_\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\mu_\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu M_2 \text{ ή}$$

$$\beta^2 = \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \mu_\alpha \cdot \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu M_2 \text{ (II).}$$

Από τις σχέσεις (I) και (II) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu M_1 +$$

$$+ \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu M_2 \text{ ή}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot (\sigma\upsilon\nu M_1 +$$

$$+ \sigma\upsilon\nu M_2) \text{ ή}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot [\sigma\upsilon\nu(180° -$$

$$- M_2) + \sigma\upsilon\nu M_2] \text{ ή}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot (-\sigma\upsilon\nu M_2 +$$

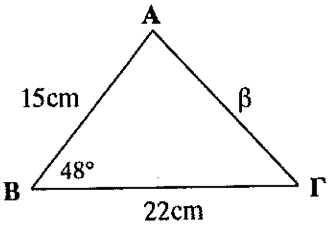
$$+ \sigma\upsilon\nu M_2) \text{ ή}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \cdot \mu_\alpha \cdot 0$$

άρα $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την πλευρά β του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

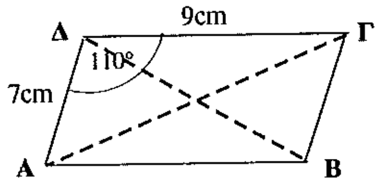
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ για την πλευρά β έχουμε: $\beta^2 = \ldots\ldots$

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ αν α = 6 cm, β = 7 cm και γ = 3 cm.

Λύση

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$ ή $\text{συν}A = \ldots$

3. Να υπολογίσετε τις διαγώνιους του παρακάτω παραλληλογράμμου.



Λύση

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΓ και υπολογίζουμε την ΑΓ.
$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot \text{συν}\Delta \ldots\ldots$

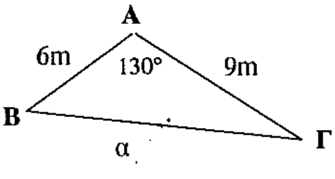
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε:
α) τη γωνία Α αν α = 10 cm, β = 12 cm και γ = 13 cm,
β) τη γωνία Β αν α = 7 cm, β = 9 cm και γ = 11 cm,
γ) τη γωνία Γ αν α = 3 cm, β = 4 cm και γ = 5 cm.

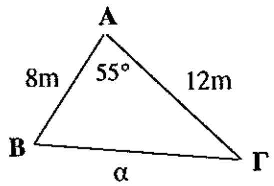
2. Σ' ένα τρίγωνο ΕΖΓ είναι ε = 17 cm, ζ = 13 cm και γ = 8 cm. Να υπολογίσετε τις γωνίες του.

3. Να υπολογίσετε την πλευρά α σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα.

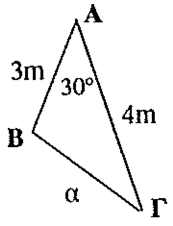
α)



β)



γ)



4. Να υπολογίσετε τις διαγωνίους ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ = 9 cm, ΒΓ = 14 cm και γωνία Β = 78°.

5. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 23 cm, ΒΓ = 30 cm και γωνία Α = 140°. Να υπολογίσετε τις διαγωνίους του.

6. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με γωνίες Α και Δ ορθές, ΑΒ = ΑΔ, ΓΔ = 17 cm και γωνία ΓΑΔ = 60°. Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

7. Να αποδειχθεί ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση βσυνΑ - ασυνΒ = 0 τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν οι επόμενες παραστάσεις:

$A = συν(90° - θ)\, ημθ + ημ(90° - θ) συνθ$

$B = εφ(90° - θ)\, εφθ + σφθ\, σφ(90° - θ)$

2. Αν $συνθ = -\frac{3}{5}$ *και* $180° \le θ \le 270°$, *να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{3(ημ^2θ + συνθ) - 2εφθ}{εφ^2θ + σφ^2θ}$$

3. Αν $ημθ = \frac{1}{4}$ *και* $90° \le θ \le 180°$, *να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{ημθ + συνθ - εφθ}{\frac{1}{συνθ} + \frac{1}{ημθ} - σφθ}$$

4. Αν $εφθ = -\frac{4}{3}$ *και* $270° \le θ \le 360°$, *να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{ημθ + συνθ - εφθ}{συνθ\,(1 - σφθ)}$$

5. Αν $σφθ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *και* $180° \le θ \le 270°$, *να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{εφ^2θ + σφ^2θ}{ημ^2θ - συν^2θ}$$

6. Αν $90° < θ < 180°$, *τότε να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημθ, συνθ, εφθ, σφθ αν είναι γνωστό ότι:* $ημθ = -2\, συνθ$.

7. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

α) $\frac{εφθ - ημθ}{ημ^3θ} = \frac{1}{(1 + συνθ)\, συνθ}$

β) $\frac{ημθ \cdot συνθ}{συν^2θ - ημ^2θ} = \frac{εφθ}{1 - εφ^2θ}$

8. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

α) $(1 + ημθ + συνθ)^2 = 2\,(1 + ημθ)(1 + συνθ)$

β) $\frac{ημθ}{1 - συνθ} = \frac{1}{ημθ} + σφθ$

γ) $\frac{1 - συνθ}{1 + συνθ} = \frac{(1 - συνθ)^2}{ημ^2θ}$

δ) $\frac{εφθ}{1 - σφθ} + \frac{σφθ}{1 - εφθ} = 1 + \frac{1}{ημθ\, συνθ}$

9. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α = 90°) να αποδειχθεί ότι ισχύει:

α) $ημ^2B \cdot συν^2B = \frac{β^2 \cdot γ^2}{α^4}$

β) $ημ^2B + ημ^2Γ = 1$

γ) $ημ^2Γ + εφB \cdot εφΓ = \frac{γ^2 + α^2}{α^2}$

δ) $συνB + συνΓ = \frac{ημB + ημΓ}{ημA}$

10. Να δειχθεί ότι:

$$(εφx - ημx)^2 + (1 - συνx)^2 = \left(\frac{1}{συνx} - 1\right)^2$$

11. *Για τις συναρτήσεις:*
$f(x) = 5ημ^2x - 3ημ^2x\ συν^2x + 2συν^2x$ *και* $g(x) = ημ^3x + συν^3x + ημx + συνx$ *να δειχθεί ότι:* $f(90° - x) = f(x)$ *και* $g(90° - x) = g(x)$.

12. *Να δειχθεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 90° ισχύει:* $(εφB + εφΓ) \cdot 2E = α^2$, *όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.*

13. *Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι 14 cm και* $14\sqrt{3}$ *cm. Να βρεθούν οι γωνίες του και η περίμετρός του.*

14. *Να βρεθούν οι πλευρές και το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ αν το ύψος του* $ΔΕ = 8\sqrt{3}$ *cm, η μικρότερη βάση ΔΓ = 10 cm και γωνία Α = 60° και γωνία Β = 45°.*

15. *Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και ΑΔ η διάμεσός του. Αν* $\widehat{ΑΔΒ} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$, *να αποδειχθεί ότι:* $σφΓ = σφB + 2σφ\dfrac{B}{2}$

16. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διάμεσός του. Αν ΑΒ = ΑΔ, να αποδειχθεί ότι: εφΒ = 3εφΓ.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

BASIC 10

Όπως σας είναι ήδη γνωστό το ημ, συν, εφ μιας γωνίας συμβολίζεται διεθνώς με sin, cos και tan.

Τα ίδια σύμβολα χρησιμοποιεί και η Basic. Π.χ. ημ50° = sin50°. Ορισμένοι όμως υπολογιστές καταλαβαίνουν τη γωνία μόνο αν είναι γραμμένη σε ακτίνια. Για το λόγο αυτό αν θελήσουμε να βρούμε το ημίτονο π.χ. μιας γωνίας 30°, πρέπει πρώτα να μετετρέψουμε τις μοίρες σε ακτίνια (πολλαπλασιάζοντας επί π/180).
Π.χ. Αν πληκτρολογήσουμε PRINT SIN(30*PI/180) και πατήσουμε ENTER ή RETURN τότε η οθόνη θα δείξει 0,5 που είναι το ημ30° (PI = π).

Αν τώρα γνωρίζουμε ένα τριγωνομετρικό αριθμό μιας γωνίας και θέλουμε να μάθουμε τις μοίρες ή τα ακτίνια της γωνίας αυτής πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:
ASN (Arc SiNe = τόξο ημιτόνου)
ACS (Arc CoSine = τόξο συνημιτόνου)
ATN (Arc TaNgent = τόξο εφαπτομένης)

Π.χ. ASN0,5 = $\frac{\pi}{6}$ ακτίνια ή

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°.$$

Ασκήσεις

1. Φτιάξτε πρόγραμμα όπου θα δίνουμε:
α) γωνία x σε μοίρες και ο υπολογιστής θα τις μετατρέπει σε ακτίνια και στη συνέχεια θα υπολογίζει το ημx, συνx και εφx,
β) το συνx ή ημx ή εφx και ο υπολογιστής θα μας δίνει τη γωνία x σε μοίρες και σε ακτίνια.
(Αφού το ετοιμάσετε αποθηκεύστε το χρησιμοποιώντας SAVE και κρατήστε το στο προσωπικό σας αρχείο).

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου θα δώσουμε εμείς τις πλευρές ενός τριγώνου και θα μας υπολογίζει -με τη βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων- τις γωνίες του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

Συστήματα

8.1 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Θεωρία

Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x και y, και πόσες λύσεις έχει;

1. Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και x, y οι άγνωστοι (μεταβλητές). Οι γραμμικές εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις που βρίσκονται στην ίδια ευθεία (γραφική παράσταση).

2. Τι λέγεται λύση ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους;

2. Λύση ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων $\alpha x + \beta y = \gamma$ και $\delta x + \varepsilon y = \zeta$ λέγεται το ζεύγος (ή τα ζεύγη) **(x, y)** που επαληθεύει συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις.

3. Πώς λύνουμε γραφικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους; Πότε είναι αδύνατο και πότε αόριστο;

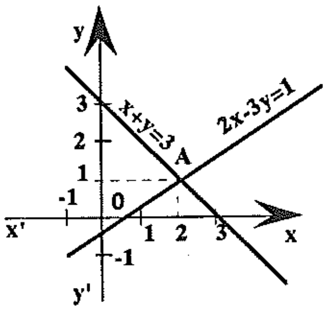
3. Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους εργαζόμαστε ως εξής:
Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων είναι οι λύσεις του συστήματος. Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων αυτών είναι ευθείες οπότε αν αυτές τέμνονται σε ένα σημείο το σύστημα έχει μία λύση, αν είναι παράλληλες το σύστημα δεν έχει λύση και λέγεται **αδύνατο** και αν συμπίπτουν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και λέγεται **αόριστο**.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Λύση

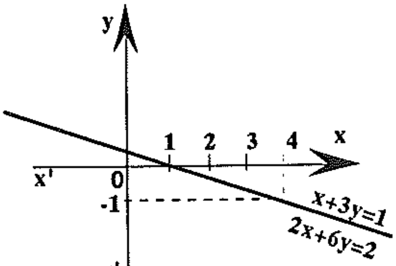


Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. Όπως γνωρίζουμε οι γραφικές παραστάσεις είναι δύο ευθείες γραμμές. Το σημείο τομής τους είναι το σημείο Α(2, 1).

2. Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 6y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Λύση



Σχεδιάζουμε, όπως προηγουμένως, τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων και παρατηρούμε ότι συμπίπτουν. Λέμε τότε ότι το σύστημα είναι αόριστο. Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.
Π.χ. τα ζεύγη (1, 0), (4, - 1), (7, - 2) είναι λύσεις του συστήματος.

<u>Παρατήρηση:</u>
Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \gamma \\ \delta x + \varepsilon y &= \zeta \end{aligned}\right\}$$

είναι αόριστο όταν είναι:

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{\gamma}{\zeta}$$

Στην προηγούμενη άσκηση το σύστημα που βγήκε αόριστο ήταν:

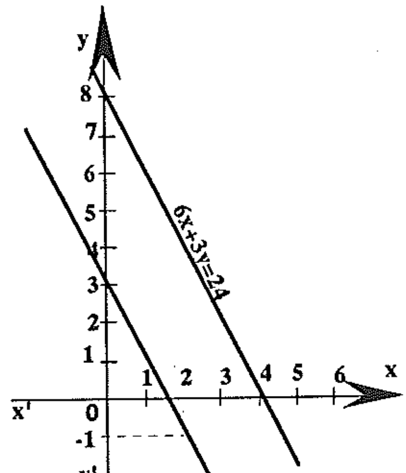
$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 6y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ οπότε:}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ή } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 6x + 3y &= 24 \end{aligned}\right\}$$

Λύση



Σχεδιάζουμε τις δύο εξισώσεις όπως προηγουμένως και βλέπουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι παράλληλες. Δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία τομής. Λέμε τότε ότι το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύση.

Παρατήρηση:
Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \gamma \\ \delta x + \varepsilon y &= \zeta \end{aligned}\right\}$$

είναι αδύνατο όταν είναι:

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\varepsilon} \neq \frac{\gamma}{\zeta}$$

Στην προηγούμενη άσκηση το σύστημα που βγήκε αδύνατο ήταν:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 6x + 3y &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \text{οπότε:}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{24} \text{ ή } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{8}.$$

B. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= -1 \\ x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Λύση

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων ......

2. Να επιλυθούν γραφικά τα συστήματα:

α) $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$ β) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 6x + 4y &= 10 \end{aligned}\right\}$

γ) $\left.\begin{aligned} 7x - y &= 2 \\ 21x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$ δ) $\left.\begin{aligned} 1/2x + 3/2y &= 1 \\ x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$

Λύση

Για τις τρεις πρώτες εργαζόμαστε κατά τα γνωστά.
Στην τέταρτη, για να απαλλαγούμε από τα κλάσματα της πρώτης εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί 2 οπότε έχουμε:

$$2 \cdot \frac{1}{2}x + 2 \cdot \frac{3}{2}y = 2 \cdot 1 \text{ ή } x + 3y = 2$$

Τώρα το σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

και το λύνουμε κατά τα γνωστά ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να επιλυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα των εξισώσεων:

α) $\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x &= 2 \end{aligned}\right\}$

β) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$

γ) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -14 \\ x + y &= 13 \end{aligned}\right\}$

2. Όμοια να επιλυθούν γραφικά τα συστήματα:

α) $\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 14 \\ 2x - y &= 18 \end{aligned}\right\}$

β) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y &= 3 \\ 2x + 3y &= 15 \end{aligned}\right\}$

γ) $\left.\begin{aligned} 0{,}4x + 0{,}3y &= 1{,}8 \\ 0{,}2x + 0{,}3y &= 0{,}6 \end{aligned}\right\}$

3. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω συστήματα είναι αόριστα και ποια αδύνατα.

α) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 6x + 4y &= 10 \end{aligned}\right\}$

β) $\left.\begin{aligned} x + 8y &= -3 \\ -3x - 24y &= 9 \end{aligned}\right\}$

γ) $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = 1 \\ 10x - 4y = 3 \end{array}\right\}$

δ) $\left.\begin{array}{l} x + y = -1 \\ 5x + 5y = -8 \end{array}\right\}$

ε) $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ -3x - 9y = 1 \end{array}\right\}$

στ) $\left.\begin{array}{l} -1/2x + 3/5y = 1 \\ -5x + 6y = 10 \end{array}\right\}$

8. 2 Αλγεβρική επίλυση συστημάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Τι ονομάζουμε αλγεβρική λύση (επίλυση) ενός συστήματος και γιατί την προτιμούμε από τη γραφική λύση;

1. Αλγεβρική λύση (επίλυση) ενός συστήματος είναι ο τρόπος λύσης ενός συστήματος, που στηρίζεται σε πράξεις και υπολογισμούς και όχι στη γραφική παράσταση των εξισώσεων.
Η αλγεβρική λύση προτιμάται από τη γραφική γιατί η δεύτερη δεν μας οδηγεί πάντοτε στην ακριβή λύση ενός συστήματος, αφού μπορεί να παρουσιαστούν σφάλματα κατά τη σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων.

2. Ποιες είναι οι κυριότερες μέθοδοι για την αλγεβρική επίλυση ενός συστήματος και τι προσπαθούμε να πετύχουμε μ' αυτές για να φτάσουμε στη λύση;

2. Οι κυριότερες μέθοδοι αλγεβρικής επίλυσης ενός συστήματος είναι η **μέθοδος της αντικατάστασης** και η **μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών.** Με τις μεθόδους αυτές προσπαθούμε να απαλείψουμε τον ένα από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε μία εξίσωση πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο. Οι μέθοδοι της αντικατάστασης και των αντιθέτων συντελεστών περιγράφονται παρακάτω στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα:
$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{array}\right\}$
με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λύση

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο. Την τιμή αυτού του αγνώστου την αντικαθιστούμε στη δεύτερη, οπότε παίρνουμε εξίσωση πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο.

Παίρνουμε λοιπόν π.χ. την πρώτη εξίσωση $2x + y = 5$ και τη λύνουμε π.χ. ως προς y. Έχουμε:
$y = 5 - 2x$ (1)
Αντικαθιστούμε την τιμή του y στη δεύτερη εξίσωση $x - y = 7$. Έχουμε λοιπόν: $x - (5 - 2x) = 7$.
Αυτή έχει άγνωστο μόνο το x, οπότε τη λύνουμε κανονικά ως προς x. Έχουμε:
$x - 5 + 2x = 7$ ή
$x + 2x = 7 + 5$ ή
$3x = 12$ ή
$x = 4$
Την τιμή αυτή του x την αντικαθιστούμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος.. Είναι πιο εύκολο να αντικαταστήσουμε στην (1).
Έχουμε λοιπόν:
$y = 5 - 2 \cdot 4$ ή
$y = 5 - 8$ ή
$y = - 3$
Άρα η λύση του συστήματος είναι:
$x = 4$, $y = - 3$.
Αν θέλουμε να βεβαιωθούμε για τη λύση που βρήκαμε, μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση. Αντικαθιστούμε τις τιμές $x = 4$ και $y = - 3$ στις εξισώσεις του συστήματος. Έχουμε:
$2 \cdot 4 + (- 3) = 5$ ή $8 - 3 = 5$
$4 - (- 3) = 7$ ή $4 + 3 = 7$.

2. Να λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{3x-19}{5} = 8 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Λύση

Κάνουμε απαλειφή παρονομαστών και στις δύο εξισώσεις πολλαπλασιάζοντας την πρώτη επί 10 και τη δεύτερη επί 6. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \cdot \dfrac{x - y}{2} - 10 \cdot \dfrac{3x - 19}{5} = 10 \cdot 8 \\ 6 \cdot \dfrac{x}{2} - 6 \cdot \dfrac{y}{3} = 6 \cdot \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5(x - y) - 2(3x - 19) = 80 \\ 3x - 2y = 10 \end{array}\right\} \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 5y - 6x + 38 = 80 \\ 3x - 2y = 10 \end{array}\right\} \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} - x - 5y = 80 - 38 \\ 3x - 2y = 10 \end{array}\right\} \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} - x - 5y = 42 \\ 3x - 2y = 10 \end{array}\right\} \text{ ή}$$

Λύνουμε τώρα την πρώτη ως προς x.
Έχουμε:
$- x = 42 + 5y$ ή $x = - 42 - 5y$ (1)
Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη δεύτερη και έχουμε:
$3(- 42 - 5y) - 2y = 10$ ή
$- 126 - 15y - 2y = 10$ ή
$- 17y = 10 + 126$ ή
$- 17y = 136$ ή
$y = - 8$
Θέτουμε στην (1) όπου y το - 8 και παίρνουμε:
$x = - 42 - 5 \cdot (- 8)$ ή $x = - 42 + 40$ ή
$x = - 2$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι:
$x = - 2$, $y = - 8$.

3. Να λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 7x - 2y = 8 \end{array}\right\}$$

Λύση

Λύνουμε ως προς x την πρώτη εξίσωση.
$2x + 3y = 5$ ή $2x = 5 - 3y$ ή

$$x = \frac{5 - 3y}{2} \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του x, στη δεύτερη και έχουμε:

$7 \cdot \dfrac{5 - 3y}{2} - 2y = 8$ ή

$\dfrac{35 - 21y}{2} - 2y = 8$ ή

$2 \cdot \dfrac{35 - 21y}{2} - 2 \cdot 2y = 2 \cdot 8$ ή

$35 - 21y - 4y = 16$ ή
$-25y = 16 - 35$ ή
$-25y = -19$ ή

$$y = \frac{19}{25}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του y στην (1).

$$x = \frac{5 - 3 \cdot \frac{19}{25}}{2} \text{ ή } x = \frac{\frac{5}{1} - \frac{57}{25}}{2} \text{ ή}$$

$$x = \frac{\frac{125 - 57}{25}}{2} \text{ ή } x = \frac{\frac{68}{25}}{2} \text{ ή } x = \frac{68}{100}$$

4. Να λυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α) $\left.\begin{aligned} 5x + y &= 2 \\ 10x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$

β) $\left.\begin{aligned} x &= 5 - 3y \\ 7x + 21y &= 10 \end{aligned}\right\}$

Λύση

α) Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y.
$5x + y = 2$ ή $y = 2 - 5x$
Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του y στη δεύτερη.
$10x + 2(2 - 5x) = 4$ ή
$10x + 4 - 10x = 4$ ή
$10x - 10x = 4 - 4$ ή
$0x = 0$ αόριστη
Άρα το σύστημα είναι αόριστο δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. Αυτό μπορούσαμε να το βρούμε και από τους συντελεστές, δηλ.

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ ή } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Τη μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος μπορούμε να τη βρούμε επιλύοντας τη μία εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και χρησιμοποιώντας τον άλλο σαν παράμετρο. Δηλαδή από την πρώτη εξίσωση έχουμε: $y = 2 - 5x$. Οπότε οι άπειρες λύσεις βρίσκονται από τα ζεύγη $(x, 2 - 5x)$ για κάθε x που ανήκει στο R.

β) Η πρώτη εξίσωση είναι λυμένη ως προς x.
Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη δεύτερη και έχουμε:
$7(5 - 3y) + 21y = 10$ ή
$35 - 21y + 21y = 10$ ή
$-21y + 21y = 10 - 35$ ή
$0y = -25$ αδύνατη
Άρα το σύστημα είναι αδύνατο. Αυτό μπορούσαμε να το βρούμε και από τους συντελεστές, δηλ.

$$\frac{1}{7} = \frac{3}{21} \neq \frac{5}{10} \text{ ή } \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \neq \frac{1}{2}.$$

5. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα:

α) $\left.\begin{aligned} 4x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= -21 \end{aligned}\right\}$

β) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ -4x + 5y &= -17 \end{aligned}\right\}$

γ) $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$

Λύση

α) Επιλέγουμε ποιον από τους δύο αγνώστους θα απαλείψουμε. Έστω τον x. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το συντελεστή που έχει ο x στη δεύτερη εξίσωση, δηλαδή τον 3 και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος με τον αντίθετο του συντελεστή που έχει ο x στην πρώτη εξίσωση, δηλαδή τον - 4.
Οι παραπάνω εργασίες φαίνονται σχηματικά ως εξής:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4x + y = 5 \\ -4 & 3x - 2y = -21 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} 12x + 3y &= 15 \\ -12x + 8y &= 84 \end{aligned}$$

Προσθέτουμε κατόπιν, τις δύο εξισώσεις που προέκυψαν κατά μέλη, οπότε απαλείφεται ο x. Έχουμε:

$$\begin{array}{r} \cancel{12x} + 3y = 15 \\ -\cancel{12x} + 8y = 84 \\ \hline 11y = 99 \end{array} \; +$$

Λύνουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε το y. Είναι:
$11y = 99$ ή $y = 99/11$ ή $y = 9$.
Αντικαθιστούμε την τιμή του $y = 9$ στην πρώτη ή τη δεύτερη εξίσωση του αρχικού συστήματος και υπολογίζουμε το x. Εδώ αντικαθιστούμε στην πρώτη οπότε έχουμε:
$4x + 9 = 5$ ή $4x = 5 - 9$ ή $4x = -4$

ή $x = -1$
Άρα η λύση του συστήματος είναι:
$x = -1,\ y = 9$.

<u>Παρατήρηση:</u>
Κατά το πρώτο στάδιο της επίλυσης είδαμε ότι πολλαπλασιάσαμε τη δεύτερη εξίσωση με τον αντίθετο του συντελεστή του x στην πρώτη εξίσωση, δηλαδή το - 4.
Πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν έχει σημασία ποιου από τους δύο συντελεστές θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίθετο.
Μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει το - 3 και να πολλαπλασιάζαμε την πρώτη εξίσωση με αυτόν. Τότε όμως θα είχαμε πολλαπλασιάσει τη δεύτερη εξίσωση με το 4 και όχι το-4.

β) Κάνουμε την προηγούμενη εργασία.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2x + y = 5 \\ 2 & -4x + 5y = -17 \end{array}$$

Αν οι δύο συντελεστές απλοποιούνται με κατάλληλο αριθμό, όπως εδώ που απλοποιούνται με το 2, μπορούμε να κάνουμε την απλοποίηση, για να διευκολυνθούμε στις πράξεις που ακολουθούν.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2x + y = 5 \\ 1 & -4x + 5y = -17 \end{array} \quad ή \quad \begin{array}{r} \cancel{4x} + 2y = 10 \\ \underline{-\cancel{4x} + 5y = -17} \\ 7y = -7 \end{array}$$

ή $y = -1$
Αντικαθιστούμε π.χ. στην πρώτη εξίσωση όπου y το - 1 και παίρνουμε:
$2x - 1 = 5$ ή $2x = 6$ ή $x = 3$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι:
$x = 3,\ y = -1$.

γ) Εδώ παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του y στις δύο εξισώσεις είναι αντίθετοι, άρα μπορούμε με μια απλή πρόσθεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη να απαλείψουμε τον y. Έχουμε:

$$\begin{array}{l} x + \cancel{y} = 3 \\ \underline{3x - \cancel{y} = 5} \\ 4x = 8 \quad ή \quad x = 2 \end{array}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του x στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:
$2 + y = 3$ ή $y = 3 - 2$ ή $y = 1$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι:
$x = 2,\ y = 1$.

5. Να βρεθούν δύο αριθμοί που το διπλάσιο του ενός αυξημένο κατά το τριπλάσιο του άλλου είναι ίσο με -4, ενώ το άθροισμά τους είναι ίσο με 1.

Λύση

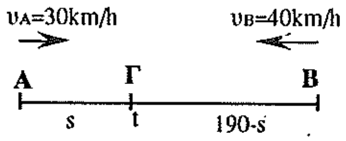
Ονομάζουμε x και y τους δύο ζητούμενους αριθμούς. Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι:
$2x + 3y = -4$
$x + y = 1$
Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο π.χ. των αντιθέτων συντελεστών.

$$\begin{array}{r|l} -1 & 2x + 3y = -4 \\ 2 & x + y = 1 \end{array} \quad ή \quad \begin{array}{r} -\cancel{2x} - 3y = 4 \\ \underline{\cancel{2x} + 2y = 2} \\ -y = 6 \end{array} \quad ή$$

$y = -6$
Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση όπου y το - 6 και έχουμε:
$x - 6 = 1$ ή $x = 1 + 6$ ή $x = 7$.
Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 7 και - 6.

6. Δύο πόλεις Α και Β βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και απέχουν μεταξύ τους 190 χιλιόμετρα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α με κατεύθυνση προς την πόλη Β και με ταχύτητα 30 km/h. Μισή ώρα αργότερα, ένα άλλο αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Β με κατεύθυνση προς την πόλη Α με ταχύτητα 40 km/h. Σε πόση ώρα από την αναχώρηση του πρώτου θα συναντηθούν τα δύο αυτοκίνητα και σε πόση απόσταση από την πόλη Α;

Λύση



Ας υποθέσουμε ότι τα δύο αυτοκίνητα θα συναντηθούν μετά από t ώρες, από την αναχώρηση του πρώτου στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα, που απέχει s χιλιόμετρα από την πόλη Α. Τότε το δεύτερο αυτοκίνητο θα έχει κινηθεί (t - 0,5)h (μισή ώρα αργότερα ξεκίνησε) και θα έχει διανύσει 190 - s χιλιόμετρα.
Από το γνωστό τύπο ταχύτητα = διάστημα/χρόνο έχουμε για τα δύο αυτοκίνητα.

Για το πρώτο: $30 = \frac{s}{t}$ (1)

Για το δεύτερο: $40 = \frac{190 - s}{t - 0,5}$ (2)

Από την (1) έχουμε: $s = 30t$ και από τη (2) έχουμε:

$40(t - 0,5) = 190 - s$ ή
$40t - 20 = 190 - s$ ή
$40t + s = 190 + 20$ ή
$40t + s = 210$

Έχουμε επομένως το σύστημα:

$\left.\begin{array}{l} s = 30t \\ 40t + s = 210 \end{array}\right\}$ ή

$\left.\begin{array}{l} s = 30t \\ 40t + 30t = 210 \end{array}\right\}$ ή $\left.\begin{array}{l} s = 30t \\ 70t = 210 \end{array}\right\}$ ή

$\left.\begin{array}{l} s = 30t \\ t = 3 \end{array}\right\}$ ή $\left.\begin{array}{l} s = 30 \cdot 3 \\ t = 3 \end{array}\right\}$ ή

$s = 90$
$t = 3$

(Το σύστημα λύθηκε με τη μέθοδο της αντικατάστασης)

Άρα τα αυτοκίνητα θα συναντηθούν 3 ώρες μετά την αναχώρηση του πρώτου, σε σημείο που απέχει 90 km από την πόλη Α.

7. Το εμβαδόν ενός τετραγωνικού οικοπέδου είναι κατά 39 m² μεγαλύτερο από το εμβαδόν ενός άλλου όμοιου οικοπέδου. Αν η πλευρά του πρώτου είναι κατά 1 m μεγαλύτερη της πλευράς του δεύτερου, να βρείτε τα μήκη των πλευρών των δύο οικοπέδων.

Λύση

Ονομάζουμε x την πλευρά του πρώτου και y την πλευρά του δεύτερου οικοπέδου.

Τότε το εμβαδόν του πρώτου είναι x^2 και του δεύτερου y^2. Συμφωνα με το πρόβλημα είναι:

$x^2 = y^2 + 39$ και
$x = y - 1$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα που μόνο η δεύτερη εξίσωση του είναι γραμμική. Το λύνουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Η πρώτη εξίσωση δίνει αν θέσουμε όπου x το y - 1:

$(y - 1)^2 = y^2 + 39$ ή
$y^2 - 2y + 1 = y^2 + 39$ ή
$-2y = 39 - 1$ ή
$-2y = 38$ ή
$y = 19$.

Άρα η πλευρά του δεύτερου είναι 19 m. Αντικαθιστούμε την τιμή του y στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος οπότε $x = 19 + 1 = 20$ m είναι η πλευρά του πρώτου οικοπέδου.

Παρατήρηση:

Όταν έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους εκ των οποίων η μία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και η άλλη πρώτου τότε το λύνουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λύνουμε πρώτα την πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και το αντικαθιστούμε στη δευτεροβάθμια.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να επιλυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

α) $3x + 7y = 4$
$\quad x + 2y + 1 = 0$

β) $y - (7x + 3) = 0$
$\quad y - (2x + 5) = 0$

Λύση

α) Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς x και αντικαθιστούμε στην πρώτη την τιμή του x που βρίσκουμε.

Έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} x = -2y - 1 \\ 3(-2y - 1) + 7y = 4 \end{array}\right\}$ ή ....

β) Όμοια ......

2. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα:

2. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα:

α) $4\varphi + 4\omega = 3$
$4\varphi + 6\omega = 5$

β) $x - y = 5$
$2x + 5y = 10$

Λύση

α) Έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} -1 & 4\varphi + 4\omega = 3 \\ +1 & 4\varphi + 6\omega = 5 \end{array}\Bigg\} \text{ ή}$$

$$\begin{array}{r} -4\varphi - 4\omega = -3 \\ 4\varphi + 6\omega = 5 \\ \hline 2\omega = 2 \end{array} \; + \; .....$$

β) Όμοια ......

3. Να λυθεί το σύστημα:
$(x - 3)(x - 2) = 0$
$x - 3y = 1$

Λύση

Στην πρώτη εξίσωση έχουμε ένα γινόμενο ίσο με 0. Άρα ή ο πρώτος όρος ή ο δεύτερος ή και οι δύο θα είναι ίσοι με το 0. Δηλαδή:
$x - 3 = 0$ ή $x - 2 = 0$ άρα
$x = 3$ ή $x = 2$
Για $x = 3$ η δεύτερη εξίσωση δίνει:
$3 - 3y = 1$ ή $-3y = 1 - 3$ ή
$-3y = -2$ ή $y = 2/3$
Άρα μία λύση του συστήματος είναι:
$x = 3$, $y = 2/3$.
Για $x = 2$ η δεύτερη εξίσωση του συστήματος δίνει:
$2 - 3y = 1$ ή $-3y = 1 - 2$ ......

4. Να λυθεί το σύστημα:
$x + y + 1 = 0$
$3x^2 - 5y^2 - 7 = 0$

Λύση

Λύνουμε την πρώτη ως προς x και αντικαθιστούμε στη δεύτερη οπότε προκύπτει ένα τριώνυμο με μεταβλητή y. Το λύνουμε με τον τύπο:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

και βρίσκουμε $y = 1$, $y = 2$ .....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α) $2x - 3y = 34$
$-5x + y = -33$

β) $2(3x - y) - 3(y - x) = 21$

$$\frac{2x+4y}{5} + \frac{3x-y}{3} = 2y+1$$

2. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $x + 3\varphi = 1$
$2x + \varphi - 26 = 0$

β) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$

$\frac{y}{2} + 19 = 2 - x$

3. Να προσδιοριστούν οι τιμές των μ και ν ώστε η εξίσωση $x^2 - (3\mu - 4)x - 2\nu = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και - 5.

4. Για ποιες τιμές του μ τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα;

α) $\mu x + \mu y = 1$
$3x + 2y = -5$

β) $(\mu + 2)x + (\mu - 7)y = 7$
$4x - 5y = 8 + \mu$

5. Για ποιες τιμές του λ τα παρακάτω συστήματα είναι αόριστα:

α) $x + \lambda y = 2$
$\lambda x - 4\lambda y = 3\lambda + 4$

β) $\lambda x + y = 1$
$x + 4y = 16\lambda$

6. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α) $A(1, 3)$ ***και*** $B(3, 7)$

β) $A(2, -2)$ ***και*** $B(-1, 7)$

7. Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{2}$$

$2x + 3y + 4\omega = 52$

8. Για ποιες τιμές των α και β το σύστημα:
$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = 15$
$(2\alpha - 3\beta)x + (2\alpha - 5\beta)y = \alpha + 2\beta$
έχει τη λύση $x = 3$, $y = -7$.

9. Να βρεθεί ένα κλάσμα τέτοιο ώστε αν προσθέσουμε τη μονάδα και στους δύο όρους του να γίνεται ίσο με 2/3 ενώ αν αφαιρέσουμε το δύο από τους όρους του να γίνεται ίσο με 1/2.

10. Δύο αυτοκίνητα που απέχουν μεταξύ τους 36 χιλιόμετρα αναχωρούν ταυτόχρονα από δύο σημεία Α και Β κινούμενα πάνω στην ευθεία ΑΒ. Τα αυτοκίνητα αυτά συναντιούνται μετά 4 ώρες, αν κινούνται αντίθετα και μετά από 8 ώρες αν κινούνται προς την ίδια φορά. Να βρείτε τις ταχύτητές τους.

11. Να λυθεί το σύστημα:
$x + y = 6$
$x^2 - y^2 = 18$

12. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $2x + y = 1$
$x^2 + y^2 = 5$

β) $x - 2y = 3$
$x^2 + y^2 - xy = 7$

8.3 Γραμμικές ανισώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

***1.** Τι ονομάζουμε γραμμική ανίσωση;*

1. Κάθε ανίσωση που έχει μορφή: $\alpha x + \beta y \geq \gamma$ ή $\alpha x + \beta y \leq \gamma$ λέγεται **γραμμική ανίσωση.**

***2.** Πώς λύνουμε μια γραμμική ανίσωση;*

2. Για να λύσουμε μία γραμμική ανίσωση που έχει μορφή π.χ. $\alpha x + \beta y \leq \gamma$ εργαζόμαστε ως εξής:

Σχεδιάζουμε την ευθεία που έχει εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$. Η ευθεία αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη που τα λέμε **ημιεπίπεδα.** Τα σημεία του ενός από τα δύο αυτά ημιεπίπεδα, αποτελούν τις λύσεις της ανίσωσης.
Για να βρούμε ποιο από αυτά είναι το ζητούμενο παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο σ' ένα από τα δύο ημιεπίπεδα (όχι όμως σημείο της ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$), που έχει συντεταγμένες (x_0, y_0). Αν οι συντεταγμένες αυτές επαληθεύουν την ανίσωση, το ημιεπίπεδο από το οποίο πήραμε το σημείο είναι το ζητούμενο, διαφορετικά είναι το άλλο.

<u>Παρατήρηση:</u>
Αν η ανίσωση περιέχει και ισότητα, στο ζητούμενο ημιεπίπεδο συμπεριλαμβάνουμε και τα σημεία της ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$, διαφορετικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι το ημιεπίπεδο που εντοπίσαμε χωρίς τα σημεία της παραπάνω ευθείας.

3. Πώς λύνουμε ένα σύστημα δύο ή περισσοτέρων γραμμικών ανισώσεων;

3. Για να λύσουμε ένα σύστημα δύο ή περισσοτέρων γραμμικών ανισώσεων κάνουμε τα εξής:
α) Λύνουμε (γραφικά) στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων κάθε μία από τις ανισώσεις όπως ήδη γνωρίζουμε.
β) Προσπαθούμε να εντοπίσουμε την περιοχή του επιπέδου που αποτελείται από ζευγάρια (x, y) τα οποία είναι συγχρόνως λύσεις για όλες τις ανισώσεις.

4. Ποια προβλήματα λέγονται προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού;

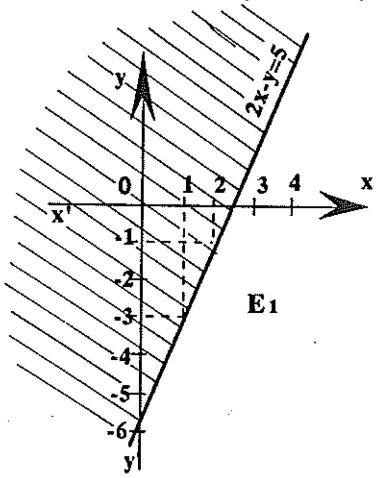
4. Προβλήματα στα οποία ζητάμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή μιας παράστασης αx + βy, όταν οι μεταβλητές x και y, ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς, λέγονται **προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.**

Οι περιορισμοί που αναφέραμε στα παραπάνω προβλήματα εκφράζονται με ανισώσεις οπότε αυτά ανάγονται στη λύση συστημάτων με ανισώσεις.
Στις ασκήσεις που ακολουθούν αναλύεται η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, δηλαδή επίλυσης συστημάτων ανισώσεων και προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Α. Λυμένες ασκήσεις

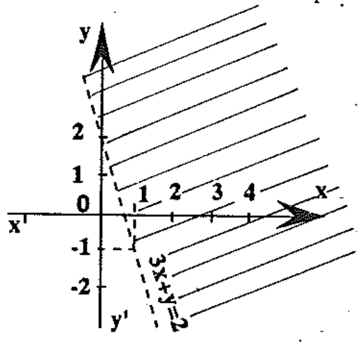
1. Να επιλυθούν οι ανισώσεις:
α) $2x - y \geq 5$, β) $3x + y < 2$, γ) $x \geq 0$, δ) $y \leq 3$, ε) $y < 0$.

Λύση



α) Σχεδιάζουμε πρώτα την ευθεία: 2x - y = 5. Η ευθεία αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα που στο σχήμα είναι άσπρο (E_1) και γραμμοσκιασμένο.

Παίρνουμε το σημείο Ο με συντεταγμένες (0, 0). Αντικαθιστούμε στην ανίσωση τις συντεταγμένες αυτές οπότε έχουμε:
$2 \cdot 0 - 0 \geq 5$ ή $0 \geq 5$ ψευδής.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης δεν είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου στο οποίο ανήκει το Ο(0, 0), αλλά τα σημεία του άλλου ημιεπιπέδου, δηλαδή του χρωματισμένου με άσπρο (E_1).



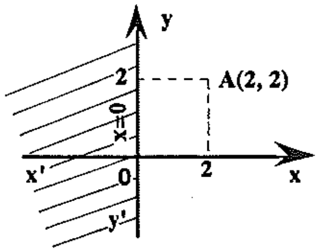
β) Εργαζόμαστε όμοια.
Η ευθεία 3x + y = 2 φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Παίρνουμε το ση-

μείο O(0, 0) και αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες 0, 0 στην ανίσωση. Έχουμε:

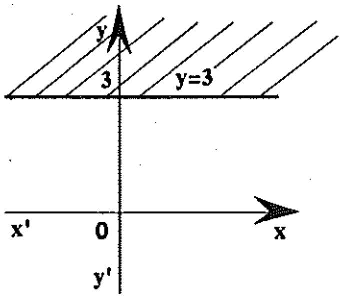
$3 \cdot 0 + 0 < 2$ ή $0 < 2$ αληθής.

Άρα το ημιεπίπεδο που περιέχει το O είναι το ζητούμενο.

<u>Παρατήρηση:</u>
Επειδή η ανίσωση δεν περιέχει ισότητα, τα σημεία της ευθείας 3x+y=2 δεν αποτελούν λύση της ανίσωσης: 3x + y > 2. Γι' αυτό στο σχήμα η ευθεία σημειώνεται διακεκομένα.



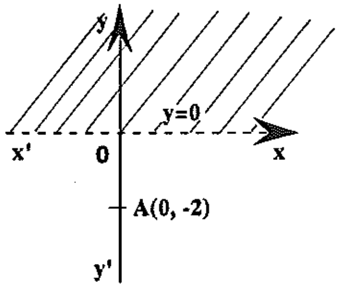
γ) Σχεδιάζουμε την ευθεία x = 0 που είναι ως γνωστόν ο άξονας y'y. Παίρνουμε το σημείο A(2, 2) και θέτουμε στην ανίσωση x = 2, y = 2.
(Η ανίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί $x + 0y \geq 0$).
Έχουμε: $2 + 0 \cdot 2 \geq 0$ ή $2 \geq 0$ αληθής.
Άρα το ημιεπίπεδο που περιέχει το σημείο A είναι το ζητούμενο.



δ) Σχεδιάζουμε την ευθεία y = 3 που είναι ως γνωστόν ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x στο σημείο (0, 3). Παίρνουμε το σημείο O(0, 0) και θέτουμε στην ανίσωση x = 0, y = 0.
(Η ανίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί $0x + y \leq 3$). Έτσι έχουμε:

$0 \cdot 0 + 0 \leq 3$ ή $0 \leq 3$ αληθής.

Άρα το ημιεπίπεδο που περιέχει το O είναι το ζητούμενο.

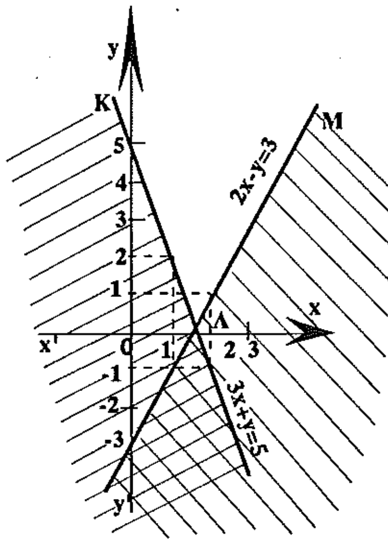


ε) Εργαζόμαστε όμοια και παίρνουμε το διπλανό σχήμα. Η ευθεία y = 0 είναι ο άξονας x'x. Η ανίσωση έχει μορφή 0x + y < 0. Το σημείο A(0, - 2) επαληθεύει την ανίσωση, άρα το ημιεπίπεδο που περιέχει το A είναι το ζητούμενο.

2. Να λυθεί το σύστημα των ανισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y \leq 3 \\ 3x + y \geq 5 \end{array}\right\}$$

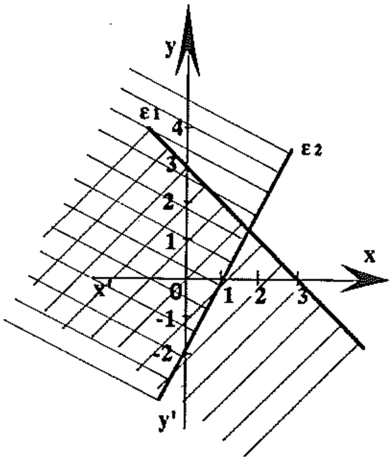
Λύση



Λύνουμε χωριστά κάθε μία από τις ανισώσεις του συστήματος, σχεδιάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που έχουν εξισώσεις 2x - y = 3 και 3x + y = 5. Η σχεδίαση γίνεται όπως έχουμε μάθει σε προηγούμενες παραγράφους. Εντοπίζουμε κατόπιν το ημιεπίπεδο που είναι η λύση για κάθε ανίσωση και γραμμοσκιάζουμε εκείνο που δεν περιέχει τις λύσεις αυτές.

Η τομή των δύο ημιεπιπέδων που περιέχουν τις λύσεις της μιας και της άλλης ανίσωσης είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος.
Οι εργασίες αυτές φαίνονται στο σχήμα. Οι λύσεις του συστήματος είναι οι συντεταγμένες όλων των σημείων που βρίσκονται στη γωνία ΚΛΜ, γιατί οι συντεταγμένες αυτές επαληθεύουν ταυτόχρονα και τις δύο ανισώσεις. Πράγματι, τα σημεία αυτά ανήκουν ταυτόχρονα στο αντίστοιχο ημιεπίπεδο που περιέχει τις λύσεις της κάθε ανίσωσης του συστήματος.

3. Να βρείτε το σύστημα των ανισώσεων που παριστάνει το παρακάτω σχήμα.



Λύση

Η ευθεία ε_1 παριστάνει μία συνάρτηση που έχει μορφή $y = \alpha x + \beta$. Αφού διέρχεται από τα σημεία με συντεταγμένες (3, 0), (0, 3) θα επαληθεύεται από τους αριθμούς αυτούς. Έχουμε λοιπόν:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha \cdot 3 + \beta \\ 3 = \alpha \cdot 0 + \beta \end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 3 \end{array}\right\} \text{ ή }$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\alpha + 3 = 0 \\ \beta = 3 \end{array}\right\} \text{ ή } \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{array}$$

Άρα η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση την
$y = -x + 3$ ή $x + y = 3$. Παρατηρούμε ότι το σημείο O(0, 0) βρίσκεται στο γραμμοσκιασμένο ημιεπίπεδο, άρα δεν επαληθεύει την ανίσωση.
Είναι $0 + 0 \leq 3$, άρα αν η ανίσωση ήταν $x + y \leq 3$ θα είχε τις λύσεις της στο γραμμοσκιασμένο ημιεπίπεδο που όμως δεν είναι σωστό. Έτσι η ανίσωση είναι $x + y \geq 3$.
Όμοια η μορφή της εξίσωσης της ε_2 είναι $y = \alpha x + \beta$. Η ευθεία αυτή περνά από τα σημεία με συντεταγμένες (0, -2), (1, 0). Άρα επαληθεύεται από αυτούς τους αριθμούς. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} -2 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{l} \beta = -2 \\ \alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \text{ ή }$$

$$\begin{array}{l} \beta = -2 \\ \alpha = 2 \end{array}$$

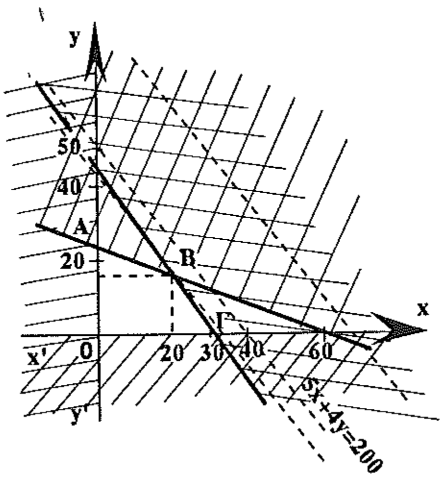
Άρα η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση την
$y = 2x - 2$ ή $2x - y = 2$.
Με τον ίδιο συλλογισμό που κάναμε βρίσκουμε ότι η ανίσωση είναι:
$2x - y \geq 2$.
Οπότε το ζητούμενο σύστημα των ανισώσεων είναι:
$x + y \geq 3$
$2x - y \geq 2$

<u>Παρατήρηση:</u>
Επειδή οι ευθείες δεν σημειώνονται διακεκομένες, τα σημεία τους επαληθεύουν τις αντίστοιχες ανισώσεις. Γι' αυτό βάλαμε σ' αυτές και ισότητα.

4. Ένα εργοστάσιο παράγει καθημερινά δύο τύπους ελαστικών αυτοκινήτων. Για κάθε ελαστικό πρώτου τύπου χρειάζεται 20 κιλά φυσικό καουτσούκ και 5 κιλά συνθετικό. Για κάθε ελαστικό δεύτερου τύπου χρειάζεται 15 κιλά φυσικό καουτσούκ και 15 κιλά συνθετικό. Κάθε ελαστικό του πρώτου τύπου δίνει κέρδος 10.000 δρχ. και κάθε ελαστικό του δεύτερου 8.000 δρχ. Το εργοστάσιο καθημερινά μπορεί να προμηθεύεται το πολύ 600 κιλά φυσικό καουτσούκ και 300 κιλά συνθετικό. Πόσα ελαστικά κάθε τύπου πρέπει να παράγει καθημερινά για να πετύχει μέγιστο κέρδος και πόσο θα είναι τότε το κέρδος του;

Λύση

Είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ονομάζουμε x τον αριθμό των ελαστικών του πρώτου τύπου και y του δεύτερου που θα κατασκευαστούν σε μια ημέρα. Είναι προφανώς $x \geq 0$, $y \geq 0$. Τότε θα χρειαστεί $20x + 15y$ κιλά φυσικού καουτσούκ και $5x + 15y$ κιλά συνθετικού.
Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι:
$20x + 15y \leq 600$ και $5x + 15y \leq 300$.
Έχουμε λοιπόν το σύστημα των ανισώσεων:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$20x + 15y \leq 600$
$5x + 15y \leq 300$
Μετά τις απλοποιήσεις έχουμε:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$4x + 3y \leq 120$
$x + 3y \leq 60$
Λύνουμε το σύστημα κατά τα γνωστά και βρίσκουμε σαν σύνολο λύσεων τις συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν στο εσωτερικό και στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΟ.



Όταν το εργοστάσιο κατασκευάζει x ελαστικά του πρώτου τύπου και y του δεύτερου ημερησίως κερδίζει $10000x + 8000y$ δρχ. Συνεπώς πρέπει να βρούμε τη λύση εκείνη του παραπάνω συστήματος ώστε το πολυώνυμο αυτό να παίρνει την πιο μεγάλη τιμή του.
Βάζουμε μια τυχαία τιμή π.χ. 400.000 σαν αποτέλεσμα στο πολυώνυμο αυτό και σχεδιάζουμε την ευθεία: $10.000x + 8.000y = 400.000$ η οποία μετά τις απλοποιήσεις γίνεται: $5x + 4y = 200$.
Θα ζητήσουμε τώρα τις τιμές των x και y έτσι ώστε να είναι και λύση του συστήματος των ανισώσεων αλλά και να παίρνει το πολυώνυμο τη μέγιστη τιμή.
Παρατηρούμε πως όταν μετατοπίσουμε την ευθεία $5x + 4y = 200$ παράλληλα προς τον εαυτό της και την απομακρύνουμε από το 0 η τιμή του κέρδους $5x + 4y$ γίνεται μεγαλύτερη από 200. Καταλαβαίνουμε λοιπόν

ότι στο σημείο $B(20, \frac{40}{3})$ θα έχουμε το

μέγιστο κέρδος.
Επομένως το μέγιστο κέρδος το έχει το εργοστάσιο αν παράγει 20 ελαστικά του πρώτου τύπου και 13 ελαστι-

κά του δεύτερου τύπου (το $\frac{40}{3} = 13{,}3$

και επειδή το y είναι ακέραιος έχουμε $y = 13$).
Το μέγιστο κέρδος θα είναι τότε:
$20 \cdot 10.000 + 13 \cdot 8.000 = 304.000$ δρχ.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:
α) $2x - y < 14$, *β)* $3x > y - 2$,
γ) $x \leq 1$, *δ)* $y \leq 5(x - 3)$.

Λύση

α) Κατασκευάζουμε την ευθεία:
$2x - y = 14$ και εντοπίζουμε το ημιεπίπεδο που περιέχει τις λύσεις της.
β) Κατασκευάζουμε την ευθεία:
$3x = y - 2$ και εργαζόμαστε όμοια.
γ) Η ευθεία $x = 1$ είναι παράλληλη προς τον άξονα y'y στο σημείο (1, 0). Μετά εντοπίζουμε το ημιεπίπεδο των λύσεών της.
δ) Όμοια εργαζόμαστε κατά τα γνωστά.

2. Να λύσετε το σύστημα των ανισώσεων:
$x > 0$, $y > 0$, $2x+y < 10$, $x + 2y < 10$.

Λύση

Κατασκευάζουμε τις ευθείες $x = 0$, $y= 0$, $2x\ y = 10$, $x + 2y = 10$ και εντοπίζουμε τα ημιεπίπεδα εκείνα που αποτελούν λύσεις των ανισώσεων του προβλήματος. Η τομή τους είναι το ζητούμενο ημιεπίπεδο.

3. Σ' ένα σούπερ μάρκετ δίνουν έναν λαχνό σε κάθε πελάτη που αγοράζει ένα κιλό ζάχαρη με 300 δρχ. ή ένα πακέτο βούτυρο των 250 γραμμαρίων με 600 δρχ. Ένας πελάτης διαθέτει 2.850 δρχ. και το καλάθι του χωράει το πολύ 5 κιλά. Πώς θα μπορέσει να πάρει το μεγαλύτερο αριθμό λαχνών;

Λύση

Έστω x ο αριθμός των κιλών της ζάχαρης και y ο αριθμός των πακέτων βουτύρου που αγοράζει ο πελάτης. Τα x, y ικανοποιούν τους περιορισμούς:
$x \geq 0$ φυσικός
$y \geq 0$ φυσικός
$300x + 600\,y \leq 2850$
$x + 0{,}25y \leq 5$ ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:
α) $2x + 5y \leq 2$
β) $3(x - 1) - 2 \geq 7y$
γ) $\frac{x - 1}{2} - \frac{3y}{5} \leq 2$
δ) $2(x - 7) + 3(y - 2) \leq 5$
ε) $\frac{3x - 2}{3} \geq 1$
στ) $x - y + 6 < 2$
ζ) $\frac{y - 2}{3} + 4 \leq 0$
η) $x - 2y + 1 > 0$

2. Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:
α) $\frac{2(\varphi - 5)}{3} - \frac{4(\omega + 2)}{5} \leq 1$
β) $2t - 6 > 8t + 2r(- 6)$
γ) $x(x - 1) \geq 2y + 3 + x^2$

3. Να λυθούν τα συστήματα των ανισώσεων:

α) $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{matrix}\right\}$ *β)* $\left.\begin{matrix} x + y < 3 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$

γ) $\left.\begin{matrix} 2x + y > 4 \\ x - 2y < -1 \end{matrix}\right\}$ *δ)* $\left.\begin{matrix} 2x + y > 5 \\ x + y < 3 \\ x - 2y < -1 \end{matrix}\right\}$

ε) $\left.\begin{matrix} x + y \leq 0 \\ -x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$ *στ)* $\left.\begin{matrix} 3x - 2y > -6 \\ x + 4y + 3 > 0 \\ 3x < 5 - y \end{matrix}\right\}$

4. Να γράψετε ένα σύστημα ανισώσεων που οι λύσεις του να παριστάνονται από το τετράπλευρο με κορυφές Α(1, 2), Β(3, 5), Γ(7, 4), Δ(9, 0).

5. Μια βιομηχανία παράγει δύο είδη προϊόντων. Το πρώτο προϊόν αποφέρει κέρδος 200 δρχ. το κομμάτι, ενώ το δεύτερο 300 δρχ. το κομμάτι. Η παραγωγή και των δύο προϊόντων δεν πρέπει να ξεπερνά τα 2.000 κομμάτια. Το δεύτερο προϊόν πρέπει να είναι σε κομμάτια το πολύ το 1/3 του πρώτου. Πόσα κομμάτια από το κάθε είδος πρέπει να παράγει σε ένα μήνα το εργοστάσιο για να έχει μέγιστο κέρδος;

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα:
$x - 5y = 2$
$(x - 1)(3x - 2) = 0$

2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 1$$

3. Να λυθεί η ανίσωση:
$3xy(2x - y + 3) \leq 0$

4. Να βρείτε το σύστημα των ανισώσεων που οι λύσεις του να παριστάνονται από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(1, -2), Β(2, 5), Γ(3, -1/2).

5. Να βρεθεί η εξίσωση μιας ευθείας $y = \kappa x + c$, όταν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(2, 1).

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(5, 1) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $3x + 2y = 1$.

7. Να βρεθεί ένα κλάσμα ισοδύναμο του 2/3 και του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των όρων του είναι ίσο με 637.

8. Να χωρισθεί ο αριθμός 25 σε δύο μέρη τέτοια ώστε το τριπλάσιο του τετραγώνου του πρώτου και το πενταπλάσιο του τετραγώνου του δεύτερου να έχουν άθροισμα 2.253.

9. Να λυθούν τα συστήματα:
α) $2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10$
$4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3$

β) $(x + 1)(y + 2) = (x - 1)(y + 3) + 5$
$(2x + 1)(y - 1) = (x + 3)(2y - 3) + 2$

10. Δίνεται η εξίσωση $5x - 4y = 7$. Να βρεθεί μια άλλη εξίσωση που να σχηματίζει με αυτήν:
α) ένα σύστημα που να έχει μια λύση,
β) ένα σύστημα αδύνατο,
γ) ένα σύστημα αόριστο.

11. Να διερευνηθεί το σύστημα:
$\alpha x + y = 2$
$x + 4y = 3\beta$

12. Να βρεθεί διψήφιος αριθμό, αν γνωρίζουμε ότι το ψηφίο των δεκάδων του είναι ίσο με τα τρία τέταρτα του ψηφίου των μονάδων του και ότι αν εναλλάξουμε την τάξη των ψηφίων του προκύπτει αριθμός κατά 18 μεγαλύτερος του αρχικού.

13. Να βρεθούν δύο φυσικοί αριθμοί x και y που επαληθεύουν το σύστημα:
$0 \leq x \leq 12$
$3x + 2y \geq 15$
$y \leq 2$
$-x + 3y \geq -1$

14. Να βρείτε το μέγιστο της παράστασης $40x + 50y$, όταν οι πραγματικοί αριθμοί x, y επαληθεύουν το σύστημα: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 2y \leq 30$,

$2x + 3y \leq 20$.

15. Μια φαρμακοβιομηχανία κατασκευάζει δύο ειδών χάπια A και B. Το A περιέχει 50 μονάδες βιταμίνης C και 20 μονάδες βιταμίνης D. Το B περιέχει 25 μονάδες βιταμίνης C και 45 μονάδες βιταμίνης D. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαπιών από κάθε είδος ώστε να εξασφαλίσουμε 7.000 μονάδες βιταμίνης C και 5.200 μονάδες βιταμίνης D;

16. Να βρεθεί το σύστημα των ανισώσεων, που οι λύσεις του είναι τα σημεία του τετραγώνου που έχει κορυφές τα σημεία:
$A(5, 0)$, $B(0, 5)$, $\Gamma(-5, 0)$, $\Delta(0, -5)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

BASIC 11

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:
$\alpha x + \beta y = \gamma$
$\delta x + \varepsilon y = \zeta$
όπου α, β, γ, δ, ε, ζ πραγματικοί αριθμοί.
Τότε εύκολα βρίσκουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης ότι:

$$x = \frac{\gamma\varepsilon - \beta\zeta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \quad \text{και} \quad y = \frac{\alpha\zeta - \delta\gamma}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}.$$

Όπως καταλαβαίνουμε όταν ο παρονομαστής $\alpha\varepsilon - \beta\delta \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία λύση. Διαφορετικά είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Μπορούμε επομένως να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε τους αριθμούς α, β, γ, δ, ε, ζ (με INPUT ή με READ και DATA) και θα μας υπολογίζει τα x και y.
Π.χ.

```
10 INPUT α                                                   (↵)
20 INPUT β                                                   (↵)
30 INPUT γ                                                   (↵)
40 INPUT δ                                                   (↵)
50 INPUT ε                                                   (↵)
60 INPUT ζ                                                   (↵)
70 LET κ = α*ε - β*δ                                         (↵)
80 IF κ = 0 THEN GO TO 120                                   (↵)
90 LET x = (γ*ε - β*ζ) / κ                                   (↵)
100 LET y = (α*ζ - δ*γ) / κ                                  (↵)
110 PRINT «Οι λύσεις (x, y) είναι:», x, y                    (↵)
120 GO TO 10                                                 (↵)
130 PRINT «Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις»   (↵)
140 GO TO 10                                                 (↵)
```

Παρατηρήστε ότι το πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Μόλις τυπώσει τα x και y (γραμμή 110) πηγαίνει στην αρχή (λόγω της 120) και περιμένει τους συντελεστές του νέου συστήματος.

Άσκηση

Μετατρέψτε το παραπάνω πρόγραμμα ώστε:
α) Να τελειώνει μόλις βρει ένα σύστημα που να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις.
β) Να τελειώνει μετά από τον υπολογισμό 5 συστημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

Διανύσματα

9.1 Η έννοια του διανύσματος

Θεωρία

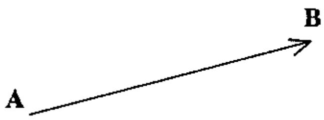
Ερωτήσεις / **Απαντήσεις**

1. Ποια μεγέθη λέγονται μονόμετρα μεγέθη;

1. Μονόμετρα μεγέθη λέγονται τα μεγέθη τα οποία καθορίζονται πλήρως με την αριθμητική τιμή και τη μονάδα μέτρησής τους.
Τέτοια μεγέθη είναι η θερμοκρασία, το μήκος, ο χρόνος η μάζα κ.λπ.

2. Τι ονομάζεται διάνυσμα και πώς το συμβολίζουμε;

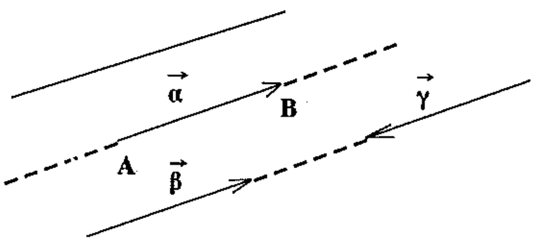
2. Έστω Α και Β δύο σημεία. Το ευθύγραμμο τμήμα που διαγράφεται με φορά από το Α προς το Β ονομάζεται **διάνυσμα** με αρχή το Α και πέρας (τέλος) το Β.



Συμβολίζεται δε με $\overrightarrow{AB}$ ή ακόμη και με ένα μικρό γράμμα $\vec{\alpha}$.

3. Τι ονομάζεται διεύθυνση ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

3. Διεύθυνση ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται η ευθεία που ορίζουν τα άκρα Α και Β του διανύσματος ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

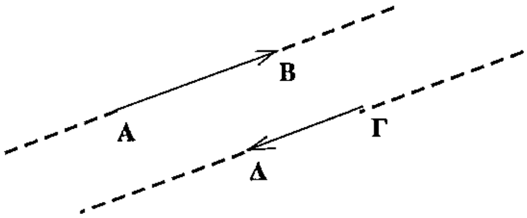


Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ έχουν ίδια διεύθυνση γιατί βρίσκονται στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.

4. Πώς καθορίζεται η φορά ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

4. Η φορά ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καθορίζεται από την κίνηση που οδηγεί από την αρχή Α προς το τέλος του Β.

Π.χ. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ενώ έχουν την ίδια διεύθυνση έχουν αντίθετη φορά.



5. Τι ονομάζεται μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

5. Μέτρο ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

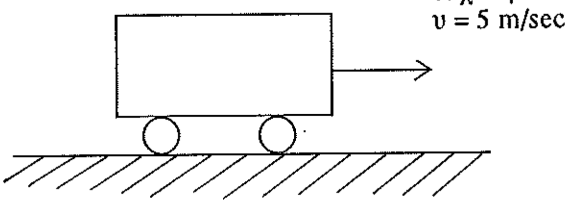
Το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$ το συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$.

Παρατήρηση: Το μέτρο $|\overrightarrow{AB}|$ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι μη αρνητικός αριθμός.

6. Τι ονομάζεται διανυσματικό μέγεθος;

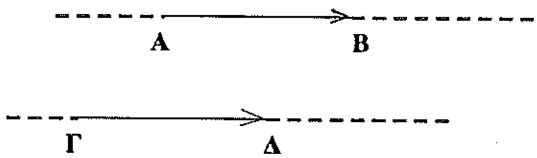
6. Διανυσματικό μέγεθος ονομάζεται το μέγεθος το οποίο για να καθοριστεί πλήρως χρειάζεται να γνωρίζουμε το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του.

Τέτοια μεγέθη είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.ά. Τα διανυσματικά μεγέθη τα παριστάνουμε με διανύσματα.



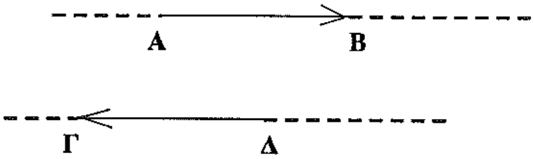
7. Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα;

7. Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα,** όταν έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα.



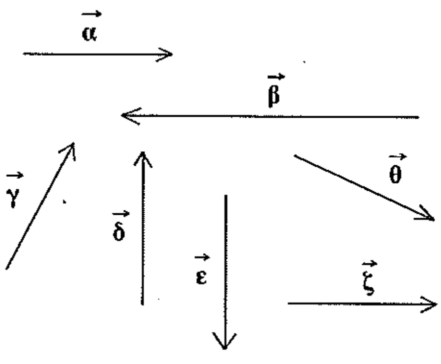
8. Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα;

8. Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα,** όταν έχουν ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα αλλά αντίθετη φορά.



Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα διανύσματα του σχήματος που έχουν:
α) ίδια διεύθυνση,
β) ίδια φορά,
γ) ίδιο μέτρο.



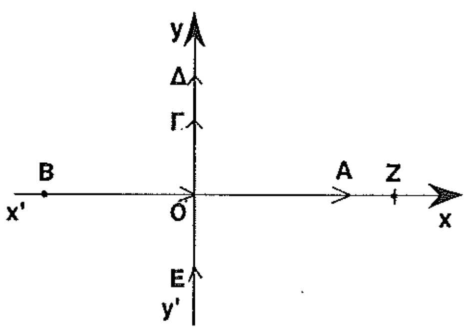
Λύση

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\zeta}$ έχουν ίδια διεύθυνση γιατί βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες. Όμοια και τα διανύσματα $\vec{\delta}$, $\vec{\varepsilon}$.

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\zeta}$ έχουν την ίδια φορά.

γ) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\zeta}$ έχουν το ίδιο μέτρο. Τα διανύσματα $\vec{\delta}$ και $\vec{\varepsilon}$ έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά.

2. Να βρείτε τα διανύσματα του σχήματος που είναι: α) ίσα και β) αντίθετα.



Λύση

α) Ίσα είναι τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OA}$.

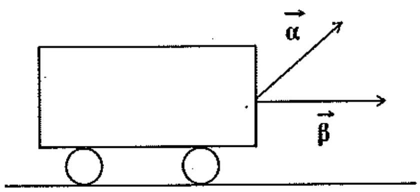
β) Αντίθετα είναι τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{OE}$.

3. Δίνεται ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταβάλλουμε το διάνυσμα αυτό;

Λύση

Ως γνωστόν ένα διάνυσμα καθορίζεται από τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο του. Μπορούμε λοιπόν να μεταβάλλουμε το διάνυσμα αυτό
α) αλλάζοντας μόνο το μέτρο του,
β) αλλάζοντας μόνο τη διεύθυνση του,
γ) αλλάζοντας μόνο τη φορά του,
δ) αλλάζοντας δύο από τα παραπάνω στοιχεία του και
ε) αλλάζοντας και τα τρία στοιχεία του, δηλαδή τη διεύθυνση, τη φορά και το μέτρο του.

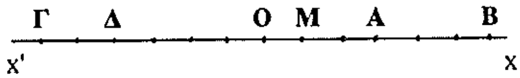
4. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του σχήματος έχουν ίσα μέτρα. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα αυτά είναι ίσα.



Λύση

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα αλλά διαφορετικές διευθύνσεις. Άρα δεν είναι συγκρίσιμα.

5. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Gamma O}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ λαμβάνοντας ως μονάδα μήκους, το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$.



Λύση

Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ είναι ίσο με 1. Οπότε:

Το μέτρο του $\overrightarrow{OA}$ είναι 3.

Το μέτρο του $\overrightarrow{OB}$ είναι 5.

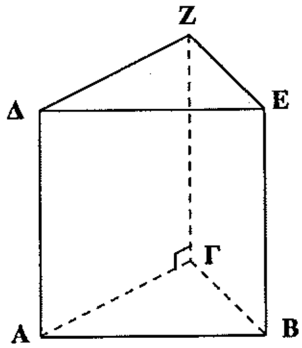
Το μέτρο του $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι 12.

Το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma A}$ είναι 9.

Το μέτρο του $\overrightarrow{\Gamma O}$ είναι 6.

Το μέτρο του $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι 7.

6. Δίνεται το ορθό τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ με βάσεις ισόπλευρα τρίγωνα.
α) Να βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι ίσα με το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma Z}$.
β) Να βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι αντίθετα με το $\overrightarrow{AB}$.
γ) Να βρείτε τα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα.



Λύση

α) Διανύσματα ίσα με το $\overrightarrow{\Gamma Z}$ είναι τα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$.

β) Διανύσματα αντίθετα με το $\overrightarrow{AB}$ είναι μόνο το $\overrightarrow{E\Delta}$.

γ) Διανύσματα μέ ίσα μέτρα είναι τα

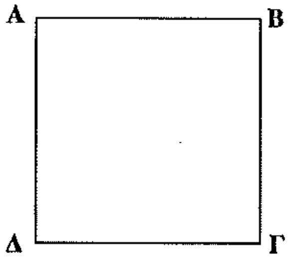
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{Z\Delta}$ καθώς και τα αντίθετα τους δηλαδή τα $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{E\Delta}$, $\overrightarrow{ZE}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$.

Επίσης ίσα μέτρα έχουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{\Gamma Z}$ και τα αντίθετα τους.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρείτε ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta A}$

α) έχουν ίσα μέτρα,
β) είναι ίσα διανύσματα,
γ) είναι αντίθετα.

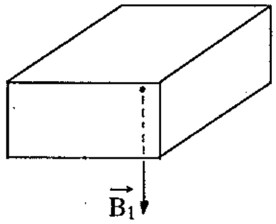


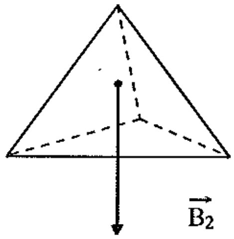
Λύση

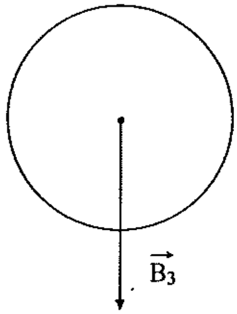
α) Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε .....
β) ......
γ) ......

2. Με κλίμακα 1 cm για κάθε 100 kp να βρείτε τα βάρη των τριών στερεών.

Λύση





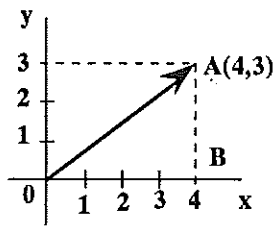


Λύση

Το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{B_1}$ είναι ίσο με 1,5 cm άρα το βάρος του σώματος είναι 150 kp.

Το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{B_2}$ είναι ....

3. Να βρείτε το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$.



Λύση

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με (ΟΒ) = 4 και (ΑΒ) = 3. Η πλευρά ΟΑ είναι υποτείνουσα του τριγώνου οπότε (Πυθαγόρειο θεώρημα):

$(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$ ή

$(OA)^2 = 4^2 + 3^3$ .....

4. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

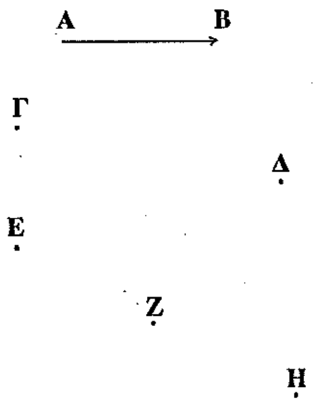
α) Με αρχή το Γ να σχεδιάσετε διάνυσμα ίσο με το $\overrightarrow{AB}$.

β) Με αρχή το Δ να σχεδιάσετε διάνυσμα αντίθετο του $\overrightarrow{AB}$.

γ) Με αρχή το Ε να σχεδιάσετε διάνυσμα ίδιας φοράς και με μέτρο τριπλάσιο του $\overrightarrow{AB}$.

δ) Με αρχή το Ζ να σχεδιάσετε διάνυσμα ίδιας διεύθυνσης με το $\overrightarrow{AB}$ και με μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του $\overrightarrow{AB}$.

ε) Με αρχή το Η να σχεδιάσετε διάνυσμα αντίθετης φοράς με το $\overrightarrow{AB}$ και με μέτρο διπλάσιο του μέτρου του $\overrightarrow{AB}$.



Λύση

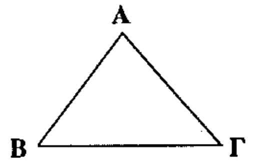
....

5. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Με αρχή το Γ να σχεδιάσετε διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ αντίθετο του $\overrightarrow{AB}$.

β) Με αρχή το Δ να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta A}$.

γ) Δείξτε ότι το $\overrightarrow{\Delta A}$ είναι αντίθετο του $\overrightarrow{B\Gamma}$.



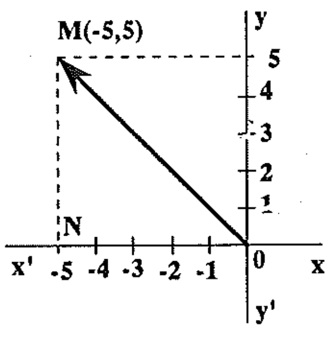
Λύση

α) .....

β) .....

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί;).

6. Να βρείτε το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Μ(- 5, 5).



Λύση

Το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ορθογώνιο οπότε ......

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

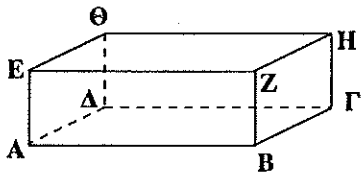
1. *Πώς μπορούμε να μετατοπίσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έτσι ώστε κανένα από τα στοιχεία του (διεύθυνση, φορά και μέτρο) να μεταβάλλεται.*

2. *Να σχεδιάσετε ένα ρόμβο ΑΒΓΔ. Να εξετάσετε ποια από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{B\Delta}$*

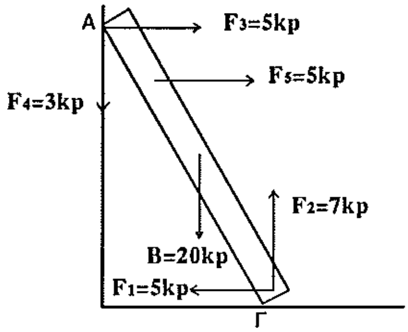
α) έχουν ίδια διεύθυνση,
β) έχουν ίσα μέτρα,
γ) είναι αντίθετα,
δ) είναι ίσα.

3. *Αν το ΑΒΓΔΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε:*

α) διανύσματα ίσα με το $\overrightarrow{H\Gamma}$,
β) διανύσματα αντίθετα του $\overrightarrow{EZ}$,
γ) διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα.



4. *Στη δοκό ΑΓ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{B}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$.*
Να βρείτε ποιες από αυτές έχουν:
α) ίδια διεύθυνση,
β) αντίθετη φορά,
γ) είναι αντίθετες,
δ) είναι ίσες.



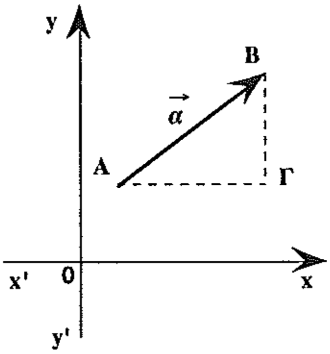
5. *Δίνονται τα σημεία Α(3, 0) και Β(-5, 0).*
α) Με αρχή το Α να σχεδιάσετε διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ αντίθετο του $\overrightarrow{OA}$.
β) Με αρχή το Β να σχεδιάσετε διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$ αντίθετο του $\overrightarrow{OB}$.
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των άκρων του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

9.2 Συντεταγμένες διανύσματος

Θεωρία

Ερωτήσεις / Απαντήσεις

1. Να εξηγήσετε τι είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος και πώς παριστάνεται ένα διάνυσμα με τη βοήθεια των συντεταγμένων του.



1. Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$.

Το διάνυσμα αυτό παριστάνει τη μετατόπιση από το σημείο Α στο σημείο Β κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Η ίδια μετατόπιση από το Α στο Β μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός συστήματος αξόνων και των συντεταγμένων του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$.

Συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ είναι το ζεύγος των αριθμών $\binom{x}{y}$

από τους οποίους ο x φανερώνει τη μετατόπιση από το Α στο Γ κατά x μονάδες παράλληλα προς τον οριζόντιο άξονα x'x, ενώ ο δεύτερος αριθμός y φανερώνει τη μετατόπιση του Γ στο Β κατά y μονάδες παράλληλα προς τον κατακόρυφο άξονα y'y.

Ο αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ ενώ ο αριθμός y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$.

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τη βοήθεια των συντεταγμένων γράφεται και ως εξής: $\vec{\alpha} = \binom{x}{y}$.

<u>**Προσοχή:**</u> Πάνω γράφεται η τετμημένη και κάτω η τεταγμένη του διανύσματος.

2. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο $|\vec{\alpha}|$ ενός διανύσματος $\vec{\alpha} = \binom{x}{y}$ από τις συντεταγμένες του;

2. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} = \binom{x}{y}$ δίνεται από τον τύπο:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

3. Τι γνωρίζετε για τις συντεταγμένες δύο ίσων διανυσμάτων;

3. Τα ίσα διανύσματα έχουν ίδιες συντεταγμένες. Π.χ.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ και $\vec{\beta} = \binom{\beta_1}{\beta_2}$ είναι ίσα, τότε $\alpha_1 = \beta_1$ και $\alpha_2 = \beta_2$.

4. Τι γνωρίζετε για τις συντεταγμένες δύο αντίθετων διανυσμάτων;

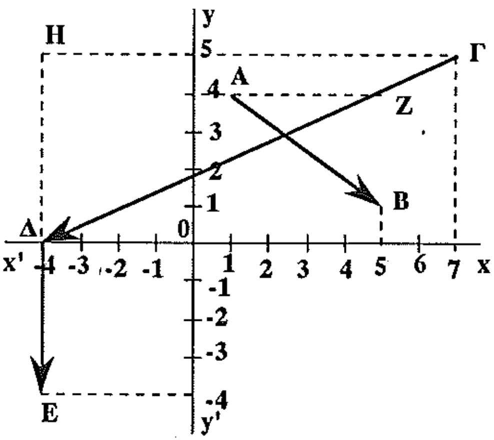
4. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετες συντεταγμένες. Π.χ.

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα και $\vec{\alpha} = \binom{x}{y}$, τότε $\vec{\beta} = \binom{-x}{-y}$.

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες και τα μέτρα των διανυσμάτων:

$\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{\Delta E}$.



Λύση

α) Για το διάνυσμα $\vec{AB}$:

Από την αρχή Α κάνουμε πρώτα μετατόπιση $\vec{AZ}$ κατά +4 και στη συνέχεια κάνουμε τη μετατόπιση $\vec{ZB}$ κατά -3. Άρα το $\vec{AB}$ έχει τετμημένη x = +4 και τεταγμένη y = -3, δηλαδή $\vec{AB} = \binom{4}{-3}$.

Το μέτρο του $\vec{AB}$ δίνεται από τη σχέση:

$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

β) Για το διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$:

Από την αρχή Γ κάνουμε πρώτα μετατόπιση $\vec{\Gamma H}$ κατά -11 και στη συνέχεια κάνουμε μετατόπιση $\vec{H\Delta}$ κατά -5.

Άρα $\vec{\Gamma\Delta} = \binom{-11}{-5}$.

Το μέτρο του $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι:

$|\vec{\Gamma\Delta}| = \sqrt{(-5)^2 + (-11)^2} = \sqrt{25 + 121} = \sqrt{146} \cong 12{,}1.$

γ) Για το διάνυσμα $\vec{\Delta E}$:

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$\vec{\Delta E} = \binom{0}{-4}$, οπότε: $|\vec{\Delta E}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$

2. Σε ένα σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

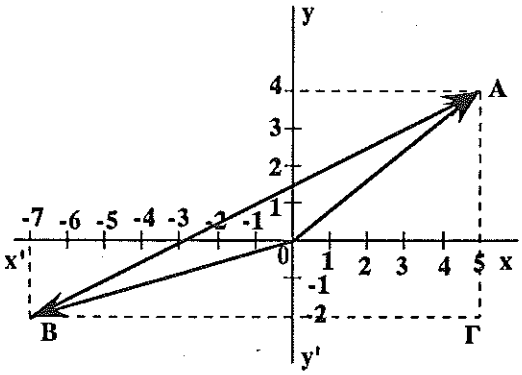
$\vec{OA} = \binom{5}{4}$ ***και*** $\vec{OB} = \binom{-7}{-2}$.

Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{BA}$ ***καθώς και το μέτρο του.***

Λύση

Σε ένα σύστημα αξόνων σημειώνουμε τα σημεία Α(5, 4) και Β(-7, -2) οπότε:

$\vec{OA} = \binom{5}{4}$ και $\vec{OB} = \binom{-7}{-2}$.



Από την αρχή Β του διανύσματος $\overrightarrow{BA}$ κάνουμε πρώτα μετατόπιση $\overrightarrow{B\Gamma}$ κατά 12 μονάδες προς τη θετική φορά του άξονα x'x δηλαδή +12 και στη συνέχεια κάνουμε τη μετατόπιση $\overrightarrow{\Gamma A}$ κατά 7 μονάδες προς τη θετική φορά του άξονα y'y δηλαδή +7 οπότε: $\overrightarrow{BA} = \binom{12}{7}$.

Το μέτρο του $\overrightarrow{BA}$ είναι:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{144 + 49} = \sqrt{193} \cong$
$\cong 13{,}89$.

3. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{\alpha} = \binom{5}{-1}$, $\vec{\beta} = \binom{10}{6}$, $\vec{\gamma} = \binom{-5}{1}$,
$\vec{\delta} = \binom{-10}{-6}$

Ποια από τα διανύσματα αυτά είναι ίσα και ποια είναι αντίθετα;

Λύση

Τα ίσα διανύσματα έχουν ίδιες συντεταγμένες άρα δεν έχουμε ίσα διανύσματα.
Τα αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετες συντεταγμένες άρα τα διανύσματα $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ είναι αντίθετα.

4. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ίσα, να βρείτε τα x, y στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{\alpha} = \binom{x-1}{5}$, $\vec{\beta} = \binom{5}{y+2}$

β) $\vec{\alpha} = \binom{x}{5x+2y}$, $\vec{\beta} = \binom{3y+5}{8}$

Λύση

α) Τα ίσα διανύσματα έχουν ίδιες συντεταγμένες άρα:

$\begin{array}{l|} x-1=5 \\ 5=y+2 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=5+1 \\ 5-2=y \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=6 \\ 3=y \end{array}$ ή

$\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}$

β) Όμοια έχουμε:

$\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ 5x+2y=8 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ 5(3y+5)+2y=8 \end{array}$ ή

$\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ 15y+25+2y=8 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ 17y=8-25 \end{array}$ ή

$\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ 17y=-17 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=3y+5 \\ y=-1 \end{array}$ ή $\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}$

5. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{\alpha} = \binom{x+2y}{2x+y}$ *και* $\vec{\beta} = \binom{-4}{1}$.

Να βρείτε τα x, y αν είναι $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.

Λύση

Η ισότητα $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ φανερώνει ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα άρα έχουν και αντίθετες συντεταγμένες, δηλαδή:

$\begin{array}{l|} x+2y=4 \\ 2x+y=-1 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=4-2y \\ 2(4-2y)+y=-1 \end{array}$ ή

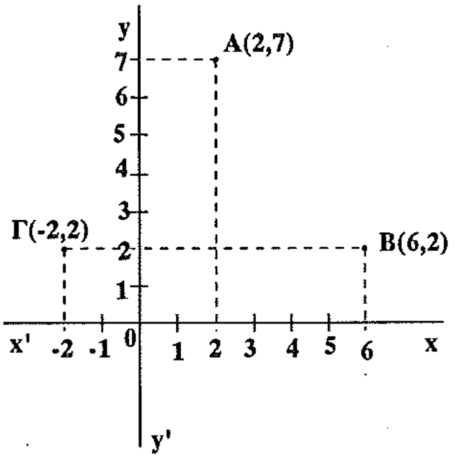
$\begin{array}{l|} x=4-2y \\ 8-4y+y=-1 \end{array}$ ή $\begin{array}{l|} x=4-2y \\ -3y=-9 \end{array}$ ή

$\begin{array}{l|} x=4-2y \\ y=3 \end{array}$ ή $\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \end{array}$

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται τα σημεία Α(2, 7), Β(6, 2) και Γ(- 2, 2). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε το μήκος των πλευρών του.

Λύση



Πρώτα βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{A\Gamma}$, $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$.

$\vec{A\Gamma} = \binom{4}{-5}$, $\vec{AB} = (\ \ )$, $\vec{B\Gamma} = (\ \ )$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα μέτρα τους.

$|\vec{A\Gamma}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \cong 6{,}40$.

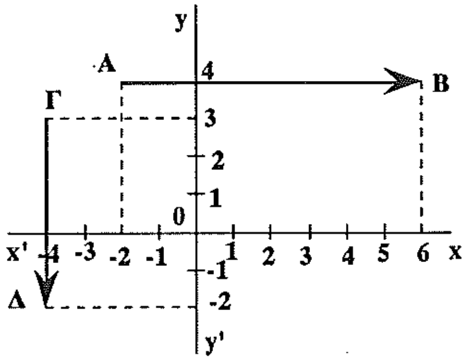
$|\vec{AB}| = ...$

$|\vec{B\Gamma}| = ...$

Από τα μέτρα των $\vec{A\Gamma}$, $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ......

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.

Τι συμπέρασμα βγάζετε για τα διανύσματα αυτά;



Λύση

Η μετατόπιση από το Α στο Β γίνεται κατά + 7 μονάδες. Άρα το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει τετμημένη + 7 και τεταγμένη 0, δηλαδή $\vec{AB} = \binom{7}{0}$.

Η μετατόπιση από το Γ στο Δ γίνεται κατά - 5 μονάδες παράλληλα στον άξονα y'y.

Άρα το διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη -5, δηλαδή $\vec{\Gamma\Delta} = \binom{0}{-5}$.

<u>Συμπέρασμα:</u> Όταν ένα διάνυσμα είναι παράλληλο στον άξονα x'x τότε η τεταγμένη του είναι ......, ενώ όταν ένα διάνυσμα είναι παράλληλο στον άξονα y'y τότε ....

3. Να βρείτε τα x και y αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{3x}{x+y}$ και $\vec{\beta} = \binom{5y}{2y-1}$ είναι ίσα;

Λύση

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 3x = 5y \\ x + y = 2y - 1 \end{array}\right| \text{ ή } ....$$

4. Αν τα διανύσματα:

$\overrightarrow{AB} = \left(\begin{matrix} 5x+6 \\ -2x \end{matrix} \right)$ *και* $\overrightarrow{ΓΔ} = \left(\begin{matrix} -2y \\ 7y+10 \end{matrix} \right)$

είναι αντίθετα, να βρείτε τα x και y.

Λύση

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$\left. \begin{matrix} 5x + 6 = -(-2y) \\ -2x = -(7y + 10) \end{matrix} \right|$ ή $\left. \begin{matrix} 5x + 6 = 2y \\ -2x = -7y - 10 \end{matrix} \right|$ ή

$\left. \begin{matrix} 5x - 2y = -6 \\ -2x + 7y = -10 \end{matrix} \right|$ ή ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Δίνονται τα σημεία: Α(-2, 4), Β(2, 6), Γ(-4, 0), Δ(0, 2), Ε(8, 0), Ζ(4, 2) και Η(2, 2). Να σχεδιάσετε τα διανύσματα* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{AH}$ *και* $\overrightarrow{OZ}$. *Υπάρχουν ίσα ή αντίθετα μεταξύ αυτών;*

***2.** Να βρείτε τα x και y αν είναι* $\vec{α} = \vec{β}$, *όπου* $\vec{α} = \left(\begin{matrix} 15 \\ -x+y \end{matrix} \right)$ *και* $\vec{β} = \left(\begin{matrix} 8x-y \\ 8 \end{matrix} \right)$.

***3.** Να βρείτε τα x και y αν είναι* $\vec{α} = -\vec{β}$, *όπου* $\vec{α} = \left(\begin{matrix} x+1 \\ 2y \end{matrix} \right)$ *και* $\vec{β} = \left(\begin{matrix} 2x+y \\ 7-2x \end{matrix} \right)$.

***4.** Δίνονται τα σημεία: Α(2, 6), Β(5, 2), Γ(2, -2) και Δ(-1, 2). Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος και να βρείτε το μήκος της πλευράς του.*

***5.** Με τη βοήθεια της άσκησης 4 να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων* $\overrightarrow{AΓ}$ *και* $\overrightarrow{BΔ}$.

***6.** Δίνονται τα σημεία: Α(3, 2), Β(-2, 5) και Γ(-2, -1). Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.*

9.3 Πρόσθεση διανυσμάτων

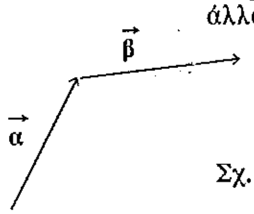
Θεωρία

Ερωτήσεις

***1.** Πότε δύο διανύσματα λέγονται διαδοχικά;*

Απαντήσεις

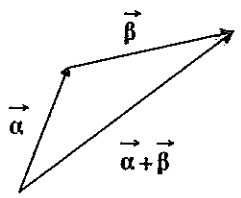
1. Δύο διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ λέγονται **διαδοχικά** (Σχ. 1) όταν το τέλος του ενός συμπίπτει με την αρχή του άλλου.



Σχ. 1

2. Τι ονομάζεται άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων;

2. **Άθροισμα** των διαδοχικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ που έχει αρχή την αρχή του $\vec{\alpha}$ και τέλος το τέλος του $\vec{\beta}$.



3. Τι γνωρίζετε για τις συντεταγμένες του αθροίσματος δύο διανυσμάτων;

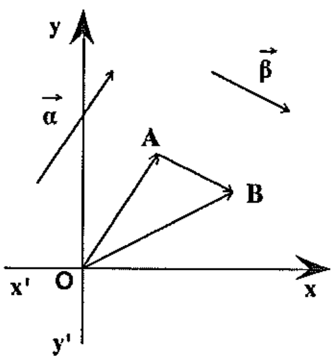
3. Αν δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ και $\vec{\beta} = \binom{\beta_1}{\beta_2}$ τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι ένα διάνυσμα με συντεταγμένες το άθροισμα των συντεταγμένων των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \binom{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2+\beta_2}.$$

4. Πώς μπορούμε να προσθέσουμε δύο μη διαδοχικά διανύσματα;

4. Για να προσθέσουμε τα μη διαδοχικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, σχηματίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ (φέρνοντας κατάλληλες παράλληλες) που είναι διαδοχικά, οπότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ είναι το ζητούμενο άθροισμα. Δηλαδή:

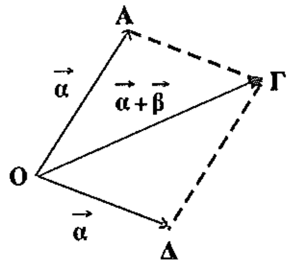
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$



Το άθροισμα $\overrightarrow{OB} = \vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μπορούμε να το πάρουμε και αν χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε άλλη αρχή αντί του Ο.

5. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή;

5. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν κοινή αρχή το σημείο Ο. Το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο $\overrightarrow{O\Gamma}$ του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



6. Ποιο διάνυσμα λέγεται μηδενικό διάνυσμα;

6. Μηδενικό διάνυσμα $\vec{O}$ λέγεται το διάνυσμα του οποίου τα άκρα συμπίπτουν. Π.χ. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Το μηδενικό διάνυσμα έχει **μέτρο 0** , οι συντεταγμένες του είναι $\binom{0}{0}$ και έχει οποιαδήποτε **διεύθυνση** και **φορά** . Ισχύει: $\vec{\alpha}+\vec{O} = \vec{\alpha}$.

7. Πότε δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα;

7. Δύο διανύσματα που δεν είναι μηδενικά λέγονται **αντίθετα** όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα.

Π.χ. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ είναι αντίθετα γιατί: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$ μπορούμε να γράφουμε: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = - \overrightarrow{\mathbf{BA}}$.

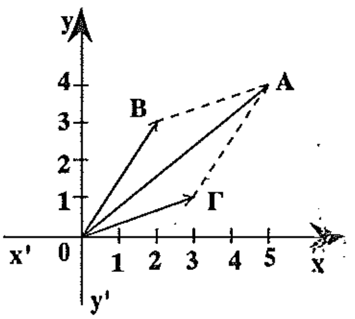
Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα:

$\overrightarrow{OB} = \binom{2}{3}$ *και* $\overrightarrow{O\Gamma} = \binom{3}{1}$.

Να βρεθεί το άθροισμά τους και το μέτρο του.

Λύση



Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ έχουν κοινή αρχή το Ο. Με τη διαγώνιο $\overrightarrow{OA}$ του παραλληλογράμμου ΟΒΑΓ παριστάνεται το άθροισμα $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma} = \binom{5}{4}$.

Αλλά και από τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων παρατηρούμε ότι:

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma} = \binom{2}{3} + \binom{3}{1} = \binom{5}{4}$.

Το μέτρο του αθροίσματος είναι:

$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

2. Να βρεθεί το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{KM}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{KN}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, καθώς και το μέτρο του αθροίσματος.

Λύση

Είναι: $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5-2\\-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Το μέτρο είναι: $|\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}|=\sqrt{3^2+2^2}=$

$=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

3. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το παρακάτω άθροισμα:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$.

Λύση

Είναι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=$

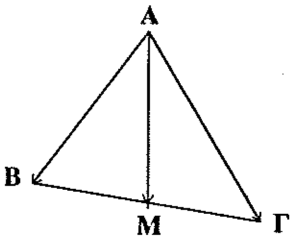
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{\Delta A}=$

$=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AA}=\vec{O}$.

4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$.

Λύση



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ (1) και $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M}$ (2).

Είναι όμως $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{\Gamma M}$ γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{BM}$ και $\overrightarrow{\Gamma M}$ έχουν ίσο μέτρο και αντίθετη φορά. Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M}=$

$=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{\Gamma M})+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$.

5. Αν $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ και $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.

Λύση

Έχουμε: $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5-4\\-3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

6. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ισχύει:

$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{O}$.

Λύση

Από την άσκηση 4 είδαμε ότι:

$2\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε κυκλικά έχουμε:

$2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}$ και $2\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}$ και

με πρόσθεση παίρνουμε:

$2\overrightarrow{A\Delta}+2\overrightarrow{BE}+2\overrightarrow{\Gamma Z}=$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}$ ή

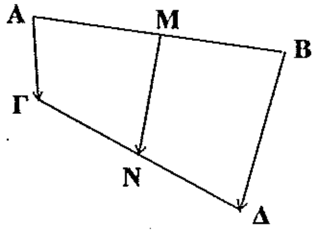
$2(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z})=\vec{O}$ ή

$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{O}$.

7. Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ και Μ, Ν τα μέσα τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma N}$ και $\overrightarrow{MN} =$
$= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
$2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma N}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta N} =$
$= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma N}+(-\overrightarrow{MA})+\overrightarrow{B\Delta}+(-\overrightarrow{\Gamma N}) =$
$= \overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$.

8. Δίνονται τα σημεία: A(3, 1), B(-2, 3). Να βρεθεί το άθροισμα:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

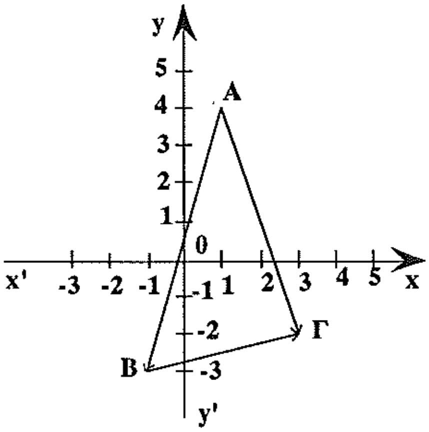
Λύση

Είναι: $\overrightarrow{OA} = \binom{3}{1}$ και $\overrightarrow{OB} = \binom{-2}{3}$ οπότε:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \binom{3}{1} + \binom{-2}{3} = \binom{3-2}{1+3} = \binom{1}{4}$.

9. Δίνονται τα σημεία: A(1, 4), B(-1, -3), Γ(3, -2). Να βρεθεί το άθροισμα:

i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ και ii) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

Λύση

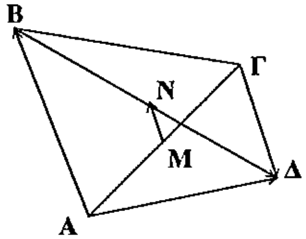


Είναι: $\overrightarrow{AB} = \binom{-2}{-7}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \binom{2}{-6}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} =$
$= \binom{4}{1}$ οπότε:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \binom{-2}{-7} + \binom{2}{-6} = \binom{0}{-13}$ και
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \binom{-2}{-7} + \binom{4}{1} = \binom{2}{-6}$.

10. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 4\,\overrightarrow{MN}$.

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{BN}$
λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{O}$ και $\overrightarrow{\Delta N}+\overrightarrow{BN} = \vec{O}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:
$4\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}+$
$+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta N}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{BN} =$
$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma})+$
$+2(\overrightarrow{\Delta N}+\overrightarrow{BN}) =$
$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+2\cdot\vec{O}+2\cdot\vec{O} =$
$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Αν $\vec{\alpha} = \binom{-1}{-3}$ και $\vec{\beta} = \binom{2}{4}$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.

Λύση

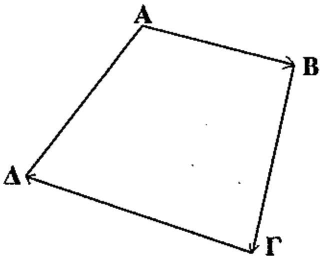
Είναι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \binom{-1}{-3} + \binom{2}{4} = \binom{-1+2}{-3+4} = ...$

και $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \binom{-1}{-3} + \binom{-2}{-4} = ...$

2. Έστω ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}$.

Λύση

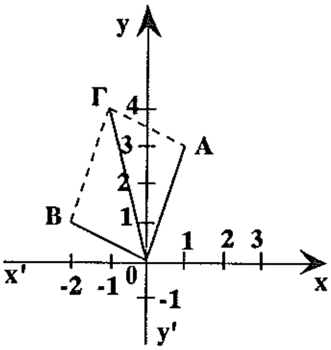


Είναι: $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta} = (\vec{AB}+\vec{B\Gamma})+\vec{\Gamma\Delta} = ...$

3. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{OA} = \binom{1}{3}$ και $\vec{OB} = \binom{-2}{1}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Λύση



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

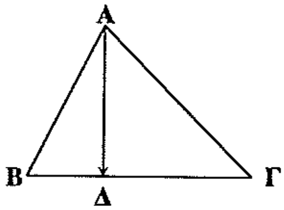
$\vec{O\Gamma} = \binom{-1}{4}$.

Εξάλλου και από τον ορισμό έχουμε:

$\vec{OA} + \vec{OB} = \binom{1}{3} + \binom{-2}{1} = ...$

4. Να υπολογίσετε από το παρακάτω σχήμα τα αθροίσματα:

α) $\vec{AB}+\vec{B\Delta}+\vec{\Delta A}$, β) $\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}+\vec{A\Delta}$.



Λύση

α) Είναι: $\vec{AB}+\vec{B\Delta}+\vec{\Delta A} = (\vec{AB}+\vec{B\Delta})+\vec{\Delta A} =$

$= \vec{A\Delta}+\vec{\Delta A} = ...$

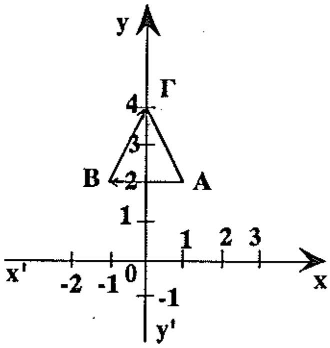
β) Είναι: $\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}+\vec{A\Delta} = (\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A})+\vec{A\Delta} =$

$= ....$

5. Δίνονται τα σημεία: Α(1, 2), Β(-1, 2) και Γ(0, 4). Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}$, β) $\vec{BA}+\vec{A\Gamma}$.

Λύση



Από το σχήμα βλέπουμε ότι:

$\vec{AB} = \binom{-2}{0}$, $\vec{B\Gamma} = \binom{1}{2}$, $\vec{A\Gamma} = \binom{-1}{2}$,

$\vec{BA} = \binom{2}{0}$.

Είναι λοιπόν: $\vec{AB}+\vec{B\Gamma} = \binom{-2}{0}+\binom{1}{2} = ...$

και $\vec{BA}+\vec{A\Gamma} = \binom{2}{0} + \binom{-1}{2} = ...$

6. Δίνονται τα σημεία Μ(1, 2) και Λ(-3, 1). Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος:

$\vec{OM}+\vec{OΛ}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση

Είναι: $\vec{OM}+\vec{OΛ} = \binom{1}{2}+\binom{-3}{1} = \binom{-2}{3}$.

Άρα: $|\vec{OM}+\vec{OΛ}| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = ...$

7. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, να βρείτε που βρίσκεται σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\vec{AΓ}+\vec{BM}+\vec{ΔB}+\vec{ΓΔ} = \vec{O}$.

Λύση

Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$\vec{AΓ}+\vec{BM}+\vec{ΔB}+\vec{ΓΔ} = \vec{O}$ ή

$(\vec{AΓ}+\vec{ΓΔ})+(\vec{ΔB}+\vec{BM}) = \vec{O}$ ή

$\vec{AΔ}+\vec{ΔM} = \vec{O}$ ή ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Αν $\vec{α}=\binom{5}{-1}$, $\vec{β}=\binom{-2}{3}$ και $\vec{γ}=\binom{-7}{1}$, να δείξετε ότι:

$\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ} = (\vec{α}+\vec{β})+\vec{γ} = \vec{α}+(\vec{β}+\vec{γ})$.

2. Αν Α, Β, Γ, Δ τέσσερα σημεία του επιπέδου, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\vec{AB}+\vec{ΓΔ}+\vec{BΓ}$, β) $\vec{AΓ}+\vec{ΓA}+\vec{AB}$.

3. Αν $\vec{KA}=\binom{-3}{-2}$ και $\vec{KB}=\binom{1}{4}$, να σχεδιάσετε και να βρείτε το άθροισμα $\vec{KA}+\vec{KB}$ και το μέτρο του.

4. Αν Μ το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι:

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MΓ} = \vec{O}$.

5. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{AΔ}=\binom{1}{-4}$ και $\vec{AΓ}=\binom{-3}{2}$.

Να τα σχεδιάσετε, να βρείτε το άθροισμά τους και το μέτρο τους, όπου Α τυχαίο σημείο του επιπέδου.

6. Αν Κ, Λ, Μ τα μέσα πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου, να δείξετε ότι:

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OΓ} = \vec{OK}+\vec{OΛ}+\vec{OM}$.

7. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ σημείο της ΒΓ. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\vec{ΔΓ}+\vec{MΔ}+\vec{AM}$,

β) $\vec{ΓM}+\vec{MB}+\vec{BΓ}+\vec{BΔ}$,

γ) $\vec{BΓ}+\vec{ΔM}+\vec{AB}+\vec{MA}$.

8. Δίνονται τα σημεία: Α(-3, 2), Β(1, 0) και Γ(-1, 4). Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\vec{AB}+\vec{BΓ}$, β) $\vec{BA}+\vec{AΓ}$, γ) $\vec{ΓB}+\vec{BA}$.

9. Αν Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεία μιας ευθείας, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\vec{ΓE}+\vec{ΔB}+\vec{AΓ}+\vec{BA}+\vec{EΔ}$.

β) $\vec{ΔB}+(-\vec{ΓΔ})+\vec{AE}+\vec{BΓ}+\vec{ΓA}+(-\vec{ΔE})$.

9.4 Αφαίρεση διανυσμάτων

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς ορίζεται η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν την ίδια αρχή;

2. Ποιες είναι οι συντεταγμένες της διαφοράς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$;

3. Με ποιο τρόπο η αφαίρεση διανυσμάτων ανάγεται σε πρόσθεση;

Απαντήσεις

1. Διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν την ίδια αρχή είναι το διάνυσμα που έχει αρχή το τέλος του $\vec{\beta}$ και τέλος το τέλος του $\vec{\alpha}$.

2. Αν $\vec{\alpha} = \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ και $\vec{\beta} = \binom{\beta_1}{\beta_2}$ τότε:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \binom{\alpha_1}{\alpha_2} - \binom{\beta_1}{\beta_2} = \binom{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_2}.$$

3. Προκειμένου να αφαιρέσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ από ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αρκεί να προσθέσουμε στο $\vec{\alpha}$ το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις διαφορές $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = \binom{-2}{4}$ και $\vec{\beta} = \binom{1}{-3}$. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Είναι: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \binom{-2}{4} - \binom{1}{-3} = \binom{-2-1}{4+3} =$

$= \binom{-3}{7}$ και

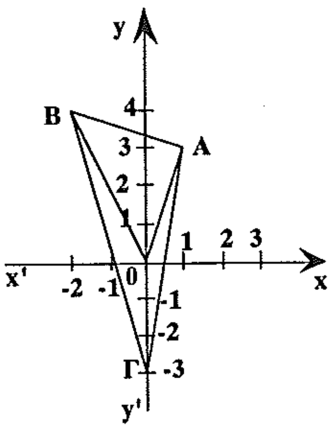
$\vec{\beta} - \vec{\alpha} = \binom{1}{-3} - \binom{-2}{4} = \binom{1+2}{-3-4} = \binom{3}{-7}$.

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ είναι αντίθετα.

2. Δίνονται τα σημεία: $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$ και $\Gamma(0, -3)$. Να σχηματίσετε τις διαφορές:

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA}$ και να βρείτε τα μέτρα τους.

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ και

$\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Έχουμε:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,

$|\overrightarrow{\Gamma B}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$,

$|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$.

3. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ πάνω σ' έναν άξονα. Να βρείτε τις διαφορές:

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$, ***β)*** $\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma}$, ***γ)*** $\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Gamma B}$,

δ) $\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{BA}$.

Λύση

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$.

β) $\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma} = \vec{O}$.

γ) $\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta B} + (-\overrightarrow{\Gamma B}) = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma} =$
$= \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

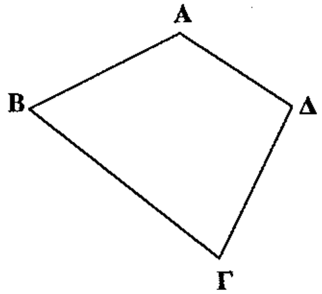
δ) $\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma A} + (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} =$
$= \overrightarrow{\Gamma B}$.

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τις διαφορές:

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$, ***β)*** $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma}$,

γ) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) - \overrightarrow{\Gamma B}$.

Λύση



α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} =$
$= 2\overrightarrow{AB}$.

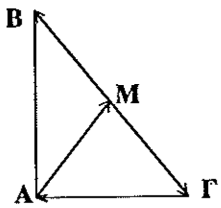
β) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + (-\overrightarrow{B\Gamma}) = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} =$
$= \overrightarrow{AB}$.

γ) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Gamma B} =$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + (-\overrightarrow{\Gamma B}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} =$
$= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$.

5. Αν Μ το μέσο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (γωνία Α = 90°), να δείξετε ότι:

$\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{M\Gamma}$.

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{AB}$ (1) και
$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{AM} + (-\overrightarrow{M\Gamma}) = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Gamma M} =$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ (2) (επειδή Μ μέσο του ΓΒ είναι: $\overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{MB}$).

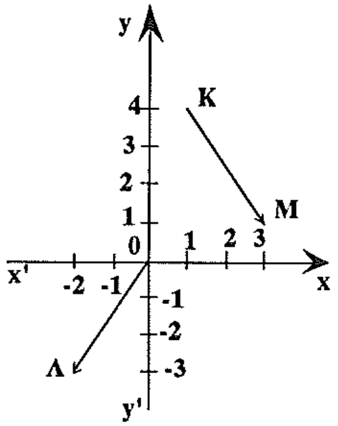
Οι σχέσεις (1) και (2) έχουν ίσα τα δεύτερα μέλη άρα θα έχουν ίσα και τα πρώτα μέλη. Οπότε:

$\overrightarrow{ΓΒ} - \overrightarrow{ΓΑ} = \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΜΓ}$.

6. Σ' ένα σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία: Κ(1, 4), Λ(- 2, - 3) και Μ(3, 1).
Να υπολογίσετε τη διαφορά

$\overrightarrow{ΚΜ} - \overrightarrow{ΟΛ}$ και να βρείτε το μέτρο της.

Λύση



Από το σχήμα βρίσκουμε ότι:

$\overrightarrow{ΚΜ} = \binom{2}{-3}$ και $\overrightarrow{ΟΛ} = \binom{-2}{-3}$.

Έχουμε λοιπόν:

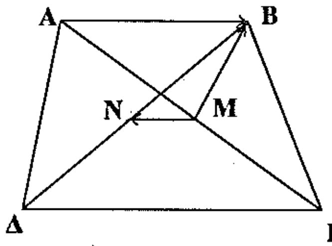
$\overrightarrow{ΚΜ} - \overrightarrow{ΟΛ} = \binom{2}{-3} - \binom{-2}{-3} = \binom{2+2}{-3+3} = \binom{4}{0}$.

$|\overrightarrow{ΚΜ} - \overrightarrow{ΟΛ}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$.

7. Αν ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$2\overrightarrow{ΜΝ} = \overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΓ}$.

Λύση



$\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΓ} = (\overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΜΝ} + \overrightarrow{ΝΒ}) - (\overrightarrow{ΔΝ} +$
$+ \overrightarrow{ΝΜ} + \overrightarrow{ΜΓ}) =$
$= \overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΜΝ} + \overrightarrow{ΝΒ} - \overrightarrow{ΔΝ} - \overrightarrow{ΝΜ} - \overrightarrow{ΜΓ} =$
$= (\overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΜΓ}) + (\overrightarrow{ΜΝ} - \overrightarrow{ΝΜ}) + (\overrightarrow{ΝΒ} - \overrightarrow{ΔΝ}) =$
$= \overrightarrow{ΜΝ} + (- \overrightarrow{ΝΜ}) = \overrightarrow{ΜΝ} + \overrightarrow{ΜΝ} = 2\overrightarrow{ΜΝ}$

($\overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΜΓ} = \vec{Ο}$ και $\overrightarrow{ΝΒ} - \overrightarrow{ΔΝ} = \vec{Ο}$ επειδή $\overrightarrow{ΑΜ} = \overrightarrow{ΜΓ}$ και $\overrightarrow{ΝΒ} = \overrightarrow{ΔΝ}$).

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α} = \binom{4}{-1}$ και $\vec{β} = \binom{0}{-3}$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{κ} = \vec{α} - \vec{β}$ και να βρεθεί το μέτρο του.

Λύση

Είναι: $\vec{κ} = \vec{α} - \vec{β} = \binom{4}{-1} - \binom{0}{-3} = \binom{4-0}{-1+3} =$

$= ....$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α} = \binom{1}{3}$, $\vec{β} = \binom{-2}{3}$ και $\vec{γ} = \binom{4}{-2}$. Να υπολογίσετε τα διανύσματα $\vec{κ} = \vec{α} - \vec{β} - \vec{γ}$,
$\vec{λ} = \vec{α} - (\vec{β} + \vec{γ})$, $\vec{μ} = (\vec{α} - \vec{β}) - \vec{γ}$.
Τι διαπιστώνετε;

Λύση

Είναι: $\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \binom{1}{3} - \binom{-2}{3} - \binom{4}{-2} =$

$= \binom{1+2-4}{3-3+2} = ...$

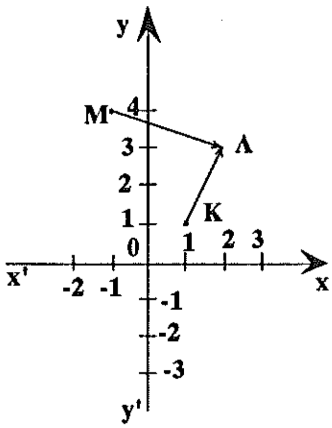
$\vec{\lambda} = \vec{\alpha} - (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \binom{1}{3} - [\binom{-2}{3} + \binom{4}{-2}] = ...$

$\vec{\mu} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - \vec{\gamma} = [\binom{1}{3} - \binom{-2}{3}] - \binom{4}{-2} = ...$

3. Δίνονται τα σημεία:
Κ(1, 1), Λ(2, 3) και Μ(-1, 4).
Να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

$\overrightarrow{ΚΛ}$ και $\overrightarrow{ΜΛ}$ και να υπολογίσετε τη διαφορά $\overrightarrow{ΚΛ} - \overrightarrow{ΜΛ}$.

Λύση



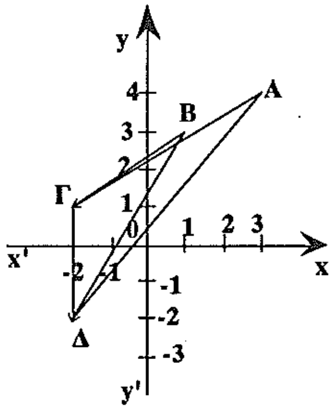
Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

$\overrightarrow{ΚΛ} = \binom{1}{2}$ και $\overrightarrow{ΜΛ} = \binom{3}{-1}$.

Άρα: $\overrightarrow{ΚΛ} - \overrightarrow{ΜΛ} = ...$

4. Σ' ένα σύστημα αξόνων να πάρετε τα σημεία Α(3, 4), Β(1, 3), Γ(-2, 1) και Δ(-2, -2). Αφού υπολογίσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΒΔ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$ να υπολογίσετε και τις διαφορές:
α) $\overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΒΔ}$, β) $\overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΓΔ}$.

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{ΑΔ} = \binom{-5}{-6}$, $\overrightarrow{ΑΓ} = \binom{-5}{-3}$, $\overrightarrow{ΒΓ} = \binom{-3}{-2}$,

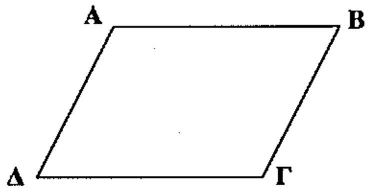
$\overrightarrow{ΒΔ} = \binom{-3}{-5}$ και $\overrightarrow{ΓΔ} = \binom{0}{-3}$.

α) $\overrightarrow{ΑΔ} - \overrightarrow{ΒΔ} = ...$

β) $\overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΓΔ} = (\overrightarrow{ΒΓ} - \overrightarrow{ΑΓ}) - \overrightarrow{ΓΔ} = ...$

5. Να σχηματίσετε ένα παραλληλόγραμμο και να συγκρίνετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΔΓ}$.

Λύση



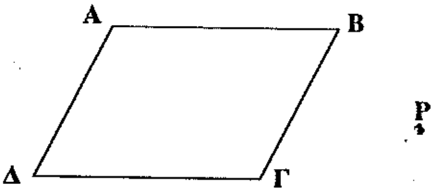
Είναι: $\overrightarrow{ΒΔ} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΒΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = ...$

και $\overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΑΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = ...$

6. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ εκτός αυτού. Να συγκρίνετε τα διανύσματα:

$\overrightarrow{ΡΑ} - \overrightarrow{ΡΓ} + \overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΡΒ} - \overrightarrow{ΡΔ} + \overrightarrow{ΒΑ}$.

Λύση



Είναι: $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} = ...$
και $\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{P\Delta} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BA} = ...$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Να βρείτε τις διαφορές $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και να συγκρίνετε τα μέτρα τους. Δίνονται $\vec{\alpha} = \binom{5}{-1}$, $\vec{\beta} = \binom{-4}{3}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \binom{-5}{1}$, $\vec{\beta} = \binom{1}{6}$ και $\vec{\gamma} = \binom{-3}{2}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\lambda} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$.

β) Να παραστήσετε τα $\vec{\kappa}$, $\vec{\lambda}$ σ' ένα σύστημα αξόνων.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\kappa}$, $\vec{\lambda}$.

3. Δίνονται τα σημεία:
A(3, 2), B(- 4, 1) και Γ(1, 4).
α) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

$\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες τους.
γ) Να αποδείξετε ότι:

$|\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{B\Gamma}|$.

4. Δίνονται τα σημεία:
A(1, - 2), B(- 3, 1) και Γ(3, - 2).
α) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

$\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{OB}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες τους.
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος

$\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{OB}$.

5. Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Να συγκρίνετε τα διανύσματα:

α) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA}$.

β) $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A}$.

6. Αν ΑΒΓΔ ρόμβος τότε ισχύει:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\ \overrightarrow{A\Gamma}$.

7. Αν ΑΒΓΔΕ πεντάγωνο τότε ισχύει:

$\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB}$.

9.5 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Πώς πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό μ' ένα διάνυσμα;

Απαντήσεις

1. Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό μ' ένα διάνυσμα, πολλαπλασιάζουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος με τον αριθμό αυτό.

Δηλαδή αν $\vec{\alpha} = \binom{x}{y}$ και λ ένας αριθμός τότε: $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \binom{\lambda x}{\lambda y}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ που προκύπτει έχει:

α) την ίδια διεύθυνση με τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$,

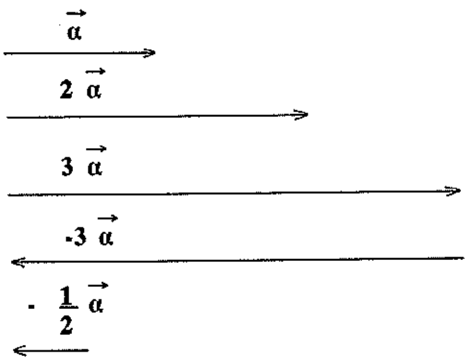
β) φορά ίδια με τη φορά του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ ή αντίθετη φορά αν $\lambda < 0$,

γ) μέτρο ίσο με $|\lambda|$ φορές το μέτρο του $\vec{\alpha}$ (δηλαδή: $|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$).

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα: $2\vec{\alpha}$, $3\vec{\alpha}$, $-3\vec{\alpha}$, $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$.

Λύση



Τα διανύσματα $2\vec{\alpha}$, $3\vec{\alpha}$, $-3\vec{\alpha}$, $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ έχουν ίδια διεύθυνση με το $\vec{\alpha}$. Οι αριθμοί 2, 3 είναι θετικοί άρα τα διανύσματα $2\vec{\alpha}$, $3\vec{\alpha}$ έχουν την ίδια φορά με το $\vec{\alpha}$. Οι αριθμοί -3, $-\frac{1}{2}$ είναι αρνητικοί άρα τα διανύσματα $-3\vec{\alpha}$, $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ έχουν αντίθετη φορά με το $\vec{\alpha}$.

Το διάνυσμα $2\vec{\alpha}$ έχει μέτρο διπλάσιο από το $\vec{\alpha}$. Το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ έχει μέτρο τριπλάσιο από το $\vec{\alpha}$. Όμοια και το $-3\vec{\alpha}$, ενώ το $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ έχει μέτρο το μισό του $\vec{\alpha}$.

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

$\vec{\alpha} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{7}{5}\vec{j}$ αν είναι $\vec{i} = \binom{1}{0}$ και $\vec{j} = \binom{0}{1}$.

Λύση

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται: $\vec{\alpha}=5\vec{i}-2\vec{j}=$

$=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+0\\0-2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, άρα $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γράφεται:

$\vec{\beta}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{7}{5}\vec{j}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{7}{5}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{7}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{7}{5}\end{pmatrix}$,

άρα $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{7}{5}\end{pmatrix}$.

3. Αν $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

$-3\vec{\alpha}$, $0\cdot\vec{\beta}$, $4\vec{\gamma}$, $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $-2\vec{\alpha}+6\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$.

Λύση

$-3\vec{\alpha}=-3\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$,

$0\cdot\vec{\beta}=0\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (σημείο),

$4\vec{\gamma}=4\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}$.

$2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$,

$-2\vec{\alpha}+6\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=-2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ και $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε:

$\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$.

Λύση

Ισχύει: $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$ ή $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ή

$\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$

Οπότε προκύπτει:

$2x=2$ ή $x=1$

$2y=-5$ ή $y=-\frac{5}{2}$

5. Αν $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε:

$x\vec{\alpha}-y\vec{\beta}=4\vec{\gamma}$.

Λύση

Ισχύει: $x\vec{\alpha}-y\vec{\beta}=4\vec{\gamma}$ ή

$x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ή

$\begin{pmatrix}2x\\3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3y\\-5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ ή

$\begin{pmatrix}2x-3y\\3x-5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

Οπότε προκύπτει το σύστημα:

$2x-3y=8$

$3x-5y=4$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι $x=28$ και $y=16$.

6. Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$ έτσι ώστε να ισχύει $3\vec{\gamma}-2\vec{\alpha}=\frac{1}{2}\vec{\beta}$.

Λύση

Έστω x, y οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$. Τότε θα είναι:

$3\vec{\gamma}-2\vec{\alpha}=\frac{1}{2}\vec{\beta}$ ή

$3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ ή

$\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ή

$\begin{pmatrix}3x+4\\3y-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

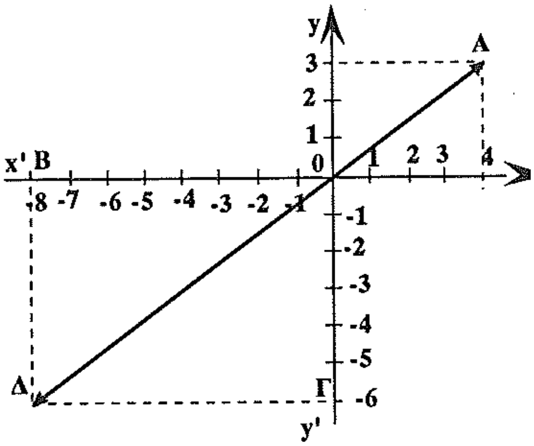
Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι:
$3x + 4 = -2$
$3y - 6 = 1$
Λύνουμε τις εξισώσεις:
$3x + 4 = -2$ ή $3x = -2 - 4$ ή
$3x = -6$ ή $x = -2$
και $3y - 6 = 1$ ή $3y = 1 + 6$ ή

$3y = 7$ ή $y = \frac{7}{3}$. Άρα $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

7. Αν $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν δύο διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ των αξόνων Ox και Oy αντιστοίχως ώστε $-2\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$.

Λύση

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του $-2\overrightarrow{OA}$.
$-2\overrightarrow{OA} = -2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$. Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$ ώστε $\overrightarrow{O\Delta} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$.



Φέρουμε τη ΔΒ κάθετη στην Ox και τη ΔΓ κάθετη στην Oy. Από το παραλληλόγραμμο ΟΒΓΔ έχουμε:

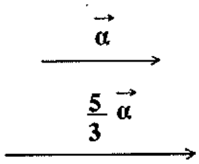
$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$ ή

$-2\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Να σχεδιάσετε διανύσματα ίσα με $\frac{5}{3}\vec{\alpha}$, $-3\vec{\alpha}$, $\frac{7}{2}\vec{\alpha}$.

Λύση



Τα διανύσματα $\frac{5}{3}\vec{\alpha}$, $\frac{7}{2}\vec{\alpha}$ έχουν ίδια διεύθυνση με το $\vec{\alpha}$ ενώ το $-3\vec{\alpha}$ αντίθετη ....

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = 3\vec{\kappa} + \vec{\lambda}$ και $\vec{\beta} = 5\vec{\kappa} - 4\vec{\lambda}$ αν είναι $\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Λύση

Ισχύει: $\vec{\alpha} = 3\vec{\kappa} + \vec{\lambda} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = ...$

και $\vec{\beta} = 5\vec{\kappa} - 4\vec{\lambda} = ...$

3. Δίνονται τα διανύσματα:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2y \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} -x \\ 10 \end{pmatrix}$.

Να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε:

$3\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Λύση

Από την ισότητα $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουμε:

$3\binom{3}{2y} = -2\binom{-x}{10}$ ή $\binom{9}{6y} = \binom{2x}{-20}$ ή ....

4. *Αν είναι* $\overrightarrow{AB} = \binom{1}{3}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \binom{1}{-5}$ *και* $\overrightarrow{EZ} = \binom{-1}{13}$, *να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε:*

$2x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ}$.

Λύση

Από την ισότητα $2x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ}$ έχουμε: $2x\binom{1}{3} + y\binom{1}{-5} = \binom{-1}{13}$ ή

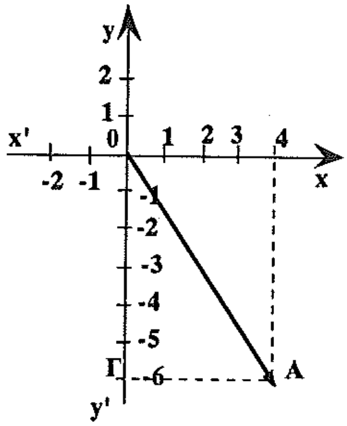
$\binom{2x}{6x} + \binom{y}{-5y} = \binom{-1}{13}$ ή

$\binom{2x+y}{6x-5y} = \binom{-1}{13}$ ....

5. *Αν* $\overrightarrow{OA} = \binom{4}{-6}$ *να βρεθούν δύο διανύσματα* $\overrightarrow{OB}$ *και* $\overrightarrow{O\Gamma}$ *των αξόνων Ox, Oy αντιστοίχως ώστε:*

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$.

Λύση



Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\binom{4}{-6} = \binom{-2}{3}$.

Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$ ώστε $\overrightarrow{O\Delta} = \binom{-2}{3}$ ....

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. *Να πάρετε ένα διάνυσμα* $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ *και να σχεδιάσετε τα διανύσματα* $-\vec{\alpha}$, $\frac{5}{4}\vec{\alpha}$, $-4\vec{\alpha}$, $4\vec{\alpha}$.

2. *Αν* $\vec{i} = \binom{1}{0}$ *και* $\vec{j} = \binom{0}{1}$ *να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:*

α) $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$, *β)* $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j}$, *γ)* $\vec{\gamma} = 5\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$, *δ)* $\vec{\delta} = 10\vec{i} + \frac{7}{4}\vec{j}$.

3. *Αν* $\vec{\alpha} = \binom{-2}{-2}$, $\vec{\beta} = \binom{0}{3}$ *και* $\vec{\gamma} = \binom{1}{1}$, *να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:*

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$ *και* $-3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\gamma}$.

4. Αν $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε:
$x\vec{\alpha} - y\vec{\beta} = 76\vec{\gamma}$.

5. Να βρεθούν οι αριθμοί κ, λ ώστε:
$5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ όπου $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\kappa \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -4 \end{pmatrix}$.

6. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ του άξονα x'x και $\overrightarrow{O\Gamma}$ του άξονα y'y ώστε να είναι: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{O\Gamma}$.

7. Αν $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος:
$\vec{u} - 3\vec{w}$, όπου $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{w} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

8. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -8\vec{i} - 6\vec{j}$ όπου $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να πάρετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων x'x, y'y. Αν A(- 5, 3) να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ και το $-\overrightarrow{OA}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες που έχει το πέρας του $-\overrightarrow{OA}$.

2. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα, όπου $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 5x-y \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-y \end{pmatrix}$.

3. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να βρείτε τα διανύσματα:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma O}$,

β) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$,

γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ.
α) Να συγκρίνετε τα διανύσματα:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) Να βρείτε τα αθροίσματα:
$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

5. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι:
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MO}$,
όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ.

6. Αν είναι $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος Χ, όταν:

α) $\vec{X} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$,

β) $3\vec{X} - 2\vec{\alpha} = 7\vec{\beta}$,

γ) $2\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{X} = 5\vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε και το μέτρο του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο

Η σφαίρα

10.1 Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Ποιοι τύποι δίνουν το εμβαδόν και τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας R;

Απαντήσεις

1. Το εμβαδόν σφαίρας είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας και δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = 4\pi \cdot R^2}$$

Ο όγκος σφαίρας δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

10. 2 Σχετικές θέσεις σφαίρας - επιπέδου

Θεωρία

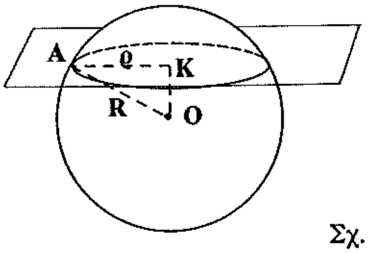
Ερωτήσεις

1. Κατά ποιους τρόπους μπορεί να συνυπάρχουν στο χώρο μια σφαίρα και ένα επίπεδο;

Απαντήσεις

1. Μία σφαίρα και ένα επίπεδο μπορεί να συνυπάρχουν κατά τρεις τρόπους στο χώρο.

α) Το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα



Σχ. 1

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η τομή του επιπέδου και της σφαίρας είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας ΚΑ και κέντρου Κ. Αν ΟΚ η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας τότε η ακτίνα ΚΑ του κύκλου υπολογίζεται ως εξής:
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΑ (γωνία Κ = 90°) σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$KA^2 = AO^2 - KO^2$ ή

$\varrho^2 = R^2 - KO^2$ ή

$\varrho^2 = \sqrt{R^2 - KO^2}$

β) Το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα

Σ' αυτή την περίπτωση η τομή του επιπέδου και της σφαίρας είναι ένα σημείο. Η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας εδώ είναι όση η ακτίνα της σφαίρας.

γ) Το επίπεδο δεν τέμνει τη σφαίρα

Σ' αυτή την περίπτωση η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία. Η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το επίπεδο είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα της σφαίρας.

2. Τι είναι μέγιστος κύκλος;

2. Μέγιστος κύκλος της σφαίρας ονομάζεται ο κύκλος που σχηματίζεται από την τομή της σφαίρας και ενός επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της.
(Διότι τότε (Σχ. 1) η απόσταση ΟΚ είναι μηδέν. Άρα:

$\varrho^2 = \sqrt{R^2 - 0^2} = \sqrt{R^2} = R$.)

Α. Λυμένες ασκήσεις

1. Να εκφράσετε τους τύπους του εμβαδού και του όγκου της σφαίρας συναρτήσει της διαμέτρου D της σφαίρας.

Λύση

Το εμβαδόν της σφαίρας δίνεται από

τον τύπο $E = 4\pi R^2$. Επειδή όμως:

$D = 2R$ ή $R = \frac{D}{2}$ έχουμε:

$E = 4\pi \cdot (\frac{D}{2})^2 = 4\pi \cdot \frac{D^2}{4} = \pi D^2$.

Ομοίως για τον όγκο $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ έχουμε:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{D}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6}$.

2. Δίνεται σφαίρα ακτίνας $R = 3$ cm. Να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος της.

Λύση

Είναι: $E = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 4\pi \cdot 9 =$
$= 36\pi$ cm^2 και

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$ cm^3.

Παρατηρούμε ότι όταν η ακτίνα της σφαίρας είναι 3 μονάδες μήκους, τότε ο όγκος και το εμβαδόν της σφαίρας συμπίπτουν αριθμητικά.

3. Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο ημισφαιρίου ακτίνας $R = 4$ m.

Λύση

Είναι: $E_{ημ.} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi \cdot 4^2 = 2\pi \cdot 16 =$

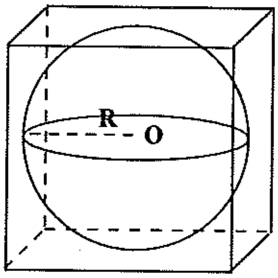
$= 32\pi$ m^2 και

$V_{ημ.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 64 =$

$= \frac{128}{3}\pi$ m^3.

__Σημείωση:__ Είναι προτιμότερο στα προβλήματα υπολογισμού εμβαδού ή όγκου σφαίρας να μην αντικαθιστούμε το π με το 3,14.

4. Η σφαίρα του επόμενου σχήματος εφάπτεται ακριβώς στα τοιχώματα του κύβου που έχει πλευρά $α = 6$ m. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ της επιφάνειας της σφαίρας και του κύβου.



α=6m

Λύση

Εφόσον η σφαίρα εφάπτεται ακριβώς στον κύβο, τότε η διάμετρός της είναι: $D = α = 6$ m. Άρα $R = 3$ m.
Είναι: $V_{στ.} = V_{κύβου} - V_{σφαίρας}$ (1).
Έχουμε: $V_{κύβου} = α^3 = 6^3 = 216$ m^3

και $V_{σφαίρας} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi =$

$= 36 \cdot 3{,}14 \cong 113$ m^3.

Άρα $V_{στ.} = 216 - 113 = 103$ m^3.

5. Να βρεθεί το εμβαδόν της τομής επιπέδου και σφαίρας (O, $R = 5$ m), όταν το επίπεδο απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση $d = 3$ m.

Λύση

Όταν το επίπεδο απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση μικρότερη από την ακτίνα της σφαίρας τότε η τομή είναι κυκλικός δίσκος ακτίνας:

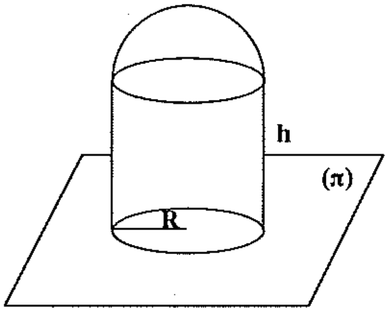
$ρ^2 = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} =$

$= \sqrt{16} = 4$ m.

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι: $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ m^2.

6. Ημισφαίριο εφάπτεται ακριβώς στη βάση του κυλίνδρου του σχήματος ακτίνας $R = 2$ m και ύψους $h = 5$ m. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος.

Λύση



Το εμβαδόν του ημισφαιρίου είναι το μισό του εμβαδού της σφαίρας. Άρα:

$$E_1 = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi \cdot R^2 = 2\pi \cdot 2^2 = 2\pi \cdot 4 =$$

$$= 8 \cdot 3,14 = 25,12\ m^2.$$

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι:

$$E_2 = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 20\pi =$$

$$= 20 \cdot 3,14 = 62,8\ m^2.$$

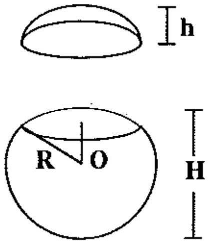
Άρα: $E_0 = E_1 + E_2 = 25,12 + 62,8 =$

$$= 87,92\ m^2.$$

7. Ο τύπος που δίνει τον όγκο σφαιρικού τμήματος ύψους h είναι:

$V = \pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$ όπου R η ακτίνα της σφαίρας. Να βρεθεί ο όγκος των δύο σφαιρικών τμημάτων του σχήματος. Δίνονται: R = 3m, h = 0,9m.

Λύση



Είναι: $V_\mu = \pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3 =$

$$= \pi \cdot 3 \cdot 0,9^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 0,9^3 =$$

$$= 2,43\pi - 0,243\pi = 2,187\pi\ m^3$$

και $V_M = \pi R H^2 - \frac{1}{3}\pi H^3 =$

$$= \pi \cdot 3 \cdot (6 - 0,9)^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot (6 - 0,9)^3 =$$

$$= \pi \cdot 3 \cdot 5,1^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5,1^3 =$$

$$= 78,03\pi - 44,217\pi = 33,813\pi\ m^3$$

Εξάλλου $V_{\sigma\varphi.} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi\ m^3$.

Παρατηρούμε ότι: $V_{\sigma\varphi.} = V_\mu + V_M$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η ποσότητα χρώματος που χρειάζεται για να βαφεί σφαιρική δεξαμενή ακτίνας R = 10 m, όταν ένα κιλό χρώματος βάφει επιφάνεια 8 m².

Λύση

Το εμβαδόν της επιφάνειας που θα βαφεί είναι:

$$E = 4\pi \cdot R^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^2 = 1256\ m^2$$

......

2. Πόσα κυλινδρικά δοχεία ακτίνας R = 0,25 m και ύψους H = 0,5 m με νερό χρειάζονται για να γεμίσουν ημισφαιρική δεξαμενή ακτίνας ρ = = 10 m.

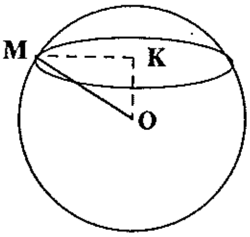
Λύση

Ο όγκος κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

$$V_\kappa = \pi R^2 H = \pi \cdot 0,25^2 \cdot 0,5 = ...$$

3. Να βρείτε την απόσταση επιπέδου (Π) από το κέντρο σφαίρας ακτίνας R = 10 cm², όταν η ακτίνα του κυκλικού δίσκου που είναι η τομή του επιπέδου και της σφαίρας είναι ρ = 6 cm².

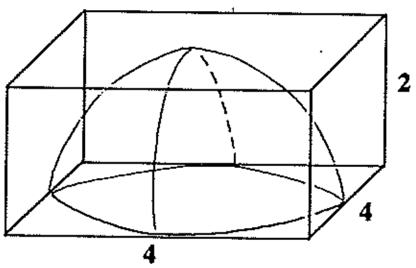
Λύση



Το τρίγωνο ΟΚΜ είναι ορθογώνιο (γωνία $K = 90°$). Άρα από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$OM^2 = MK^2 + OK^2$ ή
$R^2 = \rho^2 + OK^2$ ......

4. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και του ημισφαιρίου του σχήματος.

Λύση



Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:
$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
και ο όγκος του ημισφαιρίου είναι:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = ...$$

5. Να βρείτε το λόγο των όγκων σφαίρας και του περιγεγραμμένου σ' αυτή κύβου.

Λύση

Ο περιγεγραμμένος κύβος σε σφαίρα είναι ο κύβος του οποίου οι έδρες εφάπτονται στην επιφάνεια της σφαίρας όπως στο σχήμα της λυμένης άσκησης 4.

$$\text{Είναι: } \frac{V_{\text{σφαίρας}}}{V_{\text{κύβου}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = ...$$

6. Η τομή σφαίρας ακτίνας R = 7 m και επιπέδου είναι κυκλικός δίσκος εμβαδού 113,04 m². Να βρεθεί η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από τον κυκλικό δίσκο.

Λύση

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \pi \rho^2 \text{ οπότε: } \rho^2 = \frac{E}{\pi} = ...$$

7. Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 144π m². Να βρεθεί ο όγκος της.

Λύση

Είναι: $E = 4\pi R^2$ οπότε:

$$R^2 = \frac{E}{4\pi} \text{ ή } R = \sqrt{\frac{E}{4\pi}} = ...$$

8. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου σφαίρας εμβαδού E = 1256 cm².

Λύση

Το εμβαδόν της σφαίρας είναι:
$E = 4\pi R^2$.
Το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου είναι: $E = \pi R^2$ ......

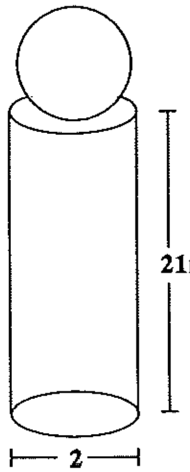
Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Μ' ένα κουτί χρώμα μπορούμε να βάψουμε σφαίρα ακτίνας 2 m. Πόσα κουτιά χρώμα θα χρησιμοποιήσουμε για να βάψουμε σφαίρα ακτίνας 14 m;

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που είναι τομή σφαίρας ακτίνας R = 10 m και επιπέδου που απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση d = 8 m.

3. Αν ο όγκος μιας σφαίρας είναι $V = 2143,573\ m^3$, να βρεθεί η ακτίνα της και το εμβαδόν της.

4. Να βρείτε την επιφάνεια του σχήματος.



5. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου σφαίρας όγκου $3052,08\ m^3$.

6. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της σφαίρας που είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο, είναι ίσο με το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

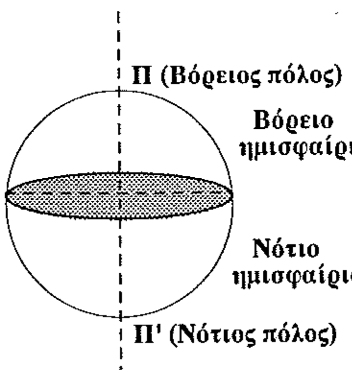
7. Η τομή επιπέδου που απέχει από το κέντρο μιας σφαίρας απόσταση $d = 16\ m$ είναι κυκλικός δίσκος εμβαδού $E = 144\pi\ m^2$. Να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος της σφαίρας.

10.3 Η γήινη σφαίρα

Θεωρία

Ερωτήσεις

1. Κάνετε μια σύντομη περιγραφή της γήινης σφαίρας.



Απαντήσεις

1. Έχει εξακριβωθεί ότι η γη μας δεν είναι τέλεια σφαίρα, αλλά είναι περισσότερο πεπλατυσμένη στους πόλους. Παραδεχόμαστε όμως ότι είναι σφαιρική και γι' αυτό την ονομάζουμε **γήινη σφαίρα** ή **υδρόγειο σφαίρα**.
Η γη περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό άξονα του οποίου τα σημεία τομής με τη γη ονομάζουμε **Βόρειο** και **Νότιο πόλο**.
Το μέγιστο κύκλο που το επίπεδό του είναι κάθετο στο νοητό αυτό άξονα τον ονομάζουμε **Ισημερινό**.
Ο Ισημερινός χωρίζει τη γη σε δύο ημισφαίρια, το **Βόρειο ημισφαίριο (N)** και το **Νότιο ημισφαίριο (S)**.
Όλοι οι μέγιστοι κύκλοι που έχουν διάμετρο τα σημεία Π και Π' των πόλων ονομάζονται **μεσημβρινοί**. Κάθε ένας από αυτούς τους μέγιστους κύκλους που περνούν από έναν τόπο Τ ονομάζεται **μεσημβρινός του τόπου Τ**.

Παρατήρηση:
N: από την αγγλική λέξη North που σημαίνει Βορράς.
S: από την αγγλική λέξη South που σημαίνει Νότος.

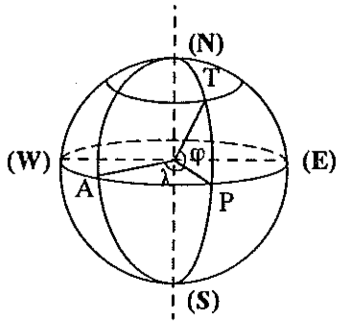
2. Πώς ορίζεται ο πρώτος μεσημβρινός;

2. Ο μεσημβρινός που περνά από το αστεροσκοπείο του Greenwich (Γκρήνουϊτς) ονομάζεται **πρώτος μεσημβρινός.**

Ο πρώτος μεσημβρινός χωρίζει τη γη σε δύο ημισφαίρια, το **ανατολικό (Ε)** και το **δυτικό (W).**

Παρατήρηση:
Ε: από την αγγλική λέξη East (ανατολή).
W: από την αγγλική λέξη West (δύση).

3. Τι είναι γεωγραφικό μήκος;



3. Η επίκεντρη γωνία λ που σχηματίζεται από τα σημεία Α και Ρ λέγεται **γεωγραφικό μήκος του τόπου Τ.** Όπου Α είναι το σημείο τομής του πρώτου μεσημβρινού με τον ισημερινό και Ρ το σημείο τομής του μεσημβρινού που περνά από τον τόπο με τον ισημερινό.
Το γεωγραφικό μήκος είναι ανατολικό (Ε) αν ο τόπος βρίσκεται στο ανατολικό ημισφαίριο ή δυτικό (W), αν ο τόπος βρίσκεται στο δυτικό ημισφαίριο. Μετριέται δε σε μοίρες, από 0° έως 180°.

4. Τι είναι το γεωγραφικό πλάτος;

4. Η επίκεντρη γωνία φ που σχηματίζεται από τα σημεία Τ και Ρ λέγεται **γεωγραφικό πλάτος του τόπου Τ.**

Όπου Τ το σημείο που χαρακτηρίζει τον τόπο Τ. Το γεωγραφικό πλάτος είναι βόρειο (Ν), αν ο τόπος βρίσκεται στο βόρειο ημισφαίριο ή νότιο (S), αν ο τόπος βρίσκεται στο νότιο ημισφαίριο. Μετριέται δε σε μοίρες από 0° έως 90°.

5. Ποιες είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες ενός τόπου;

5. Το γεωγραφικό μήκος και το γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου είναι οι γεωγραφικές συντεταγμένες του.

6. Τι είναι οι παράλληλοι κύκλοι;

6. Οι κύκλοι που είναι παράλληλοι προς το επίπεδο του ισημερινού λέγονται **παράλληλοι κύκλοι.**
Από κάθε τόπο περνά ένας παράλληλος κύκλος που λέγεται **παράλληλος του τόπου Τ.**

Α. Λυμένες ασκήσεις

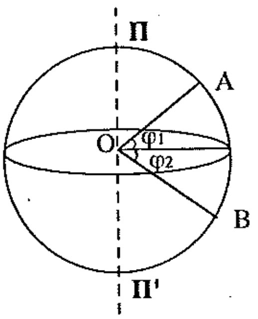
1. Τι εννοούμε όταν γράφουμε: Αθήνα (24°Ε, 38°Ν).

Λύση

Γράφοντας Αθήνα (24°Ε, 38°Ν) εννοούμε ότι η Αθήνα έχει γεωγραφικό μήκος 24° ανατολικό και 38° γεωγραφικό πλάτος βόρειο.

2. Δύο τόποι Α και Β έχουν γεωγραφικές συντεταγμένες Α(35°Ε, 28°Ν) και Β(35°Ε, 32°S).
α) Δικαιολογείστε ότι βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό και
β) βρείτε την επίκεντρη γωνία που σχηματίζεται από το τόξο ΑΒ.

Λύση



α) Παρατηρούμε ότι οι δύο τόποι Α και Β έχουν το ίδιο γεωγραφικό μήκος λ = 35° και βρίσκονται στο ανατολικό ημισφαίριο Ε. Επομένως βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό.
β) Η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ που αντιστοιχεί στο τόξο ΑΒ είναι:
$AOB = \varphi_1 + \varphi_2 = 28° + 32° = 60°$.

3. Στην παραπάνω άσκηση βρείτε το μήκος του μεσημβρινού και το μήκος του τόξου ΑΒ ($R_{ΓΗΣ} = 6370$ km).

Λύση

Το μήκος του μεσημβρινού είναι:

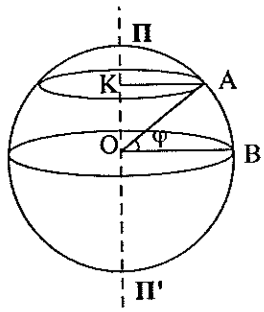
$$\lambda = \frac{2\pi R}{2} = \pi \cdot R = 3{,}14 \cdot 6370 = 20.001{,}8 \text{ km}$$

και το μήκος του τόξου ΑΒ είναι:

$$|AB| = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{3{,}14 \cdot 6370 \cdot 60°}{180°} = $$
$$= 6.667{,}27 \text{ km}.$$

4. Η Αθήνα έχει γεωγραφικό πλάτος φ = 38°Ν. Να βρεθεί το μήκος του παράλληλου που περνά από αυτή ($R_{ΓΗΣ} = 6370$ km).

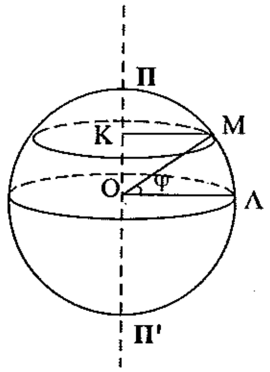
Λύση



Ο παράλληλος που περνά από την Αθήνα είναι κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΑ. Το τμήμα ΚΑ είναι παράλληλο προς το τμήμα ΟΒ. Άρα γωνία ΟΑΚ = φ = 38°. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΟ έχουμε ότι:
ΚΑ = ΟΑ · συνφ = R · συνφ =
= 6370 · συν38° = 6370 · 0,788 =
= 5019,6.
Άρα το μήκος του παραλλήλου είναι:
$\lambda = 2\pi \cdot KA = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5019{,}6 =$
$= 31.522{,}8$ km.

5. Ένας παράλληλος έχει μήκος 18.000 km. Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος των τόπων που βρίσκονται σ' αυτό τον παράλληλο. ($R_{ΓΗΣ} = 6370$ km)

Λύση



Το μήκος του παραλλήλου είναι $\lambda = 2\pi\varrho$, όπου $\varrho = KM$. Άρα:

$$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{18.000}{2 \cdot 3,14} = 2.866,24 \text{ km}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΟ είναι:

$\text{συνφ} = \frac{KM}{OM} = \frac{\varrho}{R}$ (όπου φ το γεωγραφικό πλάτος γιατί ΚΜ // ΟΛ).

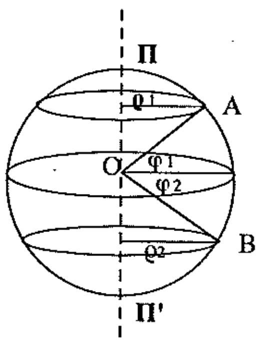
Άρα $\text{συνφ} = \frac{2866,24}{6370} = 0,499$ οπότε

$\hat{\varphi} \cong 63°$.

Β. Μισο...λυμένες ασκήσεις

1. Δύο τόποι έχουν γεωγραφικές συντεταγμένες Α(51°W, 22°N) και Β (51°W, 30°S). Να δικαιολογήσετε ότι βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό και να βρείτε το μήκος του τόξου ΑΒ ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).

Λύση



Είναι: $\lambda_1 = \lambda_2 = 51°$. Βλέπουμε ότι έχουν το ίδιο γεωγραφικό μήκος, άρα βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό. Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο ΑΒ είναι:

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 22° + 30° = 52°$.

Το μήκος του τόξου ΑΒ είναι:

$$|AB| = \frac{\pi R \mu}{180°} = ...$$

2. Αν $R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km, βρείτε το μήκος των παραλλήλων που περνούν από τους τόπους Α και Β.

Λύση

α) Από τη λυμένη άσκηση 5 βλέπουμε ότι: $\lambda = 2\pi \cdot \varrho_1 = 2\pi \cdot R \cdot \text{συνφ}_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 6370 \cdot 0,927 = ...$

β) Ομοίως: $\lambda = 2\pi R \cdot \text{συνφ}_2 = ...$

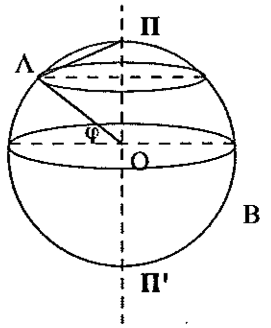
3. Αν το μήκος ενός παραλλήλου είναι 25.000 km, να βρείτε το γεωγραφικό πλάτος των τόπων από τους οποίους περνάει ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).

Λύση

Από τον τύπο της προηγούμενης άσκησης είναι: $\lambda = 2\pi R \cdot \text{συνφ}$ τότε $\text{συνφ} = ...$

4. Αν ανοίξουμε μία υπόγεια σήραγγα που να ενώνει το Λονδίνο (0°, 52°N) με το Βόρειο πόλο, να βρείτε το μήκος της σήραγγας. Το πλάτος της σήραγγας να θεωρηθεί αμελητέο ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).

Λύση



Το μήκος που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι το ΛΠ. Η επίκεντρη γωνία που βλέπει το τόξο ΛΠ είναι: $\varphi_1 = 90° - \varphi = 90° - 52° = 38°$.

Το τρίγωνο ΛΟΠ είναι ισοσκελές, άρα:

$$\frac{ΛΠ}{2} = R \cdot ημ\frac{\varphi_1}{2} \text{ ή } ΛΠ = 2R \cdot ημ\frac{\varphi_1}{2} =$$

$= ....$

Γ. Προτεινόμενες ασκήσεις

***1.** Τι εννοούμε ότι ένας τόπος βρίσκεται:*
α) (32°W, 5°N),
β) (39°W, 48°S),
γ) (61°E, 54°N),
δ) (50°E, 37°N).

***2.** Ποιο είναι το μήκος της υπόγειας σήραγγας που θα μπορούσε να ενώσει το Παρίσι μ' έναν τόπο του ισημερινού με το ίδιο γεωγραφικό μήκος; Δίνεται: Παρίσι(2°E, 50°N) και $R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km.*

***3.** Δύο τόποι K(48°E, 51°N) και Λ (25°E, 25°N) πρέπει να ενωθούν με αεροπορική γραμμή. Να βρείτε την απόσταση από τον τόπο K στον τόπο Λ αεροπορικώς, αν το ύψος που θα πετά το αεροπλάνο θεωρηθεί αμελητέο ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).*

***4.** Να βρεθεί το γεωγραφικό πλάτος που έχουν οι πόλοι της Γης και ο ισημερινός.*

***5.** Ένας τόπος Γ έχει γεωγραφικές συντεταγμένες (20°E, 45°S). Να βρεθεί το μήκος του παραλλήλου που περνά από αυτό τον τόπο.*

***6.** Να βρείτε το γεωγραφικό πλάτος του παραλλήλου που περνά από έναν τόπο T αν το μήκος του παραλλήλου είναι:*
α) 20.000 km,
β) 22.000 km.
Δίνεται: $R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km.

Δ. Επαναληπτικές ασκήσεις

***1.** Να βρεθεί το μήκος του ισημερινού ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).*

***2.** Αν το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι 1.017,87 m^2, να βρεθεί ο όγκος της.*

***3.** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ της περιγεγραμμένης και της εγγεγραμμένης σε κύβο πλευράς α = 2 m, σφαίρας.*

***4.** Να βρεθεί ο όγκος της Γης ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).*

***5.** Ένας τόπος έχει γεωγραφικές συντεταγμένες (30°E, 52°N). Να βρείτε την απόσταση του αεροπορικώς από το Βόρειο πόλο και τον Ισημερινό ($R_{ΓΗΣ}$ = 6370 km).*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο

BASIC 12

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν μιας σφαίρας δίνεται από τον τύπο: $E = 4\pi R^2$ και ο όγκος της από τον τύπο: $V = 4/3\ \pi R^3$. Άρα το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει το εμβαδόν και τον όγκο μιας σφαίρας αν εμείς του δώσουμε την ακτίνα του.

```
10 INPUT R              (↵)
20 LET E = 4*PI*R↑2     (↵)
30 LET V = 4/3*PI*R↑3   (↵)
40 PRINT V, E           (↵)
50 GO TO 10             (↵)
```

Παρατηρήστε ότι το παραπάνω πρόγραμμα δεν τελειώνει ποτέ. Μόλις τυπώσει τα E και V (γραμμή 40) πηγαίνει πάλι στη 10 περιμένοντας νέο R (λόγω της 50).

Ασκήσεις

1. Μετατρέψτε το παραπάνω πρόγραμμα έτσι ώστε να σταματά μετά από 5 επαναλήψεις.

2. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα όπου εμείς θα δίνουμε την ακτίνα R μιας σφαίρας και την απόσταση κ του κέντρου της από επίπεδο (ρ) και θα υπολογίζει πόσα κοινά σημεία έχει η σφαίρα με το επίπεδο.

Το «Basic 12» ήταν το τελευταίο του βιβλίου. Σίγουρα δεν μάθατε τα πάντα γύρω από τη Basic. Άλλωστε δεν ήταν αυτός ο σκοπός μας.

Αν όμως σας κεντρίσαμε έστω και λίγο ώστε να αγοράσετε κάποιο βιβλίο ειδικό για Basic τότε αισθανόμαστε πλουσιότεροι σαν άνθρωποι και σαν δάσκαλοι.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β = Μισολυμένες ασκήσεις
Γ = Προτεινόμενες ασκήσεις
Δ = Επαναληπτικές ασκήσεις

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Β. 1. α) 2, β) 2, γ) 7/3, **2.** α) - 15, β) 11, γ) 77, **3.** α) - 5/6, β) 43/30, γ) 49/15, **4.** α) 2, β) - 14, **5.** α) - 18/5, β) 1/4, **6.** α) - 5/2, β) - 19/40, **7.** α) - 69, β) - 12
Γ. 3. α) - 2, β) - 7/6, γ) - 1, **4.** α) 13, β) - 7/3, γ) - 3, **5.** α) 11/2, β) 103/48, γ) - 129/12, **6.** α) 2, β) - 6/5, **7.** α) - 31/5, β) 7/8, γ) 13/6, **8.** α) 9, β) - 8/3, γ) - 2/3, δ) 21/2, **9.** α) 8, β) 8, γ) - 54

1.2 Β. 1. α) - 5, β) 17, γ) - 18, δ) 19, **2.** α) 9, β) 27, γ) - 1/8, δ) 32, **3.** α) 2^6, β) 16, γ) 1, δ) - 2/3, **4.** α) 3^6, β) 2^6, γ) $(1/2)^8$, δ) - $1/2^6$, **5.** α) - 6, β) - 81/4, γ) 9, δ) 6, **6.** α) -2, β) 704, γ) 97, δ) 46, **7.** α) $\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta$, β) $\dfrac{\alpha^7\cdot\beta^4\cdot\gamma^3}{3}$, γ) $\dfrac{\alpha^2\gamma^2}{9\beta^2}$, δ) $6\alpha^4\beta^3\gamma^3$, **8.** α) $\alpha^{14}\beta^{-8}\gamma^{-2}$, β) $\alpha^6\beta^{-3}\gamma^{-4}$, **9.** α) $\alpha^6\beta^{-9}$, β) $\alpha^7\beta^{-3}$, **10.** α) - 1, β) - 7, γ) 1, δ) 6, **11.** α) 10, β) 10^{-2}, γ) 10^{-1}, δ) 10^{-1}, **12.** α) 10^{-2}, β) 10^2
Γ. 1. α) α^{13}, β) x^4, γ) 1, δ) β^2, ε) α^{-2}, στ) y^{17}, ζ) γ^2, **2.** α) - 1/3, β) 1/4, γ) 8, δ) 4, ε) 1/64, στ) - 8/27, ζ) 25, **3.** α) -3^3, β) 2^{-3}, γ) 11^2, δ) -2^{-3}, ε) - 5/2, **4.** α) $4\alpha^5$, β) $\alpha^6\beta^{-3}$, γ) α^{-2}, δ)$\alpha^2\beta^2$, ε) $\alpha^4\beta\gamma^{-2}$, **5.** α) α^5, β) x^5, γ) x^{-1}, **6.** α) $2y^{-5}$, β) 5/3 x^5y^2, **7.** α) 4/3 $x^{-4}y^{-6}$, β) $z^{11}x^{-8}y^{-4}$, **8.** α) 3, β) 0, γ) 0, δ) 7, **9.** α) 10^{-1}, β) 10^{-5}, γ) 10^2, δ) 10^{-1}, **10.** α) 100, β) 10, γ) 0,01, **11.** α) x^4, β) x^{-3}

1.3 Β. 1. α) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, β) $6\sqrt{6}-3\sqrt{3}$, **2.** α) 12, β) 21, γ) 26, **3.** α) 3, β) 12, γ) 9, **4.** α) $30\sqrt{30}$, β) 144, **5.** α) $\dfrac{71}{18}\sqrt{3}$, β) $\dfrac{421}{60}\sqrt{5}$, **6.** α) $3\sqrt{15}-27$, β) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}-18$ **7.** α) 1, β) 6, **8.** α) $37-4\sqrt{15}$, β) $38+16\sqrt{2}$, **9.** 6
Γ. 3. α) $7\sqrt{3}-\sqrt{7}$, β) $-\sqrt{6}$, γ) $-17\sqrt{2}-18\sqrt{3}$, **4.** α) 15, β) 9, γ) 4, **5.** α) 4, β) 5, γ) 9, **6.** α) $\dfrac{\alpha}{\beta}$, β) $\dfrac{6}{\alpha}$, γ) $\dfrac{1}{2x}$, **7.** α) 3, β) 10, γ) 22, δ) - 18, **8.** α) $4-\sqrt{5}$, β) $-2-3\sqrt{5}$, γ) $-9-\sqrt{5}$, **9.** α) $\sqrt{5}$, β) $2\sqrt{7}$, γ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, δ) $\dfrac{x\sqrt{x+y}}{x+y}$, **10.** α) $4\sqrt{2}-8$, β) 26, γ) 432, δ) $\sqrt{10}-1$, ε) 34, στ) $\sqrt{3}$

1.4 Β. 6. $x > -5/3$, **7.** α) $x < 4/7$, β) $x > -12$, **8.** $x < 2/3$
Γ. 10. α) $x < -17/6$, β) $x < 4$, 11. α) $x < -8$, β) δε συναληθεύουν

Δ. 1. α) 1, β) - 32, **2.** α) - 14, β) - 24, γ) 20, **3.** α) 118, β) 41/72, **4.** α) 4/9, β) - 275/6, **5.** α) 8, β) 264, **6.** α) - 29/4, β) - 10/3, **7.** α) $x^7y^{-2}\omega^{-6}$, β) ω^8yx^{-5}, **8.** α) 49, β) x^2, γ) $2x^3$, δ) $4\alpha^4$, **9.** α) 6, β) 3α, γ) $\dfrac{5}{x}$, δ) $4xy$, **10.** α) $x+2-2\sqrt{x}$, β) -25, γ) $\alpha-\beta$, δ) $\frac{8\sqrt{3}}{121}$, **14.** α) $x < -\frac{7}{3}$, β) $x < -7$

Κεφάλαιο 2ο

2.1 **B. 1.** α) $6x^3$, β) $-2x^3y^4$, γ) $\frac{1}{2}\alpha^3y^2$, δ) $-\frac{27}{64}\alpha^9\beta^3$, ε) $15\alpha^2\beta^3$, στ) $\frac{4}{27}x^9y^7\omega^2$,

2. α) $x^6y^7z^3$, β) $-8x^4y^4z^5$, γ) -2α, δ) $-y$, ε) $3x^{-3}$, **3.** α) 4, β) $-\frac{2}{3}$, γ) καμμία

Γ. 1. $2\upsilon - 2\sigma$, **2.** $\frac{x+2y}{3}$, **3.** α) -2, β) $-\frac{27}{8}$, γ) -38, δ) $\frac{1}{24}$, ε) $\frac{1}{32}$,

4. α) $\lambda = 1, \varkappa = 1$, β) $\varkappa = 3, \lambda = 2$, γ) $\varkappa = \frac{5}{2}, \lambda = 8$, **5.** α) $\alpha = -1$, β) $\alpha = \frac{3}{5}$

2.2 **B. 1.** $-3x^3 - 2x^2 - 4x + 5$, **2.** α) $4\omega + 6y + 2x$, β) $x(y + 2\omega) - 2y^2$,
3. α) $11x^2y - 3xy^2 + 4x - 3$, β) $7\alpha\beta\gamma^2 - 5\alpha\beta^2\gamma$, γ) $xyz^2 + 6xy^5z$,
4. $\Delta = 19x^3 - 2x^2 + 3x + 8$, $E = 19x^3 - 2x^2 + 3x + 8$, $Z = -11x^3 + 2x^2 - x - 8$,
$H = -19x^3 + 2x^2 - 3x - 2$
Γ. 1. $7\tau - 7\nu + 6$, $9\varrho - 9\lambda$, $7x - y$, $-1/10\, xy - 7/5\, \varkappa\lambda$, **2.** $3xy^2\omega - 4x^2y - 7xy$,
$5x^3yz^2 + 9xy^2z$, $14xy^3\omega - 2xy\omega - 4$, **3.** $4x^4 - 10x^3 + 3x^2 + 2x + 3$,
$-4x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 3$, $4x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 12x + 1$, $4x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 12x + 3$,
$4x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1$, **4.** 447, **5.** $A(\varkappa = 0, \lambda = 3)$, $B(\varkappa = 3/2, \lambda = -1/2)$,
6. $\alpha = 5, \beta = 5/3$, 7. $\varkappa = 2, \lambda = -3, \nu = 1$

2.3 **B. 1.** α) $2x - 2y$, β) $3x^2 - 3xy$, γ) $-x^3 + x^2y - 2x^2\omega$, δ) $x^2 - y^2$, ε) $x^2 - 2xy + y^2$,
στ) $3x^3y - 3x^2y^2$, **2.** α) $2x^2 - xy - 6y^2 - 6x^3y + 2x^2y^2$, β) $2x^3y^2 - 4x^2y - 3x^2y^3 + 6xy^2$,
γ) $-7/4\, x^4y^2 + 21x^2y^2 + 1/2\, x^3y - 3/2\, xy$, δ) $24x^2\omega^2y^2\varkappa^2 - 36x^2\omega^2y^3\varkappa^3$,
ε) $1{,}5x^3 + 1{,}92xy^2 - 0{,}75x^2y - 0{,}96y^3$, **3.** α) $-2x^3 + 10x^2 - 10x + 6$,
β) $5x^6 + 12x^5 - 39x^4 - 92x^3 + 16x^2 + 48x - 12$, γ) $45x^3 - 18x^3y + 63x^2y - 36x^2 - 5x$,
δ) $324x^{15} - 648x^{13} + 810x^{12} - 72x^9 - 18x^8 - 144x^7 + 180x^6 - 350x^5$,
4. α) $9x^{2\alpha+1}y^{2\beta-1} - 6x^{5\alpha}y^{3\beta}$, β) $-6x^{2\sigma-1} + 12x^{2\sigma+1}$
Γ. 1. α) $12\varkappa\lambda x^2 - 16\varkappa x$, β) $3x - 3y - 2x^2 + 5xy - 2$, γ) $8x^5 - 12x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 13x + 5$,
δ) $-x^2 + 2x - 4$, ε) $16x^2y^2 - 36x^2y^4 - 30x^2y\omega + 8x^2y^6 + 10x^2y^2\omega - 20x^2y^3\omega - 25x^2\omega^2 + 8$,
στ) $6x^2y^2\omega - 15xy\omega - 4x^2y^2\omega^2 + 10xy\omega^2 + 6x^2y^3\omega - 15xy^2\omega - 8x^3y^2\omega + 20x^2y\omega$,
2. β) $32x^7 + 12x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 34x^2 + 50x - 9$, γ) $-16x^7 - 2x^6 + 36x^5 - 23x^4 -$
$- 3x^3 - 84x^2 + 113x - 21$, δ) $24x^4 + 17x^3 - 4x^2 - 2x - 17$, ε) $-12x^6 + 8x^5 +$
$+ 16x^4 - 44x^3 + 103x^2 - 150x + 63$, στ) $16x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 2x - 6$, **3.** α) 1,
β) 25, γ) 4, **4.** $54x^{4\varkappa+1} \cdot y^{3\lambda+2} - 36x^{3\varkappa} \cdot y^{4\lambda+1} + 9x^{2\varkappa+1} \cdot y^{2\lambda+3}$,
5. $8\alpha^{2\varrho} \cdot \beta^{2\varrho+3} - 4\alpha^{2\varrho} \cdot \beta^{2\varrho}$

2.4 **B. 1.** α) $8x^2 + 2xy - 12x - y^2 + 4$, β) $xy^2 + 9x\omega^4 + 6xy\omega^2 - 9y^3 - y\omega^2 + 6y^2\omega$,
γ) $4x^2 - 3x - y^2 + 3y$, δ) $3\mu^4\nu - 3\mu^2\nu^3 + 3\mu^3\nu^2 - 3\mu\nu^4$, **2.** α) $1/4\, x^2 - 9/4\, y^2$,
β) $\alpha^2 - 4\beta^2 - \gamma^2 + 4\beta\gamma$, γ) $\varkappa^4 + \mu^4 + \lambda^4 - 2\varkappa^2\mu^2 - 2\varkappa^2\lambda^2 - 2\mu^2\lambda^2$, **3.** α) $35x^3 -$
$- 90x^2 + 90x - 35$, β) $x^3 - 8$, γ) $193\mu^3 + 294\mu^2\nu + 154\mu\nu^2 - 8\mu - 8\mu\nu + 32\nu^3$,
δ) $x^9y^3\omega^3 - x^3y^9\omega^3$, **4.** α) $(3x^2y + 2xy^2)^2 = 9x^4y^2 + 12x^3y^3 + 4x^2y^4$,

β) $(2x - \frac{1}{2})^2 = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$, γ) $(\alpha + 2)^3 = \alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8$, **5.** α) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$,

β) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, **6.** 60, **7. α)** 25, **β)** 91, **γ)** $\frac{7}{12}$, **δ)** $\frac{3}{2}$

Γ. 1. α) $x^2 + 10xy + 25y^2$, **β)** $4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6$, **γ)** $4\varkappa^2 + 20\varkappa\lambda + 25\lambda^2$,
δ) $9/25\, x^2 - 4/5\, xy + 4/9\, y^2$, **ε)** $4\nu^2 + 12\nu\varrho^2 + 9\varrho^4$, **στ)** $9x^4y^6z^2 - 30x^3y^5z^2 +$
$+ 25x^2y^4z^2$, **2. α)** $\beta^3 + 9\beta^2\gamma + 27\beta\gamma^2 + 27\gamma^3$, **β)** $-125x^3 + 300x^2y - 240xy^2 + 64y^3$,
γ) $-27x^6y^3 - 54x^4y^3\omega - 36x^2y^3\omega^2 - 8y^3\omega^3$, **δ)** $8\alpha^9\beta^6 - 36\alpha^8\beta^7 + 54\alpha^7\beta^8 - 27\alpha^6\beta^9$,
ε) $1/8\, x^6y^3 + 1/4\, x^5y^4 + 1/6\, x^4y^5 + 1/27\, x^3y^6$, **στ)** $64\alpha^3\beta^6 - 144\alpha^4\beta^5 + 108\alpha^5\beta^4 - 27\alpha^6\beta^3$,
3. α) $4x^2 - 64y^2$, **β)** $0{,}04\alpha^2 - 9/4\, \beta^2$, **γ)** $4d^4R^2 - 9d^2R^6$, **δ)** $9x^2 - 4y^2 + 4yz + z^2$,
ε) $16\upsilon^4t^2s^2 - 9$, **4. α)** $27\varkappa^3\mu^3 - 125$, **β)** $0{,}2x^3 + 0{,}3y^3$, **γ)** $1/27\, \alpha^3\beta^6 - 1/8\, \alpha^6\beta^3$,
δ) $x^2 + 4y^2 + 25\omega^2 + 4xy + 10x\omega + 20y\omega$, **ε)** $x^2 + 16y^4 + 9\omega^2 - 8xy^2 - 12x\omega + 24y^2\omega$,
5. α) $4x^2 + 26y^2$, **β)** $4\alpha^2$, **γ)** $x^7 - 27x^6 + 27x^5 + 3x^4 - 42x^2 + 6x$, **δ)** $2\varkappa^2 - 2\lambda\mu^2 +$
$+ 2\lambda\nu^2 + 2\lambda^2 - 3\mu^3 - 4\nu^2$, **6. α)** $2x^3 - 54$, **β)** $2\alpha^3 + 16\beta^3 + 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2$,
γ) $\mu^4 + \nu^4 + 16\varkappa^4 - 2\mu^2\nu^2 - 8\mu^2\varkappa^2 - 8\varkappa^2\nu^2$, **δ)** $8\mu^2 + 2\nu^2$, **ε)** $2x^3 - 6xy^2$,
7. α) $(3x + 3y)^2 = 9x^2 + 18xy + 9y^2$, **β)** $(2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta) = 4\alpha^2 - 9\beta^2$,
γ) $(5x - 4y^2)^3 = 125x^3 - 300x^2y^2 + 240xy^4 - 64y^6$, **δ)** $(2\alpha - \beta)(4\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
$= 8\alpha^3 - \beta^3$, **8. α)** $4\sqrt{56}$, **β)** $236 - 8\sqrt{56}$, **γ)** $2\sqrt{8}$, **9. α)** 52, **β)** 280, **γ)** 464, **δ)** $\frac{8}{1\ldots}$

2.5 Β. 1. α) $xy(3x - 2y + 5xy)$, **β)** $3\alpha\beta(6\alpha^2 - 3\beta + 2 - \alpha^2)$, **γ)** $\alpha^2\beta\gamma(2\alpha\beta + 7x - \sqrt{3}\gamma y)$,

δ) $1/2\, xy(y^2 - x + x^4y^3)$, **2. α)** $(x + y)(\alpha + 5)$, **β)** $(x+1)(x^2+1)$, **γ)** $(\alpha + \beta)(\alpha - 1)$,
δ) $(\varkappa + \lambda)(\varkappa - 1)$, **ε)** $(8\upsilon^2 - 7\varkappa)(\mu\upsilon - 3)$, **3. α)** $(\alpha - \varkappa)(\alpha^2 + \alpha\varkappa + \varkappa^2)(x + 1)(x^2 - x + 1)$,
β) $(\alpha - 2)^2(\alpha + 2)(\alpha^2 - \alpha + 1)$, **γ)** $(x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z)$,
δ) $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma)$, **ε)** $3\alpha x(2x - y)(2x + y + \omega^2)$,
4. α) $\alpha^2\beta(\alpha\gamma + x)(\alpha^2\gamma^2 - \alpha\gamma x + x^2)$, **β)** $-52(x + y)$, **γ)** $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
$(\alpha - x)(\alpha + x)$, **δ)** $(x^2 - x + 1)(x + x + 1)$, **ε)** $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$,
5. α) $(x + 1)(x + 2)$, **β)** $(x + 5)(x + 6)$, **γ)** $(x - 2)(x - 7)$, **δ)** $(x - 5)(x + 4)$,
ε) $(\lambda - 5)(\lambda + 5)(\lambda - 4)(\lambda + 4)$, **στ)** $(\varkappa^2 + 7)(\varkappa - 2)(\varkappa + 2)$, **6. α)** $(\alpha - 2\beta - 2\alpha\beta)$
$(\alpha - 2\beta + 2\alpha\beta)$, **β)** $(x^2 - y^2 - 2xy)(x^2 - y^2 + 2xy)$, **γ)** $(3\varkappa^2 - \lambda^2)^2$, **δ)** $(\mu^2\nu^2 - \lambda^2 - 3\mu\nu\lambda)$
$(\mu^2\nu^2 - \lambda^2 + 3\mu\nu\lambda)$
Γ. 1. α) $2\alpha xy(y^2 - \alpha + 2y)$, **β)** $2ct(2t - c + 4)$, **γ)** $(x - y)(\alpha - \lambda)$, **δ)** $(\alpha - \beta)(x - 1)$
$(x + 1)$, **ε)** $(x^2 + 1)(3x - 7)$, **στ)** $\alpha(\alpha + 2\beta - 2\gamma)$, **ζ)** $(\alpha - 3\beta)(7x + 11y)$,
η) $1/2\, \alpha(x^2 + 1/2\, x - 1/4)$, **2. α)** $4\alpha^2x^2(3 - y)(3 + y)$, **β)** $8(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$,
γ) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)$, **δ)** $(3\beta - \alpha)(3\alpha - \beta)$, **ε)** $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1)$,
στ) $(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$, **ζ)** $(x - 2 - y)(x - 2 + y)$, **η)** $(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha x + \beta y + 1)$,
3. α) $(\alpha + \beta - \gamma - \delta)[(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) + (\gamma + \delta)^2]$, **β)** $25\beta(\alpha - 1)$
$(\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)$, **γ)** $\alpha^6(1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)$, **δ)** $3\alpha\beta\gamma^2(3\beta\gamma - 2)(3\beta\gamma + 2)$,
ε) $(x - 3)(x + 2)(x - 1)$, **στ)** $(x - \alpha)(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2)$, **4. α)** $(x - y)(x + y - 1)(x + y + 1)$,
β) $(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha - \beta)$, **γ)** $x + 2$, **δ)** $(2y - 3x)(3x - y)$, **ε)** $\alpha(x^2 - y^2 - 3xy)$
$(x^2 - y^2 + 3xy)$, **στ)** $(\alpha^2 - \beta^2 - 3\alpha\beta)(\alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha\beta)$, **ζ)** $(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)$,
η) $(1 - \alpha^2 + \alpha\beta)(1 + \alpha^2 - \alpha\beta)[1 + 4\alpha^2(\alpha - \beta)^2]$, **5. α)** $(x + 3)(x + 9)$, **β)** $(x + 15)$
$(x + 1)$, **γ)** $(\alpha + 16)(\alpha - 2)$, **δ)** $(\beta + 1)(\beta + 13)$, **ε)** $(\mu + 8)(\mu - 2)$, **στ)** $(\nu - 6)(\nu + 3)$,

ζ) $(\alpha - 7\beta)(\alpha + 4\beta)$, **η)** $(\theta - \sqrt{3})(\theta + \sqrt{3})(\theta - \sqrt{5})(\theta + \sqrt{5})$, **6.** $3xyz$

2.6 Β. 1. α) $2x - y$, **β)** $\frac{\alpha - 1}{3\beta - 1}$, **γ)** $\frac{\alpha^2 + x^2}{\alpha x}$, **δ)** $\frac{x}{x + 1}$, **ε)** $\frac{\alpha + 1}{5(\alpha - 1)}$, **στ)** $\beta^2 + \beta + 1$,

2. α) $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$, β) $(\alpha+\beta)(x+y)$, γ) -12, δ) $(\alpha+\beta)(x-y)$, ε) 1, **3.** α) $\frac{6x}{2x-1}$, β) $(\alpha-\beta)(\alpha\beta+1)$, γ) $\frac{(\mu^2+\mu\nu+\nu^2)\,2\mu\nu}{\mu+\nu}$, δ) $\frac{1}{(\alpha+1)^2}$

Γ. 1. α) $-\frac{5}{2}x$, β) $\frac{3x-2y}{1-5xy}$, γ) $\frac{4\mu-3}{1-6\nu}$, δ) $\frac{3}{2}\varkappa^2 x$, ε) $\frac{2\alpha-3}{1-2\beta}$, στ) $\frac{(\alpha^2-\beta)(2\alpha-1)}{\alpha}$, ζ) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, η) $\frac{(x-2)(x-4)}{2}$, θ) $\frac{(x-2)^2(x+2)}{x-1}$, **2.** α) $\frac{1}{1-\alpha^2}$, β) $\frac{10-7\alpha}{1-2\alpha}$, γ) $\frac{x-\alpha}{x^2+\alpha}$, δ) $\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha x-\beta y}$, ε) $\frac{\alpha+x-\beta-\gamma}{\beta+x-\alpha-\gamma}$, στ) 1, ζ) $(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$, η) $\frac{x(x+1)}{x^2+2x+4}$, θ) 1, ι) 1, ια) $\beta-\alpha$, ιβ) $\frac{\beta+1}{\alpha\beta^2}$, ιγ) $\frac{x+y+\omega}{x-y+\omega}$, ιδ) $\frac{x+y}{x-y}$

2.7 B. 1. α) $\frac{9x+2}{(x-2)(x+2)}$, β) $\frac{20x+1}{(x-5)(x+5)}$, γ) $\frac{\alpha+4}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}$, **2.** α) 1, β) $\frac{xy}{x+y}$, γ) $\frac{4}{3}$, δ) 1, **3.** α) x, β) $\frac{x+1}{x}$, γ) $\beta-\alpha$, δ) $\frac{x-3}{x+3}$, ε) $\frac{2}{\alpha+1}$, στ) $\frac{2}{\beta}$

Γ. 1. α) $\frac{2}{x-3}$, β) $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x+2)}$, γ) $\frac{-2y}{(x-y)(x+y)^2}$, δ) $\frac{-3x^3+3x-1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$, ε) 0, **2.** α) 0, β) $\frac{-3x+4}{6(x-1)^2}$, γ) $\frac{3\alpha x-12}{\alpha^2-4}$, δ) $\frac{x^2+7}{x^2-9}$, **3.** α) $\frac{1}{2x^2-1}$, β) $\frac{1}{x}$, γ) $\frac{\varkappa(\varkappa^3-\lambda^3)}{\varkappa^2+\lambda^2}$, **4.** α) 0, β) $\frac{3}{\alpha+1}$, γ) $\frac{\alpha(\alpha+2)}{\alpha+1}$

Δ. 1. α) $5x^2y$, β) 0, **2.** $\varkappa = 5/2,\ 17/2$, **3.** α) $40\alpha^6x^5y^6$, β) $-1/5\ \alpha^2\beta x^4y^2$, γ) $54\alpha^{5\nu+4}\beta^{2\mu+4}$, δ) $3/20\ \alpha^{3x-1}\beta^{3y-2}\omega^3$, **4.** α) -4, β) $6/5$, **5.** α) $-2x^5y^2$, β) $5\alpha^3\beta$, $-8\alpha\beta^3$, **6.** α) $4xy^3-9xy^2$, β) $4\alpha^2\beta\gamma-8\alpha\beta\gamma^2-7$, γ) $5/9\ x^2y^4-5xy^3$, δ) $3/10\ x^{\mu}y^{\nu}+31/15\ x^{\nu}y^{\mu}$, **7.** -382, **8.** α) $-5\alpha^4+4\alpha^3-\alpha^2-7\alpha-3$, β) $18x^3y-3x^3y^3-6xy-8x^2y^4+4xy^3+6$, γ) $-11x^2y^6+4xy-5$, δ) $-60\alpha^4\beta^4+30\alpha^3\beta^3$, **9.** $\alpha=3,\ \beta=0,\ \lambda=1,\ \varkappa=4$, **10.** α) $6x^2y^3-4x^2y^2-9xy^2+8xy-2$, β) $x^2-y^2-2x^3y+8x^2y^2-6xy^3$, γ) $30x^4y^3\omega-15x^3y^2\omega+3x^3y-3x^2y+2x^2y^2-2xy^2-5x^2+5x$, δ) $6x^2y^2-7xy\omega+2\omega^2+5x^3y-10x^3+15\omega x^3-5xy+10x-15x\omega$, **13.** α) $(\sqrt{7}-1)^2$, β) $(2-\sqrt{3})^2$, γ) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$, δ) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$, ε) $15(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$, στ) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$, **14.** α) $(x-\alpha)(x^2-\alpha x+2\alpha)^2$, β) $3ct(c+t)$, γ) $(x-3)(x-4)$, δ) $(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)$, **15.** α) $(x-1)(x-2)$, β) $3(x-2)(x-3)$, γ) $(x-1)(\sqrt{2}x-\sqrt{5})$, δ) $[(\alpha-\beta)x-\alpha\beta]\,[(\alpha+\beta)x-\alpha\beta]$, ε) $(|x|-9)(|x|+2)$, **16.** α) $(x-2)^2(x^2+1)$, β) $(x-2)(x-4)(3x-4)$, γ) $(x+4)(4x+1)(x-1)$, **17.** α) $\frac{x^2}{2y}$, β) $\frac{\alpha}{6\gamma}$, γ) $\frac{-\alpha x}{3\beta}$, δ) $\frac{7\beta}{5\alpha x}$, **18.** α) $\frac{\alpha}{\beta}$, β) $\frac{3\alpha}{5\beta}$, γ) $\frac{1}{5}$, δ) $\frac{x-3}{x+3}$, ε) $\frac{2}{\mu+1}$, στ) $\frac{2\alpha-3\beta}{6x}$, **19.** α) $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, β) $\frac{-13\beta+7\alpha}{2\beta}$, γ) 0, δ) $\frac{9}{3\alpha-1}$, ε) $\frac{\beta-6\alpha+7}{3\alpha+3\beta}$, στ) 0, **20.** α) $\frac{4\gamma}{5\alpha^2}$, β) $\frac{\alpha\beta-3}{2\nu-1}$, γ) $(\alpha+\beta)(x+y)$, δ) $\frac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma-\delta)^2}$, ε) 1, στ) 1, **21.** α) $\frac{\alpha}{\beta}$, β) $x-\alpha$, γ) β^2, δ) $\frac{x}{3}$, ε) 1, **22.** α) $-\frac{(x-y)^2}{y(x+y)}$, β) 1, γ) $\frac{x(1+x)(x-y)}{(1+y)^2(x+y)^2}$, **23.** α) $\frac{x}{y}$, β) $\frac{(\alpha-2)x}{\beta}$, γ) $\frac{2x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$, δ) $\frac{x^2+1}{x}$,

ε) $\frac{xy}{x^2+y^2}$, **24.** α) $\frac{x}{\alpha}$, β) $\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}$, γ) $1-x^2$, δ) $\alpha(\alpha-\beta)$, ε) $\frac{2}{x+1}$, στ) $-\frac{(x-\alpha)^2}{\alpha^2(x+\alpha)}$,

25. α) $\frac{\alpha^3+2\alpha^2\beta}{\alpha^3+\beta^3}$, β) $-\frac{(x+y-\omega)^2}{2y\omega}$, γ) $\frac{x^2y^2(x+y)^2+x^2+y^2}{2xy(x^2+y^2)}$, δ) $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2\beta\gamma}$

Κεφάλαιο 3ο

3.1 Β. 1. $x = 15$, **2.** 7, 21, **3.** $x = 7{,}2$, **4.** β) όχι, ναι, ναι, **5.** αδύνατο
Γ. 1. α) 19/3, β) 0, γ) 65/138, δ) - 32/19, **2.** α) 9/2, β) - 7/11, γ) αδύνατη, **3.** α) 14/11, β) 9, γ) 116/17, δ) 21, ε) αδύνατη, στ) 3/7, **4.** α) 114/119, β) ταυτότητα, γ) - 5/11, **5.** α) - 1/6, β) - 2, **6.** 6, **7.** 10, **8.** α) $x = -1$, $y = 5$, β) αδύνατη

3.2 Β. 1. β) $x = \pm\sqrt{5}$, γ) $x = \pm 9$, δ) $x = \pm\sqrt{21}$, **2.** β) $x = \pm 3$, γ) $x = \pm\sqrt{10}$, δ) $x = \pm 25$,
3. β) $x = 0, x = 4$, γ) $x = 0, x = -\frac{1}{2}$, δ) $x = 0, x = \frac{6}{7}$, **4.** β) $x = 0, \frac{3}{2}, 8$,
γ) $x = 0, -\frac{7}{5}, 12$, **5.** β) $x = 0, \frac{2}{3}, \sqrt{2}$, γ) $x = 0, x = 1$, δ) $\pm\frac{1}{2}, 7$,
6. α) $x = -\frac{1}{3}$, β) $x = -2, 0, -5$

Γ. 1. α) 0, 2, β) 0, - 3, γ) $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, δ) 0, - 1, **2.** α) $\pm\frac{1}{3}$, β) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}$, γ) $0, \frac{2}{3}$, δ) ± 1,
3. α) 1, - 3, β) 2, - 5, γ) 2, - 6, δ) 1, - 6, **4.** α) ± 7, β) $\pm\frac{1}{2}$, γ) $\pm\frac{3}{2}$, δ) αδύνατη.
5. α) - 3, 4, β) $\frac{1}{3}, -3$, γ) - 4, 4, δ) $\pm 6, -\sqrt{2}$, **6.** α) $\pm 1, \sqrt{3}$, β) $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{3}$,
γ) $\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}$, **7.** α) 0, - 3, β) $0, \sqrt{3}$, γ) $-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$, δ) $0, -7, \frac{5}{4}$, **9.** 0, 4, **10.** 6,
11. 4, 6

3.3 Β. 1. $x = 2, x = 1$, **2.** αδύνατη, **3.** 0,1 m, **5.** $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{4}$

Γ. 1. α) 2, - 3, β) 3, - 2, γ) $\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$, δ) $-\frac{1}{2}, 1$, **2.** α) $-1, -\frac{3}{2}$, β) $-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$,
γ) $\frac{1}{3}, -4$, δ) αδύνατη, **3.** α) $-\frac{3}{2}$, β) $4, \frac{-6+\sqrt{56}}{2}, \frac{-6-\sqrt{56}}{2}$, γ) 0, 1, 5, - 2,
δ) $-\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2}$, **4.** α) 3, - 1, β) ± 3, 2, **5.** α) - 3, β) - 6, γ) $-\frac{1}{2}$, δ) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$,
8. 7, 4, **10.** 30, 10

3.4 Β. 1. $x = 3/8$, **2.** $x = 0$, **3.** $x = -1$, **4.** 1 και 8, **5.** Δ_1: 25, Δ_2 : 30
Γ. 1. α) 3, - 4/3, β) αδύνατη, γ) 11/7, **2.** α) - 2, 3, β) $x = \pm 2$, γ) $x = 4$, **3.** α) - 5, 3, β) 3, **4.** β) 5, - 5/4, γ) 0, **5.** $t = 5$, **7.** 30, **8.** 1/2, **9.** - 3/2, 7/2, **10.** 25

Δ. 1. $R = \frac{m\cdot\upsilon^2}{r}$, $\theta_1 = \frac{cm\theta_2 - Q}{cm}$, $\lambda = \frac{E - \pi\varrho^2}{\pi\varrho}$, $\upsilon = \frac{3V}{\pi\varrho^2}$, **3.** α) - 1, β) 0, 1, γ) $\pm 1, \frac{1}{2}$,
4. α) - 8, β) 6, **5.** 0, **6.** α) 4, β) αδύνατη, **9.** α) - 2, β) - 3, **10.** α) ± 2, β) 2 ,
11. 13, 14, **12.** 11m, 15m, **13.** 36

Κεφάλαιο 4ο

4.1 **Β. 1.** απλή, **2.** $f(0) = -3/2$, $f(-2) = -5/2$, $x = 1$, $x = -1$, $f(-3) = -3$, **3.** μέγιστη τιμή για $x = 3$, ελάχιστη τιμή το -2 για $x = 6$

Γ. 1. $-1, -\frac{9}{5}, -2{,}8, 0, \frac{7}{5}, 2{,}6$, **2.** $9, 43, 23, \frac{6}{19}, -43, 109$, **3.** $2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{3}$,

4. **α)** $x \neq \pm 3$, **β)** $x \neq 2$, $x \neq 1$, **γ)** R, **δ)** $x \neq 0$, **ε)** $x \neq -2$, $x \neq 3$, $x \neq 2$,
5. **α)** $x \geq 3$, **β)** $x \geq -1/2$, **γ)** $-3 \leq x \leq 5$, **δ)** $x \geq -9/2$, **6.** **α)** $x = 1$, **β)** $x = -1$,
7. **α)** $E = x^2 + 5x$, **β)** $E = x^2 - 2x$

4.2 **Β. 2.** **α)** $y = 1/3\ x$, **β)** $y = -1/2\ x$, **γ)** $y = -2/3x$
Γ. 2. **α)** $y = 2x$, **β)** $y = 3/2\ x$, **γ)** $y = -1/3\ x$, **δ)** $y = -6x$, **3.** $-2, -2, -3$, **4.** -2,
5. $y = 3/2\ x$, $y = 2/5\ x$, $y = -1/2\ x$

4.3 **Β. 2.** απλή αντικατάσταση
Γ. 2. όχι: Α, Ε, ναι: Β, Γ, Δ, **3.** $\alpha = 4$, **4.** $\beta = 1$, **6.** $\alpha = 5/2$, $\beta = -3$, **8.** **α)** $(0, -2)$, $(8, 0)$, **β)** $(0, 2)$, $(3, 0)$, **γ)** $(0, 2)$, $(14/5, 0)$

4.4 **Β. 1.** απλή, **2.** $y = -2x^2$
Γ. 2. $y = 5x^2$, **3.** μέγιστο: α, δ, ελάχιστο: β, γ

4.5 **Β. 2.** **α)** μέγιστο: $y = 1/8$, **β)** μέγιστο: $y = -8/3$, **γ)** ελάχιστο: $y = -73/8$,
3. **α)** $(0, 10)$, $(5, 0)$, $(2, 0)$, **β)** $(0, -15)$, $(3, 0)$, $(5, 0)$
Γ. 4. **α)** μέγιστο το $-2/3$, **β)** ελάχιστο το $51/20$, **6.** $(6, -4)$, $(1, -4)$, **7.** **α)** $(1, 12)$, **β)** δεν έχουν, **8.** **α)** $(0, 4)$, $(4, 0)$, $(1, 0)$, **β)** $(0, 15)$, $(5, 0)$, $(3, 0)$

4.6 **Γ. 6.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, **7.** $(1, 1)$

Δ. 1. **α)** $R - \{\pm 2\}$, **β)** $R - \{0, 1\}$, **γ)** $R - \{1, 2\}$, **δ)** $R - \{0, 1\}$, **3.** **α)** $x = 2$, $y = -2/3$, **β)** $x = 2$, $y = -2$, **γ)** $y = 2$, **δ)** $x = \pm 2$, $y = -4$, **ε)** $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, **στ)** $y = 1$,

4. $x = \frac{5}{2}$, **5.** $(-\frac{11}{2}, -\frac{2}{5})$, **6.** $x = 5$ ή $x = -2$, **7.** **α)** παραβολή, ευθεία, **β)** $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$

9. $\varkappa = 8, \lambda = 2$

Κεφάλαιο 5ο

5.1 **Β. 1.** $\overline{x} = 2605$, $\delta = 1900$
Γ. 1. **α)** $\overline{x} = 6{,}285$, $\delta = 6$, **β)** $\overline{x} = 22{,}83$, $\delta = 17{,}5$, **2.** 1758,57 δρχ.

5.2 **Γ. 1.** **β)** 30 %, **γ)** 13, **2.** **β)** 5 %

5.3 **Β. 1.** $\sigma = 3{,}6$
Γ. 1. 7,42, **2.** 4900, **4.** 11,02, 3,15

5.4 **Β. 1.** 9800, **2.** **α)** 3/8, **β)** 19/24, **γ)** 5/12
Γ. 1. 1/2, **4.** 1/13, **5.** 1/18, 5/36

Δ. 1. **β)** 1900, **2.** $\overline{x} = 38{,}9$, **3.** $s = 22{,}3$ χιλιάδες δρχ. **4.** **α)** 3/8, **β)** 1/2, **γ)** 7/8, **δ)** 1/2, **5.** 2/9, **6.** 1/5, 2/5, **7.** 10/21

Κεφάλαιο 6ο

6.4 **Β. 1.** $x = 8/3$, **2.** $x = 3$, **3.** $x = 12$, **4.** $x = 4$, **5.** $x = 15$, **6.** ΑΕ = 6, ΕΓ = 10
Γ. 1. **α)** 4,2, **β)** 6, **γ)** 3, **δ)** 18, **2.** **α)** 10, **β)** 1,5, **3.** ΑΕ = 2, **4.** $x = 9{,}6$, **5.** ΑΕ =4,8,

6. $ΛΔ = ΔΝ$

6.5 **Β. 1.** $x = 7,2$, **2.** $x = 7,5$, **3.** $6/9 = 14/21 = 2/3$, **4.** $x = 100$, **6.** $x = 20$, $y = 36$, **7.** $\beta = 10, \gamma = 6, \delta = 14$

Γ. 1. **α)** 2/3, **β)** 2/7, **2.** **α)** ναι, **β)** όχι, **γ)** όχι, **4.** 6/13, **5.** $x = 28$, **6.** $\alpha' = 7,5$, $\beta' = 12$

6.6 **Β. 3.** $x = 5,19$, **4.** $Z = 70°$, $E = 62°$, **5.** $ΔZ = 16/3$, $EZ = 4$

Γ. 2. $x = 1,5$, **3.** 7,5

6.7 **Β. 1.** $x = 54\ cm^2$, **2.** $x = 75\sqrt{3}$, **3.** $x = 3\sqrt{3}, y = 5\sqrt{3}$, **4.** $x = 40\ cm^2$, **5.** 150 στρ.

6. $x = 2\sqrt{6}\ cm^2$

Γ. 1. $\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, **2.** $\lambda = 2$, **3.** 2 στρεμ., **4.** $1,5\ cm^2$, **5.** 4 cm, 8 cm, 10 cm,

6. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm, **7.** $\frac{E_1}{E_2} = \frac{9}{16}$

6.8 **Β. 1.** $\lambda = 5$, **2.** $x = 512\ m^3$, **3.** $x = \sqrt[3]{2}$ cm, **4.** $x = 3$

Γ. 1. 1/27, **2.** 2/3, **3.** $500\ cm^3$, **4.** 64.000 φορές, **5.** 9 cm, 15 cm, 21 cm

Δ. 9. $x = 2$, **12.** 9, 12, 15, $\lambda = 1/9$, **13.** 13,5 cm, $381,7\ cm^2$, $429,4\ cm^3$

Κεφάλαιο 7ο

7.1 **Β. 1.** ημΒ = 0,91, συνΒ = 0,4, εφΒ = 2,29, **2.** 56,8 cm, **3.** $B \cong 48°$, $Γ = 42°$,

4. 43,9 cm, **5.** $\varphi \cong 53°$, $x = 7,8$ cm, **6.** 12,28 cm

Γ. 1. **α)** $x = 8,6$ cm, **β)** $x = 14$ cm, **γ)** $x = 27,58$ cm, **δ)** $x = 18,75$ cm,
2. **α)** $\beta = 12,5$, $\gamma = 21,65$, $Γ = 60°$, **β)** $\alpha = 35,53$, $\gamma = 6,17$, $Γ = 10°$,
γ) $\alpha = 11,54$, $\beta = 5,7$, $B = 30°$, **δ)** $\alpha = 35,49$, $\gamma = 32,16$, $B = 25°$, **ε)** $\alpha = 70$,
$\beta = 53,6$, $Γ = 40°$, **3.** 13 cm, **4.** $x = 21,21$, $\varphi = 36,8°$, **5.** 21,21, 70,5°,
6. $\delta_1 = 10,72$, $\delta_2 \cong 9$, **7.** 41,5 cm, **8.** 55,45 cm, **9.** $B = Γ = 66,42°$, $A = 47,15°$,

10. $A = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $B = 0,61$, $Γ = 2$, **12.** $A = -0,056$, $B = 1,25$, $Γ = -1,75$

7.2 **Β. 1.** ημx = - 0,6, συνx = - 0,8, εφx = 1,33, **2.** ημ300° = - 0,866,
συν300° = - 0,8, εφ300° = - 1,33, **3.** $-9 \leq A \leq 9$, **4.** $A = -2$, $B = 1/2$

Γ. 1. **α)** 0,78, 0,625, 1,25, **β)** 1,02, - 0,40, - 2,5, **γ)** - 0,8, - 0,6, 0,75, **δ)** - 0,44,
0,89, - 0,5, **2.** - 0,173, - 0,98, 0,176, **3.** **α)** 0,76, - 0,64, - 1,19, **β)** - 0,64,
- 0,76, 0,83, **γ)** - 0,34, 0,93, - 0,36, **4.** $A = 4$, $B = -5$, **5.** **α)** +, **β)** -, **γ)** -, **δ)** -,
ε) -, **6.** **α)** - 7, 7, **β)** - 5, 1, **γ)** - 3, 1, **δ)** - 5, 5

7.3 **Β. 1.** **α)** 0,74, - 0,66, - 1,11, **β)** 0,13, - 0,99, - 0,14, **γ)** 0,52, - 0,84, - 0,62, **2.** 45°,

Γ. 1. **α)** 0,86, - 0,5, - 1,73, **β)** 0,76, - 0,64, - 1,19, **γ)** 0,70, - 0,70, - 1, **δ)** 0,64,
- 0,76, - 0,83, **ε)** 0,57, - 0,81, - 0,70, **στ)** 0,5, - 0,86, - 0,57, **ζ)** 0,34, - 0,93,
- 0,36, **η)** 0,17, - 0,98, - 0,17, **2.** $A = 0,25$, $B = 2,08$, $Γ = -0,176$, **3.** $x = 60°$ ή
$x = 120°$, **4.** $x = 120°$, **5.** $x = 116,5°$, **6.** $x = 45°$ ή $x = 135°$, **7.** $x = 60°$ ή $x = 120°$

7.4 **Β. 1.** **α)** 5/13, **β)** - 5/12, **2.** $A = 0,39$

Γ. 1. **α)** συνx = $\frac{1}{2}$, εφx = $\sqrt{3}$, **β)** ημx = $\frac{1}{2}$, εφx = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **γ)** συνx = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, εφx = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

δ) ημx = $\frac{\sqrt{7}}{4}$, εφx = $-\frac{\sqrt{7}}{3}$, **2.** **α)** ημx = 0,62, συνx = 0,78, **β)** ημx = 0,92, συνx = - 0,37, **3.** 5 , **8.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

7.5 **Β.** **1.** β = 10,5, γ = 9,86, **2.** ΒΓ = 9,43, ΒΔ = 5,71, ΓΔ = 4,57, **3.** Β = 63°, ΑΓ = 21,3 cm, Δ ≅ 60°, **4.** ΚΛ = 5 m

Γ. **1.** β = 19,44, γ = 12,69, **2.** Α ≅ 32°, Β = 123°, **3.** α) α = 16,31, γ = 20,83, Γ =102°, β) α = 43,56, γ = 37,97, Γ = 55°, γ) α = 12,77, γ = 13,84, Γ = 50°, **4.** α) Β = 43,5°, Γ = 86,5°, γ = 26,05, β) Β = 46,5°, Γ = 68,5°, γ = 25,66, γ) Β = 49,4°, Γ = 25,6°, γ = 12,5, **5.** α) Γ = 36°, Α = 117°, α = 13,73, β) Γ = 43,5°, Α = 106,5°, α = 15,34, γ) Γ = 17,5°, Α = 150,5°, α = 21,31,

6. ΓΖ = 12,9, ΑΖ = 6,74, ΒΖ = 14,84, **7.** ΑΒ = 29,34 cm, ΓΔ = 11,14 cm, **10.** ΑΔ = 4,81, ΔΕ = 2,79

7.6 **Β.** **1.** β = 16,35, **2.** Α = 58,5°, Β = 96,37°, Γ = 25,13°, **3.** ΑΓ = 13,5 cm, ΒΔ = 9,32 cm

Γ. **1.** α) Α ≅ 47°, β) Β ≅ 55°, γ) Γ = 90°, **2.** Ε = 97°, Ζ = 47°, Γ = 36°,

3. α) α = 13,65 m, β) α = 9,89 m, γ) α = 6,3 m, **4.** ΑΓ ≅ 15 cm, ΒΔ=18,14cm, **5.** ΑΓ = 19,28, ΒΔ = 49,86 cm, **6.** ΑΒ = ΑΔ = 9,81, ΒΓ = 12,15

Κεφάλαιο 8ο

8.1 **Β.** **1.** x = 5, y = 3, **2.** α) x = 5, y = - 4, β) αόριστο, γ) αδύνατο, δ) x = 5, y = -1
Γ. **1.** α) x = 2, y = 3, β) x = 4, y = 1, γ) x = 5, y = 8, **2.** α) x = 8, y = - 2, β) x = 3, y = 3, γ) x = 6, y = - 2, **3.** α, β, στ αόριστο και ε, δ, γ αδύνατο

8.2 **Β.** **1.** α) x = - 15, y = 7, β) x = 2/5, y = 29/5, **2.** α) ω = 1, φ = - 1/4, β) x = 5, y = 0, **3.** x = 3, y = 2/3 ή x = 2, y = 1/3, **4.** y = 2, x = 7 ή y = 1, x = 6
Γ. **1.** α) x = 5, y = - 8, **2.** α) φ = - 24/5, x = 77/5, β) x = - 67/7, y = - 202/14, **3.** μ = 1/3, ν = 5, **4.** α) μ = 0, β) μ = - 10/9, **5.** α) λ = - 4, β) λ = 1/4, **6.** α) y = 2x + 1, β) y = - 3x + 4, **7.** x = 6, y = 8, ω = 4, **8.** α = 60, β = - 22,5,

9. $\frac{5}{8}$, **11.** $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, **12.** α) $y = \frac{1-4\sqrt{6}}{5}$, $x = \frac{2+2\sqrt{6}}{5}$, β) x = 2y +3, ...

8.3 **Β.** **3.** Θα πάρει 6 λαχνούς (από 4 κιλά ζάχαρη και 2 πακέτα βούτυρο)
Γ. **4.** Οι ανισώσεις είναι: α) - 3x + 2y - 1 ≤ 0, β) x + 4y - 23 ≤ 0, γ) 4x + 2y - 36 ≤ 0, δ) x + 4y - 9 ≥ 0, **5.** 1.500 τύπου Α και 500 τύπου Β, τότε το κέρδος είναι 450.000 δρχ.

Δ. **1.** x = 1, y = - 1/5 και x = 2/3, y = - 4/15, **2.** x = 11/5, y = 55/4, **3.** Να διακρίνετε περιπτώσεις για το πρόσημο των παραγόντων x, y και 2x - y + 3, **4.** Οι ανισώσεις είναι: α) - 7x + y + 9 ≤ 0, β) - 11x - 2y + 32 ≥ 0, γ) - 3x + 4y + 11 ≥ 0, **5.** y = 1/2 x, **6.** y = - 3/2 x + 17/2, **7.** 14/21, **8.** x = 4, y = 21 ή x = 109/4, y = - 9/4, **9.** α) x = 2,5, y = 1, β) x = 4, y = 2, **11.** Αν α ≠ 1/4 έχει μοναδική λύση, αν α = 1/4 και β = 8/3 είναι αόριστο, αν α = 1/4 και β ≠ 8/3 αδύνατο, **12.** 68, **13.** (x = 4, y = 2) ή (x = 5, y = 2) ή (x = 6, y = 2) ή (x = 2, y = 2), **14.** 360 (x = 4,5, y = 3,6), **15.** τύπου Α: 106, τύπου Β: 68, **16.** Οι ανισώσεις είναι: α) x + y - 5 ≤ 0, β) x - y - 5 ≤ 0, γ) x + y + 5 ≤ 0, δ) x - y + 5 ≤ 0

Κεφάλαιο 9ο

9.1 **Β. 3.** 5, **6.** 7,07
Γ. 5. (- 3, 0), (5, 0)

9.2 **Β. 1.** $A\Gamma = AB = \sqrt{41}$, $B\Gamma = 8$, **3.** $x = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, **4.** $x = -2$, $y = -2$
Γ. 1. $x = 1$, $y = -7$, **3.** αδύνατο, **4.** 5, **5.** $\overrightarrow{A\Gamma} = (0, -8)$, $\overrightarrow{B\Delta} = (-6, 0)$

9.3 **Β. 1.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, **2.** $\overrightarrow{A\Gamma}$, **3.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, **4. α)** $\overrightarrow{A\Gamma}$, **β)** $\overrightarrow{B\Delta}$, **5. α)** $\overrightarrow{A\Gamma}$, **β)** $\overrightarrow{B\Gamma}$, **6.** $\sqrt{13}$,
7. στο Α
Γ. 2. α) $\overrightarrow{A\Delta}$, **β)** $\overrightarrow{\Delta B}$, **3.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{8}$, **5.** $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{8}$, **7. α)** $\overrightarrow{A\Gamma}$, **β)** $\vec{O}$, **γ)** $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, **8.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, **9. α)** $\vec{O}$, **β)** $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

9.4 **Β. 1.** $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\sqrt{20}$, **2.** $\vec{\kappa} = \vec{\lambda} = \vec{\mu}$, **3.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, **4.** $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, **5.** ίσα, **6.** ίσα
Γ. 2. $\sqrt{51}$, $\sqrt{5}$, **4.** $\sqrt{26}$, **5. α)** αντίθετα, **β)** ίσα

9.5 **Β. 2.** $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \end{pmatrix}$, **3.** $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{10}{3}$, **4.** $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$
Γ. 2. α) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **β)** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, **γ)** $\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, **δ)** $\begin{pmatrix} 10 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$, **3.** $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11{,}5 \end{pmatrix}$, **4.** $x = 5$, $y = 2$,
5. $\lambda = \frac{5}{4}$, $\kappa = \frac{8}{5}$, **6.** $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, **7.** $\begin{pmatrix} 45 \\ 31 \end{pmatrix}$, **8.** $|\vec{\alpha}| = 5$, $|\vec{\beta}| = 10$

Δ. 1. $-\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, **2.** $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{7}{8}$, **3. α)** $\overrightarrow{AO}$, **β)** $\overrightarrow{B\Gamma}$, **γ)** $\vec{O}$, **4. α)** ίσα, **β)** $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$,
$\overrightarrow{A\Gamma}$, **6. α)** $\sqrt{130}$, **β)** $\frac{17}{3}\sqrt{2}$, **γ)** $10\sqrt{5}$

Κεφάλαιο 10ο

10.1-10.2 **Β. 1.** 157 κιλά, **2.** 6.400, **3.** 8 cm, **4.** 15,253, **5.** $\pi/6$, **6.** 3,6 m, **7.** 288π m³,
8. 314 m²
Γ. 1. 49, **2.** 36π m², **3.** 8 m - 803,84 m², **4.** 144,44 m², **5.** 254,34 m²,
7. 1.600π m², $10.666{,}7\pi$ m³

10.3 **Β. 1.** 5.781,2 km, **2.** 37.102 km, 34.661 km, **3.** 51°, **4.** 4.147,7 km
Γ. 2. 5.384,1 km, **3.** 8.449,48 km, **5.** 28.301,2 km, **6.** 60°, 57°

Δ. 1. 40.024 km, **2.** 3.053,6 m³, **3.** 7,66 m³, **4.** $1{,}082 \cdot 10^{12}$ km³, **5.** 5.781,2 km,
4.224,7 km

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,036
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,072
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,111
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,150
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,192
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,280
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,376
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,428
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,483
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,540
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,600
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,664
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,732
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,881
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,963
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,050
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,145
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,356
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,475
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,605
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,747
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,904
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,078
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,271
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,487
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2586	3,732
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,011
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,332
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,705
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,145
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,671
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,314
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,115
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,514
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,43
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,30
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,08
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,64
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1,000				

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΗΚΟΥΣ - ΕΜΒΑΔΟΥ - ΟΓΚΟΥ

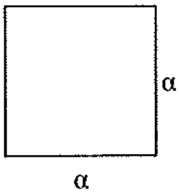
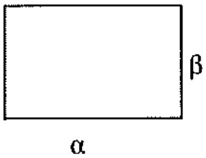
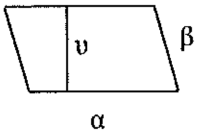
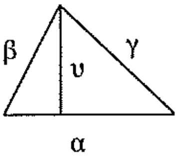
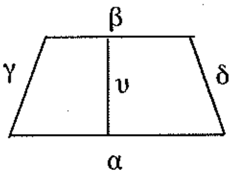
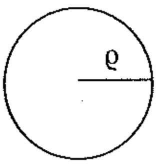
Μονάδες μήκους	Συμβολισμός	Σχέση με το μέτρο
Χιλιόμετρο	km	1 km = 1000 m = 10^3 m
Εκατόμετρο	hm	1 hm = 100 m = 10^2 m
Δεκάμετρο	dam	1 dam = 10 m
Μέτρο	m	
Δεκατόμετρο ή Παλάμη	dm	1 dm = 0,1 m = 10^{-1} m
Εκατοστόμετρο ή Πόντος	cm	1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m
Χιλιοστόμετρο ή Χιλιοστό	mm	1 mm = 0,001 m = 10^{-3} m
Υάρδα ή Γιάρδα	yrd	1 yrd = 0,9144 m
Πόδι	ft	1 ft = 0,3048 m
Ίντσα	in	1 in = 0,0254 m
Μίλι		1 μίλι = 1609 m
Ναυτικό μίλι		1 ναυτικό μίλι = 1852 m
Κόμβος		1 κόμβος = 15,43 m

Επίσης πρέπει να γνωρίζουμε: 1 yrd = 3 ft = 36 in και
1 ναυτικό μίλι = 120 κόμβοι.

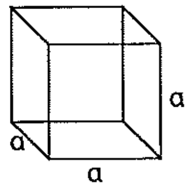
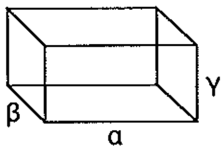
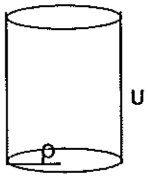
Μονάδες εμβαδού	Συμβολισμός	Σχέση με το τετρ. μέτρο
Τετρ. Χιλιόμετρο	km^2	1 km^2 = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2
Τετρ. Εκατόμετρο	hm^2	1 hm^2 = 10.000 m^2 = 10^4 m^2
Τετρ. Δεκάμετρο	dam^2	1 dam^2 = 100 m^2 = 10^2 m^2
Τετρ. Μέτρο	m^2	
Τετρ. Δεκατόμετρο	dm^2	1 dm^2 = 0,01 m^2 = 10^{-2} m^2
Τετρ. Εκατοστόμετρο	cm^2	1 cm^2 = 0,0001 m^2 = 10^{-4} m^2
Τετρ. Χιλιοστόμετρο	mm^2	1 mm^2 = 0,000001 m^2 = 10^{-6} m^2
Στρέμμα		1 στρέμμα = 1000 m^2

Μονάδες όγκου	Συμβολισμός	Σχέση με το κυβ. μέτρο
Κυβικό Μέτρο	m^3	
Κυβικό Δεκατόμετρο ή Λίτρο	dm^3 ή l	1 dm^3 = 0,001 m^3 = 10^{-3} m^3 = = 1 l
Κυβικό Εκατοστόμετρο	cm^3	1 cm^3 = 0,000001 m^3 = 10^{-6} m^3
Κυβικό Χιλιοστόμετρο	mm^3	1 mm^3 = 0,000000001 m^3 = 10^{-9} m^3

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ - ΕΜΒΑΔΩΝ - ΟΓΚΩΝ

Ονομασία	Σχήμα	Περίμετρος	Εμβαδόν	Όγκος
Τετράγωνο		4α	α^2	
Ορθογώνιο		$2\alpha + 2\beta$	$\alpha \cdot \beta$	
Παραλλη-λόγραμμο		$2\alpha + 2\beta$	$\alpha \cdot \upsilon$	
Τρίγωνο		$\alpha + \beta + \gamma$	$\frac{\alpha \cdot \upsilon}{2}$	
Τραπέζιο		$\alpha + \beta + \gamma + \delta$	$\frac{(\alpha + \beta) \cdot \upsilon}{2}$	
Κύκλος		$2\pi\rho$	$\pi\rho^2$	

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ - ΕΜΒΑΔΩΝ - ΟΓΚΩΝ

Ονομασία	**Σχήμα**	**Περίμετρος**	**Εμβαδόν**	**Όγκος**
Κύβος		–	$6\alpha^2$	α^3
Ορθογώνιο Παραλλη-λεπίπεδο		–	$2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$	$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$
Κύλινδρος		–	$2\pi\rho^2+2\pi\rho\upsilon$	$\pi\rho^2\cdot\upsilon$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

x	x^2	$\sqrt{x}$	x	x^2	$\sqrt{x}$	x	x^2	$\sqrt{x}$
1	1	1,000	41	1681	6,403	81	6561	9,000
2	4	1,414	42	1764	6,481	82	6724	9,055
3	9	1,732	43	1849	6,557	83	6889	9,110
4	16	2,000	44	1936	6,633	84	7056	9,165
5	25	2,236	45	2025	6,708	85	7225	9,220
6	36	2,449	46	2116	6,782	86	7396	9,274
7	49	2,646	47	2209	6,856	87	7569	9,327
8	64	2,828	48	2304	6,928	88	7744	9,381
9	81	3,000	49	2401	7,000	89	7921	9,434
10	100	3,162	50	2500	7,071	90	8100	9,487
11	121	3,317	51	2601	7,141	91	8281	9,540
12	144	3,464	52	2704	7,211	92	8464	9,592
13	169	3,606	53	2809	7,280	93	8649	9,644
14	196	3,742	54	2916	7,348	94	8836	9,695
15	225	3,873	55	3025	7,416	95	9025	9,747
16	256	4,000	56	3136	7,483	96	9216	9,798
17	289	4,123	57	3249	7,550	97	9409	9,849
18	324	4,243	58	3364	7,616	98	9604	9,899
19	361	4,359	59	3481	7,681	99	9801	9,950
20	400	4,472	60	3600	7,746	100	10000	10,000
21	441	4,583	61	3721	7,810	101	10201	10,050
22	484	4,690	62	3844	7,874	102	10404	10,100
23	529	4,796	63	3969	7,937	103	10609	10,149
24	576	4,899	64	4096	8,000	104	10816	10,198
25	625	5,000	65	4225	8,062	105	11025	10,247
26	676	5,099	66	4356	8,124	106	11236	10,296
27	729	5,196	67	4489	8,185	107	11449	10,344
28	784	5,292	68	4624	8,246	108	11664	10,392
29	841	5,385	69	4761	8,307	109	11881	10,440
30	900	5,477	70	4900	8,367	110	12100	10,488
31	961	5,568	71	5041	8,426	111	12321	10,536
32	1024	5,657	72	5184	8,485	112	12544	10,583
33	1089	5,745	73	5329	8,544	113	12769	10,630
34	1156	5,831	74	5476	8,602	114	12996	10,677
35	1225	5,916	75	5625	8,660	115	13225	10,724
36	1296	6,000	76	5776	8,718	116	13456	10,770
37	1369	6,083	77	5929	8,775	117	13689	10,816
38	1444	6,164	78	6084	8,832	118	13924	10,863
39	1521	6,245	79	6241	8,888	119	14161	10,909
40	1600	6,325	80	6400	8,944	120	14400	10,954

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο
Οι πραγματικοί αριθμοί

Κεφάλαιο 2ο
Αλγεβρικές παραστάσεις

Κεφάλαιο 3ο
Εξισώσεις

Κεφάλαιο 4ο
Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 5ο
Στατιστική

Κεφάλαιο 6ο
Ισότητα - Ομοιότητα σχημάτων

Κεφάλαιο 7ο
Τριγωνομετρία

Κεφάλαιο 8ο
Συστήματα

Κεφάλαιο 9ο
Διανύσματα

Κεφάλαιο 10ο
Η σφαίρα

1. Π. Σ Δαμιανός: Ειρήνης 17 Πεύκη , Τηλ. 8069067
2. Κ. Ι. Κοτσώνης: Ομηρίδου 13 Πειραιάς, Τηλ. 4523568
3. Β. Ν. Κωστόπουλος: Σκόκου 11 Πατήσια, Τηλ. 2232801
4. Α. Α. Μανθογιάννης: Κορινθίας 48 - 50 Αμπελόκηποι, Τηλ. 7715238
5. Π. Σ. Μουρελάτος: Ικτίνου 27 Νίκαια, Τηλ. 4901022

Σχολικά βοηθήματα από τις εκδόσεις «Αθηνά»

Νηπιαγωγείο

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 4 - 5 χρονών
2. Για παιδιά 5 - 6 χρονών

Δημοτικό

Γ. Μαυρογιάννη - Ν. Στυλιανού

Σκέπτομαι και γράφω Έκθεση

1. α Δημοτικού
2. β Δημοτικού
3. γ - δ Δημοτικού
4. ε - στ Δημοτικού

Θ. Κωστόπουλου - Δ. Κελέκη
Α. Σκούφου - Μ. Μαυρογιάννη

Ο Κύκλος της γνώσης

Διακοπές

1. Για παιδιά 6 - 7 χρονών
2. Για παιδιά 7 - 8 χρονών
3. Για παιδιά 8 - 9 χρονών
4. Για παιδιά 9 - 10 χρονών
5. Για παιδιά 10 - 11 χρονών
6. Για παιδιά 11 - 12 χρονών

Ν. Στυλιανού

Γραμματική β - στ Δημοτικού (5 βιβλία)

Μαθηματικά β-στ Δημοτικού (5 βιβλία)

Ν. Στυλιανού - Η. Πετώνη κ.λπ.

Πολυβιβλία

1. α' Δημοτικού
2. β' Δημοτικού
3. γ' Δημοτικού
4. δ' Δημοτικού
5. ε' Δημοτικού
6. στ' Δημοτικού

Γυμνάσιο

Γ. Μαυρογιάννη

Μέθοδος διδασκαλίας και αυτοδιδασκαλίας για την Έκθεση

Α - Β - Γ Γυμνασίου (3 βιβλία)

Π. Δ. Δαμιανού κ.λπ.

1. Φυσική Β' Γυμνασίου
2. Φυσική Γ' Γυμνασίου
3. Χημεία Β' Γυμνασίου
4. Χημεία Γ' Γυμνασίου

ISBN 960-7319-27-3

Π. Σ.Δαμιανού
Κ. Κοτσώνη - Β. Κωστόπουλου
Α. Μανθογιάννη- Π. Μουρελάτου

Μαθηματικά

1. Α Γυμνασίου
2. Β Γυμνασίου
3. Γ Γυμνασίου

Λύκειο - Δέσμες

Γ. Μαυρογιάννη

1. Η διδασκαλία της Έκθεσης
2. Η Εννοιολογία της Έκθεσης
3. Δοκίμια

Γ. Μαυρογιάννη - Δ. Λάππα
Μ. Κωνσταντάρα - Μ. Τάκη

Έκθεση - Έκφραση

Α - Β - Γ Λυκείου (3 βιβλία)

Μ. Κωνσταντάρα - Ευαγ. Θεοδώρου
Ε. Κοκμοτού - Η. Πετώνη
Γ. Μαυρογιάννη - Β. Πρέντζα
Γ. Σ. Δαμιανού

Οι Αρχαίοι κλασικοί

1. Λυσία: Υπέρ αδυνάτου
2. Σοφοκλή: Αντιγόνη
3. Θουκυδίδη: Επιτάφιος
4. Πλάτωνος: Πρωταγόρας
5. Σοφοκλή: Οιδίπους Τύραννος
6. Θεματογραφία Αρχαίων Ελλήνων Συγγραφέων

Δίγλωσσες Εκδόσεις

(Ελληνικά-Αγγλικά)

Ειρ. Καμαράτου/Γιαλλούση

1. Το πέτρινο πουλί
2. Το αγόρι και η Ελπίδα
3. Η χρυσή φυλακή
4. Οι αόρατοι με το Σωκράτη
5. Οι αόρατοι με τον Αριστοτέλη
6. Οι αόρατοι με το Διογένη
7. Οι αόρατοι με τον Καζαντζάκη
8. Οι αόρατοι με το Θεόφιλο
9. Οι αόρατοι με το Μητρόπουλο

Ιστορία

Γ. Σ. Δαμιανού κ.λπ.

Ιστορία (γ και δ Δέσμες)
Ιστορία Α' - Γ' Γυμνασίου (3 βιβλία)

Κοινωνιολογία - Πολιτική Οικονομία

Δ.Χ.Λάππα

Λεξικό εννοιών και όρων