ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΟΡΙΣΜΟΣ – ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η Έννοια της Συνάρτησης

Η έννοια του συνόλου

Ορισμός:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα, και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Georg Cantor (1845 - 1918)

Τα σύνολα τα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ κτλ.

Αν ένα σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο τότε ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$.

Αν ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο Α γράφουμε $x \in A$ ενώ αν δεν ανήκει στο Α γράφουμε $x \notin A$.

Τα βασικά αριθμητικά σύνολα είναι τα εξής:

$\mathbf{N}$: Το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbf{Z}$: Το σύνολο των ακέραιων αριθμών, $\mathbf{Z} = \{-\infty, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... +\infty\}$

$\mathbf{Q}$: Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \middle| \alpha \in \mathbf{Z}, \beta \in \mathbf{Z}^* \right\}$

A : Το σύνολο των άρρητων αριθμών αποτελείται από τους αριθμούς που δεν μπορούν να τεθούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha \in \mathbf{Z}$ και $\beta \in \mathbf{Z}^*$

(π.χ.: $\sqrt{2}$,e, π)

$\mathbf{R}$: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το οποίο αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους.

<u>Η έννοια του υποσυνόλου</u>

<u>Ορισμός</u>:

Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β και συμβολίζουμε με $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, όταν (και μόνο όταν) κάθε στοιχείο του Α ανήκει στο Β.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΟΛΑ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα βασικό σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ και τα υποσύνολα του $\mathrm{A} = \{2,3,5,7\}$ και $\mathrm{B} = \{2,3,4,6,8,10\}$.

- Ορίζουμε **ένωση** των συνόλων Α και Β και συμβολίζουμε με $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ ένα νέο σύνολο, το οποίο αποτελείται από **<u>τα κοινά και τα μη κοινά</u>** στοιχεία των συνόλων Α και Β.
- Για τα συγκεκριμένα σύνολα: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{2,3,4,5,6,7,8,10\}$
- Ορίζουμε **τομή** των συνόλων Α και Β και συμβολίζουμε με $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ένα νέο σύνολο, το οποίο αποτελείται **<u>μόνο από τα κοινά</u>** στοιχεία των συνόλων Α και Β.

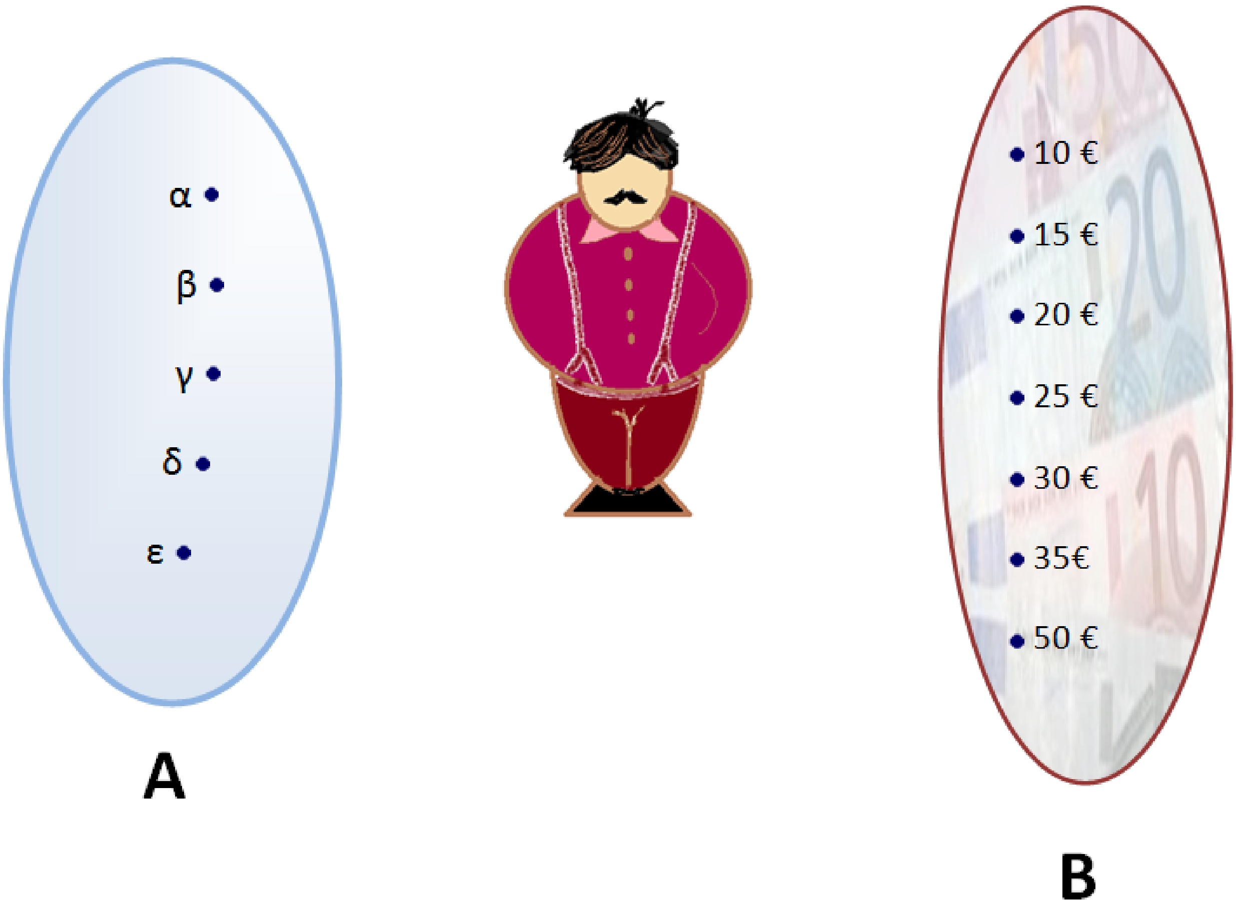
Για τα συγκεκριμένα σύνολα: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2,3\}$

<u>Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

Ένας βιβλιοπώλης θέλει να πουλήσει 5 νέα βιβλία τα οποία χάριν συντομίας ονομάζουμε:

α,**β**,**γ**,**δ** και **ε**.

Έστω **Α** το σύνολο αυτών των βιβλίων και **Β** το σύνολο ενδεικτικών τιμών πώλησης σε ευρώ.



Βιβλία **Τιμές βιβλίων**

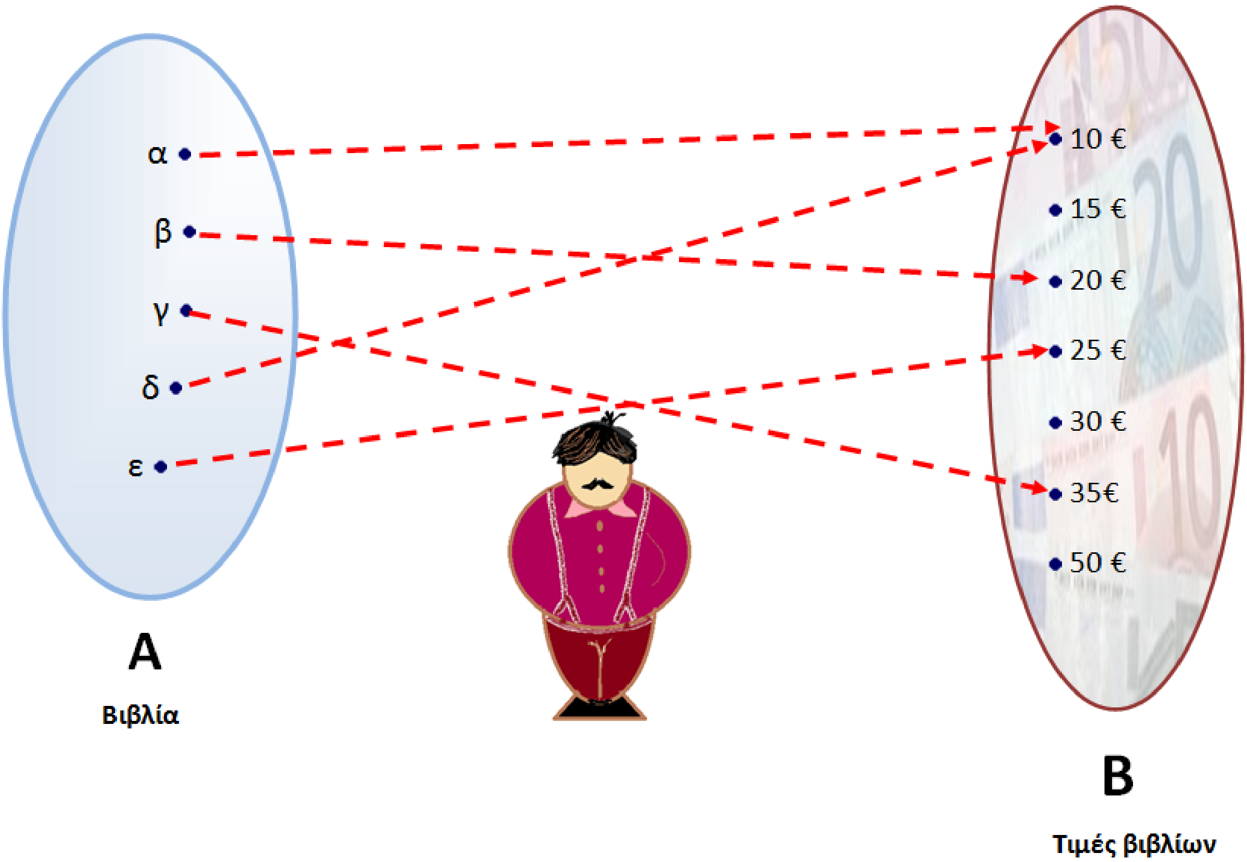
Ο βιβλιοπώλης προκειμένου να πουλήσει τα βιβλία, αφού λάβει υπόψη του διάφορες παραμέτρους (Τιμή αγοράς, περιθώριο κέρδους, πολιτικές εκπτώσεων, ανταγωνισμός, έξοδα, κτλ.), πρέπει:

Α) Να γράψει μια τιμή πάνω σε κάθε βιβλίο. Δηλαδή να καθορίσει μια τιμή πώλησης για κάθε βιβλίο.

Β) Μπορεί για λόγους πολιτικής, να αποφασίσει να πουλήσει δύο (ή και περισσότερα) βιβλία στην ίδια τιμή.

Γ) Δεν μπορεί για λόγους αξιοπιστίας, να αποφασίσει να πουλήσει το ίδιο βιβλίο σε δύο (ή περισσότερες) διαφορετικές τιμές.

Για παράδειγμα, μια επιλογή πωλήσεων παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Για την αντιμετώπιση περιπτώσεων όπως η παραπάνω ορίζουμε γενικά, την έννοια της συνάρτησης ως εξής:

<u>Ορισμός Συνάρτησης</u>:

Ονομάζουμε συνάρτηση μια διαδικασία κατά την οποία **κάθε στοιχείο** ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται μέσω αυτής **σε ένα και μοναδικό στοιχείο** ενός άλλου συνόλου Β.

Τις συναρτήσεις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα f,g και h και περιγράφουμε τη διαδικασία αντιστοίχισης γράφοντας $f : A \to B$.

Παντού στα επόμενα θα θεωρούμε ότι το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ και $B = \mathbf{R}$.

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **Πραγματικές Συναρτήσεις Πραγματικής μεταβλητής** και επειδή μόνο με αυτές θα ασχοληθούμε, θα τις καλούμε απλά συναρτήσεις.

Το σύνολο Α του οποίου τα στοιχεία αντιστοιχίζονται στο σύνολο Β ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης ενώ το σύνολο Β **σύνολο αφίξεως** της συνάρτησης.

Τα στοιχεία του συνόλου Α - που συνήθως τα συμβολίζουμε με x - ονομάζονται **ανεξάρτητες μεταβλητές** ενώ, τα στοιχεία του συνόλου Β - που συνήθως τα συμβολίζουμε με y - ονομάζονται

εξαρτημένες μεταβλητές γιατί οι τιμές τους εξαρτώνται από τις τιμές των x.

Αν για μια συνάρτηση f, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, γράφουμε $y = f(x)$ και διαβάζουμε **"y ίσον f του x"**.

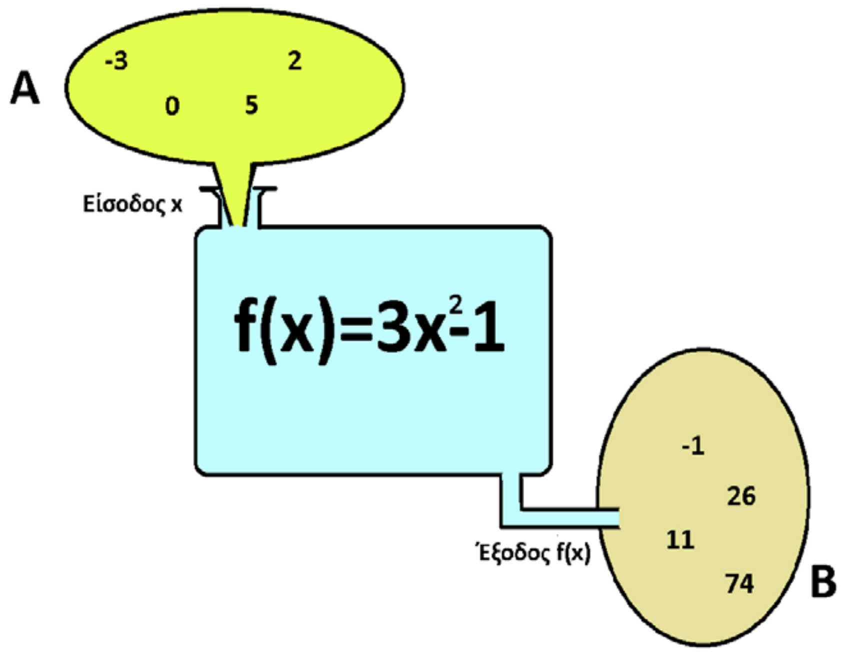
Ειδικότερα:

Όταν δίνεται μόνο ο τύπος μιας συνάρτησης f, ως **Πεδίο Ορισμού της θα θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ για τις τιμές του οποίου** $f(x) \in \mathbf{R}$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\mathbf{A_f}, \mathbf{D_f}$ ή απλά Α όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \to B$ ονομάζουμε το σύνολο των τιμών $f(x), x \in A$ και συμβολίζεται με $f(A)$.

Μια μεταφορά για τη συνάρτηση είναι αυτή της λειτουργίας της ως μια μηχανή. Στην είσοδο έχουμε τις τιμές x και στην έξοδο τις τιμές της συνάρτησης. (Βλέπε σχήμα)



Δηλαδή για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=3x^2-1$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\{-3,0,2,5\}$ κάθε στοιχείο του συνόλου Α,

μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται από τον τύπο της αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$.

Για παράδειγμα, ο αριθμός 2 αντιστοιχίζεται στον αριθμό $f(2)=3\cdot 2^2-1=3\cdot 4-1=12-1=11$.

__Παρατηρήσεις__

1. Το όνομα της μεταβλητής σε μια συνάρτηση δεν ενδιαφέρει.

   Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(u)=3u^2-1$ και πεδίο ορισμού το σύνολο Α, τότε η g εκτελεί με τον ίδιο τρόπο ακριβώς την ίδια διαδικασία **όπως** και η f.

   Δηλαδή, οι τύποι $g(u)=3u^2-1$ και $f(x)=3x^2-1$ δηλώνουν ακριβώς την ίδια συνάρτηση.

2. Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, αν μια διαδικασία αντιστοίχισης f μεταξύ δύο μη κενών συνόλων Α και Β είναι συνάρτηση, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1=x_2$ προκύπτει πάντα $f(x_1)=f(x_2)$ και αντίστροφα.

   Ώστε ένα κριτήριο για τη διαπίστωση αν μία αντιστοίχιση f με τύπο $f(x)$ είναι συνάρτηση είναι το παρακάτω:

   - Μια αντιστοίχιση f είναι συνάρτηση όταν και μόνο όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

   __Παράδειγμα__: Η αντιστοίχιση f, με τύπο $f(x)=x^2-x+2$ είναι συνάρτηση του συνόλου $\mathbf{R}$ στο σύνολο $\mathbf{R}$, γιατί:

   Α) Το πεδίο ορισμού της είναι $A=\mathbf{R}$ και

   Β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, έχουμε:

   $$x_1=x_2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1^2-x_1=x_2^2-x_1 \overset{x_1=x_2}{\Rightarrow} x_1^2-x_1=x_2^2-x_2 \Rightarrow$$

   $$x_1^2-x_1+2=x_2^2-x_2+2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

   Ισοδύναμη σχέση με την **(1)** είναι η σχέση **(2)** που ακολουθεί:

   - Μια αντιστοίχιση f είναι συνάρτηση όταν και μόνο όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$

με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

<u>Παράδειγμα</u>:

Η αντιστοίχιση f, με τύπο $f(x) = 3x - 1$ είναι συνάρτηση του συνόλου $\mathbf{R}$ στο σύνολο $\mathbf{R}$, γιατί:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, έχουμε:

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Εύρεση του Πεδίου Ορισμού μιας Συνάρτησης

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης στηριζόμαστε στον ορισμό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και βρίσκουμε τα $x \in \mathbf{R}$ για τα οποία $f(x) \in \mathbf{R}$, λαμβάνοντας υπόψη μας τα πεδία ορισμού βασικών συναρτήσεων.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{2012} + x^{2011} + x^2 - x + 2010$ έχει πεδίο ορισμού το R γιατί $f(x) \in \mathbf{R}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^{2x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ γιατί $g(x) \in \mathbf{R}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

3. Η ρητή συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^4 + 5x^3 - x + 9}{x^2 - 1}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

   $A = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ γιατί οι παραστάσεις $x^4 + 5x^3 - x + 9$ και $x^2 - 1$ παίρνουν πραγματικές τιμές για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και ο παρανομαστής μηδενίζεται για τις τιμές -1 και 1.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τις βασικότερες συναρτήσεις ανά κατηγορία και το πεδίο ορισμού τους.

α/α	Συνάρτηση	Κατηγορία	Πεδίο Ορισμού
1.	$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$	**Πολυωνυμική**	$\mathbf{R}$
2.	$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, **όπου** $P(x), Q(x)$ **πολυωνυμικές συναρτήσεις**	**Ρητή**	**Όλο το $\mathbf{R}$ εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή.** $A = \{x \in \mathbf{R} / Q(x) \neq 0\}$
3.	$f(x) = \sqrt{x}$	**Άρρητη**	$x \in [0, +\infty)$ **ή** $x \geq 0$
4.	$f(x) = \eta\mu x$	**Τριγωνομετρική**	$\mathbf{R}$
5.	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	**Τριγωνομετρική**	$\mathbf{R}$
6.	$f(x) = \varepsilon\varphi x$	**Τριγωνομετρική**	$A = \{x \in \mathbf{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ **ή** $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$
7.	$f(x) = \sigma\varphi x$	**Τριγωνομετρική**	$A = \{x \in \mathbf{R} / \eta\mu x \neq 0\}$ **ή** $x \neq k\pi, k \in Z$

8.	$f(x)=e^x$	**Εκθετική**	$\mathbf{R}$
9.	$f(x)=\ln x$	**Λογαριθμική**	$x\in(0,+\infty)$ **ή** $x>0$
10	$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$	**Κλασματική**	**Το πεδίο ορισμού της f προκύπτει από την συναλήθευση των:** $x\in D_g$ **,** $x\in D_h$ **και** $h(x)\neq 0$

Πράξεις με Συναρτήσεις

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:A\to\mathbf{R}$ και $g:B\to\mathbf{R}$. Για να ορίζεται οποιαδήποτε πράξη μεταξύ των f,g πρέπει $\Delta=A\cap B\neq\varnothing$ και με αυτή την προϋπόθεση ορίζουμε:

- **Άθροισμα** των συναρτήσεων f,g και συμβολίζουμε με $f+g$ μια νέα συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το Δ και τύπο:

  $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

- **Διαφορά** των συναρτήσεων f,g και συμβολίζουμε με $f-g$ μια νέα συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το Δ και τύπο:

  $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

- **Γινόμενο** των συναρτήσεων f,g και συμβολίζουμε με $f\cdot g$ μια νέα συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το Δ και τύπο:

  $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

- **Πηλίκο** των συναρτήσεων f,g και συμβολίζουμε με $\dfrac{f}{g}$ μια νέα συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το

  $\Delta-\{$ ρίζες της $g(x)=0\}$ και τύπο:

  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

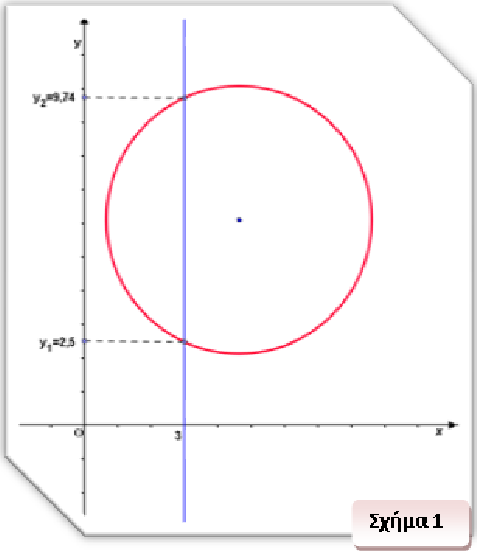
ΟΡΙΣΜΟΣ:

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ονομάζουμε την αναπαράσταση σε ένα σύστημα αξόνων όλων των σημείων $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $y=f(x), x\in A$.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με C_f

Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα $x'x$ ενώ τα στοιχεία του συνόλου τιμών στον κατακόρυφο άξονα $y'y$.

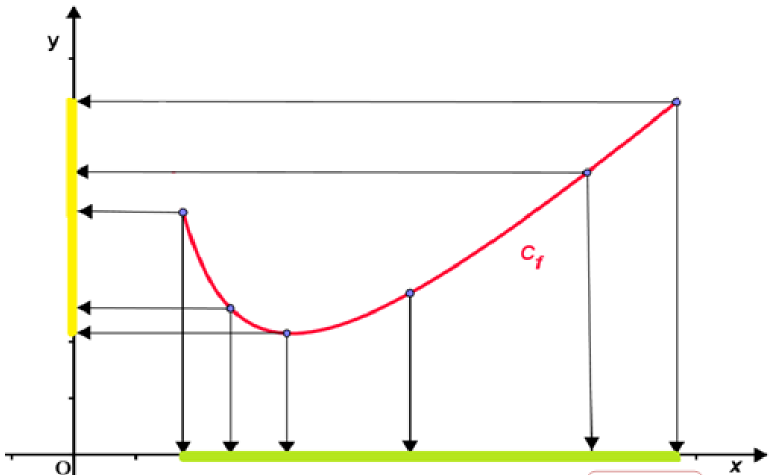
Επειδή κάθε $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y\in \mathbf{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη.
Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.
Έτσι κάθε κλειστή καμπύλη όπως ο κύκλος και η έλλειψη δεν αποτελούν γραφική παράσταση συνάρτησης.
Για παράδειγμα, ο κύκλος του σχήματος **(1)** δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί όπως βλέπουμε στο σχήμα, η κάθετη στον x'x στο $x_0=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία και επομένως η τιμή 3 στον οριζόντιο άξονα αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικές τιμές y
(Βλέπε σχήμα τιμές y_1, y_2)
Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό της συνάρτησης και επομένως ο κύκλος δεν αποτελεί συνάρτηση.



Σχήμα 1

Εκτός από τις γνωστές καμπύλες όπως ο κύκλος, η έλλειψη, η παραβολή κτλ, με το κριτήριο της κατακόρυφης γραμμής μπορούμε να ελέγξουμε γενικά αν μια γραμμή **δεν** αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Στις περιπτώσεις που δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f της οποίας δεν γνωρίζουμε τον τύπο, όπως αυτή του σχήματος 2 τότε προβάλλοντας τα σημεία της C_f στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (πράσινο τμήμα του $x'x$), ενώ προβάλλοντας τα σημεία της C_f στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το σύνολο τιμών της (κίτρινο τμήμα στον $y'y$).

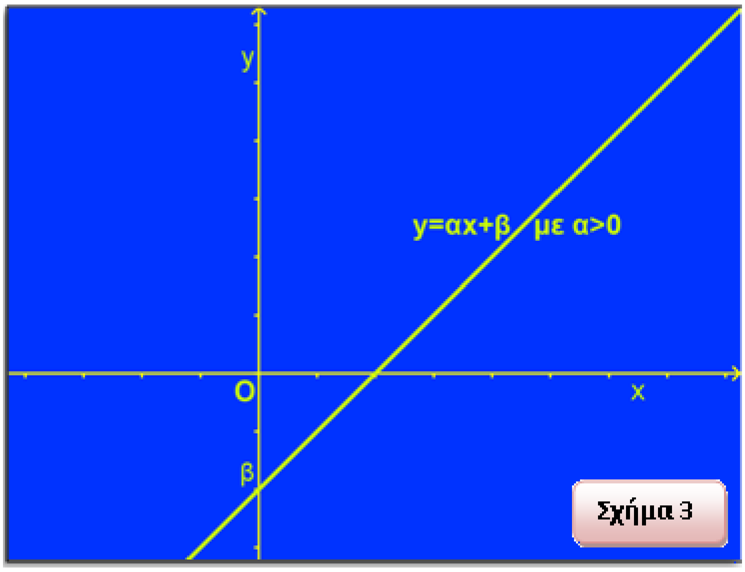


Σχήμα 2

Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων

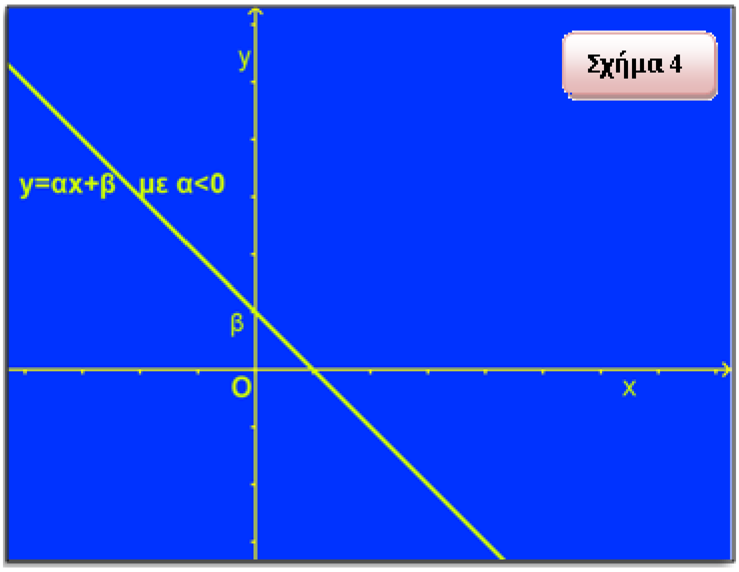
Οι γραφικές παραστάσεις των βασικότερων συναρτήσεων που ήδη έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις είναι:

1. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με γενικό τύπο $f(x) = \alpha x + \beta,\ x \in \mathbf{R}$ είναι ευθεία (Σχήμα 3.)**

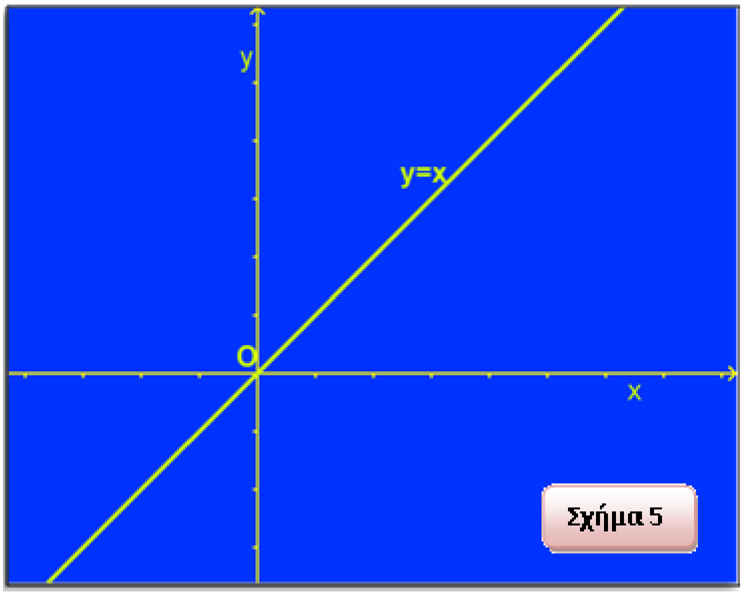


Σχήμα 3

Όταν $\alpha > 0$, η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία και τον άξονα x'x είναι οξεία (Σχήμα 3) ενώ, όταν $\alpha < 0$, η γωνία είναι αμβλεία (Σχήμα 4).

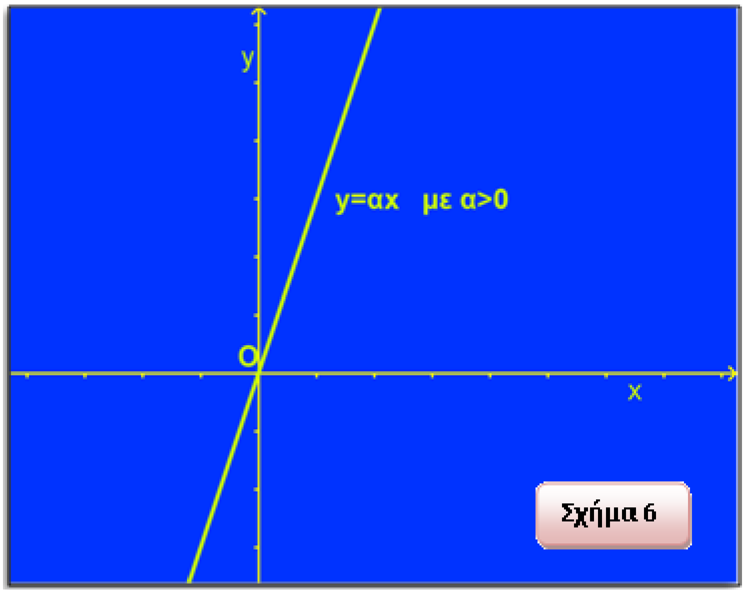


Ειδικές περιπτώσεις:

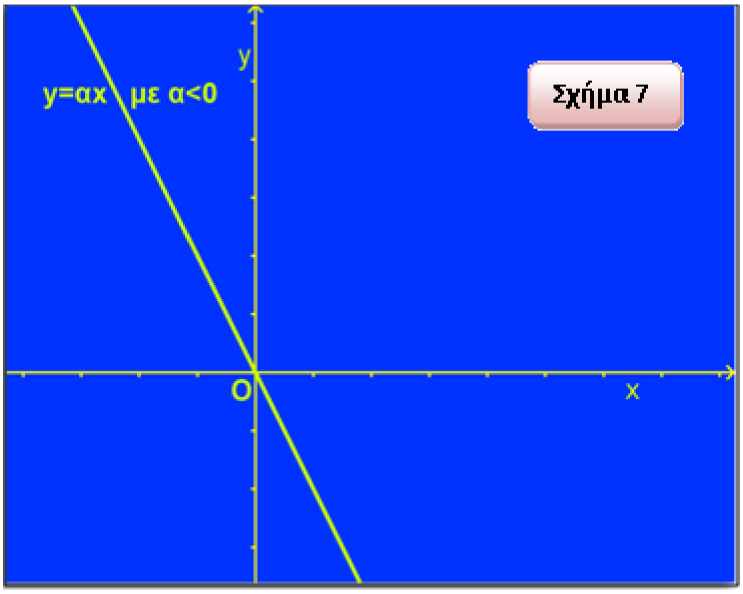


Η $f(x)=x$ είναι η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου (Σχήμα 5).

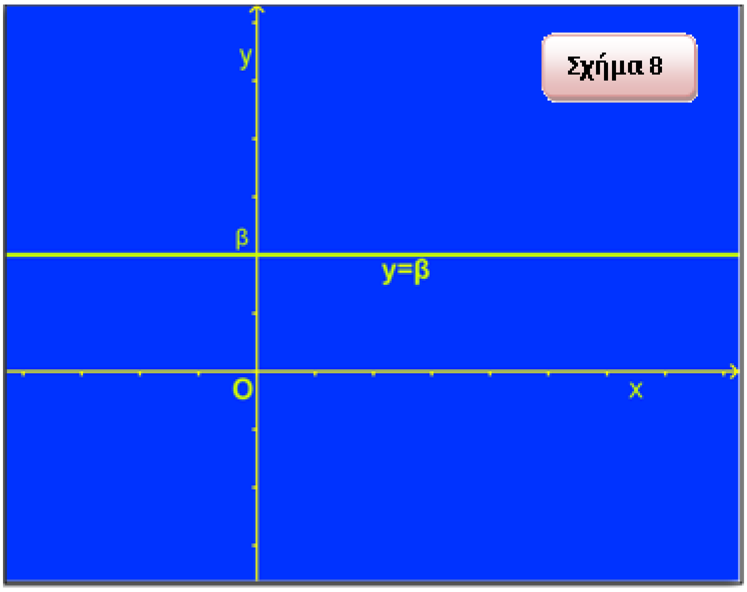
Η $f(x) = \alpha x$ με $\alpha > 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων σχηματίζοντας με τον οριζόντιο άξονα x'x οξεία γωνία (Σχήμα 6)



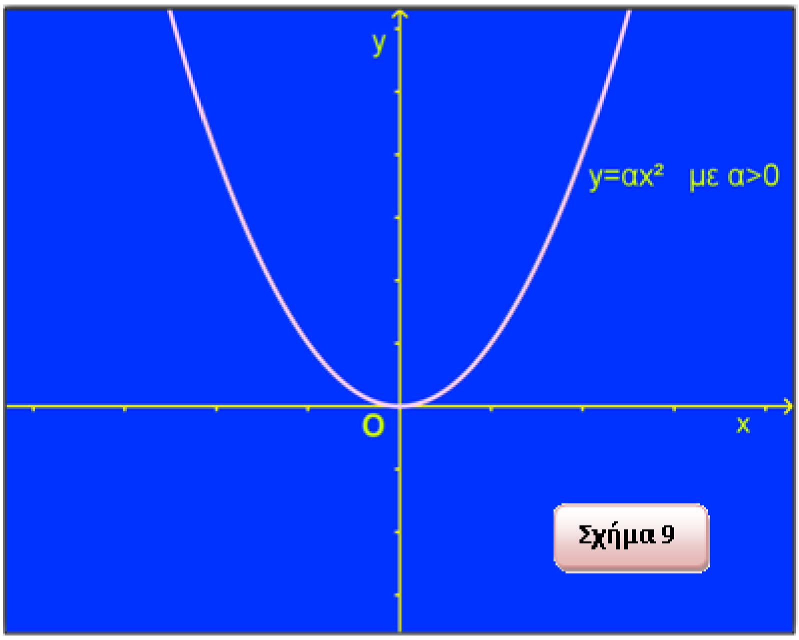
Η $f(x) = \alpha x$ με $\alpha < 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων σχηματίζοντας με τον οριζόντιο άξονα x'x αμβλεία γωνία (Σχήμα 7)



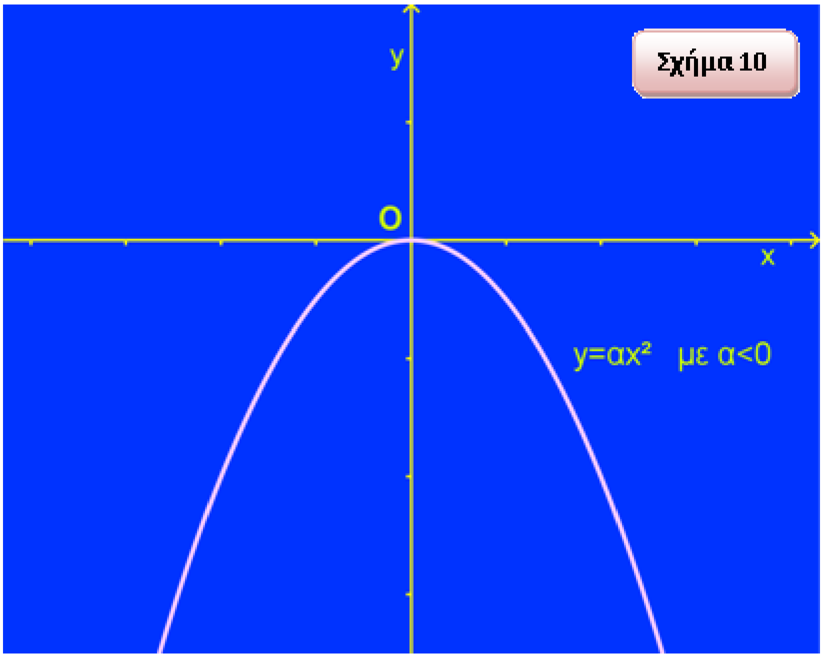
Η $f(x)=\beta$ (Σχήμα 8) ονομάζεται **σταθερή συνάρτηση** αφού για κάθε $x \in R$ η τιμή της είναι ο αριθμός β.



2. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης** f **με τύπο** $f(x)=\alpha x^2, \alpha \neq 0$ **απεικονίζεται στο σχήμα 9, ονομάζεται παραβολή** και έχει γενικά πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, ενώ το σύνολο τιμών της εξαρτάται από το πρόσημο του α.



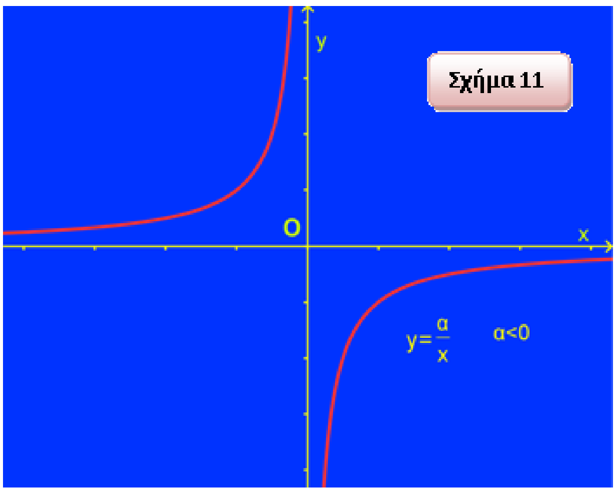
Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[0,+\infty)$ όταν $\alpha>0$ (Σχήμα 9).

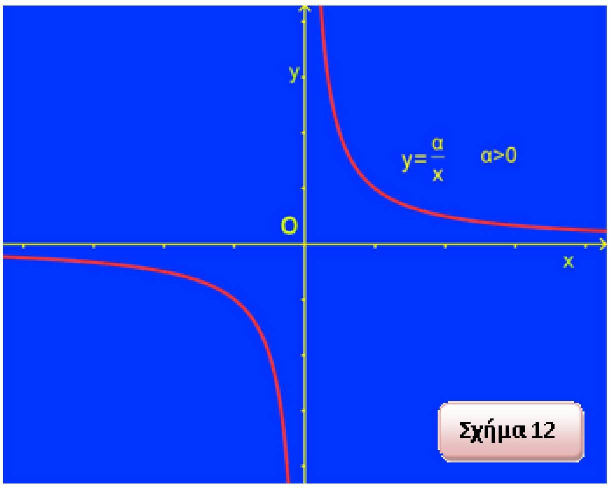


Το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $(-\infty,0]$ όταν $\alpha<0$ (Σχήμα 10).

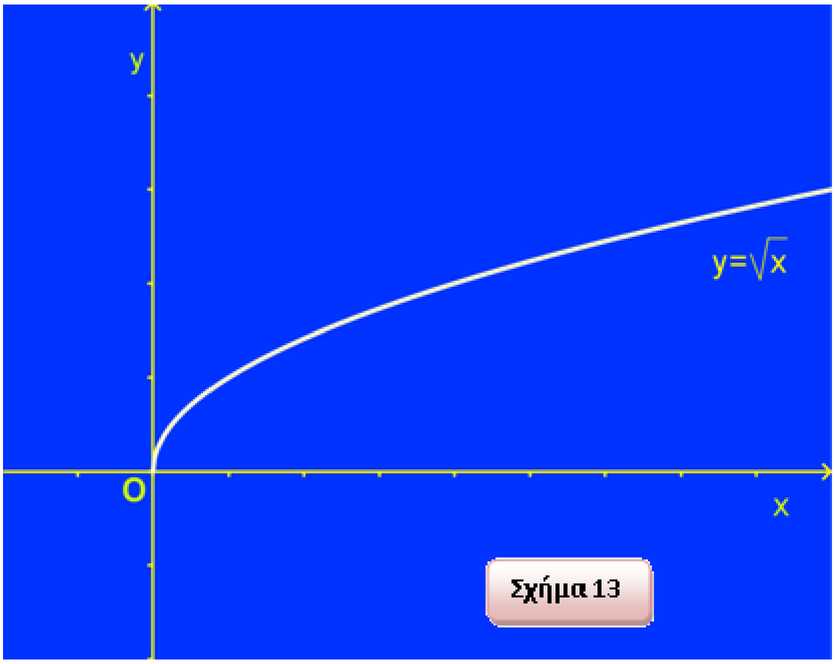
3. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με γενικό τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ είναι υπερβολή (Σχήματα 11,12)**

Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση είναι το $\mathbf{R}^*$



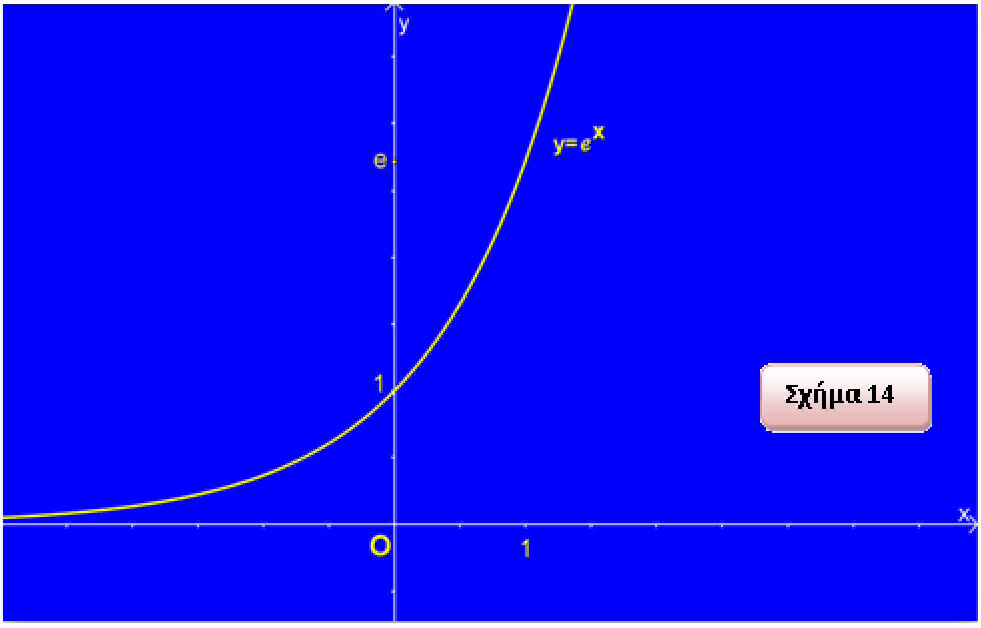


4. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$ (Άρρητη) έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το σύνολο $A=[0,+\infty)$. (Σχήμα 13)**



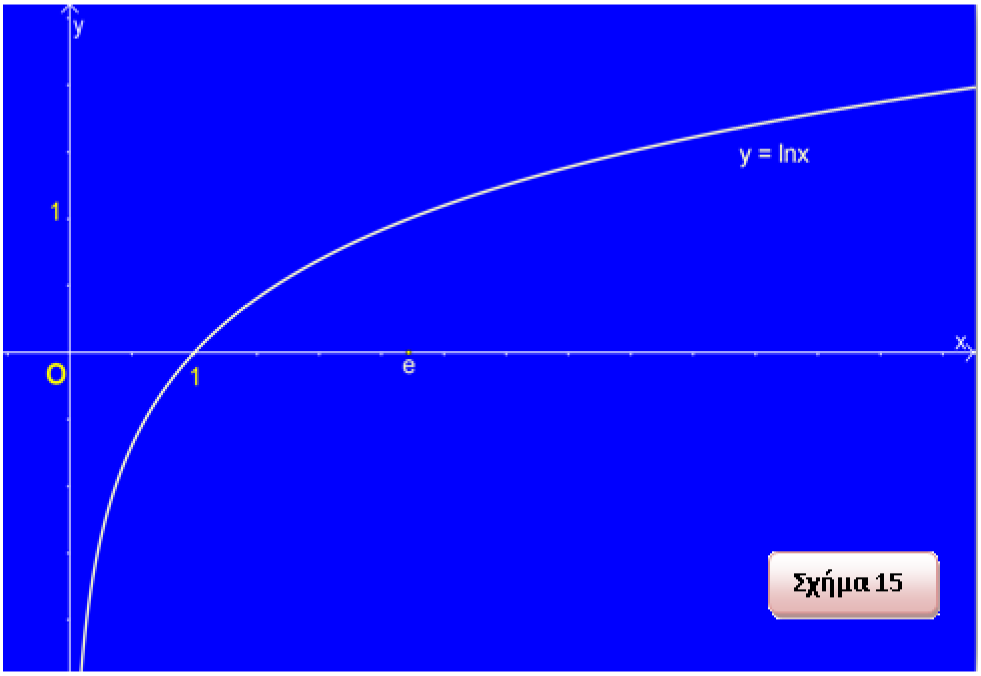
Σχήμα 13

5. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=e^x$ (Εκθετική) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ ενώ, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ (Σχήμα 14)**



Σχήμα 14

6. **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο** $f(x) = \ln x$ **(Λογαριθμική) έχει πεδίο ορισμού το** $(0,+\infty)$ **ενώ, το σύνολο τιμών της είναι το** $\mathbf{R}$ **(Σχήμα 15)**

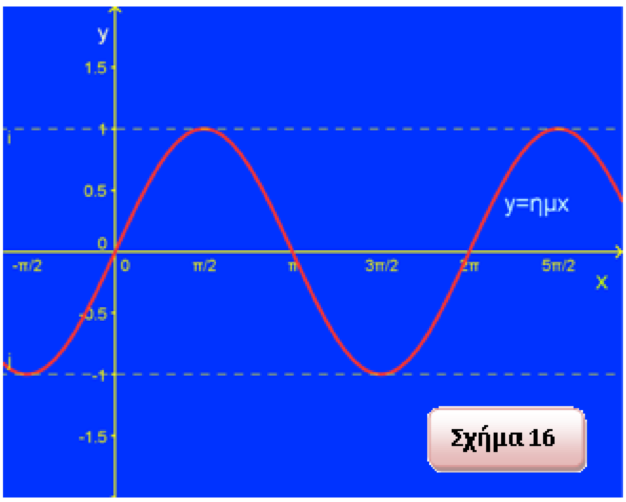


Σχήμα 15

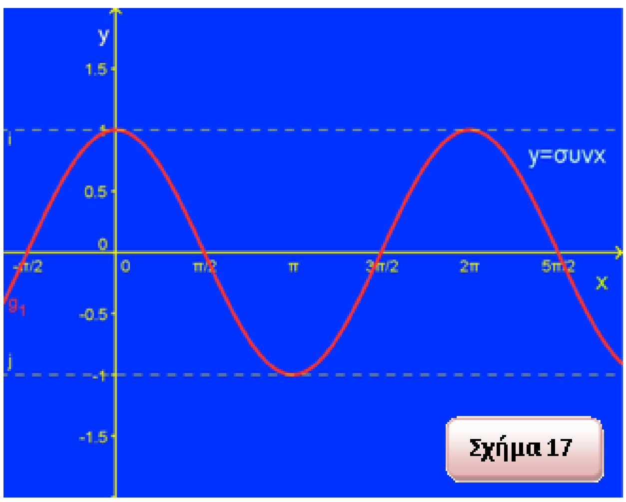
7. Οι **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις f,g με τύπους $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και έχουν ως σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα $[-1,1]$.

   Η μορφή των γραφικών τους παραστάσεων, επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π για αυτό οι παραπάνω συναρτήσεις ονομάζονται **περιοδικές** με περίοδο 2π.

   Οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στα σχήματα 16,17



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Σημειώσεις

1. Σε μια συνάρτηση $f: A \to B$ θεωρείται αυτονόητο ότι τα σύνολα A και B δεν είναι κενά σύνολα και συνήθως δεν γίνεται ιδιαίτερη αναφορά.

2. Για να ορίζεται μια πράξη μεταξύ δύο συναρτήσεων πρέπει απαραίτητα η τομή των πεδίων ορισμού τους να είναι μη κενό σύνολο.

   Αν αυτό συμβαίνει, τότε το πεδίο ορισμού της νέας συνάρτησης είναι εν γένει υποσύνολο της τομής τους.

   Παράδειγμα:

   Για τις συναρτήσεις f με $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ και g με $g(x) = \sqrt{x-1}$ είναι $A_f = [1, +\infty)$ και $A_g = [1, +\infty)$, οπότε $A_f \cap A_g = [1, +\infty)$ και επομένως ορίζεται η συνάρτηση f+g με τύπο: $(f+g)(x) = 2,\ x \in [1, +\infty)$

3. **Προσοχή:** Είναι λάθος να βρίσκουμε πρώτα τον τύπο μιας συνάρτησης που προκύπτει ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συναρτήσεων και στη συνέχεια από τον τύπο της το πεδίο ορισμού της.

   Παράδειγμα:

   Για τις συναρτήσεις του προηγούμενου παραδείγματος αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα να ισχυρισθούμε λανθασμένα ότι $A_{f+g} = \mathbf{R}$,

   αφού η συνάρτηση $(f+g)(x) = 2$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

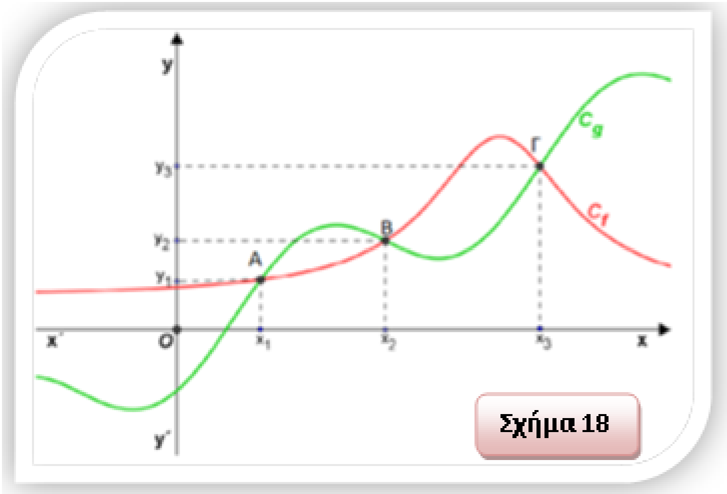
4. Ένα σημείο $K(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $y = f(x)$, όταν και μόνο όταν $\beta = f(\alpha)$.

5. Τα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που βρίσκονται πάνω (κάτω) από τον άξονα x'x είναι εκείνα που έχουν τετμημένες τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$

   (Αντίστοιχα $f(x) < 0$). (Ανάλογα για τις: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x) > 0$ και $f(x) < g(x) \Leftrightarrow h(x) = f(x) - g(x) < 0$).

6.

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g (όταν υπάρχουν) είναι της μορφής $M(\rho, f(\rho) = g(\rho))$, όπου ρ λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.



Παράδειγμα:
Στο σχήμα 18 διαπιστώνουμε ότι τρία τέτοια σημεία είναι τα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$, όπου x_1, x_2, x_3 είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Προφανώς αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ δεν έχει λύση αυτό θα σημαίνει ότι τα γραφήματα τους δεν έχουν κοινά σημεία.

Όταν θέλουμε να λύσουμε μια ανίσωση για παράδειγμα την $f(x) > g(x)$ αναζητούμε εκείνα τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

Από τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων βλέπουμε (Σχήμα 18) ότι για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$ η γραφική παράσταση της

συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Άρα: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$

ΣΧΟΛΙΟ: Ομοίως δουλεύουμε και για $f(x) < g(x)$.

<u>Ανακεφαλαίωση</u>

Τα βασικά σημεία των εννοιών που παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή είναι:

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ονομάζουμε συνάρτηση μια διαδικασία κατά την οποία **κάθε στοιχείο** ενός συνόλου **Α** αντιστοιχίζεται μέσω αυτής **σε ένα και μοναδικό στοιχείο** ενός άλλου συνόλου **Β**.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Όταν δίνεται μόνο ο τύπος μιας συνάρτησης f, ως **Πεδίο Ορισμού της θα θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ για τις τιμές του οποίου** $f(x) \in \mathbf{R}$. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με A_f, D_f ή απλά Α όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f ονομάζουμε την αναπαράσταση σε ένα σύστημα αξόνων όλων των σημείων $M(x, y)$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $y = f(x), x \in A$.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με C_f

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ: Αν f,g συναρτήσεις με πεδία ορισμού τα σύνολα Α,Β αντίστοιχα, τότε ορίζουμε:

- Άθροισμα: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ με $x \in A \cap B$
- Διαφορά: $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ με $x \in A \cap B$
- Γινόμενο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ με $x \in A \cap B$
- Πηλίκο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ με $x \in A \cap B - \{$ ρίζες της $g(x)=0\}$

<u>Παραδείγματα Εφαρμογής</u>

Παράδειγμα 1 (Υπολογισμός Τιμών της Συνάρτησης f)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ με $x\in\mathbf{R}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$ και $f(4)$.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική οπότε ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x. Θέτοντας πλέον $x=-1$ και $x=4$ στον τύπο της συνάρτησης παίρνουμε:

$f(-1)=(-1)^3-6(-1)^2+12(-1)-8=-1-6-12-8=-27$ και

$f(4)=4^3-6\cdot 4^2+12\cdot 4-8=64-96+48-8=8$.

Σχόλιο: Παρατηρώντας ότι $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$, έχουμε $f(x)=(x-2)^3, x\in\mathbf{R}$ και ο υπολογισμός των τιμών $f(-1)$ και $f(4)$ επιτυγχάνεται πιο γρήγορα.

Παράδειγμα 2 (Υπολογισμός Τιμών της Συνάρτησης f)

Δίνεται η συνάρτηση $f(\omega)=\sqrt{6-2\omega}-4$ με $-16<\omega\le 1$.

α) Να υπολογιστούν οι τιμές $f(1)$ και $f(-15)$.

β) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού ω είναι $f(\omega)=0$;

γ) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού ω είναι $f(\omega)<0$;

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α) Επειδή δίνεται ότι $A_f=(-16,1]$ και οι αριθμοί -15 και 1 ανήκουν στο A_f παίρνουμε:

$f(-15)=\sqrt{6-2\cdot(-15)}-4=\sqrt{36}-4=6-4=2$ και

$f(1)=\sqrt{6-2\cdot 1}-4=\sqrt{4}-4=2-4=-2$

β) Για $\omega \in A_f = (-16,1]$, έχουμε: $f(\omega)=0 \Leftrightarrow \sqrt{6-2\omega}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{6-2\omega}=4$

$\overset{\omega<3}{\Leftrightarrow} 6-2\omega=16 \Leftrightarrow 2\omega=-10 \Leftrightarrow \omega=-5$

Η λύση που βρήκαμε είναι δεκτή αφού ανήκει στο $(-16,1]$.

γ) Για $\omega \in A_f = (-16,1]$, έχουμε: $\sqrt{6-2\omega}-4<0 \Leftrightarrow \sqrt{6-2\omega}<4 \overset{\omega<3}{\Leftrightarrow} 6-2\omega<16 \Leftrightarrow$

$2\omega>-10 \Leftrightarrow \omega>-5$

και επειδή $\omega \in A_f = (-16,1]$, παίρνουμε: $\omega \in (-5,1]$.

Σχόλιο: Αν δεν δίνονταν ότι $A_f = (-16,1]$, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f θα προσδιορίζονταν κατά τα γνωστά και στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ήταν το διάστημα $(-\infty,3]$.

Παράδειγμα 3 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού Συνάρτησης)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x^{2012}+x^{2011}+2013}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ ***Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 7"***

β. $f(x)=2012\sqrt{x^2-5x+6}$

γ. $f(x)=e^{2x-5}+\ln(4-x^2)$

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α. Ψάχνουμε να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ο τύπος της συνάρτησής μας έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Η συνάρτηση f είναι ρητή γιατί ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμα του x και κάθε ρητή συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή.

Είναι: $x^4-3x^3+3x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x^3-3x^2+3x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)^3=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Άρα ο παρονομαστής της συνάρτησης γίνεται μηδέν όταν $x=0$ ή $x=1$. Για να ορίζεται λοιπόν ο τύπος της συνάρτησης f πρέπει και αρκεί $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\mathbf{R}-\{0,1\}$.

β. Ψάχνουμε να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ο τύπος της συνάρτησής μας έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Για να ορίζεται μια άρρητη συνάρτηση πρέπει η υπόρριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική. Δηλαδή πρέπει: $x^2-5x+6\geq 0$ Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3 και γίνεται θετικό για κάθε x εκτός των ριζών (Διάβαζε Εισαγωγικό Κεφάλαιο), οπότε:

$x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

Άρα: $A=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

γ. Η συνάρτηση $f_1(x)=e^{2x-5}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και η συνάρτηση $f_2(x)=\ln(4-x^2)$ όταν: $4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

Επειδή $A_{f_1}\cap A_{f_2}=(-2,2)\neq\varnothing$, η συνάρτηση $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(-2,2)$.

Παράδειγμα 4 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού Συνάρτησης)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3-x^2}}{\ln(x-3)}$ ***Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 8"***

β. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}+\ln(x^2+2)}{(x^6+x^4+x^2+3)\cdot e^{2x-1}}$

(Θέμα Γ)

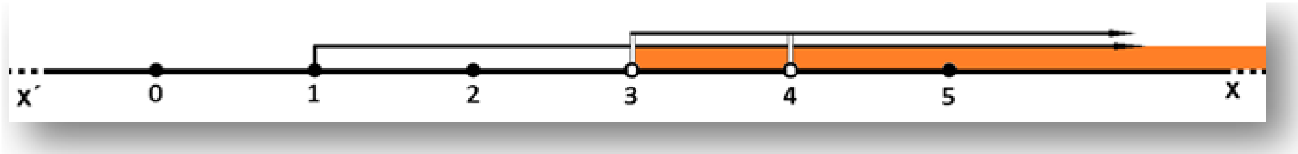
<u>Λύση</u>

α. Η συνάρτηση ορίζεται για τους $x\in\mathbf{R}$ για τους οποίους έχουν νόημα πραγματικού αριθμού ο αριθμητής και ο παρανομαστής και επί πλέον ο παρανομαστής δεν είναι μηδέν. Δηλαδή όταν:

$$x^3-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2(x-1)\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\ \textbf{ή}\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \textbf{ή}\\ x=0\end{cases}\qquad \textbf{(1)}$$

και $x-3>0\Leftrightarrow x>3$ **(2)**

και $\ln(x-3)\neq 0\Leftrightarrow x-3\neq 1\Leftrightarrow x\neq 4$ **(3)**



Συναληθεύοντας πλέον τις **(1)**,**(2)** και **(3)** παίρνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=(3,4)\cup(4,+\infty)$.

β. Ανάλογα προς το (α) ερώτημα, η συνάρτηση ορίζεται για τους $x\in\mathbf{R}$ για τους οποίους έχουν νόημα πραγματικού αριθμού, ο αριθμητής και ο παρανομαστής και επί πλέον ο παρανομαστής δεν είναι μηδέν. Δηλαδή όταν:

$$\begin{cases} x^2+2x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\in R, \textbf{ αφού } \Delta<0 \textbf{ και } \alpha=1>0 & \textbf{(1)} \\ x^2+2>0 \Leftrightarrow x\in R & \textbf{(2)} \\ (x^6+x^4+x^2+3)e^{2x-1}\neq 0 \Leftrightarrow x\in R, \ (\textbf{γινόμενο θετικών}) & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Δεν προκύπτει λοιπόν κανένας περιορισμός για τις συναρτήσεις που συνθέτουν την κλασματική συνάρτηση f επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Παράδειγμα 5 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού Συνάρτησης)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x)=\dfrac{3x^{11}+5x^{10}-x-8}{x^3-5x^2+6x}$
2. $g(x)=\sqrt{6-x}+\dfrac{5}{\ln x}$
3. $h(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2+3}-\ln(x^2-1)}{x^4+x^3+2x^2}$ ***Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 9"***

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για τους $x\in\mathbf{R}$ για τους οποίους ο παρανομαστής δεν είναι μηδέν.

   Επειδή:

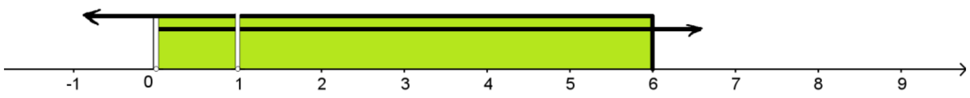
   $x^3-5x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow$

$x(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ ή $x=3$.

το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=\mathbf{R}-\{0,2,3\}$

ii. Ψάχνουμε να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ο τύπος της g έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Αυτό συμβαίνει όταν: $\begin{cases} 6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 & (1) \\ x>0 & (2) \\ \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln 1 \Leftrightarrow x \neq 1 & (3) \end{cases}$

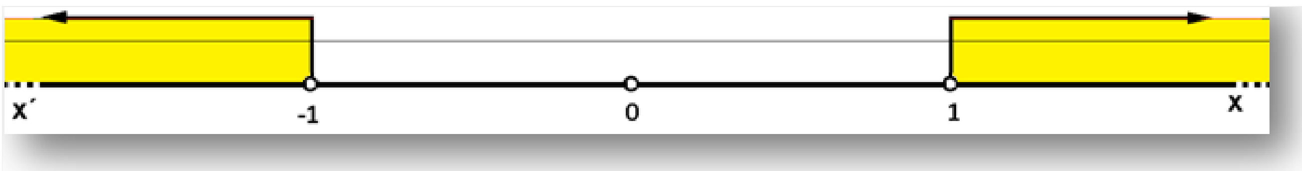


Αναπαριστώντας τους περιορισμούς σε έναν οριζόντιο άξονα διαπιστώνουμε ότι συναληθεύουν όταν: $x \in (0,1) \cup (1,6]$.

Άρα $A_g=(0,1) \cup (1,6]$.

Η συνάρτηση ορίζεται για τους $x \in \mathbf{R}$ για τους οποίους έχουν νόημα πραγματικού αριθμού ο αριθμητής , ο παρονομαστής και επιπλέον ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν. Δηλαδή όταν:

$$\begin{cases} x^2+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} & (1) \\ x^2-1>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) & (2) \\ x^4+x^3+2x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2+x+2) \neq 0 \overset{x^2+x+2>0 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}}{\Leftrightarrow} x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 & (3) \end{cases}$$



Από την συναλήθευση των **(1)**,**(2)** και **(3)** παίρνουμε: $A_f=(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Παράδειγμα 6 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού Συνάρτησης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 10"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + \lambda} + \ln(4 - \lambda^2)$$

Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να είναι όλο το $\mathbf{R}$.

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f είναι άθροισμα των συναρτήσεων: $f_1(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + \lambda}$ και $f_2(x) = \ln(4 - \lambda^2)$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_{f_1} \cap A_{f_2}$ και για να ορίζεται στο $\mathbf{R}$ πρέπει οι συναρτήσεις f_1, f_2 να έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

- Για να έχει η συνάρτηση f_1 πεδίο ορισμού όλο το $\mathbf{R}$, πρέπει το τριώνυμο $x^2 + \lambda x + \lambda$ να είναι μη αρνητικό για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και για να συμβαίνει αυτό, επειδή $\alpha = 1 > 0$, πρέπει η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου να είναι μη θετική δηλαδή:
  $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda \le 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \lambda \le 4$.

  Άρα για να ορίζεται σε όλο το $\mathbf{R}$ η συνάρτηση f_1 με τύπο $f_1(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + \lambda}$

  πρέπει $\lambda \in [0, 4]$. **(1)**

- Για να έχει η συνάρτηση f_2 πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$, πρέπει το τριώνυμο $4 - \lambda^2$ να είναι θετικό

  Δηλαδή: $4 - \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow \lambda \in (-2, 2)$.

  Άρα για να ορίζεται σε όλο το $\mathbf{R}$ η συνάρτηση f_2 με τύπο $f_2(x) = \ln(4 - \lambda^2)$

  πρέπει $\lambda \in (-2, 2)$. **(2)**

  Συναληθεύοντας πλέον τις **(1)** και **(2)** παίρνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + \lambda} + \ln(4 - \lambda^2)$ είναι το $\mathbf{R}$ όταν $\lambda \in [0, 2)$.

Παράδειγμα 7 (Πρόσημο Συνάρτησης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 11"

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x^4+1)(x-2)$.

Να εξετασθεί ως προς το πρόσημο η f και να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία στα συμπεράσματα.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

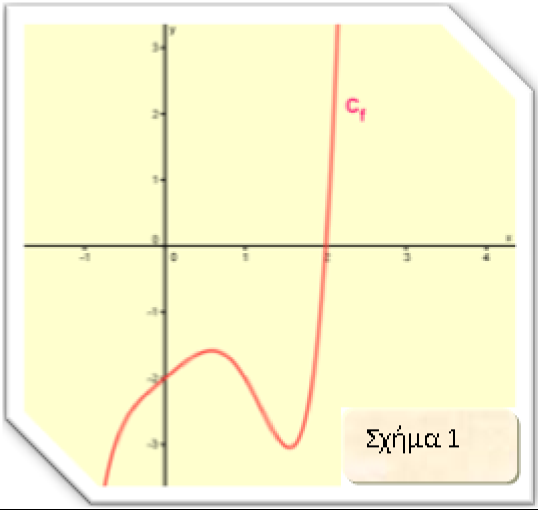
Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

Το πρόσημο της συνάρτησης προκύπτει από τη λύση της ανίσωσης:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow (x^4+1)(x-2)>0.$$

Επειδή $x^4+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ έχουμε:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$



Σχήμα 1

Άρα: $f(x)>0$ για $x>2$ και $f(x)\le 0$ για $x\le 2$.

Γεωμετρικά τα παραπάνω συμπεράσματα σημαίνουν ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

-πάνω από τον x'x για $x>2$,

-κάτω από τον x'x για $x<2$ και

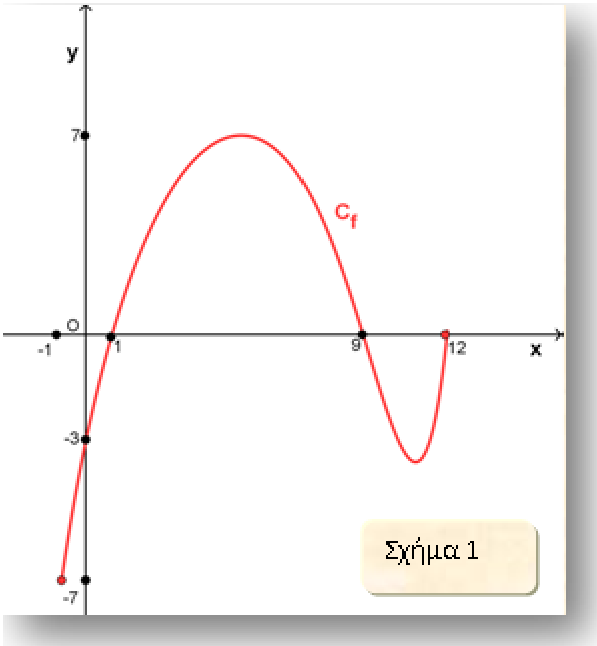
-τέμνει τον x'x στο $x_0=2$

(Βλέπε σχήμα 1)

Παράδειγμα 8 (Γραφική Παράσταση Συνάρτησης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 12"

Στο σχήμα 1 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$.
δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=9$.
ε) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=-3$.



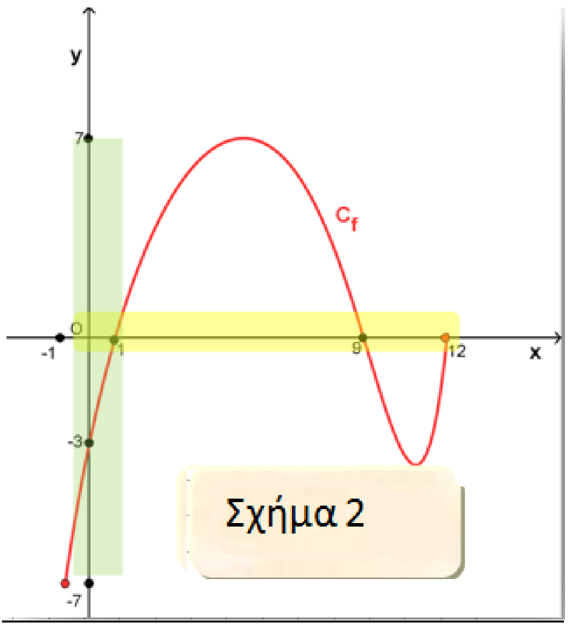
(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε στο σχήμα 3 ότι η προβολή των σημείων της C_f στον οριζόντιο άξονα δίνει το διάστημα $[-1,12]$.

Άρα $A_f=[-1,12]$ **(κίτρινο διάστημα στο σχήμα 2)**. Το σύνολο τιμών της f, είναι η προβολή των σημείων της γραφικής της παράστασης στον κατακόρυφο άξονα. **(πράσινο διάστημα στο σχήμα 3)**

Από το σχήμα 2 παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[-7,7]$.



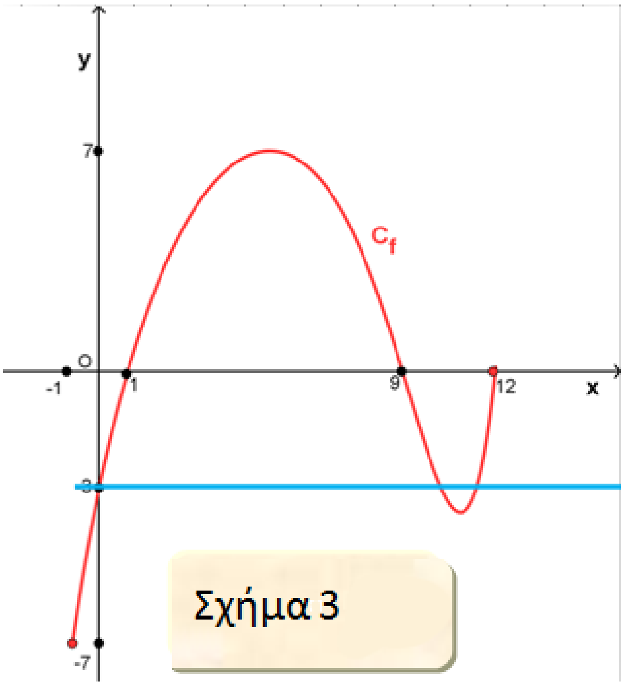
β) Από το σχήμα 1 παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, $f(9)=0$ και $f(12)=0$.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα [-1 , 12] είναι οι αριθμοί: 1 , 9 και 12.

γ) Από το σχήμα 1 παρατηρούμε ότι $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,9)$

δ) Επειδή όπως είδαμε το σύνολο τιμών της f είναι το $[-7,7]$ και το 9 δεν ανήκει στο σύνολο αυτό, η εξίσωση f(x)=9 είναι αδύνατη.

ε) Η γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης g με τύπο $g(x)=-3$ είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα x΄x η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο -3. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, λύση μιας εξίσωσης της μορφής $f(x)=g(x)$ σημαίνει γεωμετρικά την εύρεση των τετμημένων των κοινών σημείων των C_f και C_g.



Σχήμα 3

Παρατηρώντας το σχήμα 3 βλέπουμε ότι η μπλε γραμμή ($C_g: y=-3$) τέμνει την κόκκινη γραμμή ($C_f: y=f(x)$) σε τρία σημεία. Το ένα από αυτά είναι το $\Delta(0,-3)$ οπότε μία λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

Οι άλλες δύο λύσεις όπως βλέπουμε και από το σχήμα είναι μεταξύ των αριθμών 9 και 12. Άρα η εξίσωση $f(x)=-3$ έχει τρείς λύσεις.

Παράδειγμα 9 (Πράξεις με Συναρτήσεις)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 13"

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^4-2x^3+6$ και $g(x)=x^3-x$.

Να οριστεί το άθροισμα και το πηλίκο $\frac{f}{g}$ των παραπάνω συναρτήσεων.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α) Οι συναρτήσεις f,g είναι πολυωνυμικές, άρα το πεδίο ορισμού τους είναι όλο το $\mathbf{R}$. Επειδή $\mathbf{R}\cap\mathbf{R}=\mathbf{R}\neq\varnothing$, η $f+g$ ορίζεται στο $\mathbf{R}$ και έχει τύπο:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^4-2x^3+6+x^3-x=x^4+x^3-x+6$$

β) Όπως είδαμε στο (α) ερώτημα, οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Εξάλλου:

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$, οπότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $\mathbf{R}-\{-1,0,1\}$ και έχει τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^4-2x^3+6}{x^3-x}$$

Παράδειγμα 10 (Πράξεις με Συναρτήσεις)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 13"

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\sqrt{7-x}$ και $g(x)=\sqrt{x-1}$.

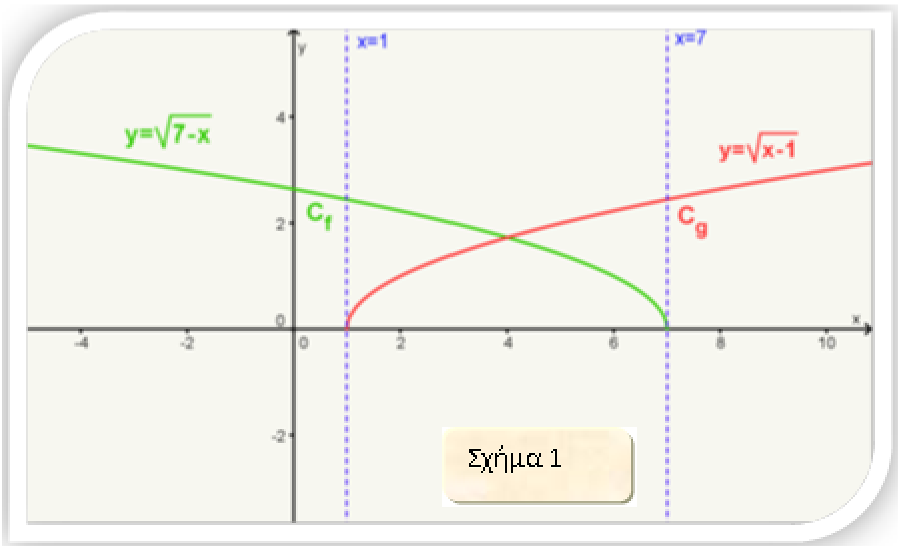
Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$ σχολιάζοντας συγχρόνως τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

Η f ορίζεται όταν: $7-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 7$ **(1)** και η g όταν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ **(2)**

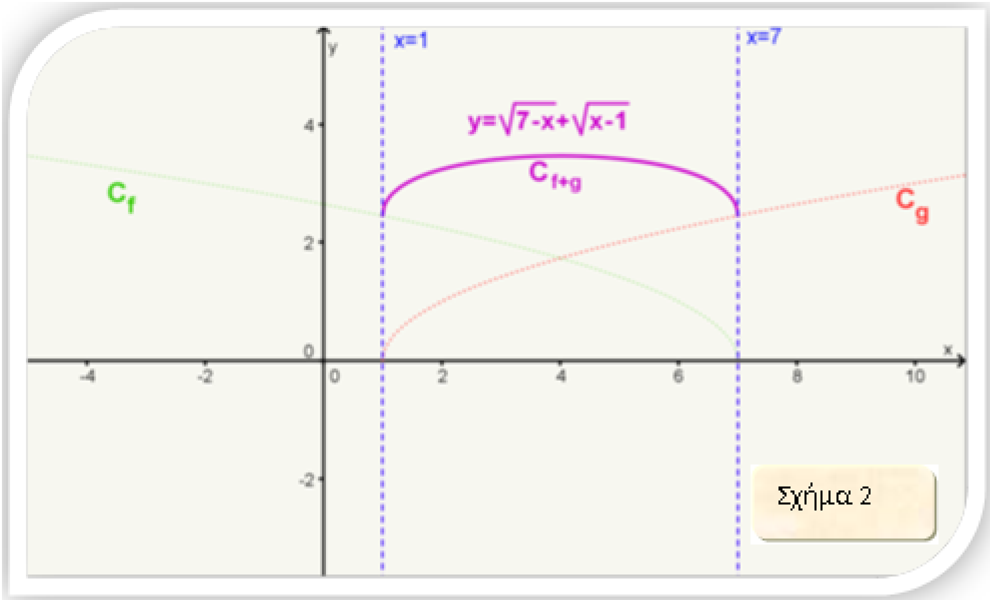
Οι **(1)**,**(2)** συναληθεύουν όταν $x\in[1,7]$ και επομένως οι $f+g$ και $f-g$ έχουν πεδίο ορισμού το [1,7] το οποίο παρουσιάζεται και στο σχήμα 1



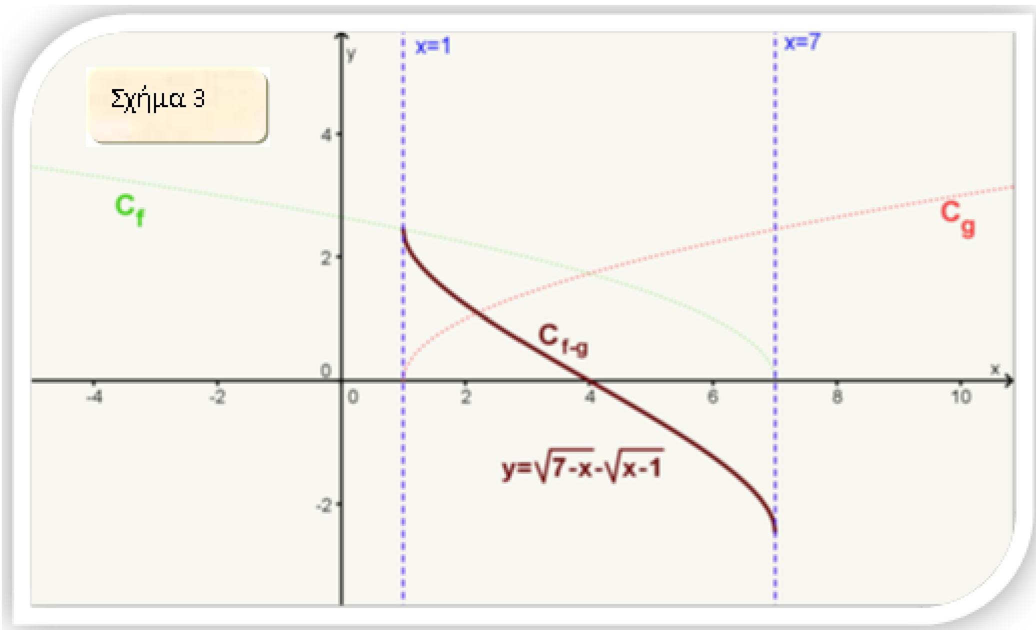
Σχήμα 1

Για τους τύπους των συναρτήσεων έχουμε:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \Leftrightarrow (f+g)(x)=\sqrt{7-x}+\sqrt{x-1}$ και στο σχήμα 2 παρουσιάζεται η $f+g$ όπου παρατηρούμε ότι ορίζεται στο [1,7] και παίρνει θετικές τιμές.



- $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow (f-g)(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1}$ και στο σχήμα 3 παρουσιάζεται η $f-g$ όπου παρατηρούμε ότι ορίζεται στο [1,7], παίρνει θετικές τιμές στο $[1,4)$, αρνητικές τιμές στο $(4,7]$ και μηδενίζεται στο $x_0=4$.



Παράδειγμα 11 (Συνάρτηση με Παράμετρο)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\lambda x^2+\lambda x+1, \lambda\neq 0$ με $x\in\mathbf{R}$.

α) Να βρεθεί ο λ όταν το σημείο $M(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

β) Να βρεθεί ο μ ώστε το σημείο $N(\mu-2,3)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Ένα σημείο $M(x_0,y_0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν ισχύει $y_0=f(x_0)$ και επομένως:

α) Αφού το σημείο $M(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

πρέπει: $f(1)=3\Leftrightarrow \lambda\cdot 1^2+\lambda\cdot 1+1=3\Leftrightarrow \lambda+\lambda+1=3\Leftrightarrow 2\lambda=2\Leftrightarrow \lambda=1$.

Σημείωση:

Για $\lambda=1$ η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=x^2+x+1$ με $x\in\mathbf{R}$ και φανερά $f(1)=3$.

β) Για να ανήκει το σημείο $N(\mu-2,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f αρκεί:

$$f(\mu-2)=3\Leftrightarrow(\mu-2)^2+\mu-2+1=3\Leftrightarrow\mu^2-4\mu+4+\mu-1=3\Leftrightarrow$$

$$\mu^2-3\mu=0\Leftrightarrow\mu(\mu-3)=0\Leftrightarrow\mu=0 \text{ ή } \mu=3.$$

- Για $\mu=0$ το σημείο Ν έχει συντεταγμένες $N(-2,3)$.
- Για $\mu=3$ το σημείο Ν έχει συντεταγμένες $N(1,3)$, δηλαδή ταυτίζεται με το σημείο Μ.

Παράδειγμα 12 (Προβλήματα)

Η δασική έκταση E σε εκατοντάδες στρέμματα που κατέστρεψε μια πυρκαγιά, t

ώρες μετά την εκδήλωση της, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $E(t)=2\sqrt{t}$

όπου $t\in[0,9]$ ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε πόσα στρέμματα είχαν καεί 4 ώρες μετά την εκδήλωση της πυρκαγιάς.

β) Μετά από πόση ώρα η πυρκαγιά είχε κάψει 600 στρέμματα;

(Θέμα Γ)

Λύση

α) Για $t=4$ ο τύπος που προσεγγιστικά υπολογίζει την καμένη έκταση δίνει:

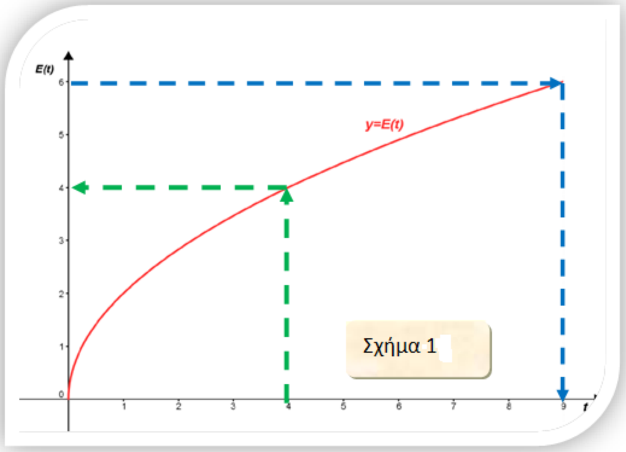
$$E(4)=2\sqrt{4}=2\cdot 2=4 .$$

Άρα μετά από 4 ώρες η φωτιά έχει κάψει $4\cdot 100=400$ στρέμματα.

β) Για να βρούμε μετά από πόση ώρα η πυρκαγιά έχει κάψει 600 στρέμματα λύνουμε την εξίσωση:

$$6=2\sqrt{t}\Leftrightarrow\sqrt{t}=3\Leftrightarrow t=9 .$$

Άρα μετά από 9 ώρες η φωτιά θα έχει κάψει 600 στρέμματα.



Σχήμα 1

Σημείωση:

Μια γεωμετρική εποπτεία των απαντήσεων δίνεται στο σχήμα 1.

Παράδειγμα 13 (Προβλήματα)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 14"

Σε ένα νησί του Ιονίου, την καλοκαιρινή περίοδο, ένας μικροπωλητής κατασκευάζει κοσμήματα από κοχύλια, λίθους και ασήμι.

Κάθε μήνα πληρώνει στο δήμο του νησιού για την άδεια πώλησης 2100 ευρώ ενώ για κάθε κόσμημα που κατασκευάζει χρειάζεται υλικά που κοστίζουν 20 ευρώ.

Η τιμή πώλησης κάθε κοσμήματος είναι 30 ευρώ.

α) Ποια είναι η συνάρτηση κέρδους του μικροπωλητή τον μήνα Αύγουστο;

β) Πόσα κοσμήματα την ημέρα πρέπει να πουλήσει για να έχει κέρδος 1000 ευρώ τον μήνα Αύγουστο;

(Θέμα Γ)

Λύση

α) Αν συμβολίσουμε με Κ το κόστος για την κατασκευή x κοσμημάτων που κατασκευάζει ο μικροπωλητής μέσα σε ένα μήνα, τότε θα ισχύει:

$K = K(x) = 2100 + 20x$ με $x > 0$.

Αν E τα έσοδα του μικροπωλητή μέσα στον ίδιο μήνα από την πώληση των x κοσμημάτων, τότε $E = E(x) = 30x$ με $x > 0$.

Τέλος αν P η συνάρτηση κέρδους στον παραπάνω μήνα, τότε:

$$P = P(x) = E(x) - K(x) = 30x - 20x - 2100 \Leftrightarrow P(x) = 10x - 2100 \text{ με } x > 0.$$

β) Αν x_0 ο αριθμός των κοσμημάτων που πρέπει να πουλήσει τον Αύγουστο για να έχει κέρδος 1000 ευρώ, τότε:

$$P(x_0) = 1000 \Leftrightarrow 10x_0 - 2100 = 1000 \Leftrightarrow 10x_0 = 3100 \Leftrightarrow x_0 = 310$$

Άρα πουλώντας 310 κοσμήματα θα έχει κέρδος 1000 ευρώ και επειδή ο Αύγουστος έχει 31 μέρες για να εισπράξει τα παραπάνω χρήματα αρκεί να πουλάει $310 : 31 = 10$ κοσμήματα την ημέρα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/8/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΟΡΙΣΜΟΣ – ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α υποσύνολο του $\mathbf{R}$;

Λύση

Είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ’ένα μόνο πραγματικό αριθμό.

Ερώτηση θεωρίας 2

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με ένα αλγεβρικό τύπο, ποιο είναι το πεδίο ορισμού;

<u>Λύση</u>

Είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbf{R}$, στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Ερώτηση θεωρίας 3

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbf{R}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$S = f + g, D = f - g, P = f \cdot g, R = \dfrac{f}{g}$.

<u>Λύση</u>

$S(x) = f(x) + g(x),\ x \in A$

$D(x) = f(x) - g(x),\ x \in A$

$P(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in A$

$R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ x \in A$ και $g(x) \neq 0$

Ερώτηση θεωρίας 4

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy; Τι είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f;

Λύση

- Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το Α ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $M\left(x, f(x)\right)$, για όλα τα $x \in A$.

- Εξίσωση της γραφικής παράστασης της f είναι η εξίσωση $y = f\left(x\right)$ που επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη $\left(x, y\right)$ που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f ;

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Έννοια Συνάρτησης - Υπολογισμός Τιμών της f)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbf{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1),\ f(1),\ f(-x),\ f(1-t)$.

Λύση

Αντικαθιστούμε στον τύπο της f τη μεταβλητή x, αντίστοιχα με $-1,1,-x$ και $1-t$ και έχουμε:

- $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=-1+3+1=3$
- $f(1)=1^3-3\cdot 1+1=1-3+1=-1$
- $f(-x)=(-x)^3-3(-x)+1=-x^3+3x+1$

$$f(1-t)=(1-t)^3-3(1-t)+1=1-3t+3t^2-t^3-3+3t+1=-t^3+3t^2-1.$$

Μεθοδολογία

Το x στον τύπο της συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας « άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή $f(\quad)=(\quad)^3-3(\quad)+1$.

Άσκηση 2 (Έννοια Συνάρτησης - $f(x)=0,\ f(x)<0,\ f(x)>0$)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^3+x^2-2,\ x\in\mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

α) $f(x)=0$

β) $f(x)>0$

<u>Λύση</u>

α) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$ **(1)**

Η εξίσωση **(1)** έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους αριθμούς $\pm1, \pm2$ (που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0=-2$).

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $x_1=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης και παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της.

1	1	0	-2	ρ=1
	1	2	2	
1	2	2	0	

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

(1) $\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2+2x+2=0$.

Δηλαδή $x=1$ ή $x^2+2x+2=0$ (αδύνατη στο $\mathbf{R}$ αφού $\Delta=4-8=-4<0$).

Τελικά η τιμή $x=1$ είναι αυτή για την οποία ισχύει $f(x)=0$.

β) $f(x)>0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+2x+2)>0$ **(2)**, σύμφωνα με το σχήμα Horner στο α) ερώτημα.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- Το τριώνυμο $x^2+2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, διότι $\Delta=-4<0$ και $\alpha=1>0$.
- Κατασκευάζουμε τον πίνακα με το πρόσημο των παραγόντων και του γινομένου $(x-1)\cdot(x^2+2x+2)$ και έχουμε:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x^2+2x+2	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $(x-1)\cdot(x^2+2x+2)>0$ όταν $x>1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι τα $x\in(1,+\infty)$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης f και θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $f(x)=0$, τότε λύνουμε την εξίσωση και στο τέλος εξετάζουμε αν οι τιμές του x που βρέθηκαν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

- Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης f και θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $f(x)>0$ ή $f(x)<0$, τότε λύνουμε την αντίστοιχη ανίσωση και στο τέλος κάνουμε συναλήθευση των τιμών του x που βρέθηκαν με αυτές που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

Άσκηση 3 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{x-1}{4-x^2}$

β) $g(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

γ) $h(x)=\ln\left(e^x-2\right)$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4$, άρα $x\neq -2$ και $x\neq 2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$ ή αλλιώς $A=\mathbf{R}-\left\{-2,2\right\}$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2-3x+2\geq 0$ **(1)**

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει $\Delta=9-8=1>0$ και ρίζες $x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$. Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	-	+

Η ανίσωση **(1)** αληθεύει όταν $x\leq 1$ ή $x\geq 2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\left(-\infty,1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν $e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A=\left(\ln 2,+\infty\right)$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Για την εύρεση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων λαμβάνουμε υπ' όψιν τα εξής:

  α) Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική ή εκθετική έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

  β) Αν είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x+c$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x+c,\ \omega,c\in\mathbf{R}$, τότε έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

  γ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\epsilon\phi x$, τότε έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

δ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\sigma\phi x$, τότε έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\neq k\pi,\,k\in\mathbf{Z}\}$.

ε) Αν είναι της μορφής $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από τη σχέση $g(x)\neq 0$

στ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{g(x)},\,\nu\in\mathbf{N}$ με $\nu\geq 2$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από την ανίσωση $g(x)\geq 0$.

ζ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\ln g(x)$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από την ανίσωση $g(x)>0$.

- Αν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει τουλάχιστον δύο από τις περιπτώσεις γ) έως ζ), τότε καταγράφουμε όλους τους περιορισμούς και στο τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τους.

- Όταν βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης πρέπει να το γράψουμε ως διάστημα, ένωση διαστημάτων ή ως σύνολο της μορφής $A=\mathbf{R}-\{x_1,x_2,\ldots,x_\kappa\}$, όπου $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa\in\mathbf{R}$.

- Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης, πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της και μετά κάνουμε πράξεις για να απλοποιήσουμε τον τύπο της.

Άσκηση 4 (Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}+1$ και $g(x)=\sqrt{x}-1$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$

<u>Λύση</u>

α) Για τα πεδία ορισμού των f και g έχουμε ότι $x\geq 0$.

Άρα οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, που είναι το $A=[0,+\infty)$.

β) Οι πράξεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ έχουν ίδιο πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$.

Επίσης ισχύει

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1=2\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1=2,\ x\in[0,+\infty)$.
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=$

  $\left(\sqrt{x}\right)^2-1=x-1,\ x\in[0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι μετά τις πράξεις οι τύποι των συναρτήσεων $f-g$ και $f\cdot g$ απλοποιήθηκαν και δεν περιέχουν το $\sqrt{x}$.

Δεν μπορούμε να γράψουμε ότι το πεδίο ορισμού των $f-g$ και $f\cdot g$ είναι το $\mathbf{R}$, αφού έτσι δεν ορίζουμε σωστά τις συναρτήσεις.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ έχουμε ότι $x\in[0,+\infty)$ **(1)** και επιπλέον

$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 1$, άρα $x\neq 1$ **(2)**.

Από τη συναλήθευση των **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι το

$A_1=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Επίσης ισχύει :

- $$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1},\ x\in\left[0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν δίνονται οι συναρτήσεις f και g και ζητείται να οριστούν οι πράξεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

α) Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των f και g (ακόμα κι αν δεν ζητείται στην άσκηση)

β) Αν και οι δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A ,τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο $f\cdot g$ στο A καθώς και το πηλίκο $\frac{f}{g}$ που έχει πεδίο ορισμού το $B=\left\{x\in A\,/\,g(x)\neq 0\right\}$.

γ) Βρίσκουμε τους τύπους των συναρτήσεων που είναι:

$$\left(f+g\right)(x)=f(x)+g(x),\left(f-g\right)(x)=f(x)-g(x),\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x)\ \text{και}\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Άσκηση 5 (Γραφική Παράσταση)

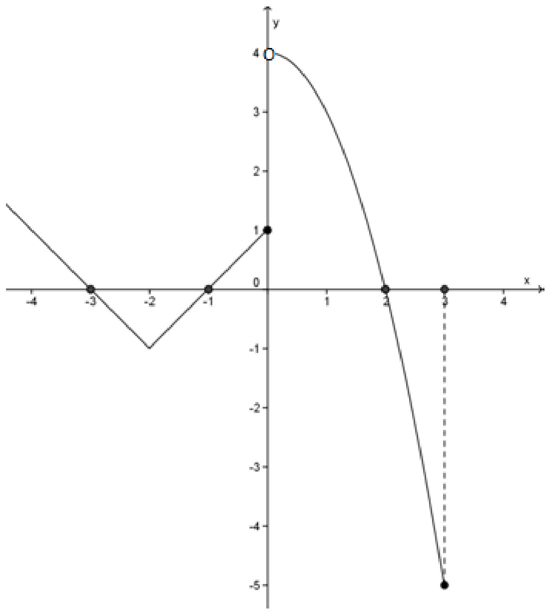
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της f.

β) Η τιμή $f(0)$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$.



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης.

Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f πάνω στον άξονα x΄x και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι το $A=(-\infty,3]$.

β) Η τιμή $f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y, δηλαδή είναι $f(0)=1$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0,4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένες $-3,-1,2$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1=-3, x_2=-1$ και $x_3=2$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x, όταν $x \in (-3,-1) \cup (2,3]$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να πάρουμε τις πληροφορίες που μπορούμε να πάρουμε και όταν γνωρίζουμε τον τύπο της. Πιο συγκεκριμένα:

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης.

- Η τιμή $f(x_0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου της γραφικής παράστασης που έχει τετμημένη x_0.
- Η τιμή $f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.
- Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.
- Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.
- Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Άσκηση 6 (Σημεία Τομής Γραφικών Παραστάσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$ και η ευθεία $\epsilon: y=-2x$. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε.

<u>Λύση</u>

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε: $y=-2x$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x}{x^2+1} & \mathbf{(1)} \\ y=-2x & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας το y της σχέσης **(2)** στην **(1)**, προκύπτει η

$$-2x=\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow -2x\left(x^2+1\right)=x\Leftrightarrow 2x\left(x^2+1\right)+x=0\Leftrightarrow$$

$x\left[2\left(x^2+1\right)+1\right]=0\Leftrightarrow x=0$ ή $2x^2+3=0$ (αδύνατη). Άρα είναι $x=0$.

Αυτή είναι η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε. Για να βρούμε την τεταγμένη, αντικαθιστούμε την τιμή $x=0$ στην **(2)** και έχουμε $y=-2\cdot 0=0$. Δηλαδή η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$.

Τελικά το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε είναι το $O\left(0,0\right)$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\epsilon: y=\lambda x+\beta$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=\lambda x+\beta \end{cases}$.

- **Γενικότερα**, οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ είναι τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

- Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Άσκηση 7 (Υπολογισμός Παραμέτρων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda-x}{\sqrt{x-2}},\lambda\in\mathbf{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του $\lambda\in\mathbf{R}$, αν το σημείο $M\left(4,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ο τύπος $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$ **(1)** και $\sqrt{x-2}\neq 0$ άρα $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ **(2)**

Αν συναληθεύσουμε τις **(1)** και **(2)**, προκύπτει ότι $x>2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=\left(2,+\infty\right)$.

β) Αφού το σημείο $M\left(4,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση, $y=f(x)$, της γραφικής παράστασης.

Δηλαδή, θα ισχύει $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=f\left(4\right)\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\lambda-4}{\sqrt{4-2}}\Leftrightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\lambda-4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$\lambda-4=-\dfrac{\sqrt{2}^{2}}{2}\Leftrightarrow\lambda-4=-1\Leftrightarrow\lambda=3.$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αν ο τύπος μιας συνάρτησης f περιέχει παράμετρο και ζητάμε την τιμή της παραμέτρου ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από κάποιο σημείο $M\left(\alpha,\beta\right)$, τότε γράφουμε ότι $f(\alpha)=\beta$ και υπολογίζουμε την παράμετρο.

- Το ίδιο κάνουμε και αν οι συντεταγμένες του σημείου M περιέχουν παράμετρο.

Άσκηση 8 (Προβλήματα)

Κόβουμε ένα σύρμα μήκους 20cm σε δύο μέρη. Με το ένα απ' αυτά κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και με το άλλο έναν κύκλο.

Να εκφράσετε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση της πλευράς του τετραγώνου.

<u>Λύση</u>

- **Συμβολισμός**:

  Συμβολίζουμε με x την πλευρά του τετραγώνου (ανεξάρτητη μεταβλητή) και με $E(x)$ το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων (εξαρτημένη μεταβλητή).

  (Επιλέξαμε το γράμμα Ε για να συμβολίσουμε τη συνάρτηση γιατί παριστάνει εμβαδά).

  Επίσης θα ήταν χρήσιμο να συμβολίσουμε με ρ την ακτίνα του κύκλου που θα κατασκευάσουμε, παρ' ότι δεν ζητείται στο πρόβλημα (βοηθητική μεταβλητή).

  Καθένα απ' τα δύο μέρη στα οποία κόβουμε το σύρμα ισούται με την περίμετρο καθενός σχήματος.

  Έτσι η περίμετρος του τετραγώνου ισούται με 4x και του κύκλου με $2\pi\rho$ και έχουμε

  $4x+2\pi\rho=20 \Leftrightarrow 2x+\pi\rho=10 \Leftrightarrow \rho=\dfrac{10-2x}{\pi}$ **(1)**.

- **Εύρεση πεδίου ορισμού**:

  Για να βρούμε το πεδίο ορισμού θέτουμε περιορισμούς στις δύο μεταβλητές x και ρ.

  Επειδή παριστάνουν μήκος προφανώς θα είναι: $x>0$ **(2)** και

  $\rho>0 \Leftrightarrow \dfrac{10-2x}{\pi}>0 \Leftrightarrow 10-2x>0 \Leftrightarrow x<5$ **(3)**

  (Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός που θέσαμε για τη μεταβλητή ρ χρησιμοποιήθηκε για να μας δώσει μία ακόμα ανισότητα για τη μεταβλητή x)

  Αν συναληθεύσουμε τις **(2)** και **(3)**, προκύπτει $0<x<5$.

  Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$, είναι το διάστημα $A=(0,5)$.

- **Εύρεση του τύπου της συνάρτησης** $E(x)$:

  Ξέρουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς x δίνεται από τον τύπο $E_1=x^2$, ενώ το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E_2=\pi\rho^2$.

  Η συνάρτηση που εκφράζει το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων έχει τύπο $E(x)=E_1+E_2=x^2+\pi\rho^2$.

Όμως η συνάρτηση πρέπει να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή μόνο την x, γι’ αυτό αντικαθιστούμε τη μεταβλητή ρ από τη σχέση **(1)** και έχουμε:

$$E(x)=x^2+\pi\left(\frac{10-2x}{\pi}\right)^2=x^2+\pi\frac{(10-2x)^2}{\pi^2}=$$

$$=x^2+\frac{(10-2x)^2}{\pi},\ x\in(0,5).$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Σε μερικά προβλήματα ζητείται να εκφραστούν οι τιμές ενός μεγέθους ως συνάρτηση των τιμών ενός άλλου μεγέθους. Η διαδικασία είναι ίδια με αυτήν που ακολουθούμε για να ορίσουμε μια συνάρτηση, δηλαδή πρέπει να βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού και μετά τον τύπο. Γι’ αυτό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Συμβολίζουμε τα δύο μεγέθη με δύο μεταβλητές. Συνήθως συμβολίζουμε με x την ανεξάρτητη μεταβλητή.

- Πολλές φορές από την εκφώνηση καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει κι άλλο μέγεθος το οποίο προσωρινά συμβολίζουμε επίσης με μια μεταβλητή (βοηθητική).

- Γράφουμε τη σχέση που συνδέει την ανεξάρτητη με τη βοηθητική μεταβλητή και τους περιορισμούς που πρέπει να ισχύουν για αυτές. (Συνήθως οι περιορισμοί είναι : και οι δύο μεταβλητές να είναι θετικές)

- Από τη συναλήθευση των περιορισμών που αναφέρθηκαν προκύπτει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Τέλος γράφουμε την ισότητα που συνδέει την εξαρτημένη με την ανεξάρτητη μεταβλητή. Αυτή αποτελεί τον τύπο της συνάρτησης.

(Στην κατασκευή του τύπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η βοηθητική μεταβλητή, η οποία όμως στη συνέχεια αντικαθίσταται).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln(1-x)+\dfrac{x}{x^2-4}$

β) $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

γ) $h(x)=\dfrac{2x}{\ln^2 x-1}$

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $\begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\neq 4 \\ 1>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 2 & \mathbf{(1)} \\ 1>x & \mathbf{(2)} \end{cases}$.

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι $x<1$ και $x\neq -2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,-2)\cup(-2,1)$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x\geq 0$ **(1)**

Επιπλέον είναι $\sqrt{x}-\sqrt{2}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq\sqrt{2}$, άρα $x\neq 2$ **(2)**

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι $x\geq 0$ και $x\neq 2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=[0,2)\cup(2,+\infty)$.

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν $x>0$ **(1)**

Επιπλέον είναι $\ln^2 x-1\neq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x\neq 1 \Leftrightarrow \ln x\neq 1$ και $\ln x\neq -1$, άρα είναι $x\neq e$ και $x\neq \dfrac{1}{e}$ **(2)**

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A=\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},e\right)\cup(e,+\infty)$.

Μεθοδολογία

- Για την εύρεση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων λαμβάνουμε υπ' όψιν τα εξής:

  α) Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική ή εκθετική έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

  β) Αν είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu\omega x+c$ ή $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\omega x+c,\ \omega,c\in\mathbf{R}$, τότε έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

γ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\epsilon\phi x$, τότε έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

δ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\sigma\phi x$, τότε έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\{x\in\mathbf{R}\,/\,x\neq k\pi,\,k\in\mathbf{Z}\}$.

ε) Αν είναι της μορφής $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από τη σχέση $g(x)\neq 0$.

στ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{g(x)},\,\nu\in\mathbf{N}$ με $\nu\geq 2$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από την ανίσωση $g(x)\geq 0$.

ζ) Αν είναι της μορφής $f(x)=\ln g(x)$, τότε βρίσκουμε τα x που προκύπτουν από την ανίσωση $g(x)>0$.

- Αν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει τουλάχιστον δύο από τις περιπτώσεις γ) έως ζ), τότε καταγράφουμε όλους τους περιορισμούς και στο τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τους.
- Όταν βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης πρέπει να το γράψουμε ως διάστημα, ένωση διαστημάτων ή ως σύνολο της μορφής $A=\mathbf{R}-\{x_1,x_2,\ldots,x_\kappa\}$, όπου $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa\in\mathbf{R}$.
- Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης, πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της και μετά κάνουμε πράξεις για να απλοποιήσουμε τον τύπο της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΟΡΙΣΜΟΣ – ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Έννοια Συνάρτησης - Υπολογισμός Τιμών της f)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{3x}{x^2+1},\ x\in\mathbf{R}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1),\ f(0),\ f\left(\sqrt{2}\right),\ f(1+h)$.

Λύση

Είναι:

- $f(-1)=\frac{3\cdot(-1)}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}$
- $f(0)=\frac{3\cdot 0}{0^2+1}=0$
- $f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+1}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$
- $f\left(1+h\right)=\frac{3\left(1+h\right)}{\left(1+h\right)^2+1}=\frac{3\left(1+h\right)}{2+2h+h^2}$

Άσκηση 2 (Έννοια Συνάρτησης - Υπολογισμός Τιμών της f)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x},\ x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\pi),\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

β) Να δείξετε ότι $f(-x)+f(x)=0$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι:

- $f(\pi)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\pi}{\eta\mu\pi+\pi}=-\dfrac{2}{\pi}$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}}{\eta\mu\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}}=0$
- $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}}{\eta\mu\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3+\pi}{6}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3+\pi}$

β) Ισχύει: $f(-x)+f(x)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu(-x)}{\eta\mu(-x)-x}+\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x-x}+\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x}=$

$=-\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x}+\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x}=0$.

Άσκηση 3 (Έννοια Συνάρτησης - Υπολογισμός Τιμών της f)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2+1}$, $x>0$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1), f(e)$.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=0$, για κάθε $x>0$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι:

- $f(1)=\dfrac{1\cdot\ln 1}{1^2+1}=0$
- $f(e)=\dfrac{e\cdot\ln e}{e^2+1}=\dfrac{e}{e^2+1}$

β) Ισχύει: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}+\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2+1}=\dfrac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1+x^2}{x^2}}+\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2+1}=$

$=-\dfrac{x\cdot\ln x}{1+x^2}+\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2+1}=0$.

Άσκηση 4 (Έννοια Συνάρτησης - $f(x)=0,\ f(x)<0,\ f(x)>0$)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1},\ x\in\mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

α) $f(x)=0$

β) $f(x)>0$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, που ισχύει για $x=1$ ή $x=2$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι αριθμοί $x=1$ ή $x=2$.

β) Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}>0 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0$ **(1).** (Αφού $x^2-x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, διότι $\Delta=1-4=-3<0$ και $\alpha=1>0$).

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-3x+2 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης **(1)** είναι τα $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

Άσκηση 5 (Έννοια Συνάρτησης - $f(x)=0,\ f(x)<0,\ f(x)>0$)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=2\ln\left(x-1\right)-4,\ x>1$.

Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

α) $f(x)=0$

β) $f(x)<0$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln\left(x-1\right)-4=0 \Leftrightarrow \ln\left(x-1\right)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=e^2 \Leftrightarrow x=e^2+1$.

Επειδή ο αριθμός $x=e^2+1>1$, είναι δεκτή λύση της εξίσωσης.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $A=\left(1,+\infty\right)$ **(1)**.

Είναι $f(x)<0 \Leftrightarrow 2\ln\left(x-1\right)-4<0 \Leftrightarrow \ln\left(x-1\right)<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1<e^2 \Leftrightarrow x<e^2+1$ **(2)**

Από τη συναλήθευση των σχέσεων **(1)** και **(2)** προκύπτει $1<x<e^2+1$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι τα $x\in\left(1,e^2+1\right)$.

Άσκηση 6 (Έννοια Συνάρτησης - $f(x)=0,\ f(x)<0,\ f(x)>0$)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{2x}+5e^{x}-6,\ x\in\mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

α) $f(x)=0$

β) $f(x)>0$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}+5e^{x}-6=0$ **(1)**

Θέτω $e^{x}=y$ και η εξίσωση **(1)** γίνεται $y^2+5y-6=0 \Leftrightarrow y=-6$ ή $y=1$.

Δηλαδή είναι $e^{x}=-6$ (που είναι αδύνατη) ή $e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση την $x=0$.

β) Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x}+5e^{x}-6>0$ **(2)**.

Θέτω $e^{x}=y$ και η ανίσωση **(2)** γίνεται $y^2+5y-6>0 \Leftrightarrow y<-6$ ή $y>1$ σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα που φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου y^2+5y-6 .

y	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
y^2+5y-6		+	0	-	0	+	

Δηλαδή έχουμε $e^{x}<-6$ (που είναι αδύνατη) ή $e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι τα $x\in(0,+\infty)$.

Άσκηση 7 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

β) $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

γ) $h(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+4x^2-3x-18}$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^3-8\neq 0 \Leftrightarrow x^3\neq 8 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ ή αλλιώς $A=\mathbf{R}-\{2\}$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2+5\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -5$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\mathbf{R}$

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν $x^3+4x^2-3x-18\neq 0$. **(1)**

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο και η σχέση **(1)** γίνεται $(x-2)\cdot(x^2+6x+9)\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0$ και $x^2+6x+9\neq 0$.

1	4	-3	-18	ρ=2
	2	12	18	
1	6	9	0	

Άρα έχουμε $x\neq 2$ και $(x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A=\mathbf{R}-\{-3,2\}$.

Άσκηση 8 (Έυρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$

β) $g(x)=\sqrt{\dfrac{-x}{x-2}}$

γ) $h(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $-x^2-2x+3\geq 0$ **(1)**.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2-2x+3$ φαίνεται στον παρακάτω άξονα.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		-	0	+	0	-	

Άρα η ανίσωση **(1)** αληθεύει όταν $-3\leq x\leq 1$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-3,1]$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $\dfrac{-x}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow -x\cdot(x-2)\geq 0$ και $x\neq 2$ **(2)**.

Το πρόσημο του γινομένου $-x\cdot(x-2)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x$		+	0	-	‖	-	
$x-2$		-		-	0	+	
Γινόμενο		-	0	+	‖	-	

Η ανίσωση **(2)** αληθεύει όταν $0\leq x<2$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=[0,2)$.

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν $2x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$|x|\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

Άσκηση 9 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln\left(2x^2-3x+1\right)$.

β) $g(x)=\ln x^2$.

γ) $h(x)=\ln\left(e-e^x\right)$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $2x^2-3x+1>0$ **(1)**

Το πρόσημο του τριωνύμου $2x^2-3x+1$ φαίνεται στον παρακάτω άξονα.

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		+	0	-	0	+	

Άρα η ανίσωση **(1)** αληθεύει όταν $x<\frac{1}{2}$ ή $x>1$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\mathbf{R}^*$.

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν $e-e^x>0\Leftrightarrow e^x<e\Leftrightarrow x<1$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A=\left(-\infty,1\right)$.

Άσκηση 10 (Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=x^2-1$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g, \dfrac{f}{g}$

<u>Λύση</u>

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, που είναι το $A=\mathbf{R}$.

β) Οι πράξεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ έχουν ίδιο πεδίο ορισμού το $A=\mathbf{R}$.

Επίσης ισχύει

- $\left(f+g\right)(x)=f(x)+g(x)=x-1+x^2-1=x^2+x-2,\ x\in\mathbf{R}$.
- $\left(f-g\right)(x)=f(x)-g(x)=x-1-x^2+1=-x^2+x,\ x\in\mathbf{R}$.
- $\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(x-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)=\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+1\right),\ x\in\mathbf{R}$.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ έχουμε ότι $x\in A=\mathbf{R}$ **(1)** και επιπλέον

$g\left(x\right)\neq 0\Leftrightarrow x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1$ άρα $x\neq -1$ και $x\neq 1$ **(2)**.

Από τη συναλήθευση των **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ είναι το

$A_1=\mathbf{R}-\left\{-1,1\right\}$. Επίσης ισχύει:

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{\left(x-1\right)\cdot\left(x+1\right)}=\dfrac{1}{x+1},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-1,1\right\}$

Άσκηση 11 (Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \epsilon\phi x$ και $g(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g, \dfrac{f}{g}$

<u>Λύση</u>

α) Για το πεδίο ορισμού των f και g έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}$.

Άρα οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, που είναι το $A = \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$.

β) Οι πράξεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ έχουν ίδιο πεδίο ορισμού το $A = \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$.

Επίσης ισχύει:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \epsilon\phi x + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} =$

  $\dfrac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \epsilon\phi x - \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} =$

  $\dfrac{\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$

- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \epsilon\phi x \cdot \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} =$

  $\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ έχουμε ότι $x \in A = \mathbf{R} - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}\right\}$ **(1)** και επιπλέον $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \neq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{A}$ **(2)**.

Από τη συναλήθευση των **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι επίσης το $A = \mathbf{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z} \right\}$. Ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\epsilon\phi x}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x,\ x \in \mathbf{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Άσκηση 12 (Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\frac{1}{x}$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g,\, f-g,\, f\cdot g,\, \frac{f}{g}$

<u>Λύση</u>

α) Για το πεδίο ορισμού της f έχουμε $x>0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε $\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$.

β) Οι πράξεις $f+g,\, f-g,\, f\cdot g$ έχουν ίδιο πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$.

Επίσης ισχύει:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\ln\frac{1}{x}=\ln x-\ln x=0,\ x\in(0,+\infty)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\ln\frac{1}{x}=\ln x+\ln x=2\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\ln x\cdot\ln\frac{1}{x}=\ln x\cdot(-\ln x)=-\ln^2 x,\ x\in(0,+\infty)$

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ έχουμε ότι $x\in A=(0,+\infty)$ **(1)** και επιπλέον

$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}\neq 0$, άρα $\frac{1}{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$ **(2)**.

Από τη συναλήθευση των **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A_1=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln x}{\ln\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{-\ln x}=-1,\ x\in A_1=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Άσκηση 13 (Γραφική Παράσταση)

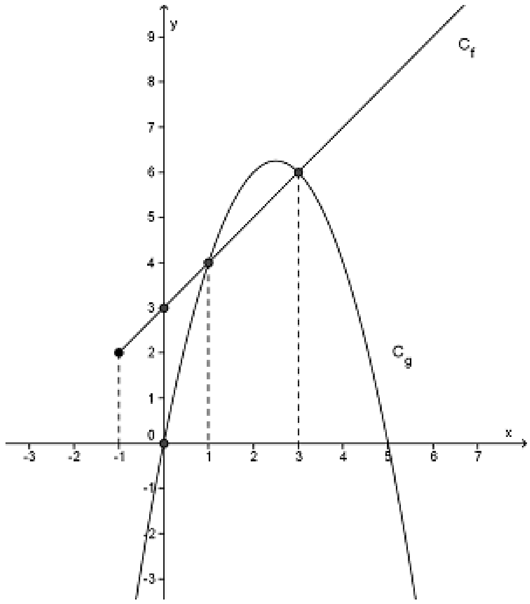
Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Να βρεθούν:

α) Τα πεδία ορισμού των f και g.

β) Οι τιμές $f(0)$ και $g(0)$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)$.



<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το $B=\mathbf{R}$.

β) Η τιμή $f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα y΄y.

Έτσι έχουμε, $f(0)=3$ και $g(0)=0$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Δηλαδή είναι οι αριθμοί $x_1=1, x_2=3$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Δηλαδή είναι τα $x\in(1,3)$.

Άσκηση 14 (Γραφική Παράσταση)

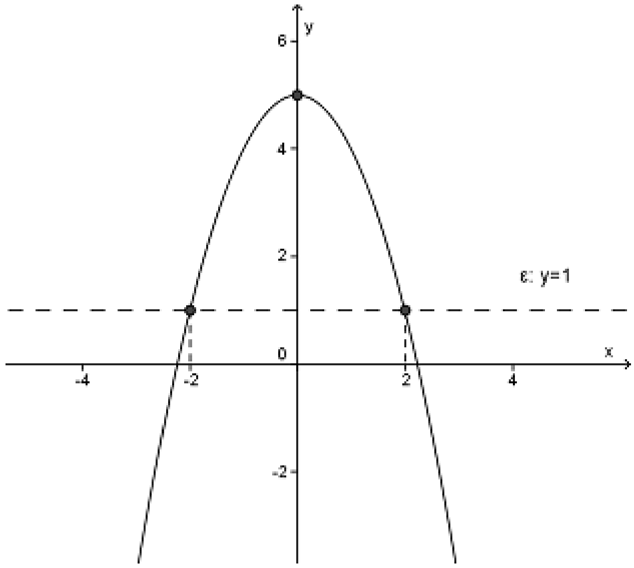
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της f.

β) Οι τιμές $f(0)$ και $f(-2)$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>1$.



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbf{R}$.

β) Η τιμή $f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα y΄y.

Έτσι έχουμε, $f(0)=5$.

Η τιμή $f(-2)$ είναι η τεταγμένη του σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που έχει τετμημένη $x=-2$.

Έτσι έχουμε, $f(-2)=1$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $\epsilon: y=1$.

Δηλαδή είναι οι αριθμοί $x_1=-2$ και $x_2=2$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $\epsilon: y=1$. Δηλαδή είναι τα $x\in\left(-2,2\right)$.

Άσκηση 15 (Γραφική Παράσταση)

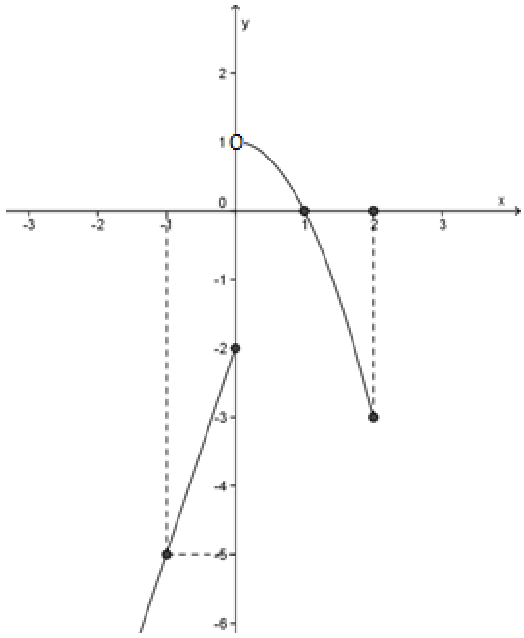
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της f.

β) Οι τιμές $f(0)$ και $f(-1)$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$.



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-\infty,2]$.

β) Η τιμή $f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y, δηλαδή είναι $f(0)=-2$.

Η τιμή $f(-1)$ είναι η τεταγμένη του σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που έχει τετμημένη $x=-1$.

Έτσι έχουμε, $f(-1)=-5$.

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση τον αριθμό $x_1=1$.

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

Άρα είναι τα $x\in(0,1)$.

Άσκηση 16 (Σημεία Τομής Γραφικών Παραστάσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ και η ευθεία $\epsilon: y=x+2$. Να βρεθούν:

α) το πεδίο ορισμού της f.

β) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

β) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x^2-1} & \mathbf{(1)} \\ y=x+2 & \mathbf{(2)} \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας την σχέση **(2)** στην **(1)**, προκύπτει η

$\sqrt{x^2-1}=x+2 \Leftrightarrow x^2-1=(x+2)^2 \Leftrightarrow$

$x^2-1=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$

(δεκτή)

Για τη λύση της εξίσωσης $\sqrt{x^2-1}=x+2$, έχουμε τους περιορισμούς:
$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$.
Δηλαδή, είναι $x\in[-2,-1]\cup[1,+\infty)$

Στη συνέχεια από τη **(2)** έχουμε $y=-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}$.

Τελικά το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε είναι το $B\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$.

Άσκηση 17 (Σημεία Τομής Γραφικών Παραστάσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x-1\right)^2$, $x\in\mathbf{R}$ και η ευθεία $\epsilon: y=2x+\beta$. Να βρείτε τις τιμές του $\beta\in\mathbf{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία ε:

α) δύο κοινά σημεία β) ένα κοινό σημείο γ) κανένα κοινό σημείο

<u>Λύση</u>

Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας ε, είναι το ίδιο με το πλήθος των λύσεων του συστήματος:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=2x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\left(x-1\right)^2 & (\mathbf{1}) \\ y=2x+\beta & (\mathbf{2}) \end{cases}.$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση **(2)** στην **(1)**, προκύπτει η

$\left(x-1\right)^2=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-4x+1-\beta=0$ **(3)**, που έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta=16-4\left(1-\beta\right)=12+4\beta$.

α) Η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία ε, αν και μόνο αν η εξίσωση **(3)** έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Αυτό συμβαίνει όταν $\Delta>0 \Leftrightarrow 12+4\beta>0 \Leftrightarrow \beta>-3$.

β) Η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο με την ευθεία ε, αν και μόνο αν η εξίσωση **(3)** έχει μία διπλή ρίζα.

Αυτό συμβαίνει όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow 12+4\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-3$.

γ) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία ε, αν και μόνο αν η εξίσωση **(3)** δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Αυτό συμβαίνει όταν $\Delta<0 \Leftrightarrow 12+4\beta<0 \Leftrightarrow \beta<-3$.

Άσκηση 18 (Σημεία Τομής Γραφικών Παραστάσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{15x}{x^2-4}$ και η ευθεία $\epsilon: y=x+6$. Να βρεθούν:

α) το πεδίο ορισμού της f.

β) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε.

<u>Λύση</u>

α) Η f ορίζεται όταν $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq -2$ και $x\neq 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbf{R}-\{-2,2\}$.

β) Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{15x}{x^2-4} & \mathbf{(1)} \\ y=x+6 & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Αντικαθιστώντας τη σχέση **(2)** στην **(1)**, προκύπτει η

$$\frac{15x}{x^2-4}=x+6 \overset{\text{για } x\neq -2, x\neq 2}{\Leftrightarrow} 15x=(x+6)\cdot(x^2-4)\Leftrightarrow$$

$15x=x^3-4x+6x^2-24 \Leftrightarrow x^3+6x^2-19x-24=0$ **(3)**

1	6	-19	-24	ρ=-1
	-1	-5	24	
1	5	-24	0	

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο και η εξίσωση **(3)** γίνεται $(x+1)\cdot(x^2+5x-24)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ή $x^2+5x-24=0$. Άρα έχουμε $x=-1$ ή $x=-8$ ή $x=3$.

Στη συνέχεια από τη **(2)** έχουμε:

Για $x=-1, y=-1+6=5$, για $x=-8, y=-8+6=-2$ και για $x=3, y=3+6=9$.

Τελικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία ε είναι τα $B(-1,5),\Gamma(-8,-2),\Delta(3,9)$

Άσκηση 19 (Υπολογισμός Παραμέτρων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x-4, x\in\mathbf{R}$. Να υπολογιστούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $A(-1,-10)$ και $B(2,2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

Αφού τα σημεία $A(-1,-10)$ και $B(2,2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ισχύει:

$f(-1)=-10 \Leftrightarrow -1+\alpha+\beta-4=-10 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-5$ **(1)**

και $f(2)=2 \Leftrightarrow 8+4\alpha-2\beta-4=2 \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=-2 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=-1$ **(2)**.

Με πρόσθεση των **(1)** και **(2)** κατά μέλη έχουμε $3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$ και στη συνέχεια με αντικατάσταση στην **(1)**, έχουμε $-2+\beta=-5 \Leftrightarrow \beta=-3$.

Άσκηση 20 (Υπολογισμός Παραμέτρων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}$ και το σημείο $A\left(\lambda^2,2\right),\ \lambda>0$ που ανήκει στη γραφική παράστασή της. Να υπολογιστεί η τιμή του λ.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $-x^2+3x+4\geq 0$ **(1)**.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+3x+4$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		-	0	+	0	-	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης **(1)** είναι τα $x\in\left[-1,4\right]$ και το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=\left[-1,4\right]$.

β) Αφού το σημείο $A\left(\lambda^2,2\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ισχύει

$$f\left(\lambda^2\right)=2\Leftrightarrow\sqrt{-\lambda^4+3\lambda^2+4}=2\Leftrightarrow-\lambda^4+3\lambda^2+4=4\Leftrightarrow$$

$\lambda^2\left(3-\lambda^2\right)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda^2=3$.

Άρα έχουμε $\lambda=0$ ή $\lambda=-\sqrt{3}$ ή $\lambda=\sqrt{3}$.

Όμως $0<\lambda\leq 2$, άρα $\lambda=\sqrt{3}$.

Για την τιμή $x=\lambda^2$, έχουμε τον περιορισμό: $\lambda^2\in A$.

Δηλαδή $-1\leq\lambda^2\leq 4$ που ισχύει όταν $0<\lambda\leq 2$.

Άσκηση 21 (Υπολογισμός Παραμέτρων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x \ln x^2 + 1, \kappa \in \mathbf{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του $\kappa \in \mathbf{R}$ αν είναι γνωστό ότι το σημείο $B(e, 4e+1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = \mathbf{R}^*$.

β) Αφού το σημείο $B(e, 4e+1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ισχύει

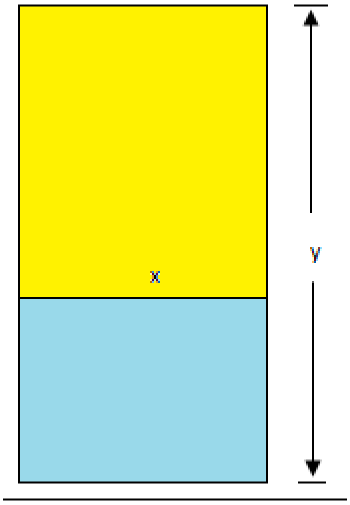
$$f(e) = 4e+1 \Leftrightarrow \kappa \cdot e \cdot \ln e^2 + 1 = 4e+1 \Leftrightarrow 2e \cdot \kappa = 4e \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Άρα έχουμε $\kappa = 2$.

Άσκηση 22 (Προβλήματα)

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου χωρίζεται σε δύο μέρη από έναν εσωτερικό φράχτη. Για την περίφραξη του οικοπέδου, μαζί με τον εσωτερικό φράχτη απαιτούνται 300m σύρμα. Να εκφράσετε το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του μήκους του εσωτερικού φράχτη.

<u>Λύση</u>



- **Συμβολισμός**:

  Συμβολίζουμε με x το μήκος του εσωτερικού φράχτη που συμπίπτει με τη μια πλευρά του ορθογωνίου, y η άλλη πλευρά του ορθογωνίου και $E(x)$ το εμβαδό.

  Επειδή για την περίφραξη απαιτούνται 300m σύρμα, έχουμε

  $3x+2y=300 \Leftrightarrow y=\dfrac{300-3x}{2}$ **(1)**.

- **Εύρεση πεδίου ορισμού**:

  Επειδή οι μεταβλητές x και y παριστάνουν μήκος προφανώς θα είναι:

  $x>0$ **(2)** και $y>0 \Leftrightarrow \dfrac{300-3x}{2}>0 \Leftrightarrow 300-3x>0 \Leftrightarrow x<100$ **(3)**.

  Αν συναληθεύσουμε τις **(2)** και **(3)**, προκύπτει $0<x<100$.

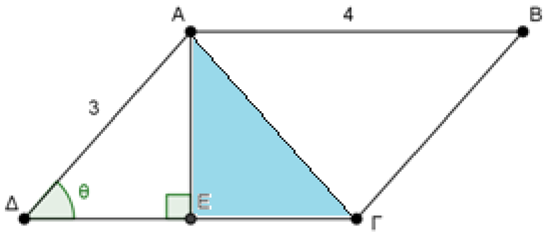
  Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$, είναι το διάστημα $A=(0,100)$.

- **Εύρεση του τύπου της συνάρτησης E(x)**:

  Είναι $E(x)=x\cdot y=x\cdot\dfrac{300-3x}{2}=\dfrac{300x-3x^2}{2}$, $x\in(0,100)$.

Άσκηση 23 (Προβλήματα)

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AB = 4, A\Delta = 3$ και το ύψος του ΑΕ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση της γωνίας θ τα μήκη των ΑΕ, ΕΓ, ΑΓ καθώς και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.



<u>Λύση</u>

- **Εύρεση πεδίου ορισμού**:

Επειδή η θ είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, παίρνει τιμές $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- **Εύρεση του τύπου των συναρτήσεων**:

    - Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε
    $$\eta\mu\theta = \frac{(AE)}{(A\Delta)} \Leftrightarrow (AE) = (A\Delta)\cdot\eta\mu\theta = 3\eta\mu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

    - Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ έχουμε
    $$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(\Delta E)}{(A\Delta)} \Leftrightarrow (\Delta E) = (A\Delta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 3\sigma\upsilon\nu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
    Είναι $(E\Gamma) = (\Delta\Gamma) - (\Delta E) = 4 - 3\sigma\upsilon\nu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

    - Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε
    $$\left(A\Gamma\right)^2 = (AE)^2 + (E\Gamma)^2 = (3\eta\mu\theta)^2 + (4 - 3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 =$$
    $$= 9\eta\mu^2\theta + 16 - 24\sigma\upsilon\nu\theta + 9\sigma\upsilon\nu^2\theta = 9(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) + 16 - 24\sigma\upsilon\nu\theta =$$
    $$= 25 - 24\sigma\upsilon\nu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
    Άρα $(A\Gamma) = \sqrt{25 - 24\sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

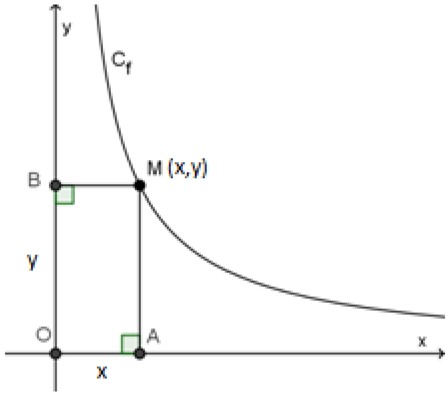
- **Εύρεση του εμβαδού του παραλληλογράμμου**:

$E_{AB\Gamma\Delta} = \left(\Delta\Gamma\right)\left(AE\right) = 4\left(3\eta\mu\theta\right) = 12\eta\mu\theta$ τ.μ, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άσκηση 24 (Προβλήματα)

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{2}{x}, x>0$.

Από τυχαίο σημείο $M\left(x, f(x)\right)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε κάθετες προς τους ημιάξονες Ox, Oy. Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου ορθογωνίου OBMA ως συνάρτηση του x.



Λύση

- **Συμβολισμός**:

Συμβολίζουμε με x την τετμημένη του σημείου M για την οποία ισχύει $(OA)=(BM)=x$, με y την τεταγμένη του σημείου M για την οποία ισχύει $y=f(x)=(OB)=(AM)=\frac{2}{x}$, με $\Pi(x)$ την περίμετρο και με $E(x)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου.

- **Εύρεση πεδίου ορισμού**:

Επειδή οι μεταβλητές x και y παριστάνουν μήκος προφανώς θα είναι:

$x>0$ **(1)** και $y>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$ **(2)**.

Αν συναληθεύσουμε τις **(1)** και **(2)**, προκύπτει $x>0$.

Έτσι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $\Pi(x)$ και $E(x)$, είναι το διάστημα $A=\left(0,+\infty\right)$.

- **Εύρεση του τύπου των συναρτήσεων Π(x) και Ε(x)**:

Είναι $\Pi(x)=2x+2y=2x+2\cdot\frac{2}{x}=2x+\frac{4}{x}, x\in\left(0,+\infty\right)$ και

$E(x)=x\cdot y=x\cdot\frac{2}{x}=2, x\in\left(0,+\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-9}+\dfrac{x}{x^2+6x+9}$

β) $g(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x+1}}$

γ) $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{16-x^2}}$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν:

- $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 9$, άρα $x\neq -3$ και $x\neq 3$ **(1)**.
- $x^2+6x+9\neq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2\neq 0 \Leftrightarrow x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$ **(2)**

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι $x\neq -3$ και $x\neq 3$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\mathbf{R}-\{-3,3\}$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν:

- $x\neq 0$ **(1)**
- $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ **(2)**
- $2-\dfrac{3}{x+1}\neq 0 \Leftrightarrow 2x+2-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{1}{2}$ **(3)**

Συναληθεύουμε τις **(1)**,**(2)** και **(3)** και προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\mathbf{R}-\left\{-1,0,\dfrac{1}{2}\right\}$.

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν:

- $16-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$ **(1)**.

- $\sqrt{16-x^2} \neq 0$,άρα $16-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 16 \Leftrightarrow x \neq -4$ και $x \neq 4$ **(2)**.

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι $-4 < x < 4$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A = (-4, 4)$.

Άσκηση 2 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln^2 x-16}$

β) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln(x-1)}}$

γ) $h(x)=\dfrac{1}{e^x-1}+\sqrt{\ln x}$

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν:

- $x>0$ **(1).**

  $\ln^2 x-16\neq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x\neq 16 \Leftrightarrow \ln x\neq 4$ και $\ln x\neq -4$,

  άρα $x\neq e^4$ και $x\neq \dfrac{1}{e^4}$ **(2)**

Συναληθεύουμε τις **(1)** και **(2)** και προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(0,\dfrac{1}{e^4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e^4},e^4\right)\cup\left(e^4,+\infty\right)$.

β) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν:

- $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ **(1)**.
- $1-\ln(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1)\leq 1 \Leftrightarrow x-1\leq e \Leftrightarrow x\leq e+1$ **(2).**
- $\sqrt{1-\ln\left(x-1\right)}\neq 0$, άρα $1-\ln\left(x-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow$

  $\ln(x-1)\neq 1 \Leftrightarrow x-1\neq e \Leftrightarrow x\neq e+1$ **(3).**

Συναληθεύουμε τις **(1)**,**(2)** και **(3)** και προκύπτει ότι $1<x<e+1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A=\left(1,1+e\right)$

γ) Η συνάρτηση h ορίζεται όταν:

- $x > 0$ για να έχει νόημα το $\ln x$ **(1)**
- $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ **(2)**
- $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ **(3)**

Συναληθεύουμε τις **(1)**,**(2)** και **(3)** και προκύπτει ότι $x \geq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $A = [1, +\infty)$.

Άσκηση 3 (Εύρεση Πεδίου Ορισμού)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2+\alpha}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbf{R}$.

<u>Λύση</u>

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για την παράμετρο $\alpha\in\mathbf{R}$:

1. Αν $\alpha>0$, τότε έχουμε $x^2+\alpha>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbf{R}$.

2. Αν $\alpha=0$, τότε $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$ και πρέπει $x^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$.

   Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbf{R}^*$.

3. Αν $\alpha<0$, τότε πρέπει $x^2+\alpha\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq -\alpha\Leftrightarrow x\neq -\sqrt{-\alpha}$ και $x\neq\sqrt{-\alpha}$, αφού $\alpha<0\Leftrightarrow -\alpha>0$.

   Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbf{R}-\left\{-\sqrt{-\alpha},\sqrt{-\alpha}\right\}$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/8/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

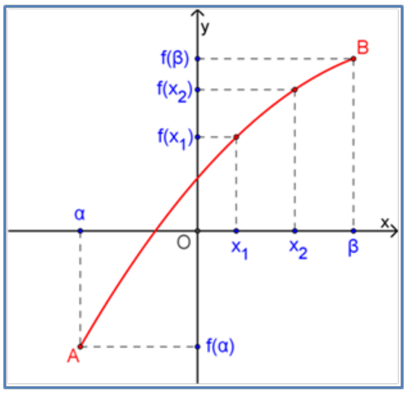
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Μονοτονία Συνάρτησης

Έστω οι συναρτήσεις *f* , *g*, *h*, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα επόμενα σχήματα («Σχήμα 1», «Σχήμα 2», «Σχήμα 3», αντίστοιχα).

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* («Σχήμα 1»), η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι καθώς το x «κινείται» στο διάστημα αυτό από αριστερά προς τα δεξιά, η καμπύλη «ανεβαίνει». Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x, αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$.

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.



Σχήμα 1

Γενικότερα:

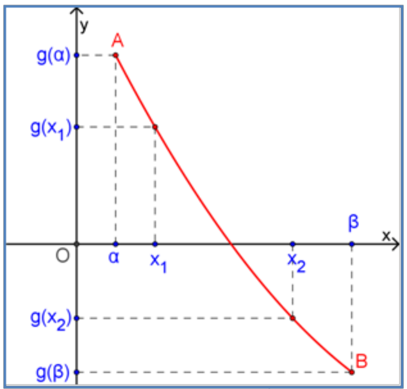
Μία συνάρτηση f λέγεται:

γνησίως αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *g* («Σχήμα 2»), η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, διαπιστώνουμε ότι καθώς το x «κινείται» στο διάστημα αυτό από αριστερά προς τα δεξιά, η καμπύλη «κατεβαίνει». Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x, ελαττώνονται οι αντίστοιχες τιμές $g(x)$.

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η *g* είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.



Σχήμα 2

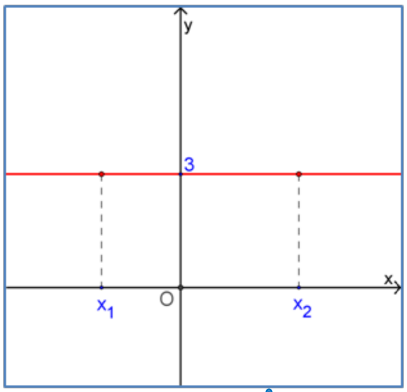
Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f λέγεται:

γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) > f(x_2)$.

Στο «Σχήμα 3» και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *h*, η οποία είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι καθώς το x «κινείται» από αριστερά προς τα δεξιά, η καμπύλη κινείται παράλληλα στο άξονα x΄x. Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x, οι αντίστοιχες τιμές $h(x)$ παραμένουν σταθερές με $h(x)=3$.



Σχήμα 3

Στη περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η *h* είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

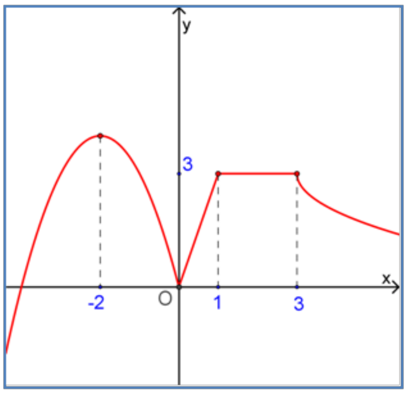
Γενικότερα:

Μία συνάρτηση θα λέμε ότι είναι σταθερή σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$.

Ορίζουμε ως ***γνησίως μονότονη*** μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μια συνάρτηση όμως δεν είναι απαραίτητο να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ή σταθερή σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Για παράδειγμα η συνάρτηση *f* της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στο «Σχήμα 4».



Σχήμα 4

Παρατηρούμε ότι η *f* έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση, καθώς αυξάνονται οι τιμές του x:

στο διάστημα $(-\infty,-2]$ ανέρχεται (αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$),

στο διάστημα $[-2,0]$ κατέρχεται (ελαττώνονται οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$),

στο διάστημα $[0,1]$ ανέρχεται,

στο διάστημα $[1,3]$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και στο διάστημα $[3,+\infty)$ κατέρχεται.

Δηλαδή η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ όπως και στο διάστημα $[0,1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$ όπως και στο διάστημα $[3,+\infty)$ και σταθερή στο διάστημα $[1,3]$.

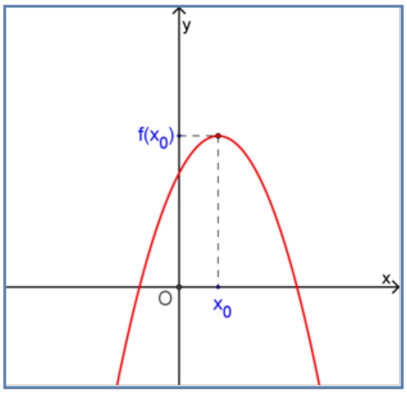
Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* , *g*, *h*, όπως φαίνονται στα επόμενα σχήματα («Σχήμα 5», «Σχήμα 6», «Σχήμα 7», αντίστοιχα).

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* , παρατηρούμε ότι για $x = x_0$ η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της,
που είναι η $f(x_0)$. Δηλαδή ισχύει:

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε *x* το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση *f* παρουσιάζει στο $x = x_0$, μέγιστο το $f(x_0)$.



Σχήμα 5

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_0 \in A$ (ολικό) ***μέγιστο*** *(maximum)*, το $f(x_0)$, όταν

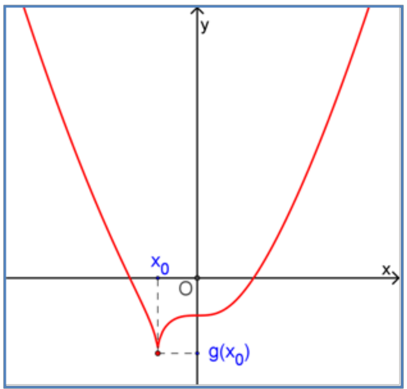
$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης *g* , διαπιστώνουμε ότι για $x = x_0$ η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $g(x_0)$. Δηλαδή ισχύει:

$g(x) \geq g(x_0)$, για κάθε *x* το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση *g* παρουσιάζει στο

$x = x_0$, ελάχιστο το $g(x_0)$.



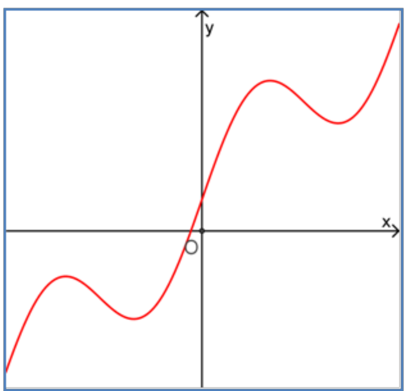
Σχήμα 6

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_0 \in A$ (ολικό) ***ελάχιστο*** *(minimum)*, το $f(x_0)$, όταν

$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.



Σχήμα 7

Στο «Σχήμα 7» και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *h*, η οποία είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα το $h(x)$ αυξάνεται και αυτό απεριόριστα, ενώ καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα το $h(x)$ ελαττώνεται και αυτό απεριόριστα. Δηλαδή η συνάρτηση h δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε ελάχιστο.

- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης, λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Σχόλιο: Μία συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει μόνο μέγιστο ή μόνο ελάχιστο ή μέγιστο και ελάχιστο ή να μην παρουσιάζει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Όπως διαπιστώσαμε από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h στο «Σχήμα 7», η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Παρατηρώντας την όμως κοντά στο x_1 («Σχήμα 8») βλέπουμε ότι η τιμή της $h(x_1)$ είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές της h για κάθε x που ανήκει σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει στο σημείο x_1 τοπικό μέγιστο το $h(x_1)$.

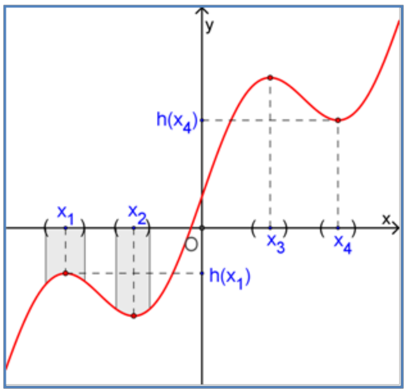
Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_1 \in A$ ***<u>τοπικό μέγιστο</u>***, όταν

$f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_1.

Αν όμως παρατηρήσουμε τη συνάρτηση κοντά στο x_2 βλέπουμε ότι η τιμή της $h(x_2)$ είναι η μικρότερη από τις τιμές της h για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή του x_2. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει στο σημείο x_2 τοπικό ελάχιστο το $h(x_2)$.



Σχήμα 8

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_2 \in A$ ***<u>τοπικό ελάχιστο</u>***, όταν

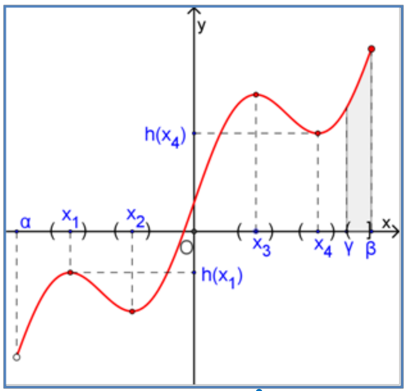
$f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_2.

Με αντίστοιχους συλλογισμούς διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_3$ και τοπικό ελάχιστο για $x = x_4$.

Σε αντίθεση με την περίπτωση όπου μια συνάρτηση έχει ολικά ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο) στην οποία δε μπορεί ποτέ το (ολικό) ελάχιστο να είναι μεγαλύτερο από το (ολικό) μέγιστο, όπως παρατηρούμε στη συνάρτηση *h* ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο ($h(x_4) > h(x_1)$).

- Τα τοπικά ή ολικά, μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης ονομάζονται ***ακρότατα*** της συνάρτησης.

Αξίζει να προσέξουμε την περίπτωση στην οποία το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ένα διάστημα κλειστό ως προς το ένα άκρο του τουλάχιστον. Ας υποθέσουμε ότι η προηγούμενη συνάρτηση *h* είχε πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = (\alpha, \beta]$. Βλέπε «Σχήμα 9».



Σχήμα 9

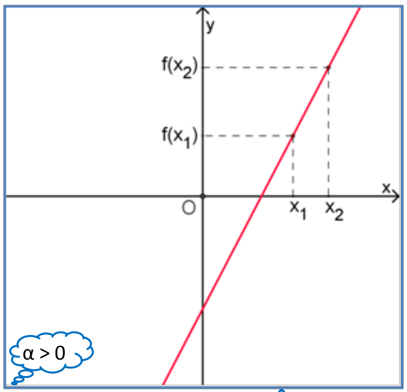
Παρατηρούμε ότι υπάρχει διάστημα της μορφής $(\gamma, \beta]$ τέτοιο ώστε η τιμή $h(\beta)$ είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές της συνάρτησης για κάθε x που ανήκει στο διάστημα $(\gamma, \beta]$. Σε μία τέτοια περίπτωση θα λέμε ότι η συνάρτηση *h* παρουσιάζει στο σημείο $x = \beta$ τοπικό μέγιστο το $h(\beta)$.

Ανάλογα για αντίστοιχες περιπτώσεις κλειστών-ημίκλειστων διαστημάτων.

Μονοτονία – ακρότατα βασικών συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα, με χρήση της γραφικής τους παράστασης, των εξής βασικών συναρτήσεων:

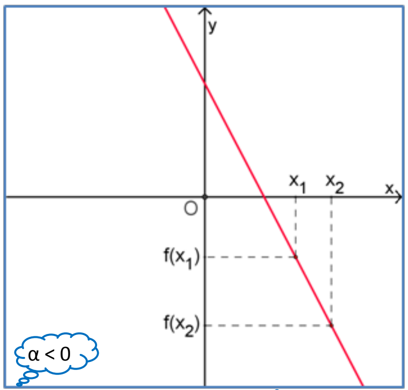
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία με θετικό συντελεστή διεύθυνσης, είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα (με $f(A) = \mathbb{R}$).



Σχήμα 10

Πράγματι αν παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση ανάλογης συνάρτησης («Σχήμα 10»), καθώς αυξάνεται το x, η καμπύλη «ανέρχεται», δηλαδή για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (γνησίως αύξουσα), επίσης καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα το $f(x)$ αυξάνεται και αυτό απεριόριστα, ενώ καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα το $f(x)$ ελαττώνεται και αυτό απεριόριστα. Δηλαδή η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε ελάχιστο.

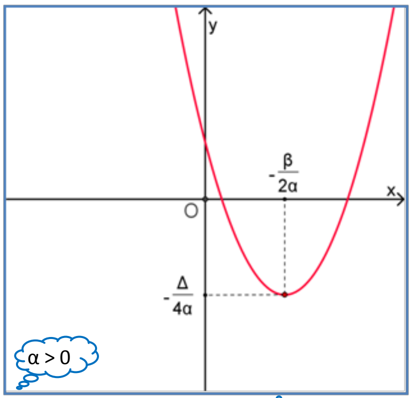
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης, είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα (με $f(A) = \mathbb{R}$).



Σχήμα 11

Αν παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση ανάλογης συνάρτησης («Σχήμα 11»), καθώς αυξάνεται το x, η καμπύλη «κατέρχεται», δηλαδή για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (γνησίως φθίνουσα), επίσης καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα το $f(x)$ ελαττώνεται και αυτό απεριόριστα, ενώ καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Δηλαδή η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε ελάχιστο.

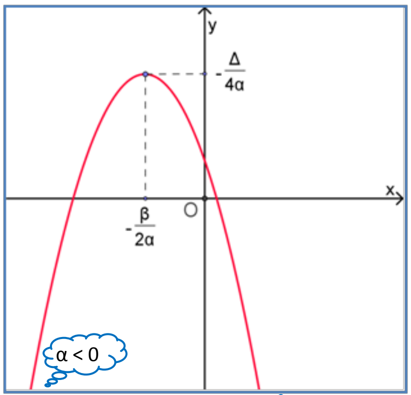
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 12»), είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.



Σχήμα 12

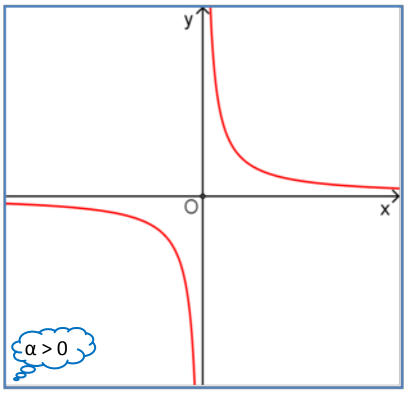
Παρουσιάζει ελάχιστο (τοπικό και ολικό) για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha < 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 13») είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Παρουσιάζει μέγιστο (τοπικό και ολικό) για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.



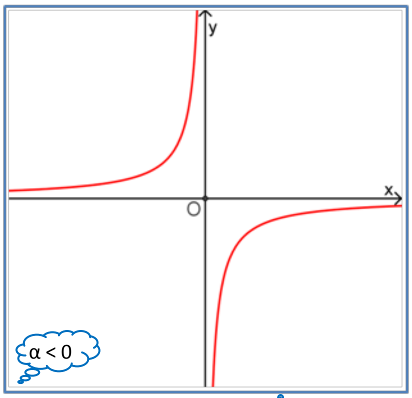
Σχήμα 13

- Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, με $a > 0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια υπερβολή (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 14») είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.



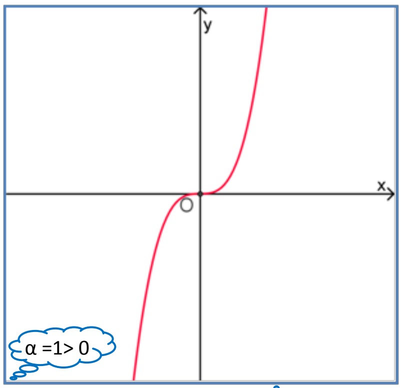
Σχήμα 14

- Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha<0$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια υπερβολή (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 15»), είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.



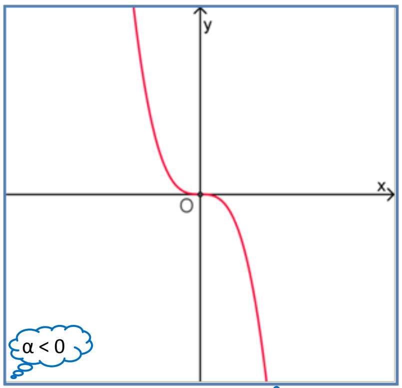
Σχήμα 15

- Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, με $\alpha>0$ (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 16») είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ αφού για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$. Επίσης η f δεν παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο (επομένως ούτε ολικά ακρότατα), εφόσον δεν υπάρχει κανένα σημείο $x_0\in A$ τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ ή $f(x)\ge f(x_0)$ αντίστοιχα για κάθε x σε μία περιοχή του x_0 (με $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$).



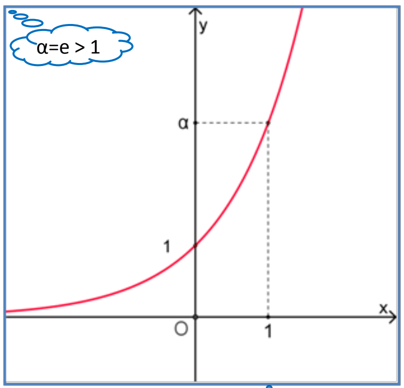
Σχήμα 16

- Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, με $\alpha<0$ (παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης βλέπουμε στο «Σχήμα 17») είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα (με $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$).



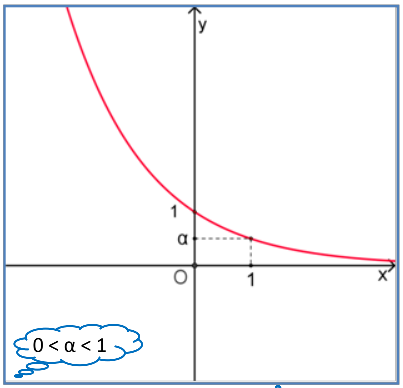
Σχήμα 17

- Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$ (παράδειγμα ανάλογης συνάρτησης, η $f(x)=e^x$, «Σχήμα 18») είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα αφού δεν υπάρχει κανένα σημείο $x_0\in A$ τέτοιο ώστε η τιμή $f(x_0)$ να είναι η μεγαλύτερη ή η μικρότερη από τις τιμές της f για κάθε x που ανήκει σε μία περιοχή του x_0 (με $f(\mathrm{A})=(0,+\infty)$).



Σχήμα 18

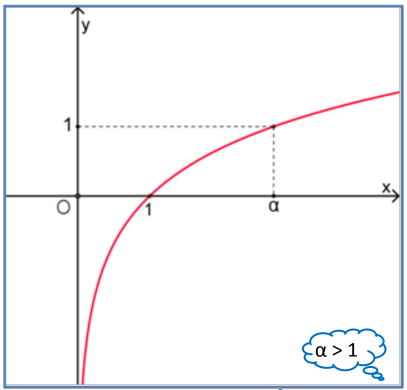
➢ Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha < 1$ (ανάλογη συνάρτηση βλέπουμε στο «Σχήμα 19») είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της ($\mathrm{A} = \mathbb{R}$) και δεν έχει ακρότατα (με $f(\mathrm{A}) = (0, +\infty)$).



Σχήμα 19

➢ Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = log_\alpha x$, με $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα (με $f(\mathrm{A}) = \mathbb{R}$).

Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται παρατηρώντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αυτής της μορφής («Σχήμα 20»).



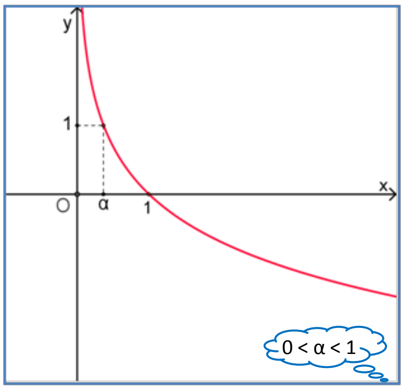
Σχήμα 20

Σχόλιο : Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

➢ Η λογαριθμική συνάρτηση

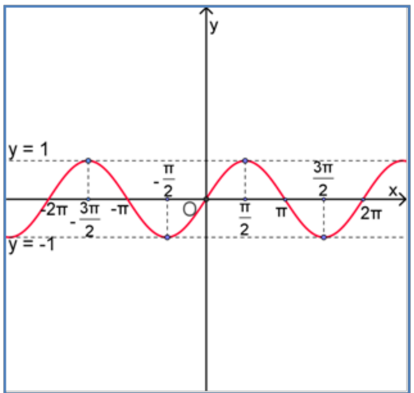
$f(x) = log_\alpha x$, με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της ($\mathrm{A} = (0, +\infty)$) και δεν έχει ακρότατα (με $f(\mathrm{A}) = \mathbb{R}$).

Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται παρατηρώντας τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αυτής της μορφής («Σχήμα 21»).



Σχήμα 21

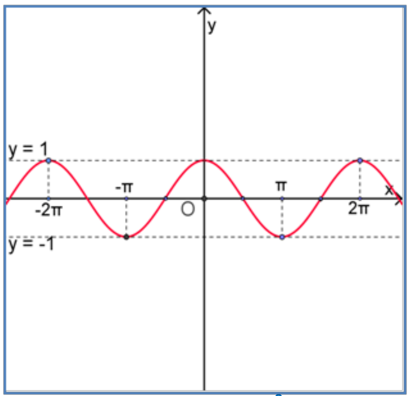
➢ Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, έχει γραφική παράσταση μια ημιτονοειδή καμπύλη και πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = \mathbb{R}$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και γραφικά («Σχήμα 22») , παρατηρώντας την σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου $[0, 2\pi]$ (περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$) , είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο



Σχήμα 22

$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi,2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2},2(\kappa+1)\pi\right]$, με $\kappa\in\boldsymbol{Z}$.

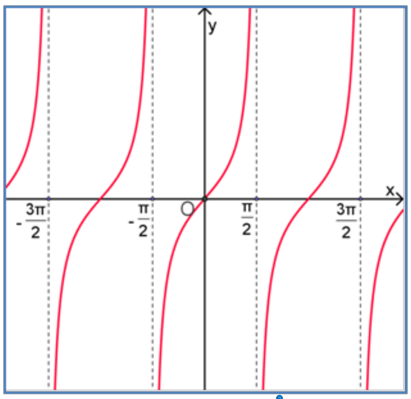
Παρουσιάζει ελάχιστο, τοπικό και ολικό, για κάθε $x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}$, $\kappa\in\boldsymbol{Z}$**,** το $-\mathbf{1}$ και μέγιστο, τοπικό και ολικό, για κάθε $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\boldsymbol{Z}$**,** το $\mathbf{1}$, (με $f(\mathrm{A})=[-1,1]$).



Σχήμα 23

- Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στο «Σχήμα 23» έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,2\pi]$. Επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=2\pi$ η f θα είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[2\kappa\pi,2\kappa\pi+\pi]$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[2\kappa\pi+\pi,2\kappa\pi+2\pi]$, με $\kappa\in\boldsymbol{Z}$.

Παρουσιάζει ελάχιστο, τοπικό και ολικό, για κάθε $x=(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\boldsymbol{Z}$**,** το $-\mathbf{1}$ και μέγιστο, τοπικό και ολικό, για κάθε $x=2\kappa\pi$, $\kappa\in\boldsymbol{Z}$**,** το $\mathbf{1}$, (με $f(\mathrm{A})=[-1,1]$).



Σχήμα 24

- Τέλος η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$, έχει πεδίο ορισμού το $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z\right\}$. Παρατηρώντας τη γραφική της παράσταση («Σχήμα 24») μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=\pi$ η f θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, με $\kappa\in\boldsymbol{Z}$ και δεν έχει ακρότατα (με $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$).

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια

Είναι σημαντικό να κάνουμε κάποια σχόλια και παρατηρήσεις που θα μας βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση όλων των εννοιών που διαπραγματευθήκαμε στην ενότητα αυτή και επιπλέον θα μας δώσουν κάποια στοιχεία που θα διευκολύνουν την επίλυση των ασκήσεων.

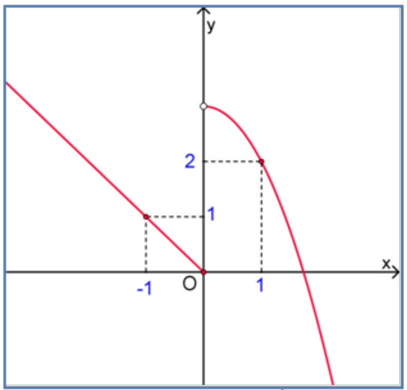
1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα A, τότε είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του A.

   Για παράδειγμα η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο «Σχήμα 4» είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-2,0\right]$ και όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι γνησίως φθίνουσα και σε κάθε υποδιάστημα του $\left[-2,0\right]$, (π.χ. στο $\left[-2,-1\right]$, ή στο $\left[-1.5,-0.5\right]$ ή στο $\left[-1,0\right]$).

2. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο υποσύνολα

   Δ_1,Δ_2 του πεδίου ορισμού της, αλλά όχι απαραίτητα και στην ένωση τους ($\Delta_1 \cup \Delta_2$).

   Στο παράδειγμα της συνάρτησης f με τη γραφική παράσταση να φαίνεται στο «Σχήμα 25» παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]\cup\left(0,+\infty\right)=\mathbb{R}$, γιατί για $-1<1$ ισχύει $f(-1)<f(1)$. Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)<f(x_2)$.



Σχήμα 25

3. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άρτια. Και αντίστροφα, κάθε άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

   Πράγματι αν μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, είναι γνησίως μονότονη τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

   $f(x_1)\neq f(x_2)$

   ($f(x_1)<f(x_2)$ αν f γν. αύξουσα ή $f(x_1)>f(x_2)$ αν f γν. φθίνουσα),

   άρα δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, δηλαδή η f δεν είναι άρτια.

Αντίστροφα, αν η μια συνάρτηση f είναι άρτια, θα υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης συμμετρικά ως προς τον y΄y, που σημαίνει σημεία με αντίθετη τετμημένη ($x_1 = -\alpha,\ x_2 = \alpha$ **με** $\alpha > 0$) και ίδια τεταγμένη

($f(x_1) = f(x_2) = \beta$). Άρα για $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ οπότε η f δεν θα είναι γνησίως μονότονη.

4. Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (ένα τουλάχιστον) και τοπικό ελάχιστο (ένα τουλάχιστον), δε σημαίνει ότι υποχρεωτικά το τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από το τοπικό ελάχιστο.

   Για παράδειγμα η συνάρτηση *h* όπως παρατηρήσαμε από τη γραφική της παράσταση στο «Σχήμα 8» είχε για $x = x_1$ τοπικό μέγιστο το $h(x_1)$ μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο $h(x_4)$ (για $x = x_4$).

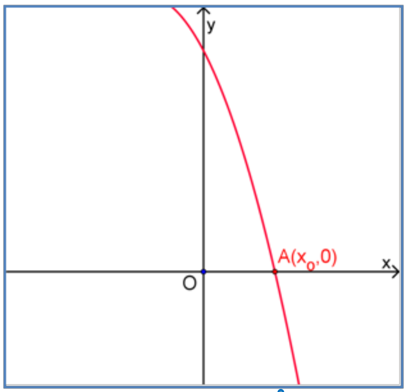
5. Τα ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης είναι και τοπικά ακρότατα αυτής. Ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα τοπικό ακρότατο δεν σημαίνει ότι είναι και ολικό ακρότατο.

   Πράγματι αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο όπως στο παράδειγμα του «Σχήματος 5» στο x_0, τότε οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι μικρότερες ή το πολύ ίσες με το $f(x_0)$ για κάθε *x* που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, άρα και για κάθε *x* που ανήκει σε μία περιοχή του x_0, που σημαίνει $f(x_0)$ είναι και τοπικό μέγιστο. Ανάλογα διαπιστώνουμε ότι κάθε ολικό ελάχιστο είναι τοπικό ελάχιστο (π.χ. «Σχήμα 6») .

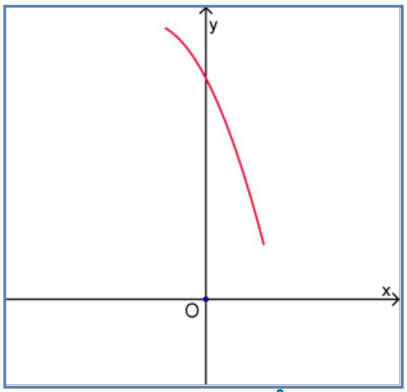
   Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *h* στο «Σχήμα 9» το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή υπάρχουν τοπικά ακρότατα ($h(x_1)$ τοπικό μέγιστο και $h(x_2)$ τοπικό ελάχιστο) τα οποία δεν είναι ολικά ακρότατα.

6. Σε κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

   Για παράδειγμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* («Σχήμα 26») είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και όπως βλέπουμε τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο ($\mathrm{A}(x_0,0)$), ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης *g* («Σχήμα 27») είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και δεν τέμνει τον άξονα x΄x. Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης *f* δεν μπορεί να τέμνει τον x΄x σε περισσότερα από ένα σημεία γιατί αν υποθέσουμε ότι την τέμνει σε δύο σημεία, $\mathrm{A}(x_1,0)$ και $\mathrm{B}(x_2,0)$ (με $x_1 < x_2$), θα υπάρχουν δύο σημεία της με την ίδια τεταγμένη, δηλαδή για $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) = f(x_2) = 0$, πράγμα άτοπο αφού *f* γνησίως μονότονη.

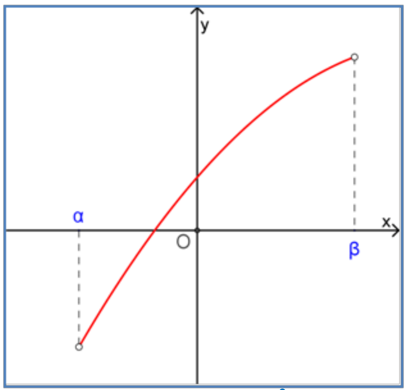


Σχήμα 26



Σχήμα 27

7. Αποδεικνύεται ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα (a,β) δεν έχει ακρότατα.



Σχήμα 28

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τη γραφική παράσταση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f ορισμένης στο (a,β) («Σχήμα 28») δεν έχει ακρότατα, αφού δεν υπάρχει κανένα σημείο $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε η τιμή $f(x_0)$ να είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της f σε μία περιοχή του x_0 (τοπικό ελάχιστο) ή η μικρότερη από τις τιμές της f σε μία περιοχή του x_0 (τοπικό μέγιστο).
Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a,β).

8. Στην περίπτωση που μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο (στο x_0) τον αρνητικό αριθμό *a* ($f(x_0)=a<0$) τότε $f(x)<0$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της *A* (αφού για κάθε x που ανήκει στο *A* ισχύει $f(x)\le a<0$). Αντίστοιχα αν f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο (στο x_0) το θετικό αριθμό *a* ($f(x_0)=a>0$) τότε $f(x)\ge \alpha>0$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Ανακεφαλαίωση

Τα βασικά σημεία των εννοιών που παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή είναι:

Ορισμός Γνησίως Αύξουσας Συνάρτησης:

Μία συνάρτηση f λέγεται:

γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) < f(x_2)$.

Ορισμός Γνησίως Φθίνουσας Συνάρτησης:

Μία συνάρτηση f λέγεται:

γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) > f(x_2)$.

Ορισμός Γνησίως Μονότονης Συνάρτησης σε Διάστημα Δ:

Μια συνάρτηση f λέγεται ***γνησίως μονότονη*** σε ένα διάστημα Δ όταν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ορισμός Τοπικού Μεγίστου Συνάρτησης:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_1 \in A$ ***τοπικό μέγιστο***, όταν

$f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_1.

Ορισμός Τοπικού Ελαχίστου Συνάρτησης:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

Στο $x_2 \in A$ ***τοπικό ελάχιστο***, όταν

$f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μία περιοχή του x_2.

Ορισμός Ακρότατων Συνάρτησης:

Τα τοπικά ή ολικά, μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης ονομάζονται ***akρότατα*** της συνάρτησης.

Παραδείγματα Εφαρμογής

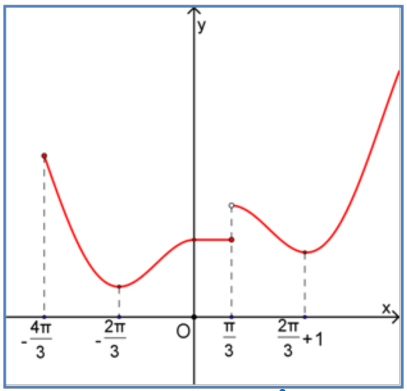
Παράδειγμα 1 (Μονοτονία)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 6"

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση, που η γραφική της παράσταση παρουσιάζεται στο σχήμα, είναι γνησίως μονότονη, σταθερή.

(Θέμα Β)

Λύση



Σχήμα 1

Αφού γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, μπορούμε από το σύνολο των τετμημένων των σημείων της να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της.

Δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\left[-\frac{4\pi}{3},+\infty\right)$.

Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f :

- Ανέρχεται, είναι διαστήματα που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- Κατέρχεται, είναι διαστήματα που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
- Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, είναι διαστήματα που η συνάρτηση είναι σταθερή.

Άρα η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right]$,

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$,

- σταθερή στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+1\right]$ και

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3}+1,+\infty\right)$.

Παράδειγμα 2 (Μονοτονία)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 7"

Έστω $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{K}(-5,2)$ και $\Lambda(3,-1)$.

α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της *f*.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<-1$.

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

α) Από τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, $\mathrm{K}(-5,2)$, $\Lambda(3,-1)$ για $x_1=-5$ και $x_2=3$ έχουμε:

$x_1<x_2$ και $f(x_1)>f(x_2)$ (αφού $2>-1$), και

επειδή η *f* γνησίως μονότονη συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}=[-10,10]$.

<u>Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια</u> :

Όταν μια συνάρτηση *f* είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα) στο πεδίο ορισμού της A και επιπλέον γνωρίζουμε τις τετμημένες x_1, x_2 (με $x_1<x_2$) δύο σημείων $\mathrm{B}(x_1, f(x_1))$, $\Gamma(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της *f*, αν οι αντίστοιχες τεταγμένες των σημείων είναι ομοιοτρόπως άνισες ($f(x_1)<f(x_2)$) η συνάρτηση θα είναι γνησίως αύξουσα, ενώ αν αλλάζει η φορά της ανισότητας ($f(x_1)>f(x_2)$) η *f* θα είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Επειδή το -1 είναι η τεταγμένη του σημείου $\Lambda(3,-1)$, έχουμε $f(3)=-1$, οπότε:

$f(x)<-1 \Leftrightarrow f(x)<f(3)$ **(1)**.

Στο (α) υποερώτημα της άσκησης δείξαμε ότι η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}=[-10,10]$.

Άρα η σχέση **(1)**, βάσει του ορισμού της γνησίως φθίνουσα συνάρτησης, γίνεται ισοδύναμα:

$f(x)<f(3) \overset{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} x>3$ με $x\in[-10,10]$.

Από τη συναλήθευση της ανίσωσης $x>3$ με τις τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της *f* προκύπτουν οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης.

Συνεπώς $x\in(3,10]$.

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια :

Πολλές φορές η μονοτονία μιας συνάρτησης μας βοηθάει στην επίλυση ανισώσεων.

Για παράδειγμα αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε από την ανίσωση $f(x) < f(1)$ ισοδύναμα με τη βοήθεια του ορισμού της γνησίως αύξουσας συνάρτησης έχουμε:
$f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$.

Παράδειγμα 3 (Ακρότατα)

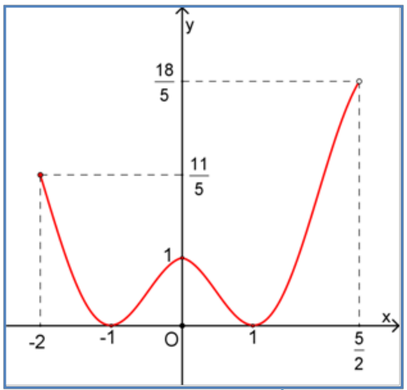
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 8"

Δίνεται συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο «Σχήμα 1». Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα τοπικά και τα ολικά ακρότατα της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

(Θέμα Β)

Λύση

Με τη βοήθεια των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης της f στον άξονα x΄x βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $\mathrm{A} = \left[-2, \frac{5}{2}\right)$.



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι για $x=-1$ και $f(x) \geq f(-1) = 0$ για κάθε x που ανήκει σε μία περιοχή του –1, άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=-1$ τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=0$. Με ανάλογους συλλογισμούς προκύπτει ότι η f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)=0$.

Για $x=0$, $f(x) \leq f(0) = 1$ για κάθε x που ανήκει σε μία περιοχή του 0, άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=1$.

Για $x=-2$ παρατηρούμε ότι υπάρχει διάστημα της μορφής $[-2, \beta)$ τέτοιο ώστε η τιμή $f(-2)$ είναι η μεγαλύτερη από τις τιμές της συνάρτησης για κάθε x που ανήκει στο διάστημα $[-2, \beta)$.

Οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο $x=-2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2) = \frac{11}{5}$.

Τέλος διαπιστώνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-1$ και για $x=1$ το $f(-1) = f(1) = 0$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο αφού το σύνολο τιμών της f $f(A) = \left[0, \frac{18}{5}\right)$ είναι ανοικτό διάστημα από τα δεξιά, οπότε δεν υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A}$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια :

Αν μία συνάρτηση *f* έχει για σύνολο τιμών ένα ανοικτό διάστημα τότε η *f* δεν έχει ολικά ακρότατα, ενώ αν το σύνολο τιμών της *f* είναι ανοικτό διάστημα από τα αριστερά (ή από τα δεξιά), δεν θα έχει ελάχιστο (ή μέγιστο αντίστοιχα).

Παράδειγμα 4 (Ακρότατα)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 9"

Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 7]$.

β) $g(x) = |1 - x| + 2012$.

(Θέμα Γ) (2 *τρόποι επίλυσης*)

Λύση

α) Από το πεδίο ορισμού της *f* , $A = [-1, 7]$ έχουμε:

$$-1 \le x \le 7 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) \ge -\frac{1}{2}x \ge -\frac{1}{2}\cdot 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2}x \ge -\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5 \ge -\frac{1}{2}x + 5 \ge -\frac{7}{2} + 5 \Leftrightarrow \frac{11}{2} \ge f(x) \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le f(x) \le \frac{11}{2}.$$

Από τις λύσεις των εξισώσεων: $f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 5 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 7$ και $f(x) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 5 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$, προκύπτουν οι τιμές του x στις οποίες η *f* παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα.

Επομένως η *f* για $x = 7$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(7) = \frac{3}{2}$ και για $x = -1$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(-1) = \frac{11}{2}$.

2^ος^ τρόπος

Η συνάρτηση *f* είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$. Οπότε η *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

Με τη βοήθεια του ορισμού της γνησίως φθίνουσα συνάρτησης, έχουμε:

$$-1 < x < 7 \overset{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(-1) > f(x) > f(7).$$

Επομένως για κάθε $x \in [-1, 7]$ ισχύει:

$$-1 \le x \le 7 \Leftrightarrow f(-1) \ge f(x) \ge f(7) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(-1) + 5 \ge f(x) \ge -\frac{1}{2} \cdot 7 + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{2} \ge f(x) \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le f(x) \le \frac{11}{2}.$$

Άρα η *f* για $x = 7$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(7) = \frac{3}{2}$ και για $x = -1$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(-1) = \frac{11}{2}$.

β) Η συνάρτηση *g* έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = \mathbb{R}$ και $|1 - x| \ge 0$ **(1)** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ $|1 - x| = 0$ για $x = 1$.

Η σχέση **(1)** γίνεται ισοδύναμα:

$$(1) \Leftrightarrow |1 - x| + 2012 \ge 2012 \Leftrightarrow g(x) \ge 2012 \Leftrightarrow g(x) \ge g(1).$$

Άρα η *g* παρουσιάζει για $x = 1$ ελάχιστο το 2012.

<u>Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια</u> :

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα $A = [\gamma, \delta]$, θα έχει:

Ελάχιστο το $f(\gamma)$ και μέγιστο το $f(\delta)$ αν $\alpha > 0$ (*f* γν. αύξουσα).

Ελάχιστο το $f(\delta)$ και μέγιστο το $f(\gamma)$ αν $\alpha < 0$ (*f* γν. φθίνουσα).

Παράδειγμα 5 (Ακρότατα)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 10"

Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων για τις συναρτήσεις που ακολουθούν.

α) $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

β) $g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$ με πεδίο ορισμού το $A = [-\pi, \pi]$.

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση *f* είναι της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -2 < 0$ και $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2\cdot(-2)} = -\frac{-4}{-4} = -1$. Επομένως κατά τα γνωστά η *f* είναι:

Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{\beta}{2\alpha} = -1$, το $f(-\frac{\beta}{2\alpha}) = f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 3 = -2 + 4 + 3 = 5$.

Εποπτικά η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	-1	+∞
f(x)	↗	max 5	↘

β) Η συνάρτηση *g* αποτελείται από το άθροισμα της τριγωνομετρικής συνάρτησης $h(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και της σταθερής $t(x) = -1$, με $x \in [-\pi, \pi]$.

Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση $h(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

Παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) για $x = 0$ το $h(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ και ελάχιστο (ολικό) για $x = -\pi$ και για $x = \pi$ το $h(-\pi) = h(\pi) = -1$. Άρα:

$-1 \le h(x) \le 1$ **(1)** για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Επομένως,

για κάθε $x_1, x_2 \in [-\pi, 0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 - 1 < \sigma\upsilon\nu x_2 - 1 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$, άρα *g* γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$,

Και για κάθε $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

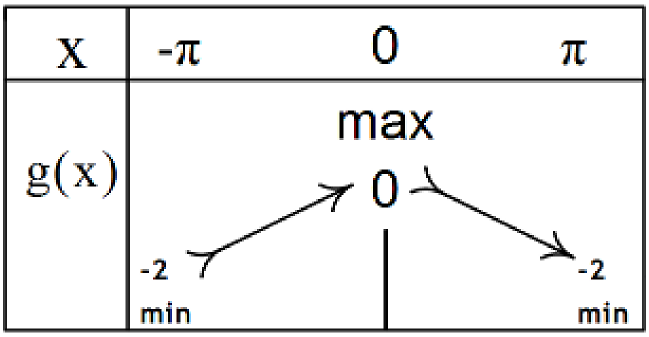
$h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 - 1 > \sigma\upsilon\nu x_2 - 1 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$, άρα *g* γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

Η σχέση **(1)** γίνεται ισοδύναμα:

(1) $\Leftrightarrow -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow -1-1 \le \sigma\upsilon\nu x - 1 \le 1-1 \Leftrightarrow -2 \le g(x) \le 0$

Οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\pi$ και για $x = \pi$ το $g(-\pi) = g(\pi) = -2$ και για $x = 0$ μέγιστο το $g(0) = 0$.

Εποπτικά η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



Παράδειγμα 6 (Ακρότατα)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 11"

Ένας αθλητής τοξοβολίας εκτελεί βολή και το βέλος ακολουθεί παραβολική τροχιά με εξίσωση $y = -\frac{1}{16}x^2 + 2x + 2$. Στόχος του αθλητή είναι να περάσει το βέλος πάνω από ένα τοίχο ύψους 17m.

α) Να βρεθεί η απόσταση που πρέπει να έχει ο αθλητής από τον τοίχο έτσι ώστε όταν το βέλος φτάσει στον τοίχο να έχει το μέγιστο ύψος.

β) Να εξετάσετε αν μπορεί ο αθλητής να πετύχει το στόχο του.

(Θέμα Γ)

Λύση

α) Η συνάρτηση f που μας δίνει το ύψος που έχει το βέλος από το έδαφος ως προς την οριζόντια απόσταση x από τον αθλητή έχει τύπο $f(x)=-\frac{1}{16}x^2+2x+2$ με $x\geq 0$

Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-\frac{1}{16}<0$, επομένως παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2}{2\cdot(-\frac{1}{16})}=-\frac{2}{-\frac{1}{8}}=16$. Άρα η απόσταση που πρέπει να έχει ο αθλητής από τον τοίχο, έτσι ώστε το βέλος όταν φτάσει στον τοίχο να έχει το μέγιστο ύψος που είναι 16m.

β) Το μέγιστο της συνάρτησης είναι: $f(-\frac{\beta}{2\alpha})=f(16)=-\frac{1}{16}16^2+2\cdot 16+2=-16+32+2=18$.

Οπότε ο αθλητής μπορεί να πετύχει το στόχο του και να ξεπεράσει το βέλος τον τοίχο (17m) αφού το μέγιστο ύψος που μπορεί να φτάσει το βέλος είναι τα 18m.

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/8/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Μονοτονία)

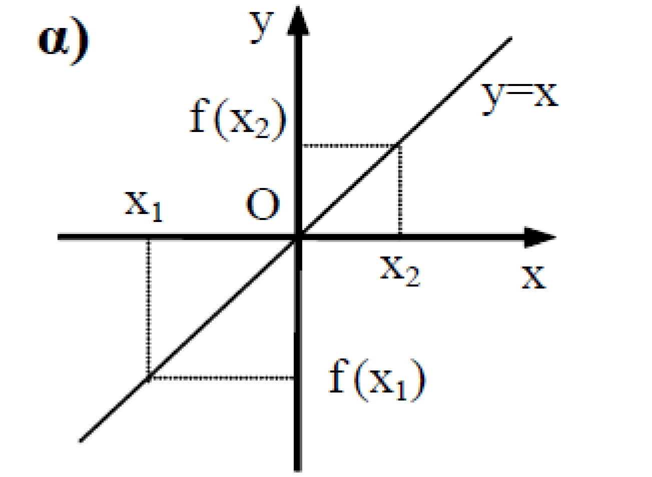
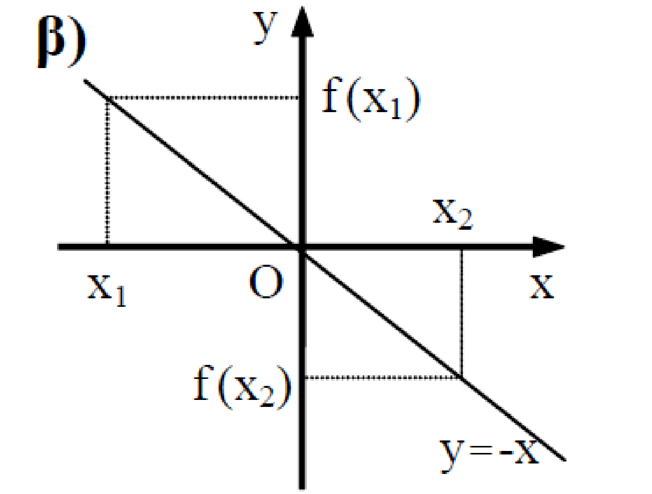
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας σε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.

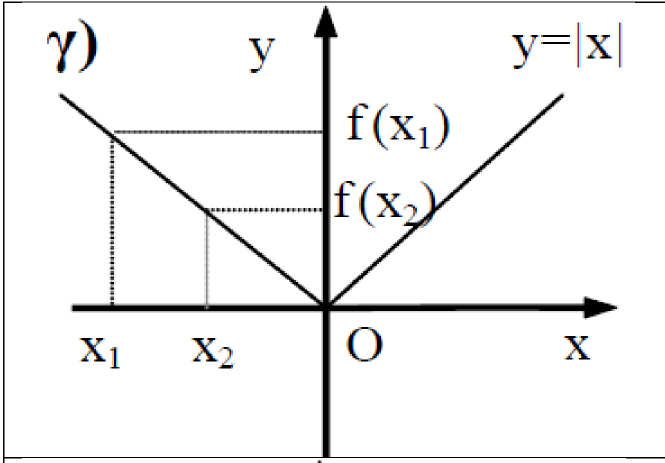
α) $f(x)=x$

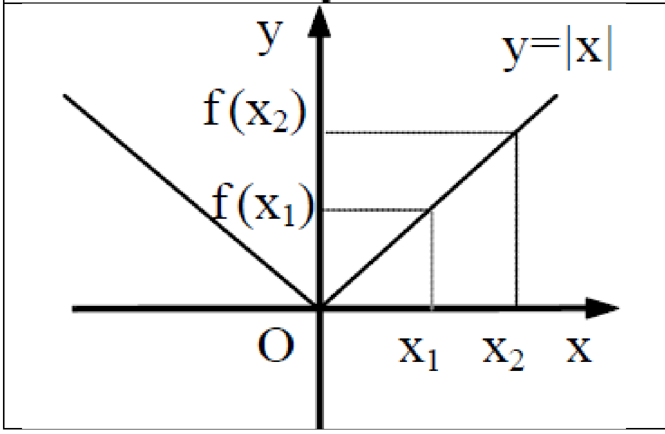
β) $f(x)=-x$

γ) $f(x)=|x|$

Λύση

	Η συνάρτηση $f(x)=x$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.
	Η συνάρτηση $f(x)=-x$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ έχει πεδίο ορισμού το R.
Παρατηρούμε ότι:
• για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
• για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
</td>
</tr>
</table>

Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Μεθοδολογία

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ».

  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « κατεβαίνει ».

  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Άσκηση 2 (Ακρότατα)

Έστω η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της f.

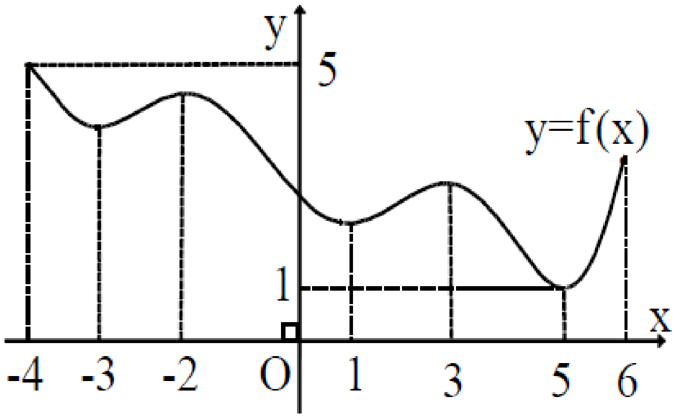
β) Τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Τις θέσεις των τοπικών ελαχίστων της f.

δ) Τις θέσεις των τοπικών μεγίστων της f.

ε) Τα ολικά ακρότατα της f.

στ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = lnf(x)$



<u>Λύση</u>

α) Η προβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f πάνω στον άξονα x΄x δίνει πεδίο ορισμού το διάστημα $A_f = [-4, 6]$

β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».Άρα η συνάρτηση f είναι:

• γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-3,-2]$, $[1,3]$ και $[5,6]$

• γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-4,-3]$, $[-2,1]$ και $[3,5]$

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε καθεμιά από τις παρακάτω θέσεις:

$x_1 = -3$, $x_3 = 1$ και $x_5 = 5$

δ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε καθεμιά από τις παρακάτω θέσεις:

$x_0 = -4$, $x_2 = -2$, $x_4 = 3$ και $x_6 = 6$

ε) Η συνάρτηση f παρουσιάζει:

• ολικό μέγιστο στο $x_0 = -4$ με μέγιστη τιμή $f(x_0) = f(-4) = 5$ και

• ολικό ελάχιστο στο $x_5 = 5$ με ελάχιστη τιμή $f(x_5) = f(5) = 1$

στ) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης f είναι πάνω από τον άξονα x΄x,οπότε είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-4, 6]$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = [-4, 6]$.

Μεθοδολογία

α) Η προβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f πάνω στον άξονα x΄x δίνει πεδίο ορισμού της f.

β) •Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

• Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει ότι για $x = x_1$ η τιμή της f είναι μικρότερη από τις τιμές της f σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια περιοχή του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_1 τοπικό ελάχιστο.

Το ίδιο συμβαίνει για $x = x_3$ και για $x = x_5$. Οι τιμές $f(x_1)$, $f(x_3)$ και $f(x_5)$ λέγονται τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης.

δ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει ότι για $x = x_2$ η τιμή της f είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της f σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_2, ή, όπως λέμε σε μια περιοχή του x_2. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_2 τοπικό μέγιστο.

Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_4$. Οι τιμές $f(x_2)$ και $f(x_4)$ λέγονται τοπικά μέγιστα της συνάρτησης.

Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και σε καθένα από τα σημεία x_0 και x_6, τα οποία είναι κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

Παρατήρηση

Παρατηρείστε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο $f(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $f(x_4)$.

ε) Ολικό μέγιστο έχουμε στο υψηλότερο σημείο της καμπύλης, ενώ ολικό ελάχιστο έχουμε στο χαμηλότερο σημείο της καμπύλης. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει:

• ολικό μέγιστο στο σημείο x_0 με μέγιστη τιμή $f(x_0)$ και

• ολικό ελάχιστο στο σημείο x_5 με ελάχιστη τιμή $f(x_5)$

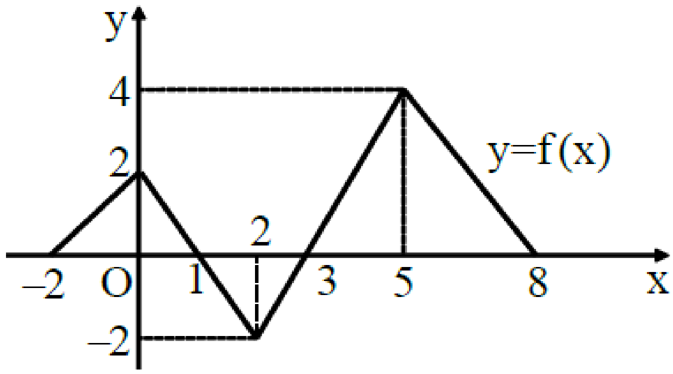
στ) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης f είναι πάνω από τον άξονα x΄x,

οπότε είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-4, 6]$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = [-4, 6]$

Άσκηση 3 (Ακρότατα)

Έστω η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να βρείτε:
α) Το πεδίο ορισμού της f.
β) Τα διαστήματα μονοτονίας της f.
γ) Τις θέσεις των τοπικών ελαχίστων της f.
δ) Τις θέσεις των τοπικών μεγίστων της f.
ε) Τα ολικά ακρότατα της f.
στ) Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x
ζ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$g(x)=\frac{1}{f(x)}$



Λύση

α) Η προβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f πάνω στον άξονα x΄x δίνει πεδίο ορισμού το διάστημα $A_f=[-2,8]$

β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

• γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[2,5]$

• γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$ και $[5,8]$

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε καθεμιά από τις παρακάτω θέσεις:

$x_0=-2$, $x_3=2$ και $x_6=8$

δ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε καθεμιά από τις παρακάτω θέσεις:

$x_1=0$ και $x_5=5$

ε) Η συνάρτηση f παρουσιάζει:

• ολικό μέγιστο στο $x_5=5$ με μέγιστη τιμή $f(x_5)=f(5)=4$ και

• ολικό ελάχιστο στο $x_3=2$ με ελάχιστη τιμή $f(x_3)=f(2)=-2$

στ) Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι τα:

$x_0=-2$, $x_2=1$, $x_4=3$ και $x_6=8$

ζ) Για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ πρέπει $f(x)\neq 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. Άρα $\mathrm{f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2}$ ή $x=1$ ή $x=3$ ή $x=8$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=(-2,1)\bigcup(1,3)\bigcup(3,8)$

Μεθοδολογία

α) Η προβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f πάνω στον άξονα x΄x δίνει πεδίο ορισμού της f

β) • Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in\Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ». Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

• Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in\Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει ότι για $x=x_3$ η τιμή της f είναι μικρότερη από τις τιμές της f σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια περιοχή του x_3. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_3 τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.

Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και σε καθένα από τα σημεία x_0 και x_6, τα οποία είναι κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

δ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει ότι για $x=x_1$ η τιμή της f είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της f σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια περιοχή του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_1 τοπικό μέγιστο.

Το ίδιο συμβαίνει και για $x=x_5$. Οι τιμές $f(x_1)$ και $f(x_5)$ λέγονται τοπικά μέγιστα της συνάρτησης.

ε) Ολικό μέγιστο έχουμε στο υψηλότερο σημείο της καμπύλης, ενώ ολικό ελάχιστο έχουμε στο χαμηλότερο σημείο της καμπύλης. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει:

• ολικό μέγιστο στο σημείο x_5 με μέγιστη τιμή $f(x_5)$ και

• ολικό ελάχιστο στο σημείο x_3 με ελάχιστη τιμή $f(x_3)$

στ) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία εκείνα που η f τέμνει τον άξονα x΄x δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η $f(x)$

ζ) Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι στον παρανομαστή πρέπει $f(x) \neq 0$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$ θα είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ εξαιρουμένων των σημείων που μηδενίζεται η $f(x)$.

Άσκηση 4 (Ακρότατα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1, x \in R$.

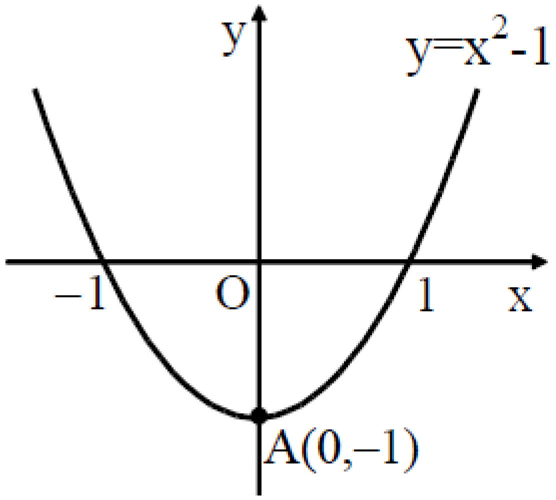
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων.

<u>Λύση</u>

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα άνω με κορυφή το σημείο $A(0,-1)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(x_0) = f(0) = -1$

γ) Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	-1	$\nearrow$
		ελάχιστο	

Μεθοδολογία

α) Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β)

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f

  με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ».

  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « κατεβαίνει ».

  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ολικό ελάχιστο έχουμε στο χαμηλότερο σημείο της καμπύλης.

Άσκηση 5 (Ακρότατα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3},\ x\in[-5,4]$.

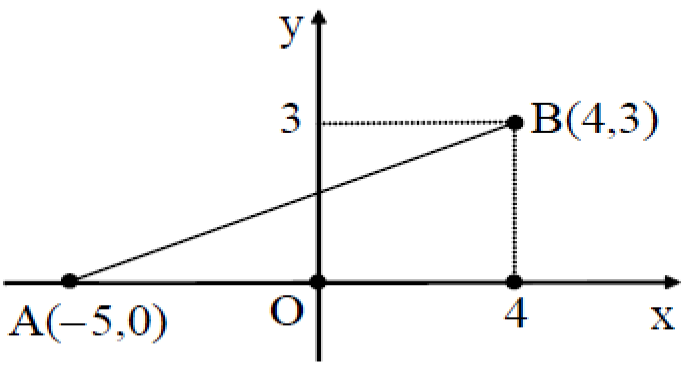
Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

<u>Λύση</u>

<u>1ος τρόπος</u>:
Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ της ευθείας με εξίσωση $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Για $x_A=-5$ έχουμε $y_A=\frac{1}{3}(-5)+\frac{5}{3}=0$ και

για $x_B=4$ έχουμε $y_B=\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3$



Άρα $A(-5,0)$ και $B(4,3)$

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , διαπιστώνουμε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-5,4]$.
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει:
  - ολικό ελάχιστο στη θέση $x_A=-5$ με ελάχιστη τιμή $f(x_A)=f(-5)=0$ και
  - ολικό μέγιστο στη θέση $x_B=4$ με μέγιστη τιμή $f(x_B)=f(4)=3$

<u>2ος τρόπος</u>:

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=[-5,4]$.

Έστω $x_1,x_2\in[-5,4]$ με $x_1<x_2$, τότε $-5\le x_1<x_2\le 4 \overset{\cdot\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} -\frac{5}{3}\le\frac{1}{3}x_1<\frac{1}{3}x_2\le\frac{4}{3} \overset{+\frac{5}{3}}{\Leftrightarrow}$

$$0\le\frac{1}{3}x_1+\frac{5}{3}<\frac{1}{3}x_2+\frac{5}{3}\le\frac{9}{3}\Leftrightarrow$$

$$0\le\frac{1}{3}x_1+\frac{5}{3}<\frac{1}{3}x_2+\frac{5}{3}\le 3\Leftrightarrow$$

$0\le f(x_1)<f(x_2)\le 3$ **(1)**

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-5,4]$.

Από τη σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-5,4]$.

Για να είναι το 0 η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f πρέπει να υπάρχει $x \in [-5,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 0$.

Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = -5$ με ελάχιστη τιμή $f(-5) = 0$.

Από τη σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-5,4]$. Για να είναι το 3 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f πρέπει να υπάρχει $x \in [-5,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 3$.

Είναι:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = 3 \Leftrightarrow x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = 4$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 4$ με μέγιστη τιμή $f(4) = 3$.

<u>Μεθοδολογία</u>

<u>1ος τρόπος</u>:

α) Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ολικό μέγιστο έχουμε στο υψηλότερο σημείο της καμπύλης, ενώ ολικό ελάχιστο έχουμε στο χαμηλότερο σημείο της καμπύλης. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει:

- ολικό ελάχιστο στο σημείο x_A με ελάχιστη τιμή $f(x_A)$ και
- ολικό μέγιστο στο σημείο x_B με μέγιστη τιμή $f(x_B)$

<u>2ος τρόπος</u>:

Θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και με μια σειρά πράξεων δημιουργούμε μια διάταξη για τις τιμές $f(x_1)$ και $f(x_2)$, οπότε αν:

- $f(x_1) < f(x_2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

- $f(x_1) > f(x_2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

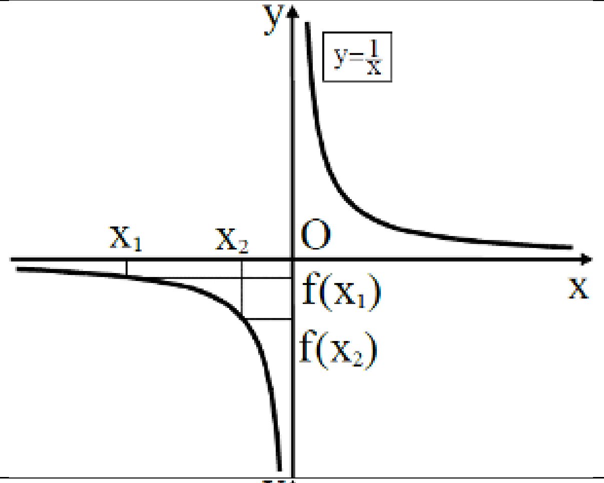
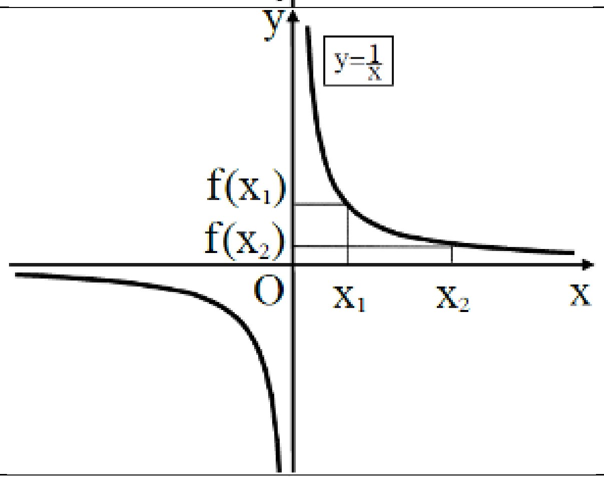
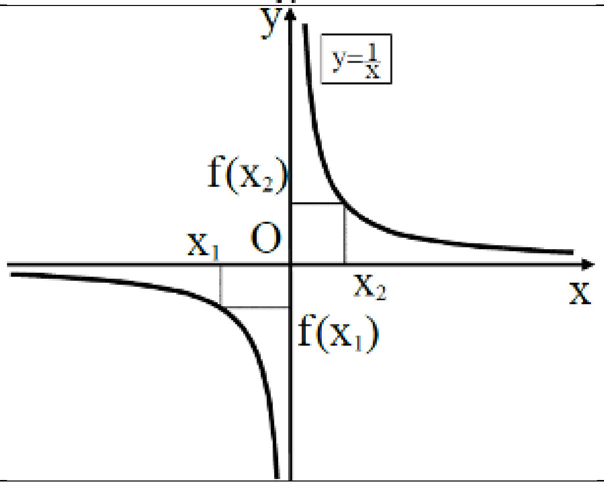
Για τον προσδιορισμό των ακροτάτων βασιζόμαστε στους αντίστοιχους ορισμούς.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Μονοτονία)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $R^*=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι: • για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.
	• για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
	• για $x_1<0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<0<f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ενώ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*.

Μεθοδολογία

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « ανεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

- Αν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$, όπου Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της f με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x « κινείται » στο διάστημα Δ από τα αριστερά προς τα δεξιά η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην περίπτωση που μια συνάρτηση f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα A_1, A_2 του πεδίου ορισμού της, γιατί αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας και στην ένωση $A_1 \bigcup A_2$, των δύο διαστημάτων.

Ημερομηνία Τροποποίησης: 8/9/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση 1

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

<u>Απάντηση</u>

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Ερώτηση 2

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Ερώτηση 3

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως μονότονη**, όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Ερώτηση 4

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Ερώτηση 5

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;

<u>Απάντηση</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Ερώτηση 6

Τι λέγονται ακρότατα μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ Β

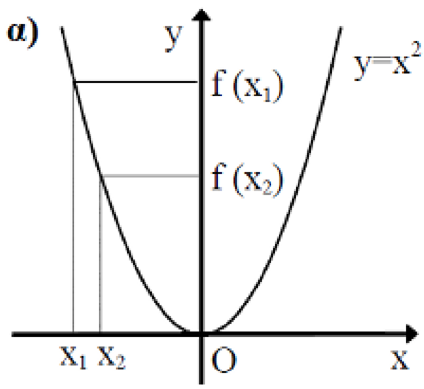
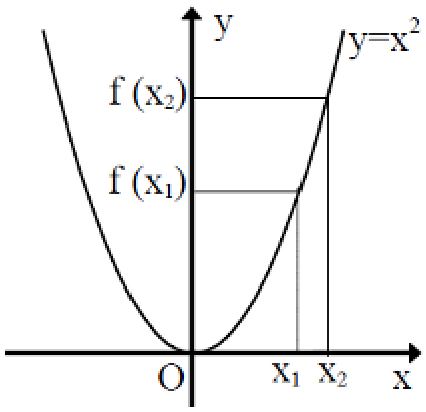
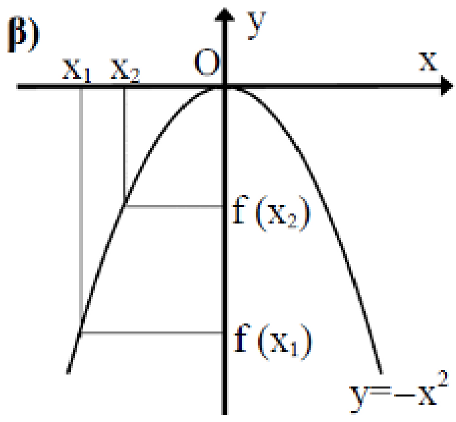
Άσκηση 1 (Μονοτονία)

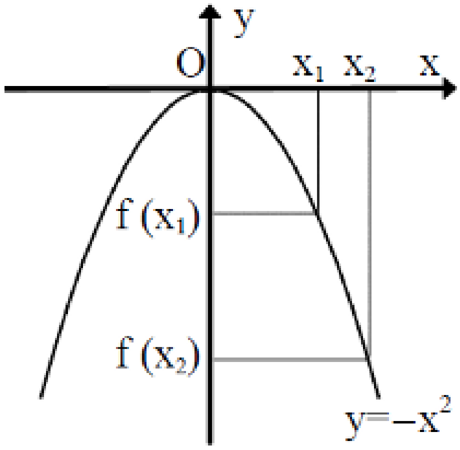
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας σε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f(x) = x^2$

β) $f(x) = -x^2$

<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι: • για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
	• για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
	Η συνάρτηση $f(x) = -x^2$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι: • για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = -x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

• για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = -x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

</td>
</tr>
</table>

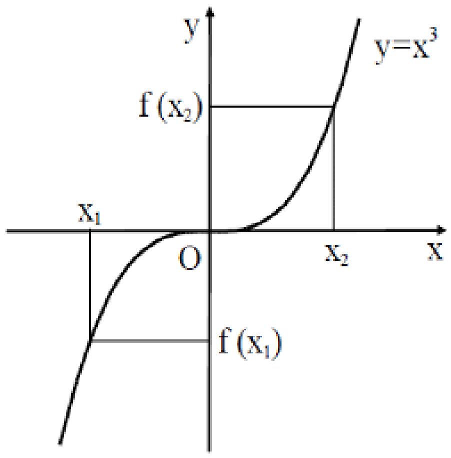
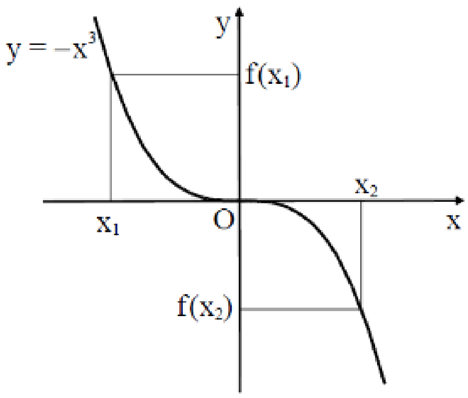
Άσκηση 2 (Μονοτονία)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας σε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f(x)=x^3$

β) $f(x)=-x^3$

<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.
	Η συνάρτηση $f(x)=-x^3$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x)=-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

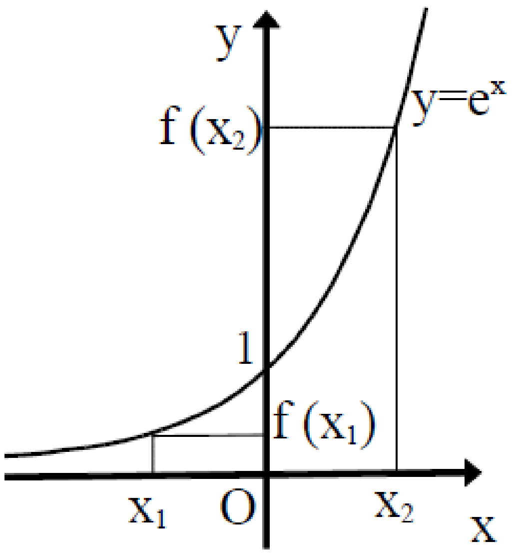
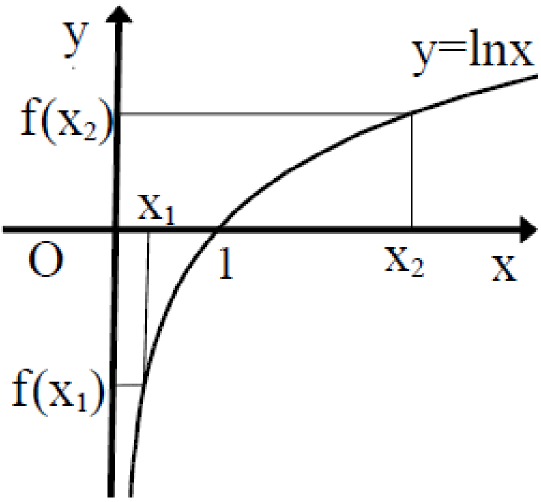
Άσκηση 3 (Μονοτονία)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας σε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f(x) = e^x$

β) $f(x) = lnx$

<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει πεδίο ορισμού το R. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R
	Η συνάρτηση $f(x) = lnx$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση $f(x) = lnx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 4 (Ακρότατα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x,\ x \in R$.

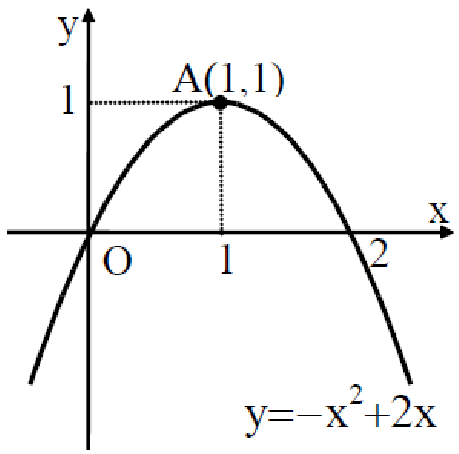
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων.

Λύση

α) Είναι $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1,\ x \in R$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = -x^2$, μιας οριζόντιας κατά μία μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα κάτω με κορυφή το σημείο $A(1,1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $f(x_0) = f(1) = 1$

γ) Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

μέγιστο

Άσκηση 5 (Ακρότατα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x-3,\ x\in R$.

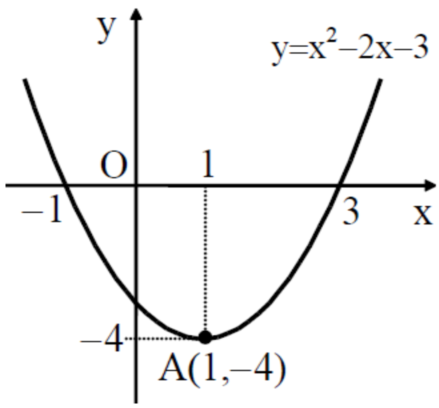
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4,\ x\in R$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y=x^2$, μιας οριζόντιας κατά μία μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά τέσσερις μονάδες προς τα κάτω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα πάνω με κορυφή το σημείο $A(1,-4)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x=1$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

• γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και

• γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(x_0)=f(1)=-4$

γ) Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f είναι:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)		↘	-4	↗	
			ελάχιστο		

Άσκηση 6 (Ακρότατα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 - 2x + 3,\ x \in R$.

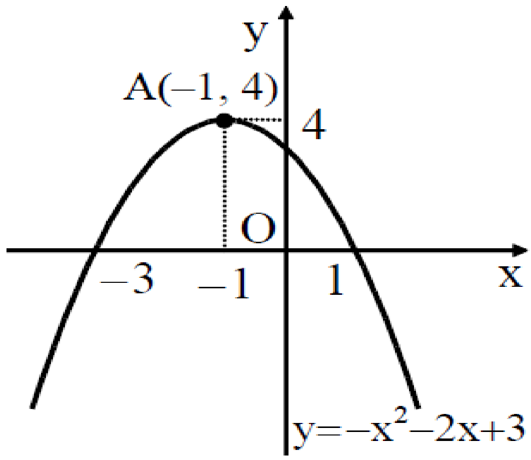
α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $f(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,\ x \in R$.
Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής $y = -x^2$, μιας οριζόντιας κατά μία μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά τέσσερεις μονάδες προς τα πάνω. Είναι δηλαδή μια παραβολή ανοικτή προς τα κάτω με κορυφή το σημείο $A(-1,4)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -1$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

• γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και

• γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -1$ με μέγιστη τιμή $f(x_0) = f(-1) = 4$

γ) Ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f είναι:

x	-∞		-1		+∞
f(x)		↗	4	↘	

μέγιστο

Άσκηση 7 (Ακρότατα)

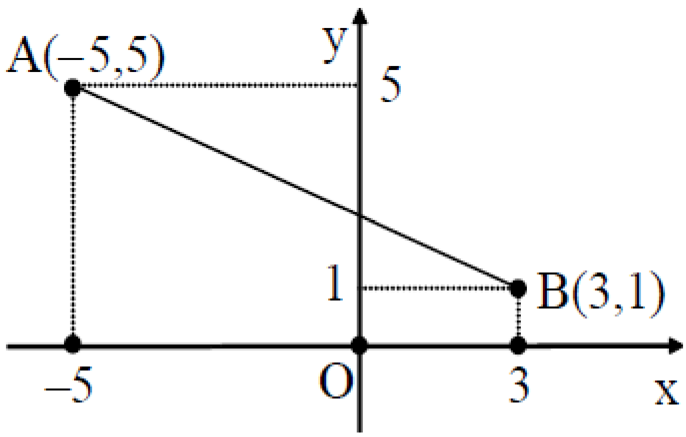
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},\ x \in [-5,3]$.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

1ος τρόπος:

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ της ευθείας με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Για $x_A = -5$ έχουμε $y_A = -\frac{1}{2}(-5) + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = 5$ και για $x_B = 3$ έχουμε $y_B = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, διαπιστώνουμε ότι:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-5,3]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει:

- ολικό μέγιστο στη θέση $x_A = -5$ με μέγιστη τιμή $f(x_A) = f(-5) = 5$ και
- ολικό ελάχιστο στη θέση $x_B = 4$ με ελάχιστη τιμή $f(x_B) = f(3) = 1$

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = [-5,3]$.

Έστω $x_1, x_2 \in [-5,3]$ με $x_1 < x_2$, τότε

$$-5 \le x_1 < x_2 \le 3 \overset{\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \frac{5}{2} \ge -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2 \ge -\frac{3}{2} \overset{+\frac{5}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \ge -\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2} \ge -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$5 \ge -\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2} \ge 1 \Leftrightarrow 5 \ge f(x_1) > f(x_2) \ge 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-5,3]$.

Από τη σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in [-5,3]$.

Για να είναι το 1 η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f πρέπει να υπάρχει $x \in [-5,3]$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 1$.

Είναι:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow -x + 5 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 3$ με ελάχιστη τιμή $f(3) = 1$.

Από τη σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(x) \leq 5$ για κάθε $x \in [-5,3]$**.** Για να είναι το 5 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f πρέπει να υπάρχει $x \in [-5,3]$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 5$.

Είναι:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 5 \Leftrightarrow -x + 5 = 10 \Leftrightarrow x = -5$$

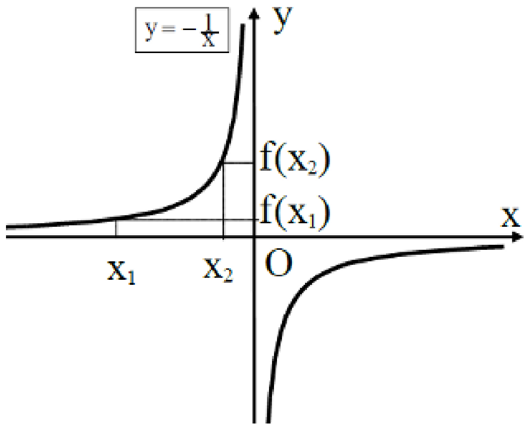
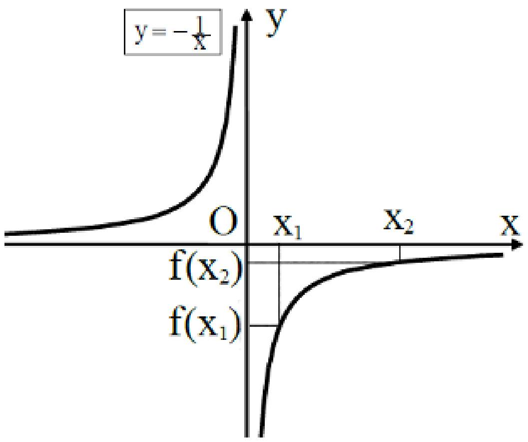
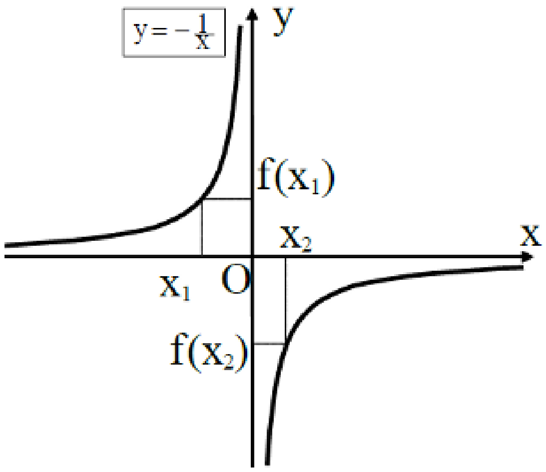
Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = -5$ με μέγιστη τιμή $f(-5) = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Μονοτονία)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$

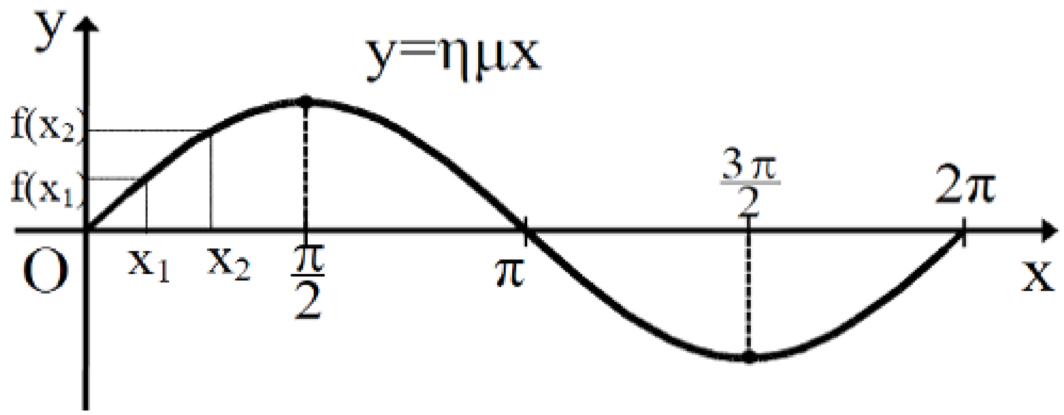
<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $R^* = (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι: • για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.
	• για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
	• για $x_1 < 0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > 0 > f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο R^*.

Άσκηση 2 (Μονοτονία)

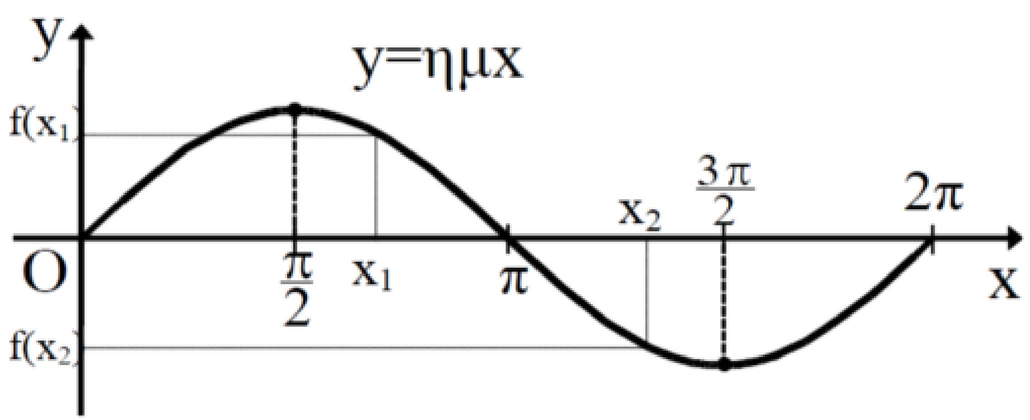
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x\in[0,2\pi]$

Λύση



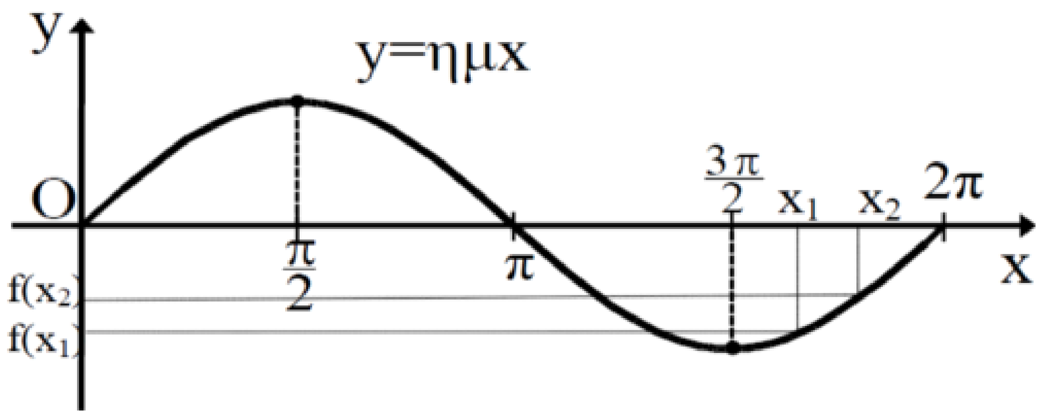
• Για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



• Για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



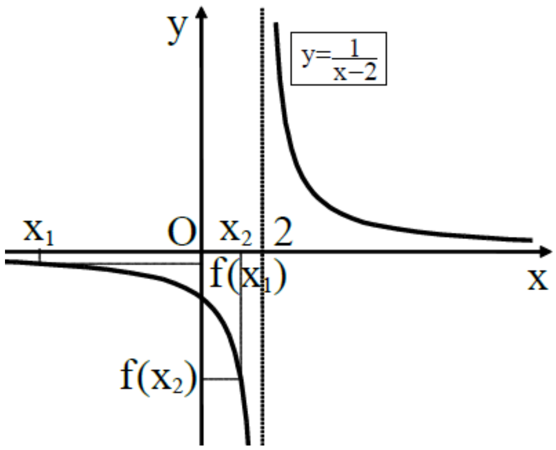
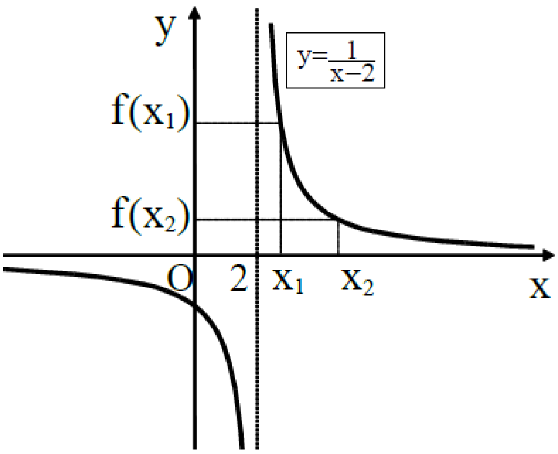
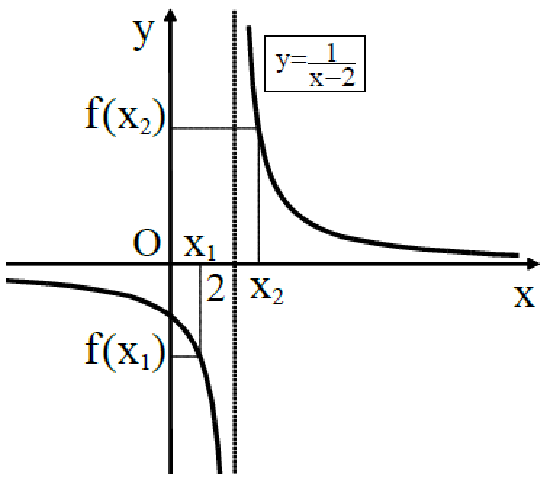
• Για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Άσκηση 3 (Ακρότατα)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

<u>Λύση</u>

	Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,2)\bigcup(2,+\infty)$ Παρατηρούμε ότι: • για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in(-\infty,2)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2)$.
	• για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.
	• για $x_1<2<x_2$ ισχύει $f(x_1)<0<f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ενώ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο Α

Άσκηση 4 (Ακρότατα)

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=1-2\sqrt{x-3}$.

<u>Λύση</u>

Όταν γνωρίζουμε μόνο τον τύπο της συνάρτησης f , τότε το πεδίο ορισμού της είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ο τύπος $f\left(x\right)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f=\left[3,+\infty\right)$.

Έστω $x_1,x_2\in\left[3,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$, τότε $3\leq x_1<x_2 \overset{-3}{\Leftrightarrow} 0\leq x_1-3<x_2-3 \Leftrightarrow$

$0\leq\sqrt{x_1-3}<\sqrt{x_2-3} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 0\geq -2\sqrt{x_1-3}>-2\sqrt{x_2-3} \overset{+1}{\Leftrightarrow}$

$1\geq 1-2\sqrt{x_1-3}>1-2\sqrt{x_2-3} \Leftrightarrow 1\geq f(x_1)>f(x_2)$ **(1)**

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[3,+\infty\right)$.

Από τη σχέση **(1)** έχουμε ότι $f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\left[3,+\infty\right)$. Για να είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f πρέπει να υπάρχει $x\in\left[3,+\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x)=1$.

Είναι:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x-3}=1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow$$

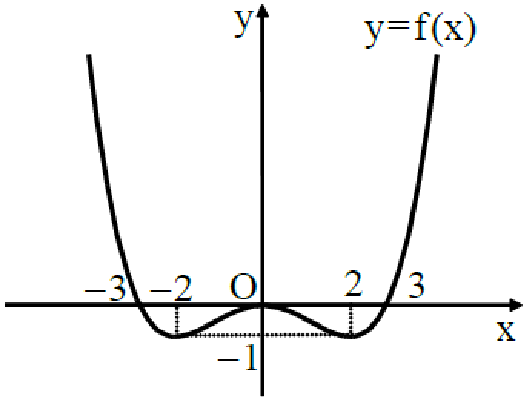
$$\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=3$ με μέγιστη τιμή $f(3)=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1 (Ακρότατα)

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε:
α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f.
β) Τις θέσεις των τοπικών ελαχίστων της f.
γ) Τις θέσεις των τοπικών μεγίστων της f.
δ) Τα ολικά ακρότατα της f.
ε) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$g(x)=\sqrt{f(x)}$



<u>Λύση</u>

α) Στο διάστημα όπου η καμπύλη « ανεβαίνει » η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα όπου η καμπύλη « κατεβαίνει ».

Άρα η συνάρτηση f είναι:

• γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0,2]$

• γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[2,+\infty)$

β) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε καθεμιά από τις παρακάτω θέσεις:

$x_0=-2$ και $x_2=2$

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση:

$x_1=0$

δ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει:

• ολικό ελάχιστο σε δύο θέσεις $x_0=-2$ και $x_2=2$ με ελάχιστη τιμή $f(-2)=f(2)=-1$

ε) Για να ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{f(x)}$ πρέπει $f(x)\geq 0$, δηλαδή ορίζεται για εκείνα τα x, για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα x΄x και πάνω. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=(-\infty,-3]\bigcup\{0\}\bigcup[3,+\infty)$

Ημερομηνία Τροποποίησης: 2/9/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

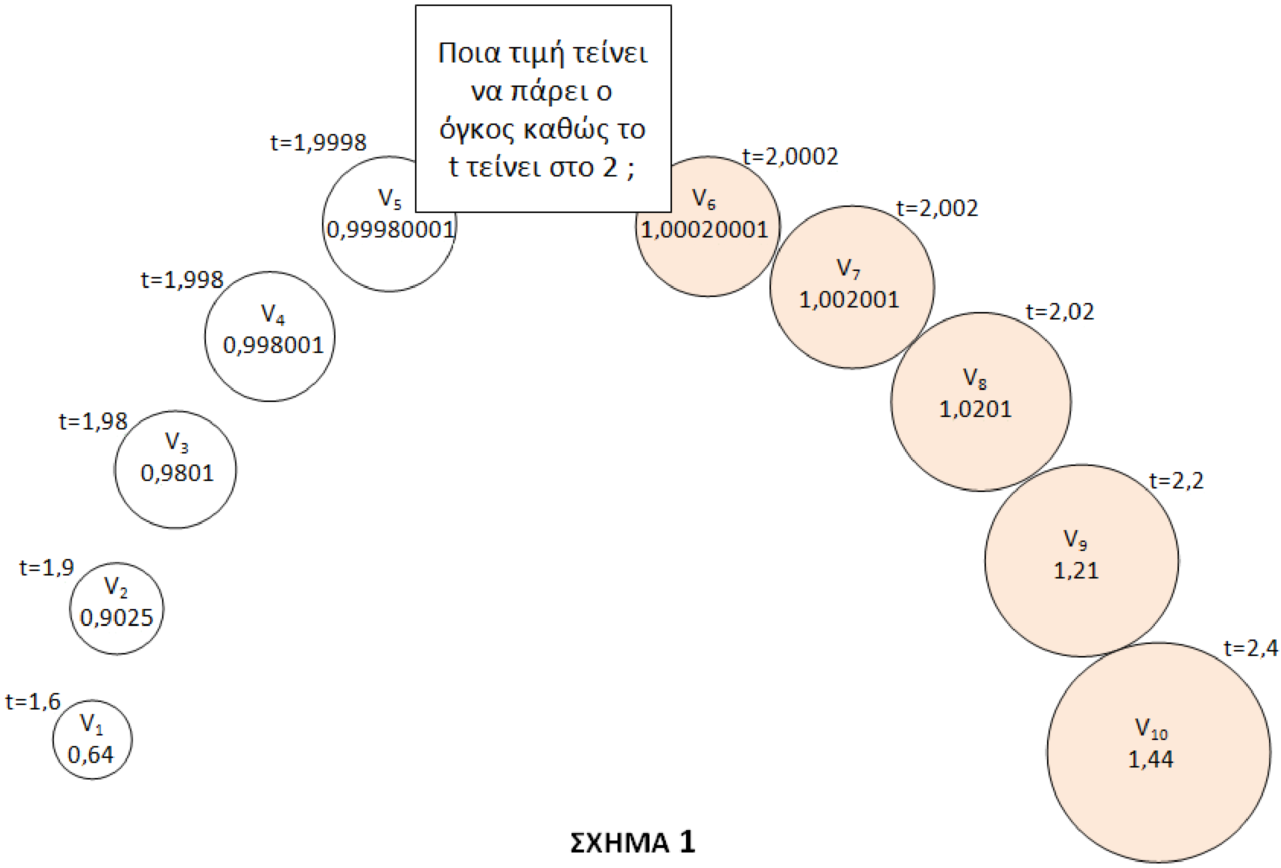
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του ορίου στο x_o

Υπάρχουν συναρτήσεις οι τιμές των οποίων πλησιάζουν ένα **πραγματικό αριθμό L**, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο έναν **πραγματικό αριθμό** x_0.

Για παράδειγμα, παρακολουθώντας την εξέλιξη ενός φαινομένου στο οποίο ο παραγόμενος όγκος V του αερίου διοχετεύεται σε ένα μπαλόνι και μεταβάλλεται με το χρόνο t,

όπως φαίνεται στο σχήμα (1), διαπιστώνουμε ότι εξαιτίας ενός τεχνικού προβλήματος δεν έχουμε μέτρηση τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$.



ΣΧΗΜΑ 1

Αν υποθέσουμε ότι ο τύπος της συνάρτησης που δίνει τον όγκο V συναρτήσει του χρόνου, είναι $V(t) = \dfrac{t^3 - 2t^2}{4t-8}, t \in [0,2) \cup (2,+\infty)$, τότε:

Α) Από το σχήμα (1) και με πινακοποίηση των τιμών, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το t πλησιάζει από μικρότερες είτε από μεγαλύτερες τιμές την τιμή $t_0 = 2$ *, ο όγκος V(t) πλησιάζει την τιμή L=1.*

t < 2	V(t)		t >2	V(t)
1,6	0,64		2,4	1,44
1,9	0,9025		2,2	1,21
1,98	0,9801		2,02	1,0201
1,998	0,998001		2,002	1,002001
1,9998	0,99980001		2,0002	1,00020001

Β) Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

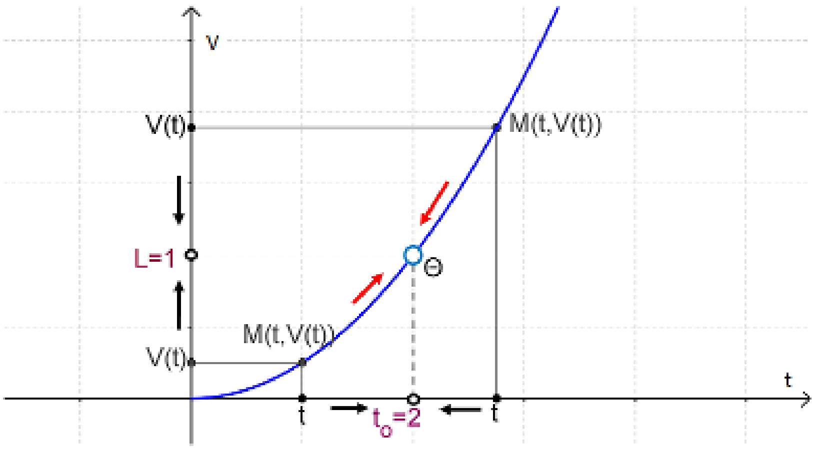
$V(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{4t - 8} = \frac{t^2(t-2)}{4(t-2)} = \frac{t^2}{4}$ και από τη γραφική της παράσταση (Σχήμα 2) παρατηρούμε ότι:

Όταν το σημείο $M(t, V(t))$ *κινείται προς το Θ, καθώς η μεταβλητή t παίρνει τιμές όλο και πιο γειτονικές στο* $t_0 = 2$ *, τότε ο όγκος* $V(t)$ *πλησιάζει προς το* $L = 1$ *.*

Για να εκφράσουμε τα ισοδύναμα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε με τους δύο παραπάνω τρόπους, γράφουμε συμβολικά:

$$\lim_{t \to 2} V(t) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2}{4} = 1$$

και διαβάζουμε: **«Το όριο της συνάρτησης V στο $t_0 = 2$ είναι 1»**



Σχήμα 2

Γενικά

<u>Ορισμός</u>:

Λέμε ότι το **όριο** μιας συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbf{R}$ είναι ο πραγματικός αριθμός L και γράφουμε συμβολικά

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, όταν (και μόνο όταν), οι τιμές f(x) πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά στο L, καθώς το x πλησιάζει με οποιονδήποτε τρόπο το $x_0 \in \mathbf{R}$

<u>Επισημάνσεις – Παρατηρήσεις – Σχόλια</u>

1) Για την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης f στο x_0, δεν ενδιαφέρει αν ο αριθμός x_0 ανήκει ή όχι στο πεδίο ορισμού της. Αρκεί να είναι τουλάχιστον άκρο ανοιχτού διαστήματος του πεδίου ορισμού της.

2) Παντού στα επόμενα η έκφραση “κοντά στο x_0” θα σημαίνει ότι το x παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) ή της μορφής (x_0, β) ή σε ένα σύνολο της μορφής

$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Ιδιότητες ορίου – Όριο και πράξεις – Συνέχεια συνάρτησης

<u>Ιδιότητες ορίου</u>

Για την εύρεση ορίων συναρτήσεων, στηριζόμαστε σε βασικά όρια συναρτήσεων και στο θεώρημα των ορίων.

Βασικά όρια:

Αποδεικνύεται ότι: $\lim_{x \to x_0} c = c$, $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

Θεώρημα:

Αν τα όρια στο x_0 των $f(x), g(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = L_1 + L_2$ **(1)**
- $\lim_{x \to x_0} \left[\lambda f(x) \right] = \lambda \cdot L_1$ **(2)**
- $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L_1 \cdot L_2$ **(3)**
- $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L_1}{L_2}$ **(4)**
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^{\nu} = \left(L_1 \right)^{\nu}$ **(5)**
- $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{L_1}$ **(6)**

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</u>:

- Στον πίνακα τα σχετικά αποτελέσματα ισχύουν με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι σημειούμενες πράξεις. *Για παράδειγμα:*

  Α) Η εφαρμογή της ιδιότητας 4 προϋποθέτει ότι το όριο στο x_0 του παρονομαστή $g(x)$ είναι διαφορετικό του μηδενός.

  Β) Η εφαρμογή της ιδιότητας 6 προϋποθέτει ότι $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

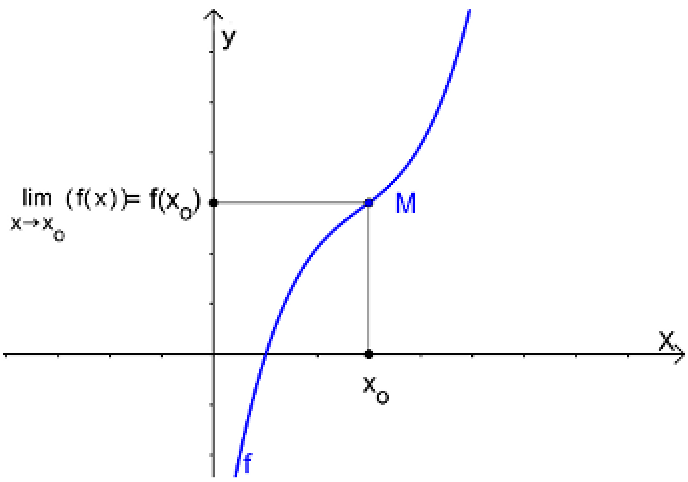
- Γενικά μπορεί το όριο συνάρτησης στο x_0 να μην υπάρχει, ή να υπάρχει αλλά να μην είναι πραγματικός αριθμός. Ωστόσο παντού στα επόμενα η μελέτη θα αφορά σε συναρτήσεις με όριο στον πραγματικό αριθμό x_0 .

Συνέχεια

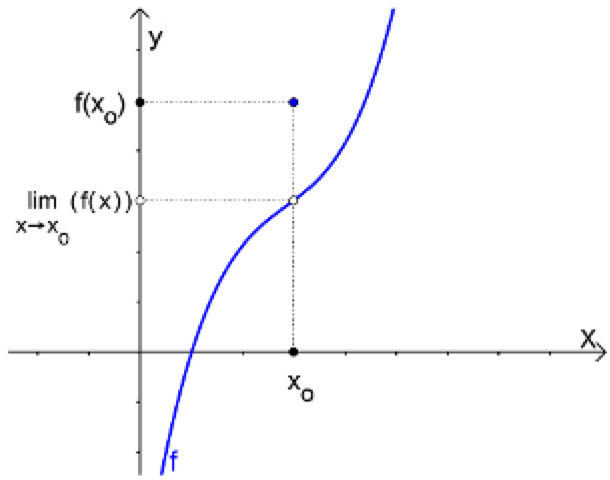
Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 (όταν υπάρχει) μπορεί να είναι ή να μην είναι ίσο με την αριθμητική της τιμή στο x_0.

Για παράδειγμα η γραφική παράσταση του σχήματος 1 αντιστοιχεί σε συνάρτηση όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ενώ η γραφική παράσταση του σχήματος 2 αντιστοιχεί σε συνάρτηση

όπου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

> Θα λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α είναι **συνεχής στο** $x_0 \in A$ αν (και μόνο αν) ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της Α, τότε λέμε ότι είναι συνεχής στο Α. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

> Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** A, αν (και μόνο αν) ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ για όλα τα $x_0 \in A$

<u>**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**</u>:

- Αποδεικνύεται ότι:

  Α) Όλες οι συναρτήσεις που προκύπτουν με πράξεις μεταξύ των γνωστών μας από τις προηγούμενες τάξεις συναρτήσεων (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές) είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε x_0 του πεδίου ορισμού τους.

  Β) Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων δίνουν συνεχή συνάρτηση. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + e^x$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$ αφού είναι άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu x$ (τριγωνομετρική) και e^x (εκθετική).

- Η έννοια της συνέχειας σε ένα διάστημα γραφικά σημαίνει ότι, καθώς σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ, δεν θα χρειαστεί να σηκώσουμε καθόλου το μολύβι από το χαρτί, στο διάστημα αυτό.

- Η εξέταση της συνέχειας συνάρτησης σε κάποιο x_0 προϋποθέτει ότι η f ορίζεται στο x_0, δηλαδή το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, ενώ στην αναζήτηση του ορίου στο x_0 δεν είναι αναγκαία η παραπάνω προϋπόθεση.

Παραδείγματα Εφαρμογής

Παράδειγμα 1 (Όριο και Πράξεις)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 3"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+16}-\frac{3}{x}$ και η συνάρτηση g με τύπο

$g(x)=\sqrt{2^x+x^2+8}$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ και ότι $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}}{g^2(x)+1}$

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

α) Επειδή:

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+16)=\lim\limits_{x\to 3} x^2+16=3^2+16=25>0$

έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+16}=\sqrt{25}=5$ και

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{x}=\frac{3}{3}=1$

παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5-1=4$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$ τότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L_1+L_2$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L_1}{L_2}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{L_1}$

Ομοίως έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{2^x+x^2+8}\right)=\sqrt{2^3+3^2+8}$

$=\sqrt{25}=5$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$ τότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L_1+L_2$

$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{L_1}$

β) Επειδή από το α) ερώτημα έχουμε ότι υπάρχουν στο $\mathbf{R}$ τα όρια των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ και είναι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5$ σύμφωνα με τις ιδιότητες του ορίου στο x_0 έχουμε

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{f(x)}}{g^2(x)+1}=\frac{\sqrt{4}}{5^2+1}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$$

Παράδειγμα 2 (Όριο μορφής $\frac{0}{0}$ - Ρητή συνάρτηση)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 3"

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{4-4x}$

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(4-4x)=4-4\cdot 1=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+2x-5\right)=3\cdot 1^2+2\cdot 1-5=0$,

η εφαρμογή απ' ευθείας των ιδιοτήτων των ορίων (Θεώρημα - 4) οδηγεί στη μη επιτρεπτή πράξη 0/0.

Ωστόσο μετασχηματίζοντας κατά τα γνωστά τον τύπο της συνάρτησης με στόχο την εμφάνιση του παράγοντα (x-1) στον αριθμητή και

παρανομαστή, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{4-4x}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-1)}{-4(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+5)(x-1)}{-4(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{-4}=\frac{3\cdot 1+5}{-4}=-2 .$$

<u>Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις -Σχόλια</u>

1. Κατά την αναζήτηση ορίων της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ x_0\in\mathbf{R}$, όταν η f είναι ρητή ή κλασματική συνάρτηση και η εφαρμογή των ιδιοτήτων στα όρια οδηγεί στη μορφή $\frac{0}{0}$, προσπαθούμε να εμφανίσουμε στον αριθμητή και τον παρονομαστή τον παράγοντα $\left(x-x_0\right)$ και να βρούμε το όριο της συνάρτησης που προκύπτει μετά τις απλοποιήσεις.

2. Σε όλες τις περιπτώσεις αναζήτησης του ορίου μιας συνάρτησης f στο x_0 , όταν μετασχηματίζουμε τον τύπο μιας συνάρτησης, θεωρούμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές από το πεδίο ορισμού της f κοντά στο x_0 .

3. Για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων είναι χρήσιμες οι αξιοσημείωτες ταυτότητες , το σχήμα Horner, και η παραγοντοποίηση τριωνύμου (χρησιμοποιήθηκε στο παράδειγμα), που διδαχθήκαμε σε προηγούμενες τάξεις.

Παράδειγμα 3 (Όριο μορφής $\frac{0}{0}$ - Άρρητη συνάρτηση)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 4"

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+\sqrt{2x+3}}{x^3 - x}$

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Επειδή:

- Όριο του αριθμητή: $\lim\limits_{x \to -1}\left(x+\sqrt{2x+3}\right) = \left(-1+\sqrt{2\cdot(-1)+3}\right) = -1+1 = 0$ και
- Όριο του παρονομαστή: $\lim\limits_{x \to -1}(x^3 - x) = (-1)^3 - (-1) = -1+1 = 0$

η εφαρμογή απ' ευθείας των ιδιοτήτων των ορίων οδηγεί στη μη επιτρεπτή πράξη 0/0.

Μετασχηματίζοντας όμως τον τύπο της συνάρτησης, με τη βοήθεια της ταυτότητας $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ και στόχο την εμφάνιση του παράγοντα $(x+1)$ στον αριθμητή και στον παρανομαστή (Σχήμα 1), έχουμε:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& A & + & B &)(& A & - & B &) = (& A^2 & - & B^2) \\
 & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
(& x & + & \sqrt{2x+3} &)(& x & - & \sqrt{2x+3} &) = (& x^2 & - & \sqrt{2x+3}^{\,2})
\end{array}$$

Σχήμα 1

$$h(x) = \frac{x+\sqrt{2x+3}}{x^3 - x} = \frac{x+\sqrt{2x+3}}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{x+\sqrt{2x+3}}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{\left(x+\sqrt{2x+3}\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2 - \left(\sqrt{2x+3}\right)^2}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} = \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x-3)}{\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{2x+3}}{x^3-x}\overset{(1)}{=}\frac{1}{(-1)\cdot(-1-1)}\cdot\frac{(-1-3)}{-1-\sqrt{2\cdot(-1)+3}}=\frac{-4}{-4}=1$$

<u>Σημειώσεις</u>:

Στις περιπτώσεις που έχουμε και στον αριθμητή και στον παρανομαστή τετραγωνική ή/και κυβική ρίζα ένας τρόπος για την επίτευξη της απλοποίησης είναι να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με τις κατάλληλες παραστάσεις (**συζυγείς παραστάσεις**).

<u>Συγκεκριμένα</u>:

Α) Όταν έχουμε τετραγωνική/κές ρίζα/ζες, τότε για την εύρεση της συζυγούς παράστασης χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$.

Για παράδειγμα, όταν έχουμε $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ η <u>συζυγής παράσταση</u> είναι $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

Β) Όταν έχουμε κυβική/κές ρίζα/ζες, τότε για την εύρεση της συζυγούς

παράστασης χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ ή την ταυτότητα $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

Για παράδειγμα, όταν έχουμε $\sqrt[3]{x}-1$ η <u>συζυγής παράσταση</u> είναι $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$

Παραδείγματα 4 (Παραμετρικό όριο στο x_0)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 5"

Να βρείτε τα όρια

α) $\lim\limits_{t\to 0}(x^2+xt+t^2)$

β) $\lim\limits_{t\to x}\left(x^2+xt+t^2\right)$

γ) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}$ για $x>0$

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

Παρατηρώντας τα ζητούμενα όρια διαπιστώνουμε ότι η μεταβλητή είναι η t και επομένως:

α) $\lim\limits_{t\to 0}(x^2+xt+t^2)=x^2+x\cdot 0+0^2=x^2$

β) $\lim\limits_{t\to x}\left(x^2+xt+t^2\right)=x^2+x\cdot x+x^2=3x^2$

γ) Για τον υπολογισμό του ορίου εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα **(3)** πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή παράσταση της $\sqrt{x+t}-\sqrt{x}$ που είναι η $\sqrt{x+t}+\sqrt{x}$

Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+t}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}{t\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+t}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{t\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{x+t-x}{t\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+t}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+0}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Παράδειγμα 5 (Συνέχεια Συνάρτησης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 5"

Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

α) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

β) να βρείτε το $f(1)$

γ) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α) Επειδή ο x τείνει στο ένα, παραμένει διαφορετικός από αυτόν και επομένως για την αναζήτηση του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο κλάδο της f.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$$

β) Για να βρούμε την τιμή $f(1)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο κλάδο της συνάρτησης αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει την τιμή $x=1$

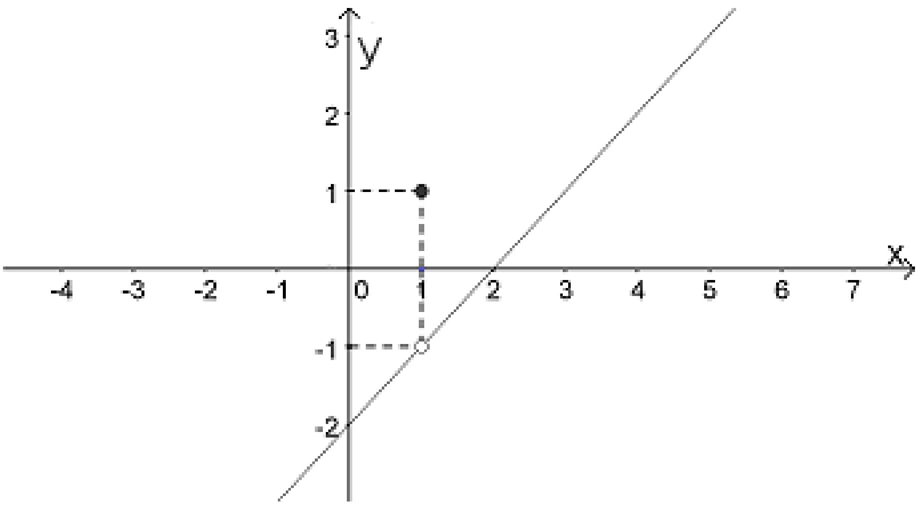
Είναι $f(1)=1$

γ) Για να απαντήσουμε στην ερώτηση που αφορά στη συνέχεια συνάρτησης στο $x_0=1$, συγκρίνουμε τις τιμές $\lim_{x\to 1} f(x)$ και $f(1)$.

Από τα ερωτήματα **(α)** και **(β)** προκύπτει ότι:

$\lim_{x\to 1} f(x)=-1\neq 1=f(1)$ και επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης διαπιστώνουμε και γραφικά την ασυνέχεια της f στο $x_0=1$:



Ημερομηνία τροποποίησης: 31/8/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε το όριο:

$\lim\limits_{x\to -2}\left(x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x + 1\right)$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x + 1$ είναι πολυωνυμική, άρα το όριό της όταν το $x \to -2$ ισούται με την τιμή της στο -2, δηλαδή $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to -2}\left(x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x + 1\right) = \left(-2\right)^5 - \left(-2\right)^4 - 4\left(-2\right)^3 - 2\left(-2\right) + 1 = -11$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν μας ζητείται να υπολογίσουμε το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $P\left(x\right)$ για $x \to x_0$, τότε αυτό ισούται με την τιμή της συνάρτησης για $x = x_0$, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} P\left(x\right) = P\left(x_0\right).$$

Το προηγούμενο προκύπτει από απλή εφαρμογή των ιδιοτήτων του αθροίσματος και της δύναμης των ορίων.

Άσκηση 2 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε το όριο:

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2-5x+6}$.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} f(x)}$ με $f(x)\geq 0$ κοντά στο 4.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $f(x)=x^2-5x+6$ και $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=16-20+6=2>0$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-5x+6\right)}=\sqrt{4^2-5\cdot 4+6}=\sqrt{2}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν μας ζητείται να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{P(x)}$, μιας άρρητης συνάρτησης με $P(x)$ ένα πολυώνυμο, τότε αυτό ισούται με

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{P(x)}=\sqrt{P(x_0)}$$

Με την προϋπόθεση ότι $P(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 .

Άσκηση 3 (Εύρεση Ορίων - Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}.$$

Λύση

Επειδή $\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3\neq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια, οπότε

έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^3+2x+1\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}=\frac{2^3+2\cdot 2+1}{2^2-1}=\frac{13}{3}.$$

Μεθοδολογία

Το όριο μιας ρητής συνάρτησης $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $\lim_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0)\neq 0$, ισούται με το πηλίκο των ορίων όπως προκύπτει από τη γνωστή ιδιότητα του πηλίκου των ορίων, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}P(x)}{\lim_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Άσκηση 4 (Εύρεση Ορίων - Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε το όριο:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x+\epsilon\phi x\right)$.

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε πρώτα την ιδιότητα του ορίου αθροίσματος και κατόπιν τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x+\epsilon\phi x\right)=2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\eta\mu x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu^2 x+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\epsilon\phi x=$

$2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\eta\mu x-\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\epsilon\phi x$ **(1)**

Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\epsilon\phi x=\epsilon\phi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ η **(1)** γίνεται:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2 x+\epsilon\phi x\right)=2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}=$

$1-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Εφαρμόζουμε πρώτα την ιδιότητα του ορίου αθροίσματος και τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους , δηλαδή το όριό τους για $x\to x_0$ ισούται με την τιμή τους για $x=x_0$

Άσκηση 5 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με παραγοντοποίηση)

Να υπολογίσετε το όριο:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

<u>Λύση</u>

Επειδή $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-9\right)=0$, τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια και έτσι παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή και για $x\neq\pm 3$ έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\frac{(x-3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{3}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν μας ζητείται να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$, της ρητής συνάρτησης $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με $\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)=0$

τότε αν και $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=0$ επειδή το πολυώνυμο $x-x_0$ είναι παράγοντας των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, παραγοντοποιούμε τα πολυώνυμα αυτά (με το σχήμα του Horner για $\rho=x_0$, ή με κάποια άλλη γνωστή μέθοδο), όπου αυτά γίνονται $P(x)=(x-x_0)\cdot P_1(x)$ και $Q(x)=(x-x_0)\cdot Q_1(x)$ και εφόσον $Q_1(x_0)\neq 0$, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\cdot P_1(x)}{(x-x_0)\cdot Q_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

Άσκηση 6 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-2}{\eta\mu x-1}.$$

<u>Λύση</u>

Επειδή $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\eta\mu x-1=0$,τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια και έτσι για $x\neq\frac{\pi}{2}$

για να υπολογίσουμε το όριο παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-2}{\eta\mu x-1}=\frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x+2)-(\sigma\upsilon\nu x+2)}{\eta\mu x-1}=$$

$$\frac{(\eta\mu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+2)}{\eta\mu x-1}=\sigma\upsilon\nu x+2$$

Οπότε: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-2}{\eta\mu x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu x+2)=$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)+2=2.$$

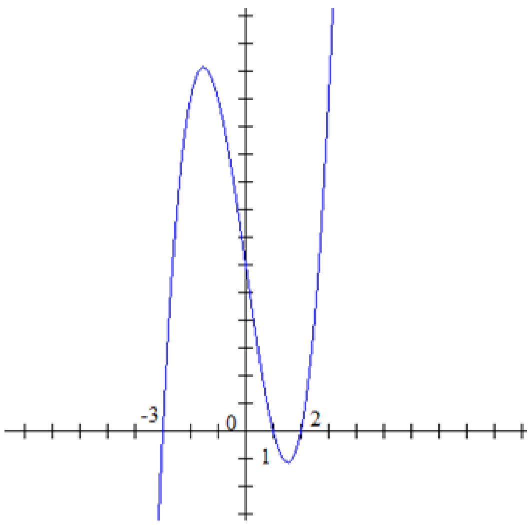
<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν μας ζητείται να βρούμε το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $f(x),g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις, με $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$ τότε αν και $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, παραγοντοποιούμε τις συναρτήσεις αυτές και απλοποιούμε στη συνέχεια το κλάσμα $\frac{f(x)}{g(x)}$ και παίρνουμε $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Εφόσον ισχύει $g_1(x_0)\neq 0$ θα έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim_{x\to x_0}g_1(x)}=\frac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)}.$$

Άσκηση 7 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση σημείων ή διαστημάτων συνέχειας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση)

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος, να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x=2$.



Λύση

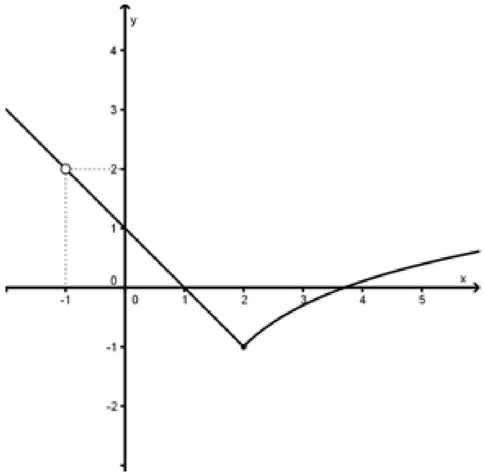
Στο σημείο $x=2$ η f είναι συνεχής, γιατί $f\left(2\right)=0$, και $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=0$.

Μεθοδολογία

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0

Άσκηση 8 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση σημείων ή διαστημάτων συνέχειας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση)

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι συνεχής.



Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μεθοδολογία

Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in A$ τότε είναι συνεχής στο Α.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με χρήση συζυγών παραστάσεων)

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}.$$

<u>Λύση</u>

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}-3\right)=0$ δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου για το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}$,

οπότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή και για $x\neq 1$ έχουμε:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}=\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x+8-9}=\sqrt{x+8}+3.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}+3\right)=6.$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$, όπου $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\lim\limits_{x\to x_0}B(x)=0$ και $A(x)$ ή $B(x)$ (ή και οι δυο) είναι άρρητη παράσταση της μορφής $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, τότε πολλαπλασιάζουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση της τελευταίας, δηλαδή με $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$. Με αυτόν τον τρόπο απαλείφονται τα ριζικά και στη συνέχεια μπορούμε να απλοποιήσουμε τον παράγοντα $x-x_0$ από τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος.

Άσκηση 2 (Εύρεση Ορίων - Μετατροπή ορίων της μορφής $\frac{\kappa}{0} \pm \frac{\lambda}{0}$ σε γνωστή μορφή και υπολογισμός προκύπτοντος ορίου)

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4} \right).$$

<u>Λύση</u>

Τα όρια των παρονομαστών των κλασμάτων είναι μηδέν ($\lim_{x \to 2}(x-2) = \lim_{x \to 2}(x^2 - 4) = 0$), επομένως δεν εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων για κάθε ένα πηλίκο.

Έτσι για $x \neq 2$ προσθέτουμε τις δυο ρητές παραστάσεις και απλοποιούμε αυτήν που προκύπτει:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 2x + 4) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)} - \frac{6x+4}{(x-2) \cdot (x+2)} =$$

$$= \frac{x^3 - 6x + 4}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x - 2)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}.$$

Για την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $x^3 - 6x + 4$, χρησιμοποιήσαμε το σχήμα του Horner για $\rho = 2$

1	0	-6	4	ρ=2
	2	4	-4	
1	2	-2	0	

Οπότε:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2} = \frac{3}{2}.$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν έχουμε τις ρητές συναρτήσεις $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ και ζητείται το $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \right]$ όπου $\lim_{x \to x_0} Q_1(x) = \lim_{x \to x_0} Q_2(x) = 0$, τότε για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το όριο, κάνουμε πράξεις στην αρχική παράσταση και τη φέρνουμε στη μορφή μιας ρητής συνάρτησης $\frac{P(x)}{Q(x)}$ και συνεχίζουμε όπως στο παράδειγμα 5.

Άσκηση 3 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ χρησιμοποιώντας συνάρτηση με γνωστό τύπο)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f\left(x\right)=3x^2$.

Να βρείτε το:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

<u>Λύση</u>

Βρίσκουμε την $f(x+h)$ θέτοντας στην $f(x)$ όπου x το $x+h$ και

έχουμε

$$f\left(x+h\right)=3\left(x+h\right)^2=3\left(x^2+2\cdot x\cdot h+h^2\right)$$

Οπότε για $h\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{3\left(x^2+2\cdot x\cdot h+h^2\right)-3x^2}{h}=$$

$$=\frac{6\cdot x\cdot h+3\cdot h^2}{h}=\frac{h\cdot(6\cdot x+3\cdot h)}{h}=6\cdot x+3\cdot h.$$

Άρα

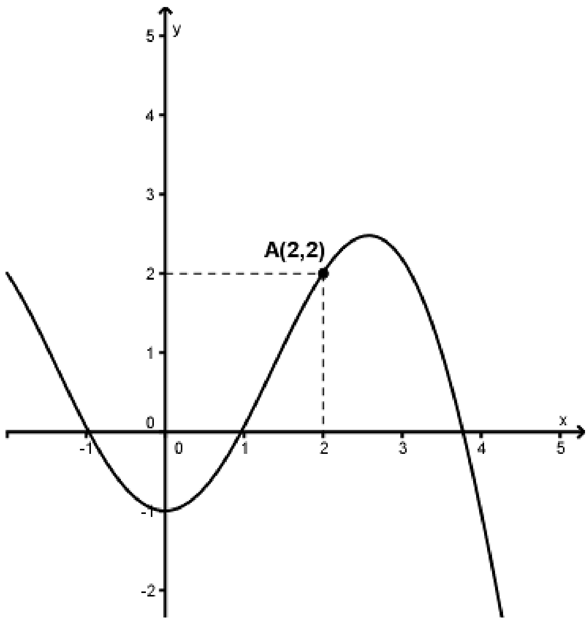
$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(6\cdot x+3\cdot h\right)=6\cdot x$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Αντικαθιστούμε την $f(x)$ και $f(x+h)$ στο ζητούμενο όριο. Έτσι προκύπτει όριο ρητής συνάρτησης και εφαρμόζουμε την αντίστοιχη ιδιότητα των ορίων.

Άσκηση 4 (Εύρεση Ορίων - Εύρεση παραμέτρων από γνωστό όριο και από την γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, αν ισχύει:
$\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\sqrt{2x+5}+1}{f(x)-1}-x^2\right]=\lambda$.



Λύση

Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=2$ και $f(2)=2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-1\right]=1\neq 0$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια.

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{2x+5}+1}{f(x)-1}-x^2\right]=\lambda \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-1\right]}-\lim_{x\to 2}x^2=\lambda \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{f(2)-1}-4=\lambda \Leftrightarrow 4-4=\lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda=0.$$

Μεθοδολογία

Γνωρίζοντας, λοιπόν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων βρίσκουμε τη ζητούμενη παράμετρο από τη δοσμένη σχέση.

Άσκηση 5 (Συνέχεια Συνάρτησης - Μελέτη συνέχειας συνάρτησης όταν ο τύπος της έχει κλάδους)

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Για $x\neq 0$ ισχύει $f(x)=2x$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$.

Επίσης $f(0)=0$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, το οποίο σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο

$x=0$.

Για $x\neq 0$ η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, άρα η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbf{R}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν μας ζητείται να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση με κλάδους $f(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq x_0 \\ \lambda, & x=x_0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, τότε εξετάζουμε τη συνάρτηση g ως προς τη συνέχεια στο σύνολο $(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ και ξεχωριστά εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda$.

Άσκηση 6 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο $x=1$ η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}, & x\in[0,1)\cup(1,+\infty) \\ \lambda, & x=1 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x=1$, πρέπει να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \lambda \in \mathbf{R}$.

Επειδή όμως $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)=0$

για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}$ με τις συζυγείς παραστάσεις του αριθμητή και του παρονομαστή.

Έτσι για $x\neq 1$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\cdot\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{3x+1}+2}{3\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+2}{3\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Άρα για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x=1$, πρέπει $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν μας ζητείται να βρούμε μια παράμετρο λ, ώστε μια συνάρτηση με κλάδους

$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ \lambda, & x = x_0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε υπολογίζουμε την παράμετρο από τη σχέση $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lambda$.

Άσκηση 7 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ώστε να είναι συνεχής στο -1 η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x+2}{x+1}, & x \neq -1 \\ \beta, & x=-1 \end{cases}.$$

<u>Λύση</u>

Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x=-1$, πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = \beta \in \mathbf{R}. \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα το $\lim_{x\to -1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι για $x \neq -1$, έχουμε

$$f(x) = \frac{x^3+\alpha x+2}{x+1} \Leftrightarrow f(x)\cdot(x+1) = x^3+\alpha x+2$$

και παίρνοντας τα όρια και στα δυο μέλη έχουμε:

$$\lim_{x\to -1}\left[f(x)\cdot(x+1)\right] = \lim_{x\to -1}\left(x^3+\alpha x+2\right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)\cdot\lim_{x\to -1}(x+1) = \lim_{x\to -1}\left(x^3+\alpha x+2\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x\to -1} f(-1)\cdot 0 = -1-\alpha+2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 1.$$

Οπότε για $x \neq -1$ η συνάρτηση f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^3+\alpha x+2}{x+1} = \frac{x^3+x+2}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot\left(x^2-x+2\right)}{x+1} = x^2-x+2$$

Για την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου x^3+x+2, χρησιμοποιήσαμε το σχήμα του Horner:

1	0	1	2	ρ=-1
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

επομένως $x^3+x+2=(x+1)\cdot(x^2-x+2)$.

Άρα

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2-x+2)=4\,,$$

επομένως από τη σχέση (1), έπεται ότι

$$\beta=4$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν μια συνάρτηση με κλάδους

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{h(x)}, & x\neq x_0\\ \lambda, & x=x_0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x=x_0$, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lambda$.
- και επειδή το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός έχουμε:

για $x\neq x_0$, $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}\Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)$ και παίρνοντας όρια και στα δυο μέλη καταλήγουμε στη δεύτερη σχέση

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot h(x)\right]=\lim_{x\to x_0} g(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Άσκηση 8 (Συνέχεια Συνάρτησης - Υπολογισμός ορίου μιας συνάρτησης που περιέχει την f ή υπολογισμός της αριθμητικής τιμής)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x=1$ και $f\left(1\right)=2$.

Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-2)^2\cdot f(x)+\ln x\cdot(\sqrt{x}-4)\right].$$

<u>Λύση</u>

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=1$, ισχύει:

$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)= f\left(1\right)=2$.

Έτσι εφαρμόζοντας τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-2)^2\cdot f(x)+\ln x\cdot(\sqrt{x}-4)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-2)^2\cdot\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-4)=$$

$$(1-2)^2\cdot f(1)+\ln 1\cdot(\sqrt{1}-4)=2.$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Η συνέχεια μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, μας εξασφαλίζει ότι το $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)$ υπάρχει και ισχύει: $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)= f\left(x_0\right)$.

Για τον υπολογισμό του ορίου μπορούμε να εφαρμόσουμε τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων.

Άσκηση 9 (Συνέχεια Συνάρτησης - Υπολογισμός ορίου μιας συνάρτησης που περιέχει την f ή υπολογισμός της αριθμητικής τιμής)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=2$ και το $A(2,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot f(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2}=5$$

<u>Λύση</u>

Αφού το $A(2,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε ότι $f(2)=1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=2$, ισχύει:

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$.

Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου για τα όρια και έτσι για $x\neq 2$, για να υπολογίσουμε το όριο παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος και έχουμε:

$$\frac{x\cdot f(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2}=\frac{f(x)(x-2)+(x+2)(x-2)}{x-2}=$$

$$\frac{(x-2)\left[f(x)+(x+2)\right]}{x-2}=f(x)+(x+2).$$

Έτσι

$$\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot f(x)+x^2-2f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[f(x)+(x+2)\right]=$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2}(x+2)=f(2)+4=5$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Η συνέχεια μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, μας εξασφαλίζει ότι το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και ισχύει: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Για τον υπολογισμό του ορίου μπορούμε να εφαρμόσουμε τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/9/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση 1

Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορίων;

Λύση

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ όπου l_1 και l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = l_1 + l_2$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(k \cdot f(x) \right) = k \cdot l_1$, όπου $k \in \mathbf{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, αν επιπλέον $l_2 \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^{\nu} = (l_1)^{\nu}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$, αν επιπλέον $l_1 > 0$.

Ερώτηση 2

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$;

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ερώτηση 3

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο A;

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής στο A, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ερώτηση 4

Ποιες είναι οι βασικές συνεχείς συναρτήσεις;

Λύση

Οι βασικές συνεχείς συναρτήσεις είναι οι πολυωνυμικές, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^9-11\right)\cdot\left(x-1\right)^{10}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(5x^8-6x^7+4x^3-x+2\right)$

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων και έχουμε:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^9-11\right)\cdot\left(x-1\right)^{10}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^9-11\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(x-1\right)^{10}=$

   $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^9-11\right)\cdot\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(x-1\right)\right]^{10}=$

   $\left(0-11\right)\cdot\left(-1\right)^{10}=-11$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(5x^8-6x^7+4x^3-x+2\right)=$

   $\left[5\left(-1\right)^8-6\left(-1\right)^7+4\left(-1\right)^3-\left(-1\right)+2\right]=10$.

Άσκηση 2 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+1}}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{3x^3+2x-1}+5x-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων και έχουμε:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{1+3}+1}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{3x^3+2x-1}+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{3x^3+2x-1}+\lim\limits_{x\to 2}\left(5x-2\right)=$

$\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^3+2x-1\right)}+\lim\limits_{x\to 2}\left(5x-2\right)=\sqrt[3]{27}+8=11$.

Άσκηση 3 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{7h^2-2h+1}{3h\cdot(h-1)^2+2h}$

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3+7}$

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

1. $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{7h^2-2h+1}{3h\cdot(h-1)^2+2h}=\dfrac{\lim\limits_{h\to 1}\left(7h^2-2h+1\right)}{\lim\limits_{h\to 1}\left[3h\cdot(h-1)^2+2h\right]}=\dfrac{7-2+1}{3\cdot 0+2}=3$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3+7}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-10x+25\right)}{\lim\limits_{x\to 5}\left(x^3+7\right)}=\dfrac{25-50+25}{125+7}=0$.

Άσκηση 4 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός απλών ορίων: πολυωνυμικής, άρρητης, ρητής, τριγωνομετρικής)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^3 x - 5\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\cdot\epsilon\phi x\right)$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\left(2\cdot\eta\mu^2 x - 3\cdot\sigma\upsilon\nu x + \epsilon\phi x - 2\sigma\phi x\right)$

<u>Λύση</u>

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων και έχουμε:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^3 x - 5\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\cdot\epsilon\phi x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^3 x - 5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\epsilon\phi x =$

$$\left(\lim_{x\to 0}\eta\mu x\right)^3 - 5\cdot\left(\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x\right)^2 + 4\cdot\lim_{x\to 0}\epsilon\phi x = \left(\eta\mu 0\right)^3 - 5\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 0\right)^2 + 4\cdot\epsilon\phi 0 =$$

$$= 0 - 5\cdot 1 + 4\cdot 0 = -5\,.$$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\left(2\cdot\eta\mu^2 x - 3\cdot\sigma\upsilon\nu x + \epsilon\phi x - 2\sigma\phi x\right) =$

$$= 2\cdot\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\eta\mu^2 x - 3\cdot\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x + \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\epsilon\phi x - 2\cdot\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\sigma\phi x =$$

$$= 2\cdot\left(\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\eta\mu x\right)^2 - 3\cdot\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x + \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\epsilon\phi x - 2\cdot\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\sigma\phi x =$$

$$= 2\cdot\left(\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right)^2 - 3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} + \epsilon\phi\frac{3\pi}{4} - 2\cdot\sigma\phi\frac{3\pi}{4} =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 - 2\cdot(-1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$$

Άσκηση 5 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με παραγοντοποίηση)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-5x-6}{2x-4}$

<u>Λύση</u>

1. Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{(3+h)^2-9}{h}=\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$.

   Οπότε: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=6$

2. Το $x=2$ είναι ρίζα και του αριθμητή και του παρονομαστή. Γι' αυτό απλοποιούμε το κλάσμα $\dfrac{2x^3-5x-6}{2x-4}$.

   Το πολυώνυμο $2x^3-5x-6$ το παραγοντοποιούμε με το σχήμα του Horner:

2	0	-5	-6	ρ=2
	4	8	6	
2	4	3	0	

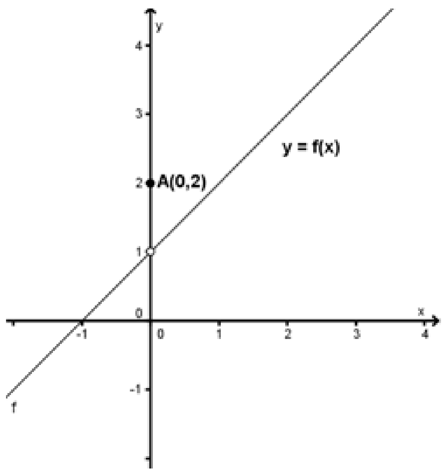
Έτσι $2x^3-5x-6=(x-2)(2x^2+4x+3)$ και για $x\neq 2$ έχουμε:

$$\frac{2x^3-5x-6}{2x-4}=\frac{(x-2)(2x^2+4x+3)}{2(x-2)}=\frac{2x^2+4x+3}{2}.$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-5x-6}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4x+3}{2}=\dfrac{2\cdot 4+4\cdot 2+3}{2}=\dfrac{19}{2}$.

Άσκηση 6 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση σημείων ή διαστημάτων συνέχειας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



Λύση

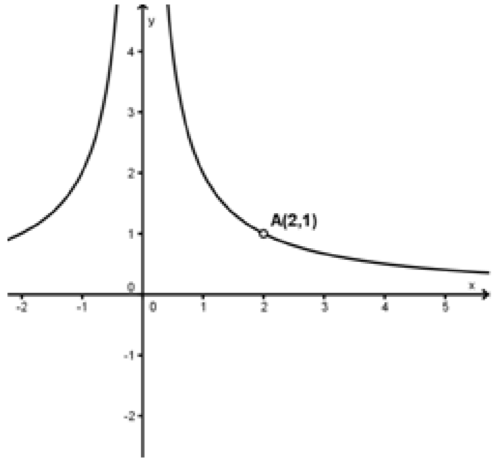
Η συνάρτηση f όπως φαίνεται στο σχήμα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbf{R}$.

Από το σχήμα έχουμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, ενώ $f(0)=2\neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άσκηση 7 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση σημείων ή διαστημάτων συνέχειας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



Λύση

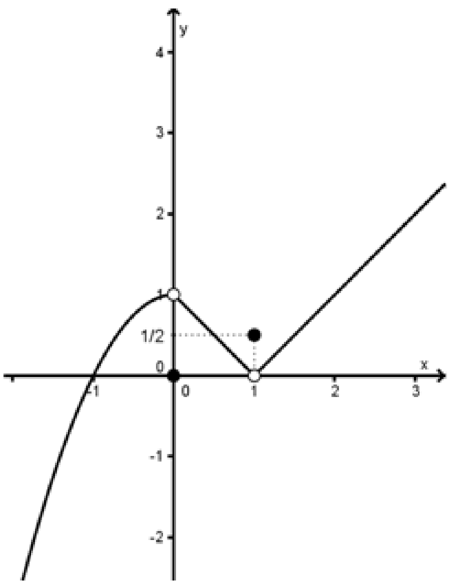
Η συνάρτηση f όπως φαίνεται στο σχήμα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά η συνάρτηση είναι συνεχής.

Άσκηση 8 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση σημείων ή διαστημάτων συνέχειας συνάρτησης, από τη γραφική της παράσταση)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων στην οποία η f είναι συνεχής.



Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0\neq f(1)=\frac{1}{2}$

Άσκηση 9 (Συνέχεια Συνάρτησης - Μελέτη συνέχειας συνάρτησης όταν ο τύπος της έχει κλάδους)

Να βρείτε το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων όπου η συνάρτηση f με τύπο

$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+6, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$ είναι συνεχής.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbf{R}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=4-10+6=0$

και $f(2)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x=2$.

Για $x\neq 2$ ισχύει $f(x)=x^2-5x+6$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Άσκηση 10 (Συνέχεια Συνάρτησης - Μελέτη συνέχειας συνάρτησης όταν ο τύπος της έχει κλάδους)

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}, & x\neq 1 \\ -3, & x=1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x=1$.

<u>Λύση</u>

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει ρίζες τους αριθμούς $x=1$ και $x=4$, οπότε

$x^2-5x+4=\left(x-1\right)\cdot\left(x-4\right)$.

Για $x\neq 1$ έχουμε:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\frac{\left(x-1\right)\cdot\left(x-4\right)}{x-1}=x-4,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x-4\right)=-3=f\left(1\right),$$

άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=1$.

Άσκηση 11 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-6x+11, & x\neq\lambda \\ 2, & x=\lambda \end{cases}$, με $\lambda\in\mathbf{R}$.

Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=\lambda$.

<u>Λύση</u>

Πρέπει:

$$\lim_{x\to\lambda} f\left(x\right)= f\left(\lambda\right)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\lambda}\left(x^2-6x+11\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-6\lambda+11=2\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-6\lambda+9=0\Leftrightarrow\left(\lambda-3\right)^2=0\Leftrightarrow\lambda=3.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3}{2\cdot\eta\mu x - 1}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x\cdot\epsilon\phi x + 2\cdot\epsilon\phi x - \eta\mu x - 2}{1 - \epsilon\phi x}$

<u>Λύση</u>

1. Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\cdot\eta\mu x - 1) = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα πηλίκου για τα όρια. Έτσι παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος $\frac{4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3}{2\cdot\eta\mu x - 1}$.

   Για να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή τον μετατρέψαμε σε πολυώνυμο:

   $4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3 \overset{y=\eta\mu x}{=} 4y^2 + 4y - 3$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και $-\frac{3}{2}$, οπότε

   $4y^2 + 4y - 3 = 4\left(y - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(y + \frac{3}{2}\right)$.

   Άρα έχουμε $4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3 = (2\cdot\eta\mu x - 1)\cdot(2\cdot\eta\mu x + 3)$

   Για $x \neq \frac{\pi}{6}$ έχουμε:

   $$\frac{4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3}{2\cdot\eta\mu x - 1} = \frac{(2\cdot\eta\mu x - 1)\cdot(2\cdot\eta\mu x + 3)}{2\cdot\eta\mu x - 1} = 2\cdot\eta\mu x + 3$$

   Οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4\cdot\eta\mu^2 x + 4\cdot\eta\mu x - 3}{2\cdot\eta\mu x - 1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\cdot\eta\mu x + 3) = 2\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6} + 3 = 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = 4$.

2. Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\epsilon\phi x)=1-\epsilon\phi\frac{\pi}{4}=0$, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου των ορίων, οπότε για να υπολογίσουμε το όριο απλοποιούμε το κλάσμα $\frac{\eta\mu x\cdot\epsilon\phi x+2\cdot\epsilon\phi x-\eta\mu x-2}{1-\epsilon\phi x}$.

Έτσι για $x\neq\frac{\pi}{4}$ και κοντά στο $x=\frac{\pi}{4}$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x\cdot\epsilon\phi x+2\cdot\epsilon\phi x-\eta\mu x-2}{1-\epsilon\phi x}=\frac{\eta\mu x\cdot(\epsilon\phi x-1)+2\cdot(\epsilon\phi x-1)}{1-\epsilon\phi x}=$$

$$-\frac{(\eta\mu x+2)\cdot(1-\epsilon\phi x)}{1-\epsilon\phi x}=-\eta\mu x-2 .$$

Οπότε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu x\cdot\epsilon\phi x+2\cdot\epsilon\phi x-\eta\mu x-2}{1-\epsilon\phi x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\eta\mu x-2)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}-2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-2$$

Άσκηση 2 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ με χρήση συζυγών παραστάσεων)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{\sqrt{10+3x}+x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x}-1}$

iv. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h+1)^3-1}{\sqrt{h^2+2h+4}-2}$

<u>Λύση</u>

1. Επειδή $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{10+3x}+x\right)=0$ δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου, οπότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή και για $x\neq -2$ έχουμε:

$$\frac{2x^2+3x-2}{\sqrt{10+3x}+x}=\frac{\left(2x^2+3x-2\right)\cdot\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{\left(\sqrt{10+3x}+x\right)\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}=\frac{\left(2x^2+3x-2\right)\cdot\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{10+3x-x^2}=$$

$$\frac{2\left(x+2\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{-\left(x+2\right)\cdot\left(x-5\right)}=\frac{\left(2x-1\right)\cdot\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{-\left(x-5\right)}.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{\sqrt{10+3x}+x}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(2x-1\right)\cdot\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{-\left(x-5\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to -2}\left(2x-1\right)\cdot\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{10+3x}-x\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left[-\left(x-5\right)\right]}=-\frac{20}{7}.$$

2. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου, αφού $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}-2)=0$.

Επειδή έχουμε άρρητες παραστάσεις και στον αριθμητή και στον παρονομαστή, θα πολλαπλασιάσουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με τις συζυγείς παραστάσεις τους.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{(\sqrt{2x+5}-3)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}=$$

$$\frac{(2x+5-9)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2(x-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x+5}+3)}\,.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{2\cdot\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)}{\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x+5}+3)}=\frac{4}{3}\,.$$

3. Και εδώ δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου, αφού $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)=0$.

Έτσι θα πολλαπλασιάσουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-6x+5)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-5)\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}(x-5)\cdot(\sqrt{x}+1)=-8\,.$$

4. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου, αφού $\lim_{h\to 0}(\sqrt{h^2+2h+4}-2)=0$.

Για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{(h+1)^3-1}{\sqrt{h^2+2h+4}-2}=\frac{(h^3+3h^2+3h+1-1)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{(\sqrt{h^2+2h+4}-2)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}=$$

$$\frac{h\cdot(h^2+3h+3)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h^2+2h}=\frac{h\cdot(h^2+3h+3)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h(h+2)}=$$

$$= \frac{(h^2+3h+3)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h+2}.$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^3-1}{\sqrt{h^2+2h+4}-2} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+3h+3)\cdot(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h+2} =$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0}(h^2+3h+3)\cdot\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{\lim\limits_{h\to 0}(h+2)} = 6.$$

Άσκηση 3 (Εύρεση Ορίων - Μετατροπή ορίων της μορφής $\frac{\kappa}{0} \pm \frac{\lambda}{0}$ σε γνωστή μορφή και υπολογισμός προκύπτοντος ορίου)

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -1}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-1}+\frac{2x^2-3x-6}{x^2-1}\right)$

2. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^3+5x^2+x-5}{x^2+x}+\frac{5}{x}\right)$

<u>Λύση</u>

1. Επειδή $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2-1\right)=0$, το οποίο σημαίνει ότι δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου, προσθέτουμε και κατόπιν απλοποιούμε τις δυο ρητές παραστάσεις.

   Έτσι για $x \neq -1$ έχουμε:

   $$\frac{x^3-2x}{x^2-1}+\frac{2x^2-3x-6}{x^2-1}=\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-1}=$$

   $$\frac{(x+1)\cdot\left(x^2+x-6\right)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x^2+x-6}{x-1}.$$

   Για την παραγοντοποίηση του αριθμητή χρησιμοποιήσαμε το σχήμα του Horner:

1	2	-5	-6	ρ=-1
	-1	-1	6	
1	1	-6	0	

   Οπότε:

   $$\lim\limits_{x \to -1}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-1}+\frac{2x^2-3x-6}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2+x-6}{x-1}=3.$$

2. Ομοίως, όπως και στο προηγούμενο, προσθέτουμε και κατόπιν απλοποιούμε τις δυο ρητές παραστάσεις.

   $$\frac{x^3+5x^2+x-5}{x^2+x}+\frac{5}{x}=\frac{x^3+5x^2+x-5}{x\cdot(x+1)}+\frac{5\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=$$

$$\frac{x\cdot\left(x^2+5x+6\right)}{x\cdot\left(x+1\right)}=\frac{x^2+5x+6}{x+1}\ .$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+5x^2+x-5}{x^2+x}+\frac{5}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x+6}{x+1}=6$.

Άσκηση 4 (Εύρεση Ορίων - Υπολογισμός ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ χρησιμοποιώντας συνάρτηση με γνωστό τύπο)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}$ με $x \geq -1$.

   Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

   $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$.

   Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

   $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ με $x \neq 0$.

   Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

   $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

<u>Λύση</u>

1. Είναι $f(x)=\sqrt{x+1}$, οπότε $f(2+h)=\sqrt{(2+h)+1}=\sqrt{h+3}$ και $f(2)=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$.

   Όταν το $h \to 0$ τότε $2+h \neq 0$ και για $h \neq 0$ έχουμε:

   $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\sqrt{(2+h)+1}-\sqrt{3}}{h}=\frac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h}=\frac{\left(\sqrt{h+3}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}\right)}=$$

   $$\frac{h}{h\cdot\left(\sqrt{h+3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}}.$$

   Οπότε:

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

2. Είναι $f(x)=x^2+1$, οπότε

$f(1+h)=(1+h)^2+1$ και $f(1)=1+1=2$.

Έτσι για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=2+h.$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2.$$

3. Είναι $f(x)=\frac{1}{x}$, οπότε $f(x+h)=\frac{1}{x+h}$.

Για $h\neq 0$ έχουμε:

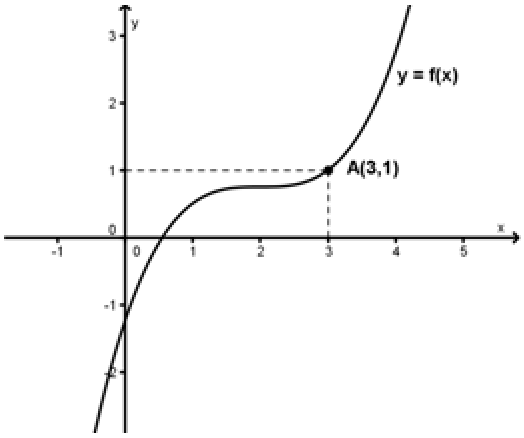
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{-h}{h\cdot x\cdot(x+h)}=\frac{-1}{x\cdot(x+h)}.$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}=\frac{-1}{\lim_{h\to 0}x\cdot(x+h)}=\frac{-1}{x^2}.$$

Άσκηση 5 (Εύρεση Ορίων - Εύρεση παραμέτρων από γνωστό όριο και από την γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f .
Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε
$\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)-\lambda x+x^2\right]=1$



Λύση

Αφού η f είναι συνεχής και διέρχεται από το $A(3,1)$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=1$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[f(x)-\lambda x+x^2\right]=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3} f(x)-\lim_{x\to 3}\lambda x+\lim_{x\to 3}x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$f(3)-3\lambda+9=1 \Leftrightarrow \lambda=3 .$$

Άσκηση 6 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}, & x\neq 3 \\ \lambda, & x=3 \end{cases}$, με $\lambda\in\mathbf{R}$.

Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=3$.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$. **(1)**

Για $x\neq 3$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα πηλίκου για τα όρια.

Έτσι παραγοντοποιούμε το κλάσμα πολλαπλασιάζοντας τους όρους τους κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή και για $x\neq 3$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}=\frac{\left(\sqrt{2x+10}-4\right)\cdot\left(\sqrt{2x+10}+4\right)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)}=$$

$$\frac{2\cdot(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)}=\frac{2}{\sqrt{2x+10}+4}.$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+10}+4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Επίσης $f(3)=\lambda$.

Άρα για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x=3$ από την **(1)** έχουμε:

$$\lambda=\frac{1}{4}.$$

Άσκηση 7 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3+3x^2-x+2}{x^2-4}, & x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+2) \\ \lambda, & x=-2 \end{cases}$, με $\lambda\in\mathbf{R}$.

Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=-2$.

Λύση

Για να είναι η f συνεχής στο $x=-2$, πρέπει $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=f(-2)$. **(1)**

Όμως επειδή $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2-4\right)=0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα πηλίκου για τα όρια. Έτσι παραγοντοποιούμε το κλάσμα.

Για να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $2x^3+3x^2-x+2$, χρησιμοποιούμε το σχήμα του Horner:

2	3	-1	2	ρ=-2
	-4	2	-2	
2	-1	+1	0	

Οπότε $2x^3+3x^2-x+2=(x+2)\cdot\left(2x^2-x+1\right)$ και για $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+2)$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2-x+2}{x^2-4}=\frac{(x+2)\cdot\left(2x^2-x+1\right)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2x^2-x+1}{x-2}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-2}\left(2x^2-x+1\right)}{\lim\limits_{x\to-2}(x-2)}=\dfrac{8+2+1}{-4}=-\dfrac{11}{4}$.

Επίσης $f(-2)=\lambda$.

Άρα για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x=-2$, από την **(1)** προκύπτει: $\lambda=-\dfrac{11}{4}$.

Άσκηση 8 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2\alpha}{\sqrt{x}-1}, & x\in\left[0,1\right)\cup(1,+\infty)\\ \lambda, & x=1\end{cases}$, με $\alpha,\lambda\in\mathbf{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α και λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=1$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι η f συνεχής στο $x=1$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. **(1)**

Από το προηγούμενο συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αφού $f(1)=\lambda\in\mathbf{R}$ **(2)**

Για $x\in\left[0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{x-2\alpha}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow f(x)\cdot(\sqrt{x}-1)=x-2\alpha$.

Οπότε και

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)\cdot(\sqrt{x}-1)\right]=\lim_{x\to 1}(x-2\alpha)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x)\cdot\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)=\lim_{x\to 1}(x-2\alpha)\Leftrightarrow$$

$$f(1)\cdot 0=1-2\alpha\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Έτσι για $x\in\left[0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Συνεπώς:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$. **(3)**

και αφού η f είναι συνεχής στο $x=1$, η **(1)** βάσει των **(2)**,**(3)** μας δίνει: $\lambda=2$.

Άσκηση 9 (Συνέχεια Συνάρτησης - Εύρεση παραμέτρου, όταν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους και είναι συνεχής)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\alpha}{x-\lambda}, & x\neq\lambda\\ 1, & x=\lambda\end{cases}$, με $\alpha,\lambda\in\mathbf{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α και λ, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x=\lambda$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι η f συνεχής στο $x=\lambda$, πρέπει $\lim\limits_{x\to\lambda} f\left(x\right)= f\left(\lambda\right)=1$. **(1)**

Από το προηγούμενο συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to\lambda} f\left(x\right)$ υπάρχει και μάλιστα $\lim\limits_{x\to\lambda} f\left(x\right)=1$.

Για $x\neq\lambda$ έχουμε: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+\alpha}{x-\lambda}\Leftrightarrow f\left(x\right)\cdot\left(x-\lambda\right)=x^2+\alpha$.

Οπότε και

$$\lim_{x\to\lambda}\left[f\left(x\right)\cdot\left(x-\lambda\right)\right]=\lim_{x\to\lambda}\left(x^2+\alpha\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to\lambda} f\left(x\right)\cdot\lim_{x\to\lambda}\left(x-\lambda\right)=\lim_{x\to\lambda}\left(x^2+\alpha\right)\Leftrightarrow$$

$1\cdot 0=\lambda^2+\alpha\Leftrightarrow\alpha=-\lambda^2$. **(2)**

Έτσι

$$\lim_{x\to\lambda} f\left(x\right)=\lim_{x\to\lambda}\frac{x^2+\alpha}{x-\lambda}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to\lambda}\frac{x^2-\lambda^2}{x-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\left(x+\lambda\right)=2\lambda.$$ **(3)**

Οπότε από τις **(1)**, **(3)** έχουμε:

$2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$ και λόγω της **(2)** έχουμε $\alpha=-\lambda^2=-\dfrac{1}{4}$.

Άσκηση 10 (Συνέχεια Συνάρτησης - Υπολογισμός ορίου μιας συνάρτησης που περιέχει την f ή υπολογισμός της αριθμητικής τιμής)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x=5$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(5,-1)$.

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ με $g(x)=5\cdot f^2(x)+2\cdot f(x)+3x-2$.

<u>Λύση</u>

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(5,-1)$, άρα $f(5)=-1$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=5$,

έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)=-1.$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\left[5\cdot f^2(x)+2\cdot f(x)+3x-2\right]=$$

$$5\cdot\lim_{x\to 5} f^2(x)+2\cdot\lim_{x\to 5} f(x)+\lim_{x\to 5}(3x-2)=$$

$$5\cdot\lim_{x\to 5}\left[f(x)\right]^2+2\cdot\lim_{x\to 5} f(x)+\lim_{x\to 5}(3x-2)=$$

$$=5\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+3\cdot 5-2=20-4=16$$

Άρα

$$\lim_{x\to 5} g(x)=16$$

Άσκηση 11 (Συνέχεια Συνάρτησης - Υπολογισμός ορίου μιας συνάρτησης που περιέχει την f ή υπολογισμός της αριθμητικής τιμής)

Αν η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $x=1$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2}{x^3+2x-3}=2,$$

να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,7)$.

<u>Λύση</u>

Για να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,7)$, αρκεί να δείξουμε ότι $f(1)=7$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\in\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2\right]=\lim_{x\to 1}x^2\cdot\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}\left(-2x^2+2\right)=$$

$$1^2\cdot f(1)-f(1)-2+2=0$$

και

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3+2x-3\right)=1^3+2\cdot1-3=0,$$

οπότε για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2}{x^3+2x-3}$ απλοποιούμε το κλάσμα

$$\frac{x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2}{x^3+2x-3}$$

Έτσι για $x\neq 1$, έχουμε

$$\frac{x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2}{x^3+2x-3}=\frac{f(x)\cdot\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)}{x^3-x+3x-3}=$$

$$\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left[f(x)-2\right]}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)+3\cdot(x-1)}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left[f(x)-2\right]}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+3\right)}=$$

$$\frac{(x+1)\cdot\left[f(x)-2\right]}{\left(x^2+x+3\right)}.$$

(Παρατήρηση: Επειδή γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο x^3+2x-3 έχει ρίζα το $\rho=1$, θα μπορούσαμε επίσης να το παραγοντοποιήσουμε με το σχήμα του Horner για $\rho=1$.)

Έτσι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\cdot f(x)-f(x)-2x^2+2}{x^3+2x-3}=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cdot\left[f(x)-2\right]}{x^2+x+3}=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)-2\right]}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+3\right)}=2,$$

οπότε

$$\frac{2\cdot\left[f(1)-2\right]}{5}=2\Leftrightarrow f(1)=7.$$

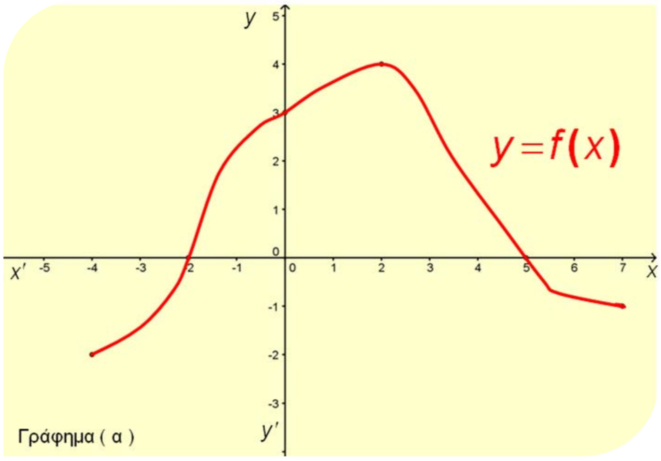
Ημερομηνία Τροποποίησης: 15/9/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

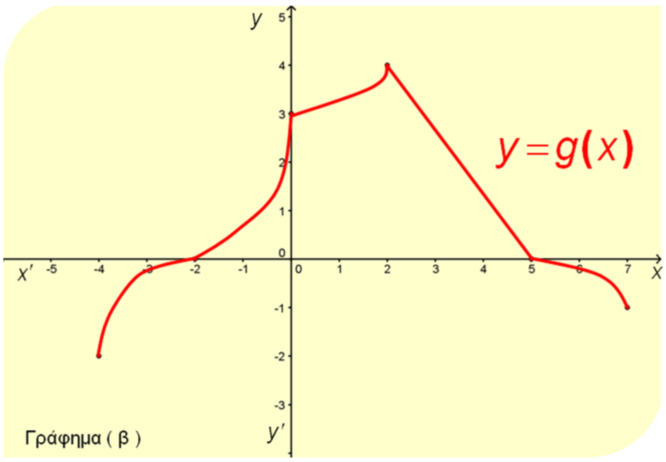
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ f ΣΤΟ $x=x_0$

Εισαγωγή

Στις προηγούμενες ενότητες αναφερθήκαμε στην έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει απαραίτητα στο πεδίο ορισμού της, καθώς και στην έννοια της συνέχειας τόσο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όσο και στο πεδίο ορισμού της.



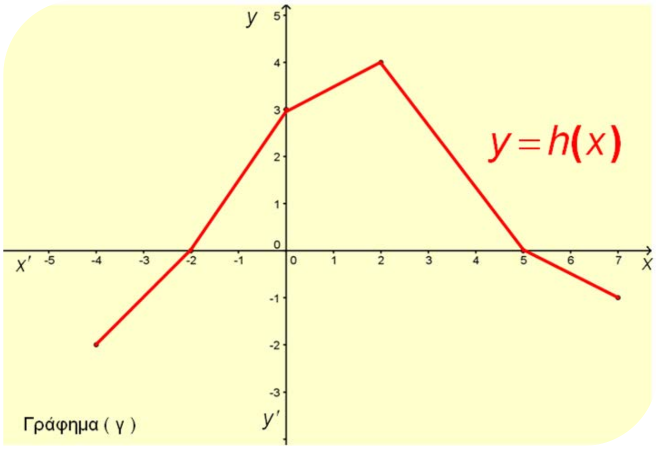
Ωστόσο, παρατηρώντας τα γραφήματα που ακολουθούν διαπιστώνουμε ότι οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας δεν καταφέρνουν να περιγράψουν επαρκώς τη συμπεριφορά των τιμών μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ.



Για παράδειγμα οι συναρτήσεις f, g και h έχουν:

- Κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ = [-4 , 7] ,
- Τέμνουν τους άξονες στα ίδια σημεία,
- Είναι γνησίως αύξουσες στο [-4,2]
  Είναι γνησίως φθίνουσες στο [2,7]
- Είναι συνεχείς συναρτήσεις στο Δ
- Έχουν τα ίδια ακρότατα

αλλά όπως είναι φανερό από τα σχετικά διαγράμματα υπάρχουν εμφανείς διαφορές.
Η συμβολή δύο σπουδαίων μαθηματικών τον 17^o αιώνα του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς, στην καλύτερη περιγραφή καμπυλών ήταν καθοριστική και στις ιδέες τους στηρίζονται οι έννοιες που παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους.
Πριν προχωρήσουμε όμως στην ανάλυση νέων εννοιών με αφορμή τα προβλήματα της εφαπτομένης και της στιγμιαίας ταχύτητας, είναι απαραίτητο να ανακτήσουμε μια πολύ βασική έννοια που αφορά τον καθορισμό της διεύθυνσης μιας ευθείας γραμμής και ονομάζεται για αυτόν ακριβώς τον λόγο **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** της ευθείας.



Ορισμός : Ο πραγματικός αριθμός λ ο οποίος είναι ίσος με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον οριζόντιο άξονα x΄x με $\omega \neq 90^0$,ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** της ευθείας (ε).

Είναι δηλαδή $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Αν $\lambda > 0$ τότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον οριζόντιο άξονα x΄x είναι οξεία και αντιστρόφως.

  (βλέπε Σχήμα 1)

- Αν $\lambda < 0$ τότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον οριζόντιο άξονα x΄x είναι αμβλεία και αντιστρόφως.

  (βλέπε Σχήμα 2)

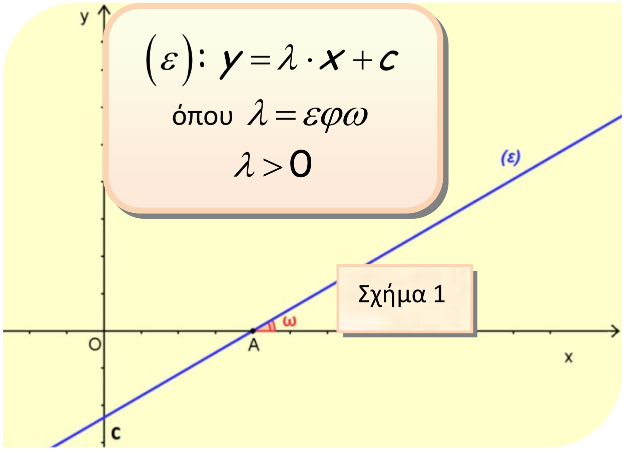
- Αν $\lambda = 0$ τότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον οριζόντιο άξονα x΄x είναι μηδέν μοίρες και αντιστρόφως.

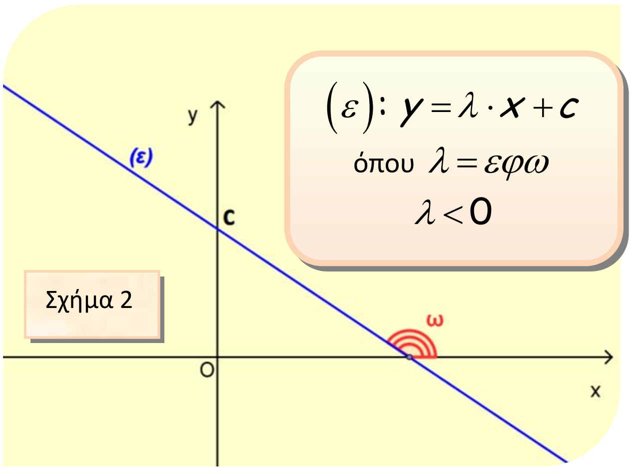
  (βλέπε Σχήμα 3)

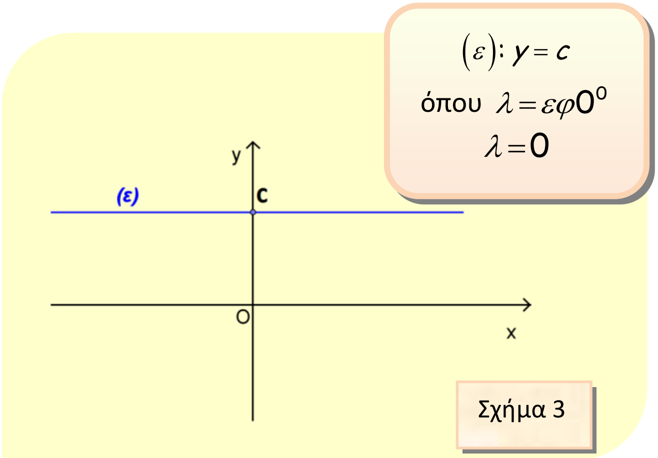
- Θυμίζουμε ότι η $\varepsilon\varphi 90^o$ δεν ορίζεται. **Άρα δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας κατακόρυφης ευθείας!**

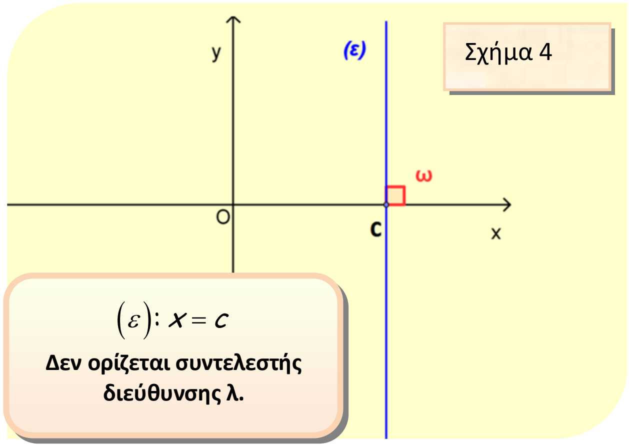
  (βλέπε Σχήμα 4)

Τα παραπάνω γεωμετρικά φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν.





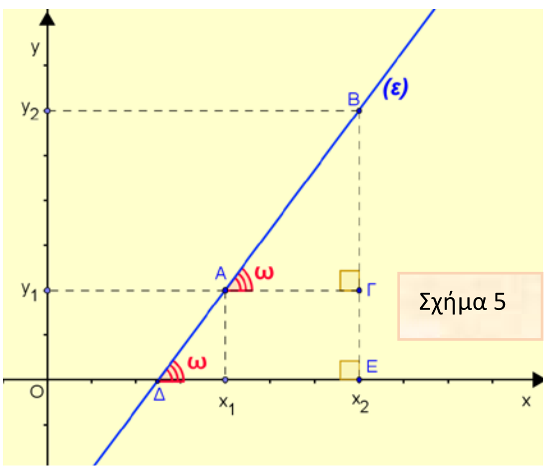




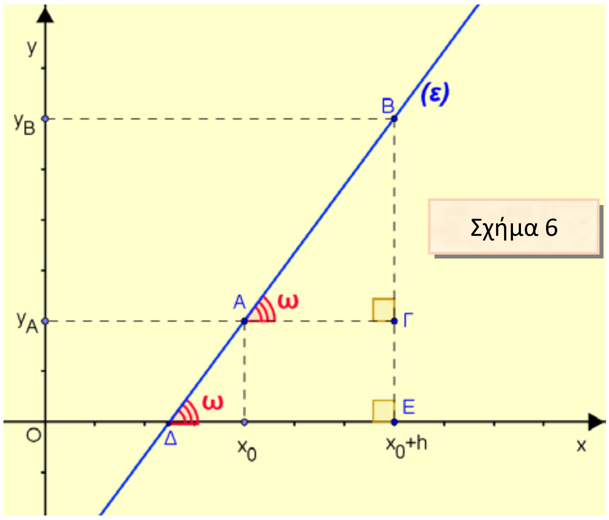
Έστω (ε) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(x_1 , y_1)$ και $B(x_2 , y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα με $\omega\neq 90^0$.
Τότε για τον συντελεστή διεύθυνσης λ, θα ισχύει :

$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\frac{B\Gamma}{\Gamma A}=\frac{\text{Διαφορά τεταγμένων}}{\text{Διαφορά τετμημένων}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\boxed{\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$



Συμπέρασμα: Ο **συντελεστής διεύθυνσης λ** μίας ευθείας (ε) που ορίζεται από δύο διαφορετικά σημεία Α και Β είναι ένα **πηλίκο διαφορών** όπου ο αριθμητής του κλάσματος που ορίζει το πηλίκο, είναι η διαφορά των τεταγμένων των δύο σημείων και ο παρονομαστής είναι η διαφορά των τετμημένων των δύο σημείων.



Παρατήρηση: Έχουμε υποθέσει ότι τα σημεία Α και Β έχουν διαφορετικές τετμημένες.

Ας συμβολίσουμε με h αυτή τη διαφορά δηλαδή : $h = x_B - x_A$ οπότε, $h \neq 0$. αν υποθέσουμε ότι η τετμημένη του Α είναι ίση με x_0 τότε, η τετμημένη του Β θα είναι ίση με $x_0 + h$ με $h \neq 0$.

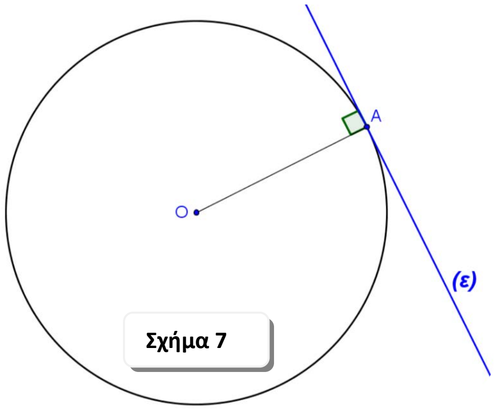
Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) με τον τελευταίο συμβολισμό γράφεται:

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_0 + h - x_0} = \frac{y_B - y_A}{h}$$

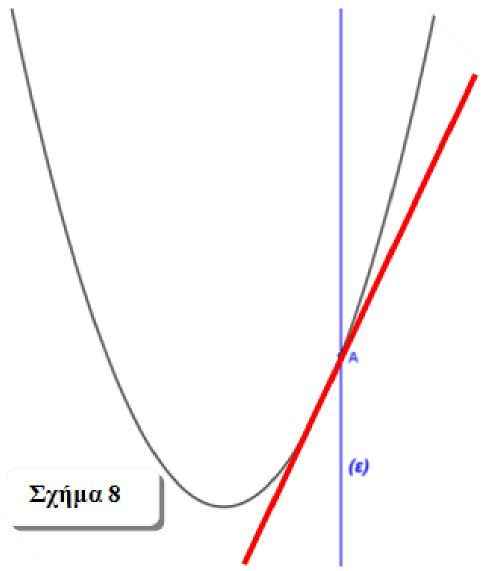
Δηλαδή: $\boxed{\lambda = \frac{\Delta y}{h}}$

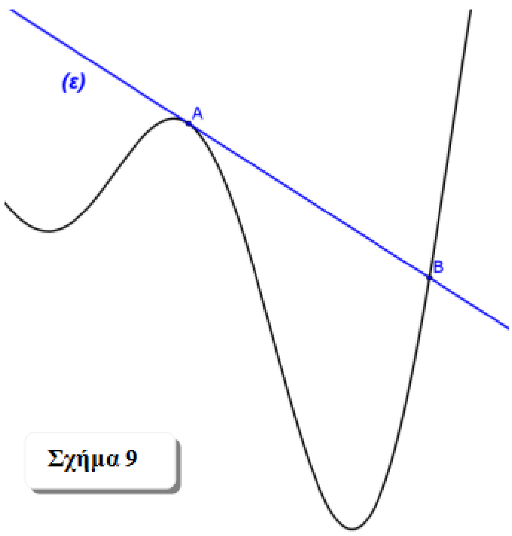
Το Πρόβλημα της Εφαπτομένης

Σύμφωνα με την κλασική άποψη, μια ευθεία γραμμή εφάπτεται σε μια καμπύλη αν έχει με αυτήν ένα μόνο κοινό σημείο. Αυτόν τον εμπειρικό ορισμό είχαν υιοθετήσει και οι αρχαίοι Έλληνες για τον σχεδιασμό της εφαπτομένης σε ένα σημείο Α ενός κύκλου κέντρου Ο φέρνοντας κάθετη στην ακτίνα ΟΑ .
Η παραπάνω ευθεία είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α. **(**Σχήμα 13)
Η γενίκευση όμως του παραπάνω τρόπου στην εύρεση και χάραξη της εφαπτομένης σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου αποδείχτηκε εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση.



Στα σχήματα που ακολουθούν μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι ο παραπάνω ορισμός της εφαπτομένης κύκλου δεν μπορεί να γενικευθεί σε οποιαδήποτε καμπύλη.





Πράγματι,

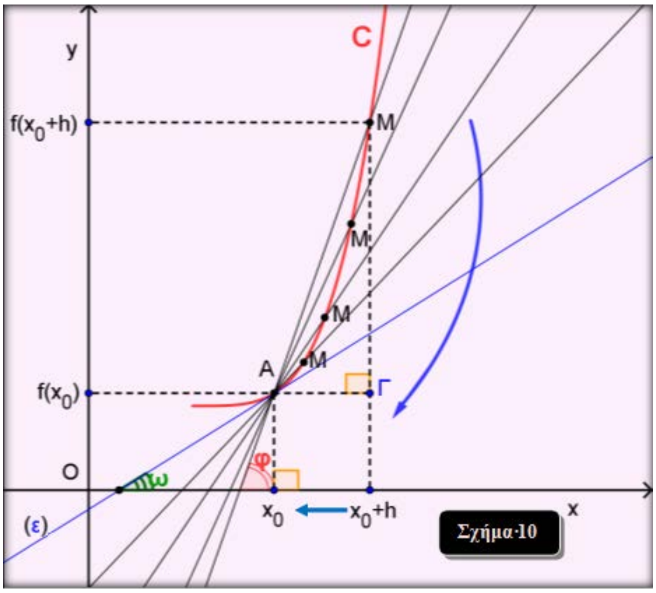
- Στο σχήμα 8, δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο με την καμπύλη.
- Στο σχήμα 9, η ευθεία (ε) «ακουμπά» στο σημείο Α την καμπύλη αλλά έχει κι άλλο κοινό σημείο με αυτήν, το Β.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο ορισμός της εφαπτομένης κύκλου δεν μπορεί να γενικευθεί σε κάθε καμπύλη. Στην παράγραφο που ακολουθεί περιγράφεται ο τρόπος γενίκευσης της εφαπτομένης σε μια οποιαδήποτε καμπύλη.

Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση f και $A(x_0\ ,\ f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C .

Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0+h\ ,\ f(x_0+h))$ της C με $h\neq 0$. Παρατηρούμε ότι καθώς το Μ κινούμενο πάνω στη C πλησιάζει το Α, όταν δηλαδή $h\to 0$, τότε η ευθεία ΑΜ παίρνει μια οριακή θέση ε η οποία λέγεται **εφαπτομένη** της C στο Α.



Από το σχήμα (10) έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΜ είναι:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{M\Gamma}{A\Gamma}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ ,$$ αφού η γωνία φ είναι ίση με τη γωνία $M\hat{A}\Gamma$.

Επομένως ο *συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της* C_f στο σημείο Α θα είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Θεωρώντας την εφαπτομένη καμπύλης σε συγκεκριμένο σημείο της **ως οριακή θέση τέμνουσας**, αντιμετωπίζουμε προβλήματα επαφών σαν αυτά που προαναφέραμε στα σχήματα 8 και 9 και αποκτούμε ένα ισχυρό εργαλείο για την ύπαρξη της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο μιας καμπύλης.

Ώστε:

ΟΡΙΣΜΟΣ

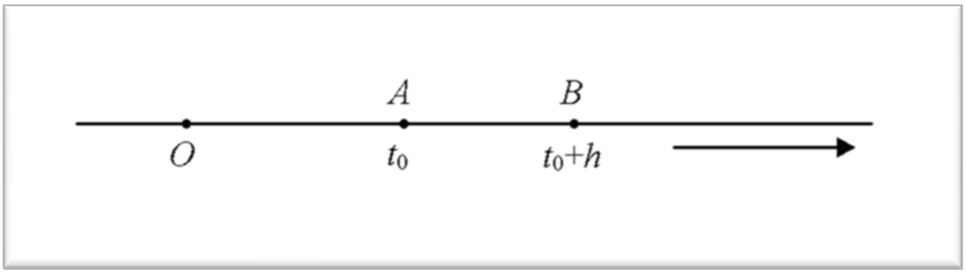
Μια μη κατακόρυφη ευθεία (ε) ονομάζεται εφαπτομένη της καμπύλης C_f μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ με συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

όταν (και μόνο όταν) ο λ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Το Πρόβλημα της Στιγμιαίας Ταχύτητας

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα Σ εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και έστω **X**= S(t) με $t \geq 0$ η συνάρτηση που εκφράζει τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t.



Έστω δύο χρονικές στιγμές t_0 και t_1 οι οποίες διαφέρουν κατά h δηλαδή $t_1 = t_0 + h$, **$h \neq 0$**
Το κινητό σε χρόνο h μετατοπίζεται κατά $\Delta S = x_1 - x_0 = S(t_0 + h) - S(t_0)$.

Επομένως η μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος h θα είναι:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta S}{h} = \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Ποια όμως είναι η ταχύτητα του κινητού όταν αυτό βρίσκεται στη θέση A ;

Η αναζήτηση της ταχύτητας ενός κινητού μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 αποτελεί το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας.
Αν θεωρήσουμε το χρονικό διάστημα από t_0 έως $t_0 + h$ με $h \neq 0$ τότε καθώς το χρονικό διάστημα μικραίνει η ταχύτητα του κινητού στη θέση A θα προσεγγίζεται ολοένα και περισσότερο από τη μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ του παραπάνω χρονικού διαστήματος.
Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε ως στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού στη χρονική στιγμή t_0 την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας.

Ορίζουμε λοιπόν ως **στιγμιαία** ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζουμε με υ, το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta S}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, δηλαδή το όριο του λόγου της μεταβολής της θέσης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Ώστε:

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού όταν $t = t_0$ δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \lim_{h\to 0}\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Οι λύσεις των προηγούμενων προβλημάτων, μολονότι αναφέρονται σε διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, το πρώτο στη Γεωμετρία και το δεύτερο στη Μηχανική οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Σε πολλούς οικονομικούς όρους συναντούμε όρια σαν το παραπάνω. Για παράδειγμα αν K(x) είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση K λέγεται συνάρτηση κόστους, το πηλίκο $\kappa(x)=\frac{K(x)}{x}$ λέγεται μέσο κόστος ενώ το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{K(x+h)-K(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος** . Ανάλογα όρια εκφράζουν τα οριακά έσοδα και το οριακό κέρδος.

Επίσης, προβλήματα όπως ο ορισμός της έντασης ενός ρεύματος, η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης και γενικά μεταβολών δύο μεγεθών που συνδέονται μεταξύ τους οδηγούν στον υπολογισμό ορίου με την παραπάνω μορφή.

<u>Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης f σε Σημείο x_0 του Πεδίου Ορισμού της</u>

Στηριζόμενοι σε όσα αναφέρθηκαν στην περίπτωση της εφαπτομένης καθώς και στην περίπτωση της στιγμιαίας ταχύτητας, γενικεύουμε για οποιαδήποτε συνάρτηση, δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

Αν το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται " f τονούμενο του x_0".

Έχουμε λοιπόν :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}}$$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2-x$ στο σημείο $x_0 = 1$, με τη βοήθεια του ορισμού, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h) - f(x_0)$. Έτσι για την $f(x)=x^2-x$ στο $x_0 = 1$ έχουμε:

  $f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - (1+h) - (1^2 - 1) = h^2+2h+1-h-1=h^2+h \Leftrightarrow f(1+h) - f(1) = h\cdot(h+1)$.

  Το h είναι πάντα ένας πολύ μικρός κατά απόλυτη τιμή πραγματικός αριθμός, αλλά μη μηδενικός.

- Έτσι για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ οπότε στο $x_0 = 1$ έχουμε:

  $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h\cdot(h+1)}{h} \Leftrightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = h+1.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Στο $x_0 =1$ έχουμε:

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = 1.$$

Άρα παράγωγος της f στο $x_0 = 1$ είναι ο αριθμός 1.

Σημειώσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια

1. Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ο αριθμός $f'(x_0)$ **εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$**.

Παραδείγματα:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης **λ** της εφαπτομένης της καμπύλης $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ είναι ο **ρυθμός μεταβολής** της f(x) ως προς x όταν $x = x_0$, **αφού:** $\boldsymbol{\lambda = f'(x_0)}$

(Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου)

- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = S(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

  $υ(t_0) = S'(t_0)$

  δηλαδή ο **ρυθμός μεταβολής** της S(t) ως προς t όταν $t = t_0$.

(Φυσική ερμηνεία της παραγώγου)

- Η επιτάχυνση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα τη χρονική στιγμή t_0

  θα είναι $α(t_0) = υ'(t_0)$

  δηλαδή ο **ρυθμός μεταβολής** της ταχύτητας υ(t) ως προς t όταν $t = t_0$.

- Το οριακό κόστος παραγωγής $K'(x_0)$ παριστάνει το **ρυθμό μεταβολής** του κόστους K ως προς την ποσότητα x παραγόμενου προϊόντος όταν $x = x_0$.

2. Έστω μια συνάρτηση f και $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

Η ευθεία (ε) : $y = λx + c$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M όταν και μόνο όταν ισχύουν :

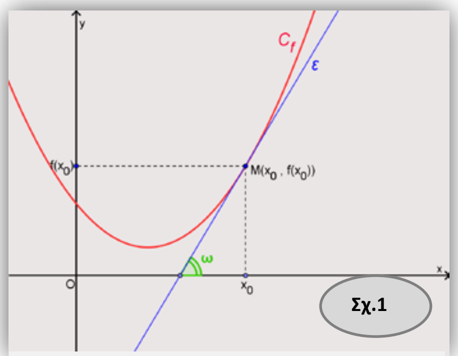
- Το σημείο M ανήκει και στην ευθεία (ε)

  Άρα: $\boldsymbol{f(x_0) = λx_0 + c}$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο M με παράγωγο τον συντελεστή διεύθυνσης **λ** της ευθείας *(ε)*.

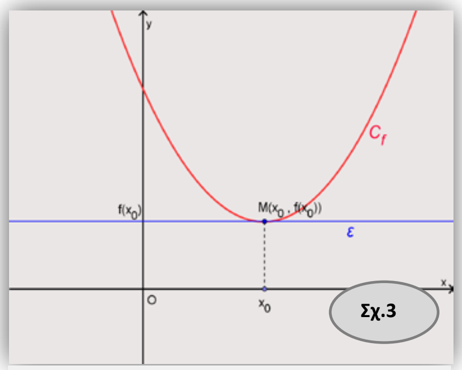
Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = λ(x - x_0)$ και επειδή $λ= f'(x_0)$, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ δίνεται από τη σχέση: $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

3. Αναφέραμε πριν ότι αν μια ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης **λ** είναι εφαπτομένη μιας γραφικής παράστασης σε ένα σημείο Μ τότε **λ = f΄ (x_0) = εφω** όπου x_0 η τετμημένη του σημείου επαφής και **ω** η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x με ω≠90^0. Αυτό σημαίνει ότι το πρόσημο της παραγώγου αποκτά γεωμετρική ερμηνεία η οποία γίνεται φανερή στα παρακάτω σχήματα:



$\hat{\omega} < 90^0 \Leftrightarrow εφω > 0 \Leftrightarrow λ > 0 \Leftrightarrow f'(x_0) > 0$

$\hat{\omega} > 90^0 \Leftrightarrow εφω < 0 \Leftrightarrow λ < 0 \Leftrightarrow f'(x_0) < 0$



$\hat{\omega} = 0^0 \Leftrightarrow εφω = 0 \Leftrightarrow λ = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

Άρα:

α) Όταν η παράγωγος στην τετμημένη του σημείου επαφής είναι θετικός αριθμός τότε η εφαπτομένη ε τέμνει υπό οξεία γωνία τον οριζόντιο άξονα x΄x, και αντιστρόφως. (Σχήμα 1)

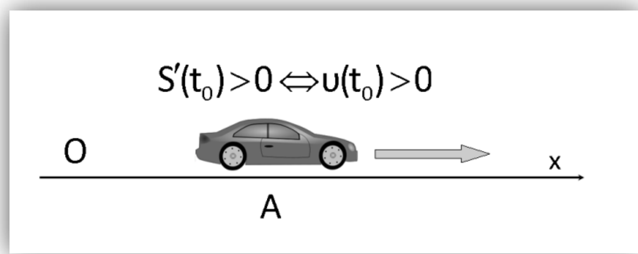
β) Όταν η παράγωγος στην τετμημένη του σημείου επαφής είναι αρνητικός αριθμός τότε η εφαπτομένη ε τέμνει υπό αμβλεία γωνία τον οριζόντιο άξονα x΄x, και αντιστρόφως. (Σχήμα 2)

γ) Όταν η παράγωγος στην τετμημένη του σημείου επαφής είναι μηδέν τότε, η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα x΄x, και αντιστρόφως. (Σχήμα 3)

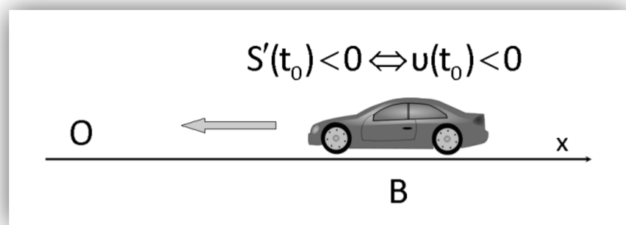
4. Αν μια συνάρτηση S εκφράζει τη θέση ενός σώματος Σ που κινείται ευθύγραμμα σε άξονα Οx κάθε χρονική στιγμή t τότε, όπως έχουμε αναφέρει, η παράγωγος την χρονική στιγμή t = t_0 εκφράζει την (στιγμιαία) ταχύτητα του κινητού.

Η φυσική ερμηνεία του πρόσημου του αριθμού S΄(t_0) είναι η εξής :

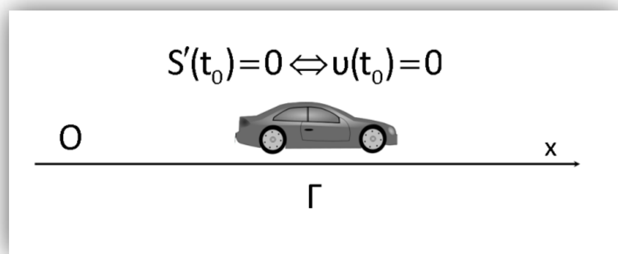
α) Αν ένα κινητό Σ βρίσκεται στη θέση Α τη χρονική στιγμή t = t_0 και S΄(t_0)>0 ⇔ υ(t_0)>0 τότε, το Σ κινείται προς τα δεξιά.



β) Αν ένα κινητό Σ βρίσκεται στη θέση Β τη χρονική στιγμή $t = t_0$ και $S΄(t_0)<0 \Leftrightarrow υ(t_0)<0$ τότε, το Σ κινείται προς τα αριστερά.



γ) Αν ένα κινητό Σ βρίσκεται στη θέση Γ τη χρονική στιγμή $t = t_0$ και $S΄(t_0)=0 \Leftrightarrow υ(t_0)=0$ τότε, το Σ είναι στιγμιαία ακίνητο.



5. Η παράγωγος γενικά ερμηνεύεται ως **ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής μιας ποσότητας** που μεταβάλλεται συνήθως συναρτήσει του χρόνου t. Έτσι, αν τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $f΄(t_0)>0$ τότε η f έχει την τάση να αυξήσει τις τιμές της στη μονάδα του χρόνου, αν $f΄(t_0)<0$ τότε η f έχει την τάση να μειώσει τις τιμές της στη μονάδα του χρόνου και τέλος αν $f΄(t_0)=0$ η συνάρτηση - ποσότητα - f έχει την τάση να διατηρήσει σταθερές τις τιμές της στη μονάδα του χρόνου.

Παράδειγμα: Η τιμή μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο Αθηνών δίνεται σε Ευρώ από μια συνάρτηση $f = f(t)$ όπου t ο χρόνος σε ώρες με $t \in [0, 6]$. Αν $f(4) = 20$ σημαίνει ότι 4 ώρες μετά την έναρξη της συνεδρίασης η μετοχή κοστίζει 20 € τότε πως ερμηνεύουμε την πληροφορία $f΄(4) = -2$;

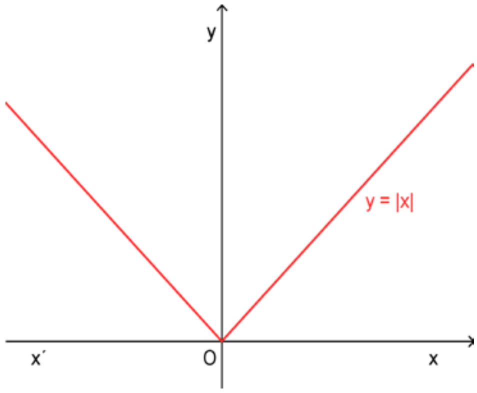
Λύση: Η $f΄(t_0)$ δείχνει την τάση μεταβολής που έχει τη χρονική στιγμή $t = t_0$ η τιμή της μετοχής στη μονάδα του χρόνου δηλαδή στη μία ώρα αφού, στο παράδειγμά μας ο χρόνος t μετριέται σε ώρες.

Άρα $f΄(4) = -2$ σημαίνει ότι η μετοχή 4 ώρες μετά την έναρξη της συνεδρίασης, έχει την τάση να μειώσει την τιμή της κατά 2€ ανά ώρα.

Προσοχή: Αυτό **δεν** σημαίνει ότι μία ώρα μετά η μετοχή θα κοστίζει 18€ !

6. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο .

Παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_0 = 0$.



Πράγματι, για h<0 έχουμε :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1$$

ενώ όταν h>0 έχουμε:

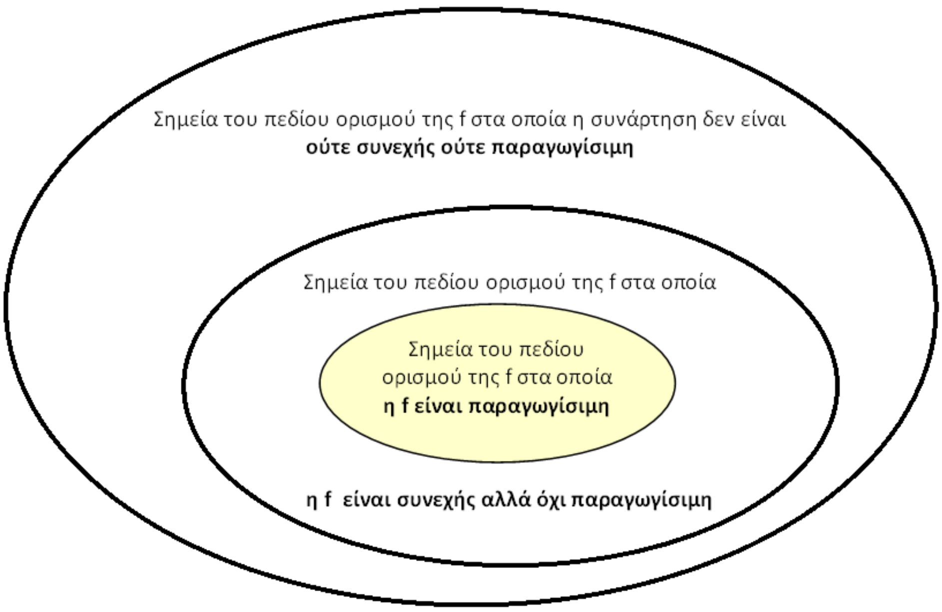
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1\,.$$

Άρα δεν υπάρχει

το $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

7. όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα

- Κάθε παραγωγίσιμη είναι και συνεχής ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει αναγκαία.
- Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ούτε συνεχείς, ούτε παραγωγίσιμες.



Ανακεφαλαίωση

Οι έννοιες που παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή είναι:

1. **ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ :** Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το παραπάνω όριο ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 , συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται " f τονούμενο του x_0 ".

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Αν μια συνάρτηση f δέχεται σε ένα σημείο της $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ εφαπτομένη μια ευθεία ε με εξίσωση $y=\lambda x+c$ τότε λ = εφω = $f'(x_0)$ όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ε με τον οριζόντιο άξονα με $\omega\neq 90^0$.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει τη μορφή : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

(Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου)

3. Αν μια συνάρτηση $x = S(t)$ εκφράζει τη μετατόπιση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση συναρτήσει του χρόνου τότε η παράγωγος $S'(t_0)$ τη χρονική στιγμή $t = t_0$ εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητα υ του κινητού δηλαδή: $\mathbf{S'(t_0) = \upsilon(t_0)}$.

(Φυσική ερμηνεία της παραγώγου)

4. Γενικά η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει τον **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$.

5. Το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της μας πληροφορεί :

α) Στη Γεωμετρία, αν η εφαπτομένη τέμνει τον οριζόντιο άξονα υπό οξεία ή αμβλεία γωνία αντίστοιχα.

β) Στη Φυσική, αν ένα σώμα κινείται δεξιά ή αριστερά στον οριζόντιο άξονα.

γ) Γενικά, αν μια ποσότητα έχει την τάση να αυξήσει ή να μειώσει τις τιμές της.

<u>Παραδείγματα Εφαρμογής</u>

Παράδειγμα 1 (Εύρεση παραγώγου)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 7"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-6x+2$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = 0$.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε αρχικά τη διαφορά f(0+h)-f(0).

Είναι $f(0+h)-f(0) = f(h)-f(0) = h^2-6h+2-(0^2-6\cdot 0+2) = h^2-6h+2-2 = h^2 -6h = h\cdot(h-6)$.

Για κάθε $h\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{h(h-6)}{h}=h-6$

επομένως $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(h-6\right)=-6$.

Παράδειγμα 2 (Εύρεση παραγώγου)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 8"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-\dfrac{1}{2x+3}$ με $x\neq -\dfrac{3}{2}$. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = 2$.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε αρχικά τη διαφορά f(2+h) – f(2).

Είναι $f(2+h)-f(2) = -\dfrac{1}{2(2+h)+3}-\left(-\dfrac{1}{2\cdot 2+3}\right) = -\dfrac{1}{7+2h}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{-7+2h+7}{7\cdot(7+2\cdot h)}=\dfrac{2h}{49+14h}$.

Για κάθε $h\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{\frac{2h}{49+14h}}{h}=\dfrac{2}{49+14h}$

επομένως $\qquad f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{2}{49+14h}\right)=\frac{2}{49}$.

Παράδειγμα 3 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 9"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=(x-3)^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της (2 , f(2)) και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη αυτή.

(Θέμα Β)

Λύση

Είναι $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h-3)^2-(2-3)^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(h-1)^2-1}{h}=-2$

οπότε η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με x = 2, έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ=f'(2)=-2$.

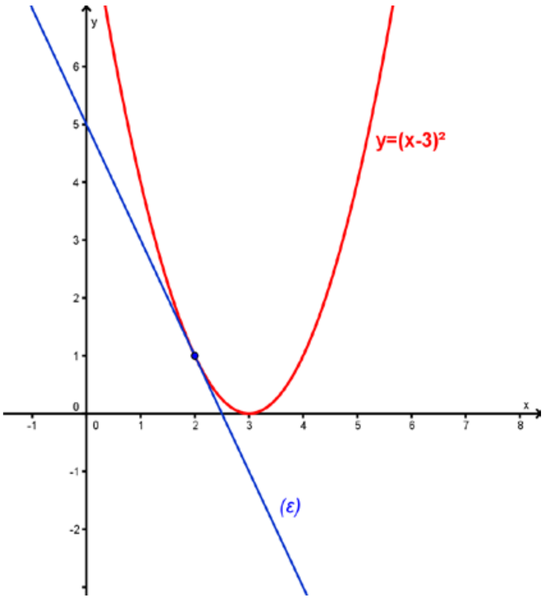
Επομένως η εξίσωση της είναι: $y = -2x + β$

Επειδή όμως το σημείο (2 , f(2)) = (2 , 1) ανήκει στην εφαπτομένη έχουμε:

$1=-2\cdot 2+β \Leftrightarrow β = 5$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y = -2x + 5$.



Παράδειγμα 4 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 10"

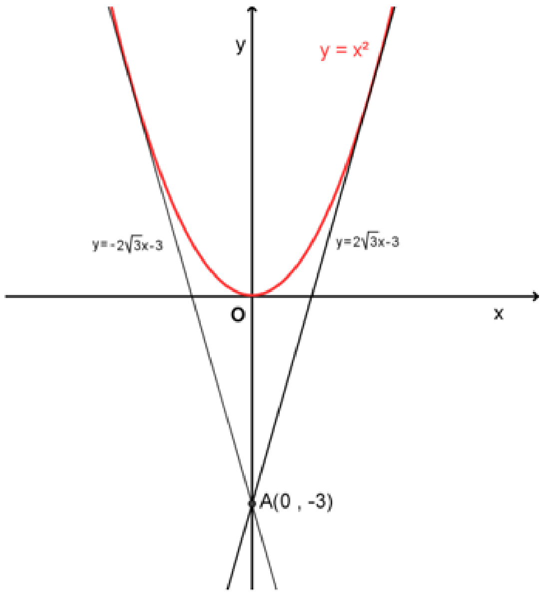
Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(0 , -3) και εφάπτεται της καμπύλης με εξίσωση $y = x^2$.

(Θέμα Γ)

Λύση

Φανερά η x=0 δεν είναι εφαπτομένη της καμπύλης. Έστω y = λx + c η εξίσωση της ζητούμενης μη κατακόρυφης ευθείας. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Α θα ισχύει

$$-3 = 0+c \Leftrightarrow c = -3.$$



Άρα η ευθεία έχει εξίσωση y = λx -3 και αν $M(x_0\ ,\ x_0^2)$ το σημείο επαφής, θα είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Επειδή:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h\right)=2x_0,$$

έχουμε $\lambda = 2x_0$.

Άρα, η εξίσωση της ευθείας γίνεται $y = 2x_0x-3$ και επειδή το σημείο επαφής ανήκει και στην ευθεία έχουμε:

$$x_0^2=2x_0x_0-3 \Leftrightarrow x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0=\sqrt{3} \text{ ή } x_0=-\sqrt{3}.$$

Επομένως από το Α διέρχονται δύο ευθείες *(ε₁)* , *(ε₂)* με εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1)\ :\ y = 2\sqrt{3}\,x -3 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2)\ :\ y = -2\sqrt{3}\,x -3$$

οι οποίες εφάπτονται της καμπύλης στα σημεία $M_1(\sqrt{3}\ ,\ 3)$, $M_2(-\sqrt{3}\ ,\ 3)$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 5 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 11"

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί λ , c ώστε η ευθεία y = λx+c, να εφάπτεται της καμπύλης με εξίσωση $y=(x-1)^2+3$ στο σημείο της (2 , 4).

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Το σημείο επαφής πρέπει να ανήκει και στην ευθεία οπότε:

4 = 2λ+c ⇔ c = 4-2λ. **(1)**

Έτσι η εξίσωση της ευθείας γίνεται

y = λx + 4-2λ

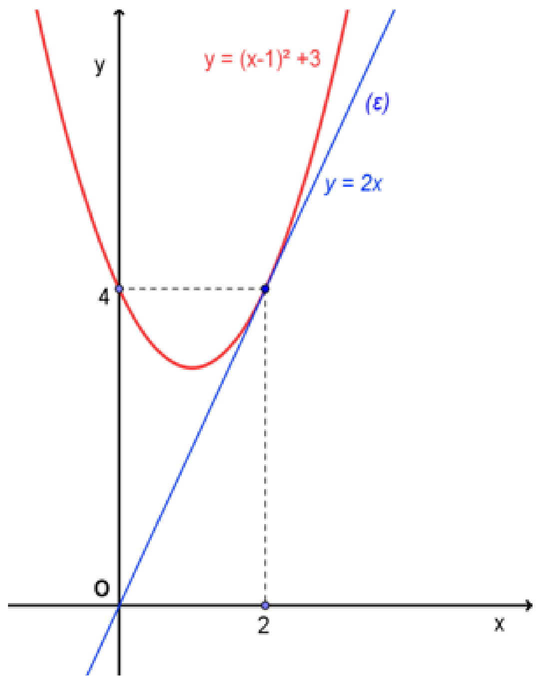
Όμως $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h-1)^2+3-(2-1)^2-3}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h} =$

$\lim_{h\to 0}(h+2) = 2$

και επομένως αρκεί: λ=f΄(2)=2

Τέλος για λ=2, από την (1) παίρνουμε c=0 και επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι λ=2 και c=0.



Παράδειγμα 6 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 12"

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\sqrt{2-x}+1$ με x ∈ (-∞ , 2].

Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του πραγματικού αριθμού λ τέτοια ώστε η ευθεία (ε) με εξίσωση y = λx + 2 - λ, να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της A(1 , 2).

(Θέμα Γ)

Λύση

Παρατηρούμε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το A(1 , 2) αφού για κάθε λ∈R**,** ισχύει:

2 = λ•1 + 2 - λ ⇔ 2 =2 . Επειδή το γράφημα της f διέρχεται και αυτό από το A το σημείο A είναι κοινό για την ευθεία και την καμπύλη.

Εξάλλου η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o=1, γιατί:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2-(1+h)}+1-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-h}-1}{h}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-h}-1\right)\left(\sqrt{1-h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1-h}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h-1}{h\left(\sqrt{1-h}+1\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{1-h}+1\right)}\overset{h\neq 0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-h}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{1}{2}$$

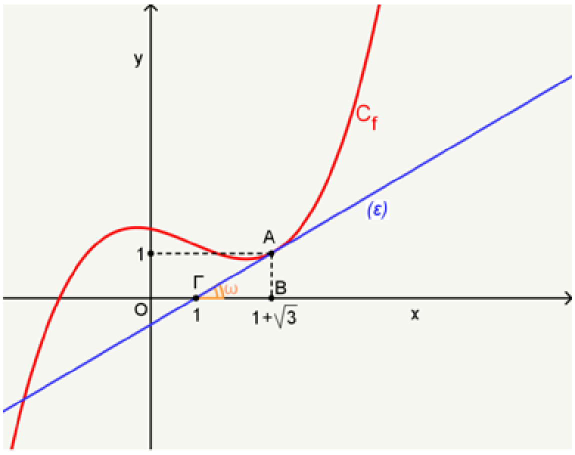
Άρα, για να εφάπτεται η ευθεία στην καμπύλη στο Α, αρκεί $f'(1)=\lambda$ δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης f στην τετμημένη του Α να είναι ίση με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.

Επομένως η ζητούμενη τιμή είναι: $\lambda= f'(1) =-\frac{1}{2}$

Παράδειγμα 7 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 13"

Το γράφημα της συνάρτησης f που ορίζεται στο R και απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $A(1+\sqrt{3}\,,1)$ την ευθεία ε.



α) Να υπολογίσετε το $f'(1+\sqrt{3})$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α) Αφού η f δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x_0 = 1+\sqrt{3}$,
είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1+\sqrt{3}$ και επειδή σχηματίζει γωνία ω με τον x΄x έχουμε:

$$f'\left(1+\sqrt{3}\right)=\varepsilon\varphi\omega$$

Εξάλλου: $\varepsilon\varphi\,\omega=\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{1}{1+\sqrt{3}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

και επομένως: $f'\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

β) Η εξίσωση της ευθείας ε θα είναι της μορφής y = λx + c με $\lambda = f'\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Άρα ε : y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$x + c. Όμως το σημείο $A(1+\sqrt{3}\ ,1)$ ανήκει και στην ευθεία ε επομένως οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι για τη σταθερά c θα έχουμε:

1 = $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$ + c $\Leftrightarrow$

c = $1-\frac{\sqrt{3}}{3}-1 \Leftrightarrow$ c = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας ε θα είναι: y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$x - $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παράδειγμα 8 (Ρυθμός μεταβολής)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 14"

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς μήκους α ως προς α, όταν α = 2.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς μήκους α δίνεται από τον τύπο $E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, α>0.

Όταν το α μεταβάλλεται τότε το εμβαδόν γίνεται μια συνάρτηση του α με τύπο $E(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$ με α>0.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού, για κάθε τιμή του α ,δίνεται από την Ε΄(α). Έτσι για α = 2 έχουμε:

$$E'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(2+h)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(2+h-2)(2+h+2)}{h}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{h\to 0}(h+4)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4=\sqrt{3}\ .$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου όταν α = 2, έχει την τάση να αυξηθεί κατά $\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες επιφάνειας ανά μονάδα μήκους της πλευράς α.

Ημερομηνία τροποποίησης: 18/10/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του αριθμού $f'(x_0)$, μιας συνάρτησης παραγωγίσιμης στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

Είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας, που είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης, της συνάρτησης f στο σημείο, με τετμημένη x_0. Ο αριθμός $f'(x_0)$, λέγεται και "κλίση" της f στο x_0.

Ερώτηση θεωρίας 2

Αν x_0 είναι η τετμημένη του σημείου $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, στο οποίο μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δέχεται εφαπτομένη , τότε ποια η σχέση συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$ της εφαπτομένης και της γωνίας μέτρου ω, που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τον οριζόντιο άξονα $x'x$;

<u>Λύση</u>

- Αν ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι θετικός, δηλαδή: $f'(x_0) > 0$ τότε η γωνία ω είναι οξεία δηλαδή: $\hat{\omega} < 90^o$.
- Αν ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι αρνητικός, δηλαδή: $f'(x_0) < 0$ τότε η γωνία ω είναι αμβλεία, δηλαδή: $\hat{\omega} > 90^o$.
- Αν ο αριθμός είναι $f'(x_0) = 0$,τότε η $\hat{\omega} = 0$ και η εφαπτομένη είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει: $f'(x_0) = \alpha = \varepsilon\varphi\omega$, όπου η εξίσωση της εφαπτομένης: $y = \alpha x + \beta$, στο $\left(x_0, f(x_0)\right)$

Ερώτηση θεωρίας 3

Πότε δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \alpha_2 x + \beta_2$,που είναι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι μεταξύ τους παράλληλες και πότε είναι κάθετες, όπου τα $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$;

<u>Λύση</u>

Για να είναι παράλληλες , αρκεί να έχουν ίδιους συντελεστές διεύθυνσης, δηλ. αρκεί να ισχύει: $\alpha_1 = \alpha_2$.

Για να είναι μεταξύ τους κάθετες , αρκεί να ισχύει: $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

Ερώτηση θεωρίας 4

Πώς βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης, στο σημείο με τετμημένη x_0, της γραφικής παράστασης, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, όπου x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της;

<u>Λύση</u>

Έστω $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο οποίο δέχεται εφαπτομένη. Αυτή ως ευθεία, έχει εξίσωση:

$$y = \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha = f'(x_0) \quad (1).$$

Εξάλλου, το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι και σημείο της εφαπτομένης. Αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού, επαληθεύουν και την εξίσωσή της.

Δηλαδή ισχύει επιπλέον και:

$$f(x_0) = \alpha \cdot x_0 + \beta \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + \beta \quad (2).$$

(υπενθυμίζουμε: $y = f(x)$, οπότε για $x = x_0$ έχουμε: $y_0 = f(x_0)$, που είναι αριθμός.)
Από τη σχέση (2), επιλύοντας ως προς β, το προσδιορίζουμε ως εξής:

$$\beta = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \qquad (3).$$

Όποτε η εξίσωση: $y = \alpha x + \beta$, λόγω και της (3), γίνεται:

$$y = f'(x_0) \cdot x + \left[f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0\right] \Leftrightarrow y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Ερώτηση θεωρίας 5

Πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δέχεται σε κάποιο σημείο της, $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, εφαπτομένη ευθεία;

<u>Λύση</u>

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δέχεται στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ εφαπτομένη, μόνον όταν η f είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0, όπου x_0 είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού της f.

(Ανάλογα, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, τότε η γραφική παράσταση της f, δέχεται εφαπτομένη σε κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της. Επίσης, δεν πρέπει η γραφική παράσταση της f να έχει "διακοπές", αλλά να είναι μια συνεχής καμπύλη.

Εντούτοις, δεν είναι αρκετό η γραφική παράσταση να είναι συνεχής μόνο, διότι μπορεί σε κάποιο ή κάποια σημεία, να παρουσιάζει "γωνίες" ("μύτες"). Οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, όταν η γραφική της παράσταση είναι "λεία", δηλ. δεν κάνει γωνίες, στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να υπάρχει η παράγωγος)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 5x^2$ στο σημείο $x = 3$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 5x^2$ στο σημείο $x = 3$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(3+h) - f(3)$:

  $f(3+h) - f(3) = 5(3+h)^2 - 5 \cdot 3^2 =$

  $= 5\left(9 + 6h + h^2\right) - 45$

  $= \cancel{45} + 30h + 5h^2 - \cancel{45}$

  $= 30h + 5h^2$

- Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$:

  $$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{30h + 5h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(30 + 5h)}{\cancel{h}} = 30 + 5h$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0}(30 + 5h) = 30$$

  Άρα $f'\left(3\right) = 30$

Μεθοδολογία

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f(x) στο σημείο $x = x_0$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$

- Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Άσκηση 2 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να μην υπάρχει η παράγωγος)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=|x-2|$ στο σημείο $x=2$.

Λύση

Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της βάσει του ορισμού της είναι ένα όριο που μπορεί να μην υπάρχει οπότε δεν θα υπάρχει και η παράγωγος.
Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=|x-2|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=2$ του πεδίου ορισμού της. Γιατί για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{|(2+h)-2|-0}{h}=\frac{|\cancel{2}+h-\cancel{2}|}{h}=\frac{|h|}{h} \quad (1)$$

- Αν $h>0$ τότε $|h|=h$ οπότε η (1) γράφεται $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h}{h}=1$

  Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$ (2)

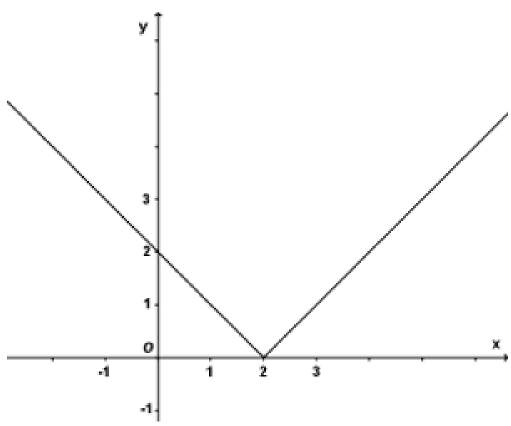
- Αν $h<0$ τότε $|h|=-h$ οπότε η (1) γράφεται $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{-h}{h}=-1$

  Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-1)=-1$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ στο $x=2$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)=|x-2|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=2$ του πεδίου ορισμού της.

Αυτό φαίνεται και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-2|$ η οποία στο σημείο $x=2$ σχηματίζει γωνία και επομένως δεν γίνεται στο σημείο αυτό να φέρουμε εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση.



Μεθοδολογία

Αν το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ για τις θετικές τιμές του h, έχει διαφορετική τιμή απ’ αυτή για τις αρνητικές τιμές τότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=x_0$ του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση 3 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^2-4t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε sec και το x(t) σε m.

Να βρεθεί:

α) Η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα [0,5].

β) Η ταχύτητα όταν t = 3 (δηλαδή 3sec μετά την εκκίνησή του).

<u>Λύση</u>

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε:

Μέση ταχύτητα = $\frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}}=\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$, όπου $h=\left(t_0+h\right)-t_0$

Επομένως η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα [0,5] είναι:

$$\overline{\upsilon}=\frac{x(5)-x(0)}{5-0}=\frac{(5^2-4\cdot5)-0}{5}=\frac{5}{5}=1\ \ m/sec$$

β) Η ταχύτητα υ του υλικού σημείου όταν $t=3$, είναι

$$\upsilon=\lim_{h\to0}\frac{x(3+h)-x(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{[(3+h)^2-4(3+h)]-(-3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{12}-4h+\cancel{3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}(2+h)=2\ \ m/sec$$

Άρα η ταχύτητα του σημείου όταν $t=3$, είναι $\upsilon(2)=2\ \ m/sec$

<u>Μεθοδολογία</u>

α) Η μέση ταχύτητα ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και του οποίου η θέση εκφράζεται από τη συνάρτηση $x(t)$ είναι

Μέση ταχύτητα = $\frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}}=\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$

β) Η ταχύτητα υ ενός κινητού όταν $t=t_0$, είναι η παράγωγος της συνάρτησης που εκφράζει τη θέση του κινητού στο σημείο $t=t_0$

Άσκηση 4 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει εξαρτήματα για εξαεριστήρες. Το κόστος κατασκευής (σε ευρώ) x εξαρτημάτων προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $K(x)=3x^2+20$

α) Να βρεθεί το κόστος κατασκευής 100 εξαρτημάτων.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κόστους (οριακό κόστος) αν $x=10$.

Λύση

α) Το κόστος κατασκευής 100 εξαρτημάτων είναι

$K(100)=3\cdot 100^2+20=3\cdot 10.000+20=30.020$ ευρώ.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν $x=10$ είναι:

$$K'(10)=\lim_{h\to 0}\frac{K(10+h)-K(10)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[3(10+h)^2+20]-320}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3(100+20h+h^2)+20]-320}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{300}+60h+3h^2+\cancel{20}-\cancel{320}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{60h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(60+3h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(60+3h)=60$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν $x=10$ είναι 60.

Μεθοδολογία

- Το κόστος για την κατασκευή x εξαρτημάτων υπολογίζεται από τη συνάρτηση κόστους με αντικατάσταση

- Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους δηλαδή το οριακό κόστος είναι η παράγωγος της συνάρτησης του κόστους σε ένα ορισμένο σημείο

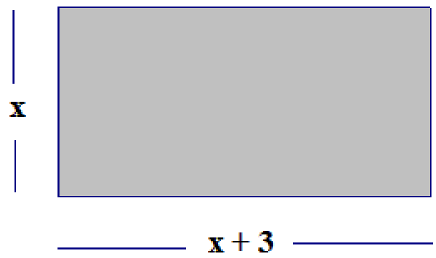
Άσκηση 5 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές x και $x+3$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε του ορθογωνίου ως προς x, όταν $x=3$.

Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση της πλευράς του x, είναι:

$$E(x)=x(x+3)=x^2+3x$$



Ο ρυθμός μεταβολής του $E(x)$ για $x=3$ είναι:

$$E(3)=\lim_{h\to 0}\frac{E(3+h)-E(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[(3+h)^2+3(3+h)]-18}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+6h+h^2+\cancel{9}+3h-\cancel{18}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+9h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+9)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+9)=9$$

Άρα για $x=3$ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου είναι $9m^2$ για κάθε μέτρο κατά το οποίο αυξάνεται το x.

Μεθοδολογία

Προκειμένου να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός σχήματος θα πρέπει να το εκφράσουμε ως συνάρτηση μιας μεταβλητής. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε πρώτα τη μεταβλητή ως προς την οποία θα το εκφράσουμε, π.χ. μια πλευρά του σχήματος και με βάση τα δεδομένα του προβλήματος διαμορφώνουμε τη συνάρτηση του εμβαδού. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι η παράγωγος του εμβαδού για συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής του.

Άσκηση 6 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=3x^2+5, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο επαφής με τετμημένη $x_0=1$.

Λύση

Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=3x^2+5$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(1+h)-f(1)$:

$$f(1+h)-f(1)=3(1+h)^2+5-8=3\left(1+2h+h^2\right)-3=$$

$$3+6h+3h^2-3=6h+3h^2$$

Για h ≠ 0 βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{6h+3h^2}{h}=\frac{\cancel{h}(6+3h)}{\cancel{h}}=6+3h$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+3h)=6$$

Άρα $f'(1)=6$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, σε σημείο της με τετμημένη x_0, δίνεται από τον τύπο:

$y=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in R$ (1)

Για να την προσδιορίσουμε, αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμούς α,β.

Ξέρουμε ότι:

$\alpha=f'(x_0)$ (2)

οπότε η (1) από (2) γίνεται:

$y=f'(x_0)\cdot x+\beta, \beta\in R$ (3)

Το σημείο επαφής είναι το $A\left(x_0,f(x_0)\right)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (3), οπότε έχουμε:

$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+\beta,\beta\in R$ (4)

από όπου επιλύοντας ως προς β έχουμε:
$\beta = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$ (5)

Οπότε η (3) λόγω της (5) γίνεται:

$y = f'(x_0)\cdot x + \left[f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0\right]$ (6)

Επομένως, για $x_0 = 1$ οι (2),(5) γίνονται:

$\alpha = f'(1) = 6, \beta = 2$

οπότε η εξίσωση (6) έχει τη μορφή:

$y = 6x + 2$

Μεθοδολογία

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει.

- Βρίσκουμε τα $f'(x_0), f(x_0)$, στο δοσμένο x_0.

- Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τα $\alpha, \beta \in R$, στην εξίσωση της εφαπτομένης $y = \alpha x + \beta$.
  Αντικαθιστούμε το α με το $f'(x_0)$ και προκύπτει η εξίσωση:
  $y = f'(x_0)\cdot x + \beta$ (1)

- Επειδή το σημείο $\left(x_0, f(x_0)\right)$, ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, (1). Οπότε στην (1), αντικαθιστούμε όπου y το $f(x_0)$ και όπου x το x_0, και έχουμε:

  $$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + \beta \quad (2)$$

  Επιλύουμε τη (2) ως προς β, και αντικαθιστούμε την τιμή του στην (1).

  Οπότε προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση.

Άσκηση 7 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας συνάρτησης, όταν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^2+4x+5$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, αν ο συντελεστής διεύθυνσής της, είναι ίσος με 2.

<u>Λύση</u>

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=x^2+4x+5$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x \in R$. Επιπλέον, ως πολυωνυμική, η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in R$.

- Επειδή οι συντεταγμένες του σημείου επαφής δεν είναι γνωστές, θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$. Αρχικός σκοπός μας είναι να καταλήξουμε, με βάση τα δεδομένα της άσκησης, σε μια εξίσωση ως προς x_0. Οπότε γνωρίζοντας πλέον το x_0, υπολογίζουμε με κατάλληλες αντικαταστάσεις, τον β της εξίσωσης της εφαπτομένης, αφού $\alpha=2$ από υπόθεση.

- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, σε σημείο της με τετμημένη x_0, δίνεται από τον τύπο:

  $$y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta \in R \quad (1)$$

  Για να την προσδιορίσουμε, αρκεί να υπολογίσουμε τους αριθμούς α,β.
  Ξέρουμε ότι:

  $$\alpha=f'(x_0)=2$$

  από υπόθεση. Επομένως η εξίσωση (1), γίνεται:

  $$y=2x+\beta \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :
Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left(x_0+h\right)^2+4\left(x_0+h\right)+5-\left(x_0{}^2+4x_0+5\right)=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2+4x_0+4h+5-x_0^2-4x_0-5=2x_0h+h^2+4h$$

Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2x_0h+h^2+4h}{h}=\frac{h\left(2x_0+h+4\right)}{h}=2x_0+h+4$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h+4\right)=2x_0+4$$

$f'(x_0)=2x_0+4$ (3), που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης α.

Αλλά $\alpha=f'(x_0)=2$ (4), από υπόθεση.

Επομένως, από (3) και (4), έχουμε τη ζητούμενη εξίσωση ως προς x_0:

$2x_0+4=2\Leftrightarrow 2x_0=2-4\Leftrightarrow 2x_0=-2\Leftrightarrow x_0=-1$, που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής.

Οπότε η τεταγμένη του είναι:

$$f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+5=1-4+5=2$$

Άρα το σημείο επαφής είναι:

$$A(-1,2)$$

- Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (2).

  Δηλαδή:

$$2=2\cdot(-1)+\beta\Leftrightarrow 2=-2+\beta\Leftrightarrow \beta=4$$

- Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y=2x+4$$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0,f(x_0)\right)$.

- Σκοπός μας είναι, να βρούμε μια εξίσωση ως προς x_0, από το οποίο έμμεσα θα προσδιορίσουμε με κατάλληλες αντικαταστάσεις τον β, της εξίσωσης της εφαπτομένης $y = \alpha x + \beta$, αφού ο συντελεστής διεύθυνσης α, είναι ήδη δοσμένος από υπόθεση.

- Υπολογίζουμε τα: $f'(x), f'(x_0)$. Επιλύοντας τώρα την εξίσωση: $f'(x_0) = \alpha$, (όπου α γνωστός από υπόθεση), ως προς x_0 και ξέροντας πλέον τις συντεταγμένες $x_0, f(x_0)$ του σημείου επαφής, υπολογίζουμε τον β, αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, επαληθεύουν και την εξίσωση της εφαπτομένης.

- Γνωρίζοντας πλέον και τον β, αφού ο α μας δίδεται εξ αρχής, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

Άσκηση 8 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα $x'x$.

Λύση

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x) = x^2 - 4x - 1$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x \in R$.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :
Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left(x_0 + h\right)^2 - 4\left(x_0 + h\right) + 1 - \left(x_0{}^2 - 4x_0 + 1\right) =$$

$$x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - 4x_0 - 4h + 1 - x_0^2 + 4x_0 - 1 = 2x_0 h + h^2 - 4h$$

Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2x_0 h + h^2 - 4h}{h} = \frac{h\left(2x_0 + h - 4\right)}{h} = 2x_0 + h - 4$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(2x_0 + h - 4\right) = 2x_0 - 4 \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε ότι η γενική εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

  $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in R$ (2)
  Αρκεί να υπολογίσουμε, με τα δεδομένα της άσκησης, τους αριθμούς $\alpha, \beta \in R$, της (2).

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, επειδή δεν μας είναι γνωστό από την αρχή.

- Υπολογισμός του α:

Επειδή η εφαπτομένη $(\varepsilon) \parallel x'x$, η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ είναι $\hat{\omega} = 0^o$, οπότε και η $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 0 = 0$. Εξάλλου, ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = f'(x_0) = \alpha$. Επομένως:

$\alpha = 0 = f'(x_0)$ (3)

Άρα για $\alpha = 0$ η (3) γίνεται:

$y = 0 \cdot x + \beta \Leftrightarrow$

$y = \beta$ (4)

- Προσδιορίζουμε την τετμημένη x_0 του σημείου επαφής α, ως εξής:

  Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $f'(x_0) = 2x_0 - 4 = 0$, λόγω της (3).

  Επιλύουμε την εξίσωση: $2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$, που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής.

  Για $x_0 = 2$, βρίσκουμε και την τεταγμένη του A, από τον τύπο της f:

  $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

- Υπολογισμός του β:

  Το σημείο επαφής είναι το $A(2, -3)$, και επειδή το A είναι και σημείο της εφαπτομένης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της (4):

  $-3 = 0 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$ (5)

  Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης, λόγω των (4) και (5), είναι η οριζόντια ευθεία:

  $y = -3$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$

- Έμμεσα, προσδιορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης, ως εξής:

  Όταν μια ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι: $\alpha = f'(x_0) = 0$.

- Σκοπός μας τώρα είναι, να βρούμε μια εξίσωση ως προς x_0, από το οποίο έμμεσα θα προσδιορίσουμε με κατάλληλες αντικαταστάσεις τον β, της εξίσωσης της εφαπτομένης $y = \alpha x + \beta$, αφού ο συντελεστής διεύθυνσης α, έχει ήδη προσδιοριστεί από τα δεδομένα της άσκησης.

- Υπολογίζουμε τα: $f'(x), f'(x_0)$. Επιλύοντας τώρα την εξίσωση: $f'(x_0) = \alpha$, ως προς x_0 και ξέροντας πλέον τις συντεταγμένες $x_0, f(x_0)$ του σημείου επαφής, υπολογίζουμε τον β, αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, επαληθεύουν και την εξίσωση της εφαπτομένης.

- Γνωρίζοντας πλέον και τον β, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

Άσκηση 9 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 7x + 3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ γωνία 45°.

<u>Λύση</u>

Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x) = x^2 - 7x + 3$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x \in R$. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - 7(x_0 + h) + 3 - (x_0{}^2 - 7x_0 + 3) =$$

$$x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 7x_0 - 7h + 3 - x_0^2 + 7x_0 - 3 = 2x_0h + h^2 - 7h$$

Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2x_0h + h^2 - 7h}{h} = \frac{h(2x_0 + h - 7)}{h} = 2x_0 + h - 7$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h - 7) = 2x_0 - 7 \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε ότι η γενική εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

  $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in R$ (2)

  Αρκεί να υπολογίσουμε, με τα δεδομένα της άσκησης, τους αριθμούς $\alpha, \beta \in R$, της (2).

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A(x_0, f(x_0))$, επειδή δε μας είναι γνωστό από την αρχή.

- Υπολογισμός του $\alpha \in R$:

Επειδή η γωνία $\hat{\omega}$, που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$, είναι γνωστή, άρα είναι γνωστή και η $\varepsilon\varphi\omega$. Όμως, $\varepsilon\varphi\omega = \alpha = f'(x_0)$.

Για γωνία $\hat{\omega} = 45^o$, έχουμε: $\varepsilon\varphi 45 = 1$. Οπότε:

$\alpha = 1$και $f'(x) = 1$ (3)

Επομένως, η (2) για $\alpha = 1$, γίνεται:

$(\varepsilon): y = 1 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta, \beta \in R$ (4)

Εξάλλου από (1) και (3), για $x = x_0$ έχουμε:

$$f'(x_0) = 2x_0 - 7 = 1$$

Δηλαδή:

$$2x_0 - 7 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 4,$$

που είναι η τετμημένη του σημείου A.

Οπότε, για $x_0 = 4$ ο τύπος της $f(x) = x^2 - 7x + 3$, δίνει:

$f(4) = 4^2 - 7 \cdot 4 + 3 = 19 - 28 = -9$

Επομένως, το σημείο επαφής είναι:

$A(4, -9)$

- Υπολογισμός του $\beta \in R$:

Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης f, άρα οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (4).
Δηλαδή:

$-9 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -13$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης, γίνεται:

$y = x - 13$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

- Έμμεσα, προσδιορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης, ως εξής:

Όταν μια ευθεία τέμνει υπό δοσμένη γωνία $\hat{\omega}$ τον άξονα $x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι: $\alpha = f'(x_0) = \epsilon\phi\omega$, όπου $\epsilon\phi\omega$ είναι γνωστός αριθμός.

- Σκοπός μας τώρα είναι, να βρούμε μια εξίσωση ως προς x_0, από το οποίο έμμεσα θα προσδιορίσουμε με κατάλληλες αντικαταστάσεις τον β, της εξίσωσης της εφαπτομένης $y = \alpha x + \beta$, αφού ο συντελεστής διεύθυνσης α, έχει ήδη προσδιοριστεί από τα δεδομένα της άσκησης.

- Υπολογίζουμε τα: $f'(x), f'(x_0)$. Επιλύοντας τώρα την εξίσωση: $f'(x_0) = \alpha,$ ως προς x_0 και ξέροντας πλέον τις συντεταγμένες $x_0, f(x_0)$ του σημείου επαφής, υπολογίζουμε τον β, αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, επαληθεύουν και την εξίσωση της εφαπτομένης.

Γνωρίζοντας πλέον και τον β, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

Άσκηση 10 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, αν είναι:

α) παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon_1): y = 3x - 1$,

β) κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 3$.

<u>Λύση</u>

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x) = x^2 - 5x + 2$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x \in R$.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :
Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left(x_0 + h\right)^2 - 5\left(x_0 + h\right) + 2 - \left(x_0^{\,2} - 5x_0 + 2\right) =$$

$$x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 5x_0 - 5h + 2 - x_0^2 + 5x_0 - 2 = 2x_0h + h^2 - 5h$$

Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2x_0h + h^2 - 5h}{h} = \frac{h\left(2x_0 + h - 5\right)}{h} = 2x_0 + h - 5$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2x_0 + h - 5\right) = 2x_0 - 5 \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε ότι η γενική εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

  $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in R$ (2)

  Αρκεί να υπολογίσουμε, με τα δεδομένα της άσκησης, τους αριθμούς $\alpha, \beta \in R$, της (2).

- α) Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, επειδή δε μας είναι γνωστό από την αρχή.
  Γνωρίζουμε ότι, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.
  Έχουμε τις ευθείες:
  $(\varepsilon_1): y = 3x - 1$ και $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$,

  που είναι παράλληλες. Άρα $\alpha = 3$.

  Η εξίσωση της εφαπτομένης (2) , για $\alpha = 3$, γίνεται:

$$(\varepsilon): y = 3x + \beta \quad (3)$$

  Σκοπός μας τώρα, είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση, ως προς x_0.
  Επειδή, $f'(x_0) = \alpha = 3$, άρα:

$$f'(x_0) = 3 \quad (4)$$

  Λόγω της (1), έχουμε:

$$f'(x_0) = 2x_0 - 5 \quad (5)$$

  Από τις (4),(5), προκύπτει:

$$2x_0 - 5 = 3 \Leftrightarrow$$
$$2x_0 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 4,$$

  που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής A.
  Από τον τύπο της $f(x)$ για $x_0 = 4$, βρίσκουμε και την τεταγμένη του σημείου A.
  Δηλαδή:

$$f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 2 = -2$$

  Επομένως, το σημείο επαφής είναι:

$$A(4, -2)$$

  Επειδή το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη (ε), οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (3).

  Οπότε έχουμε:

$$-2 = 3 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow$$
$$\beta = -14$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y = 3x - 14$$

β) Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $B\left(x_0, f(x_0)\right)$, επειδή δε μας δίνεται εξ αρχής. Γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες, που είναι κάθετες μεταξύ τους, έχουν γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους ίσο με -1

Έχουμε τις ευθείες:

$$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 3 \text{ και } (\varepsilon): y = \alpha x + \beta,$$

που είναι κάθετες μεταξύ τους. Άρα $\frac{1}{2}\cdot\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (2), για $\alpha = -2$, γίνεται:

$$(\varepsilon): y = -2x + \beta \quad (6)$$

Σκοπός μας τώρα, είναι να κατασκευάσουμε μια εξίσωση, ως προς x_0.

Επειδή, $f'(x_0) = \alpha = -2$, άρα:

$$f'(x_0) = -2 \quad (7)$$

Λόγω της (1), έχουμε:

$$f'(x_0) = 2x_0 - 5 \quad (5)$$

Από τις (5),(7), αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα, θα είναι και τα δεύτερα:

$2x_0 - 5 = -2 \Leftrightarrow$

$2x_0 = -2 + 5 \Leftrightarrow$

$2x_0 = 3 \Leftrightarrow$

$x_0 = \frac{3}{2}$,

που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής B.

Από τον τύπο της $f(x)$ για $x_0 = \frac{3}{2}$, βρίσκουμε και την τεταγμένη του σημείου B.

Δηλαδή:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\cdot\frac{3}{2} + 2 = -\frac{13}{4}$$

Επομένως, το σημείο επαφής είναι:

$$B\left(\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$$

Επειδή το σημείο B ανήκει στην εφαπτομένη (ε), οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (6).

Οπότε έχουμε:

$$-\frac{13}{4}=(-2)\cdot\frac{3}{2}+\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{4}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y=-2x-\frac{1}{4}$$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

- Έμμεσα, προσδιορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης, ως εξής:

  Όταν μια ευθεία είναι παράλληλη ή κάθετη, σε μια άλλη γνωστή ευθεία, τότε για τους συντελεστές διεύθυνσής τους ισχύει αντίστοιχα, ότι οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι ίσοι ή το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι ίσο με -1. Έτσι, προσδιορίζουμε τον συντελεστή α της $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta\ \alpha,\beta\in R$.

- Σκοπός μας τώρα είναι, να βρούμε μια εξίσωση ως προς x_0, από το οποίο έμμεσα θα προσδιορίσουμε με κατάλληλες αντικαταστάσεις τον β, της εξίσωσης της εφαπτομένης $y=\alpha x+\beta$, αφού ο συντελεστής διεύθυνσης α, έχει ήδη προσδιοριστεί από τα δεδομένα της άσκησης.

- Υπολογίζουμε τα: $f'(x), f'(x_0)$. Επιλύοντας τώρα την εξίσωση: $f'(x_0)=\alpha,$ ως προς x_0 και ξέροντας πλέον τις συντεταγμένες $x_0, f(x_0)$ του σημείου επαφής, υπολογίζουμε τον β, αφού οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, επαληθεύουν και την εξίσωση της εφαπτομένης.

Γνωρίζοντας πλέον και τον β, προσδιορίζουμε τη ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Από ύψος 80m αφήνουμε να πέσει κατακόρυφα προς τα κάτω μια πέτρα. Η απόσταση που διανύει η πέτρα δίνεται από τη συνάρτηση $S(t)=\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε sec, το $S(t)$ σε m και α είναι η επιτάχυνση της πέτρας με $\alpha=10m/sec^2$. Να υπολογιστεί η διάρκεια της πτώσης και η ταχύτητα της πέτρας τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος.

<u>Λύση</u>

Για $\alpha=10m/sec^2$ η συνάρτηση $S(t)=\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$ γράφεται $S(t)=5t^2$

Η απόσταση που διήνυσε η πέτρα είναι $S=80m$ οπότε $80=5t^2,\ t^2=16,\ t=4\,sec$
Άρα η πτώση της πέτρας από ύψος 80m διήρκεσε 4 sec.

Η ταχύτητα υ της πέτρας τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος όταν δηλαδή $t=4$, είναι

$$\upsilon=\lim_{h\to 0}\frac{S(4+h)-S(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(4+h)^2-80}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(16+8h+h^2)-80}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{80}+40h+5h^2\cancel{-80}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{40h+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(40+5h)}{\cancel{h}}=$$

$$\lim_{h\to 0}(40+5h)=40m/s$$

Άρα η ταχύτητα της πέτρας όταν $t=4$, είναι $\upsilon(4)=40\ m/sec$

<u>Μεθοδολογία</u>

Για να υπολογίζουμε τη διάρκεια της πτώσης βρίσκουμε το χρόνο t από τον τύπο που εκφράζει την απόσταση που διήνυσε η πέτρα.

Για να υπολογίζουμε την ταχύτητα της πέτρας τη στιγμή που αγγίζει το έδαφος βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης που εκφράζει την απόσταση, τη χρονική στιγμή που η πέτρα αγγίζει το έδαφος.

Άσκηση 2 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Ένα υλικό σημείο κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη συνάρτηση $S(t)=-t^2+6t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε sec και το $S(t)$ σε μέτρα.

α) Να βρεθεί η θέση του σημείου τη χρονική στιγμή $t=0$.

β) Να εξετάσετε αν τις χρονικές στιγμές $t=2$ και $t=5$ το κινητό κινείται στη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση.

γ) Πότε το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

ε) Να βρεθεί το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $5\sec$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $S(0)=0$

β) Η ταχύτητα υ όταν $t=2$, είναι:

$$\upsilon(2)=\lim_{h\to 0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[-(2+h)^2+6(2+h)]-8}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(4+4h+h^2)+12+6h-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{4}-4h-h^2+\cancel{12}+6h-\cancel{8}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h+2)}{\cancel{h}}=2m/\sec$$

Το θετικό πρόσημο της ταχύτητας φανερώνει ότι το σημείο τη χρονική στιγμή $t=2$ κινείται στη θετική κατεύθυνση.

Η ταχύτητα υ όταν $t=5$, είναι:

$$\upsilon(5)=\lim_{h\to 0}\frac{S(5+h)-S(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[-(5+h)^2+6(5+h)]-5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[-(25+10h+h^2)+30+6h]-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{25}-10h-h^2+\cancel{30}+6h-\cancel{5}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-h-4)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(-h-4)=-4m/\sec$$

Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας φανερώνει ότι το σημείο τη χρονική στιγμή $t=5$ κινείται στην αρνητική κατεύθυνση.

γ) Το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $\upsilon(t)=0$

$$\upsilon=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[-(t+h)^2+6(t+h)]-(-t^2+6t)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(t^2+2th+h^2)+6t+6h+t^2-6t}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-t^2-2th-h^2+6t+6h+t^2-6t}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2th-h^2+6h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-2t-h+6)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(-2t-h+6)=(-2t+6)m/sec$$

Για να είναι $\upsilon(t)=0$ πρέπει $-2t+6=0,\ t=3\,sec$

Άρα το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $t=3\,sec$.

δ) Το κινητό κινείται

- στη θετική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t)>0$ δηλαδή όταν $-2t+6>0,\ 0\le t<3$

- στην αρνητική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t)<0$ δηλαδή όταν $-2t+6<0,\ t>3$

ε) Το διάστημα που διήνυσε το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $5\,sec$

– για το χρονικό διάστημα [0,3] είναι $S_1=|S(3)-S(0)|=|-9+18|=9\ m$

– για το χρονικό διάστημα [3,5] είναι $S_2=|S(5)-S(3)|=|5-9|=4\ m$

Άρα το συνολικό διάστημα που διήνυσε το κινητό στη διάρκεια των πρώτων $5\,sec$ είναι $S=S_1+S_2=9m+4m=13m$.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $\upsilon(t)=0$

- Το κινητό κινείται στην αρνητική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t)<0$ και στη θετική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t)>0$

- Το συνολικό διάστημα που διανύει ένα κινητό στη διάρκεια ενός διαστήματος είναι το άθροισμα των επιμέρους διαστημάτων που βρίσκονται όταν χωρίσουμε το διάστημα που διήνυσε το κινητό στα υποδιαστήματα του χρόνου που το κινητό κινείται στη θετική και την αρνητική κατεύθυνση

Άσκηση 3 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Η αξία ενός αυτοκινήτου σε ευρώ μετά από t χρόνια χρήσης του ($t \geq 1$) εκφράζεται από τη συνάρτηση $A(t) = 15.000\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{10}\right)$

α) Ποια είναι η αξία του αυτοκινήτου μετά από 5 χρόνια χρήσης του;

β) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου στο τέλος του $5^{ου}$ χρόνου;

Λύση

α) Μετά από 5 χρόνια χρήσης η αξία του αυτοκινήτου θα είναι:

$$A(5) = 15.000\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right) = 15.000\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{10}\right) = 15.000\frac{5}{10} = 7.500 \text{ ευρώ.}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του όταν $t = 5$ είναι:

$$A'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{15.000\left(\frac{2}{5+h} + \frac{1}{10}\right) - 15.000\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{15.000\left(\frac{2}{5+h} + \frac{1}{10} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{15.000\left(\frac{2}{5+h} - \frac{2}{5}\right)}{h} = 15.000\lim_{h\to 0}\frac{\frac{10-10-2h}{5(5+h)}}{h} = 15.000\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}}{5\cancel{h}(5+h)} =$$

$$= 15.000\lim_{h\to 0}\frac{-2}{25+5h} = 15.000\left(-\frac{2}{25}\right) = -1.200$$

Άρα μετά από 5 χρόνια χρήσης η αξία του αυτοκινήτου μειώνεται (αφού το πρόσημο της παραγώγου είναι αρνητικό) με ρυθμό 1.200.

Μεθοδολογία

- Η αξία του αυτοκινήτου μετά από t χρόνια χρήσης του , βρίσκεται με αντικατάσταση στην αντίστοιχη συνάρτηση.
- Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου ως προς το χρόνο όταν $t = t_0$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης που εκφράζει την αξία του για $t = t_0$
- Όταν ο ρυθμός μεταβολής της αξίας ενός αντικειμένου είναι αρνητικός τότε η αξία του μειώνεται.

Άσκηση 4 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές x (x>0).

α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 2$.

β) Να βρεθεί για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε προς x, είναι 5.

<u>Λύση</u>

α) Το εμβαδόν του ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές x, ως συνάρτηση της πλευράς του x , γράφεται:

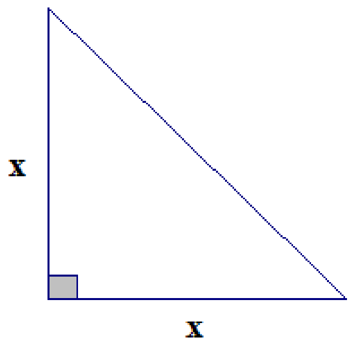
$$E(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του $E(x)$ για $x = 2$ είναι:

$$E'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2+h)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4+4h+h^2)-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2}+2h+\frac{h^2}{2}-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+\frac{h^2}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+\frac{h}{2})}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2+\frac{h}{2}) = 2m^2$$



Άρα $E'(2) = 2m^2$.

β) Έστω x_0 η ζητούμενη τιμή του x. Πρέπει $E'(x_0) = 5$. Είναι

$$E'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x_0+h)^2-\frac{1}{2}x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x_0^2+2x_0h+h^2)-\frac{1}{2}x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}x_0^2+x_0h+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0h+\frac{1}{2}h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(x_0+\frac{1}{2}h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(x_0+\frac{1}{2}h) = \lim_{h\to 0}x_0 = x_0$$

Άρα $E'(x_0) = x_0$. Αλλά $E'(x_0) = 5$. Επομένως $x_0 = 5\,m$.

Μεθοδολογία

- Αφού γράψουμε το εμβαδόν του σχήματος ως συνάρτηση μιας πλευράς του x, με βάση τον ορισμό του εμβαδού του σχήματος που γνωρίζουμε από τη γεωμετρία, υπολογίζουμε την παράγωγο του όταν $x = x_0$ και βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του.

- Για να βρούμε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E έχει μια συγκεκριμένη τιμή υποθέτουμε ότι η τιμή αυτή είναι η x_0 και βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού στο σημείο $x = x_0$. Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτει η ζητούμενη τιμή.

Άσκηση 5 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης η οποία περνάει από ένα σημείο που δεν ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης)

Έστω συνάρτηση f, με $f(x)=x^2-x-2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που διέρχονται από το σημείο $A(4,6)$.

<u>Λύση</u>

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=x^2-x-2$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x\in R$. Επιπλέον, ως πολυωνυμική, η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0\in R$.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left(x_0+h\right)^2-\left(x_0+h\right)-2-\left(x_0{}^2-x_0-2\right)=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2-x_0-h-2-x_0^2+x_0+2=2x_0h+h^2-h \quad (1)$$

Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2x_0h+h^2-h}{h}=\frac{h\left(2x_0+h-1\right)}{h}=2x_0+h-1 \quad (2)$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(2x_0+h-1\right)=2x_0-1$ οπότε, $f'(x_0)=2x_0-1$ (3), που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης α

- Ελέγχουμε, αν το σημείο A, ανήκει ή όχι, στην καμπύλη της συνάρτησης f. Θέτουμε τις συντεταγμένες του σημείου A, στον τύπο $f(x)=x^2-x-2$, οπότε για $x=4$ και $f(x)=6$, διαπιστώνουμε ότι: $6\neq 4^2-4-2 \Leftrightarrow 6\neq 10$.

  Άρα, το σημείο A, δεν ανήκει στη καμπύλη της f.

- Επειδή δε γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου ή των σημείων επαφής, της εφαπτομένης ή των εφαπτομένων της καμπύλης της f, θεωρούμε ως σημείο επαφής το $K\left(x_0, f(x_0)\right)$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τις $f'(x_0), f(x_0)$, ως συναρτήσεις του x_0, θα προσδιορίσουμε τα α, β και αυτά ως συναρτήσεις του x_0.

- Απώτερος σκοπός μας είναι, με κατάλληλες αντικαταστάσεις και σχέσεις, να προσδιορίσουμε ακριβώς την τιμή (ή τις τιμές) της τετμημένης x_0, του σημείου A. Οπότε έμμεσα, θα προσδιορίσουμε και τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$, της εξίσωσης της εφαπτομένης (ή εφαπτόμενων):

$$y = \alpha x + \beta \quad (4)$$

- Γνωρίζουμε ότι, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι: $\alpha = f'(x_0)$, οπότε η (4) γίνεται:

$$y = f'(x_0) \cdot x + \beta, \beta \in R \quad (5)$$

Από την (3) έχουμε:

$$\alpha = f'(x_0) = 2x_0 - 1 \quad (4)$$

Επομένως, η (5) λόγω (4), γίνεται:

$$y = (2x_0 - 1)x + \beta, \beta \in R \quad (6)$$

Εξάλλου, η εφαπτομένη (ή εφαπτόμενες) διέρχεται από το δοσμένο σημείο $A(4,6)$. Επομένως οι συντεταγμένες του A, θα επαληθεύουν την (6). Δηλαδή θα έχουμε:

$$6 = (2x_0 - 1) \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 6 = 8x_0 - 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 10 - 8x_0 \quad (7)$$

Παρατηρούμε ότι, $\alpha = 2x_0 - 1$ και $\beta = 10 - 8x_0$, δηλαδή εκφράζονται ως συναρτήσεις του x_0.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (6) λόγω της (7), γίνεται:

$$y = (2x_0 - 1)x + 10 - 8x_0 \quad (8).$$

- Υπολογίζουμε το $f(x_0) = x_0^2 - x_0 - 2$. Επειδή το σημείο επαφής $K\left(x_0, f(x_0)\right)$, ανήκει και στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του, x_0 και $x_0^2 - x_0 - 2$, θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (7). Άρα έχουμε:

$$x_0^2 - x_0 - 2 = (2x_0 - 1)x_0 + 10 - 8x_0 \Leftrightarrow$$
$$x_0^2 - x_0 - 2 = 2x_0^2 - x_0 + 10 - 8x_0 \Leftrightarrow$$
$$x_0^2 - x_0 - 2 - 2x_0^2 + x_0 - 10 + 8x_0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-x_0^2 + 8x_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_0 - 2)(x_0 - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$x_0 = 2$ ή $x_0 = 6$

($x_0^2 - 8x_0 + 12 = x_0^2 - (2+6)x_0 + 2\cdot 6$, άρα $x_0 = 2$ ή $x_0 = 6$).

Επομένως έχουμε δύο σημεία επαφής, οπότε διέρχονται δύο εφαπτόμενες από το σημείο $A(4,6)$, προς την καμπύλη της f.

- Από τη σχέση (8), για $x_0 = 2$, προκύπτει η εξίσωση:

  $y = (2\cdot 2 - 1)x + 10 - 8\cdot 2 \Leftrightarrow y = 3x - 6$, η μια εφαπτομένη από το A.

  Πάλι, από τη σχέση (8), για $x_0 = 6$, προκύπτει η εξίσωση:

  $y = (2\cdot 6 - 1)x + 10 - 8\cdot 6 \Leftrightarrow y = 11x - 38$, η δεύτερη εφαπτομένη από το A.

<u>Μεθοδολογία</u>

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0, βρίσκοντας την $f'(x)$.

- Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, που διέρχεται από σημείο $A(\kappa,\lambda)$, με $\kappa,\lambda \in R$ γνωστές συντεταγμένες, το οποίο δε βρίσκεται πάνω στην καμπύλη της f, εργαζόμαστε ως εξής:
  Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $K\left(x_0, f(x_0)\right)$.

- Βασικός σκοπός μας είναι, να κατασκευάσουμε μια εξίσωση ως προς x_0, και επιλύοντας ως προς αυτό, να το προσδιορίσουμε.

- Γνωρίζουμε ότι, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y = \alpha x + \beta,\ \alpha,\beta \in R \quad (1)$$

- Ακόμη γνωρίζουμε ότι $\alpha = f'(x_0)$. Οπότε η (1) γίνεται:
  $(\varepsilon): y = f'(x_0)x + \beta, \beta \in R$. (2)

- Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(\kappa,\lambda)$, επομένως οι συντεταγμένες του κ,λ θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης (2).

Δηλαδή ισχύει:

$\lambda = f'(x_0)\kappa + \beta, \beta \in R$ (3)

Εξάλλου, η εφαπτομένη (ε), διέρχεται και από το σημείο $K\left(x_0, f(x_0)\right)$, επομένως οι συντεταγμένες του $x_0, f(x_0)$, θα επαληθεύουν την εξίσωσή της (2).
Άρα, θα έχουμε:

$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + \beta$ (4)

Από τις σχέσεις (3),(4), προσδιορίζουμε την τετμημένη x_0 του σημείου K και τον β, της εξίσωσης (1).

- Τέλος, για τις τιμές του x_0 που βρήκαμε, προσδιορίζουμε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που διέρχονται από το σημείο K, αφού βρούμε και τα αντίστοιχα $f(x_0)$.

- Γενική σκέψη: Μια ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, όταν και μόνον όταν ισχύουν ταυτόχρονα:

$\begin{cases} f'(x_0) = \alpha \\ f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \end{cases}$, και θα πρέπει να βρεθεί κοινή λύση και για τις δύο αυτές εξισώσεις.

Άσκηση 6 (Εύρεση παραμέτρου, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εφάπτεται στον άξονα xx')

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2-4x+\kappa, \kappa\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του κ, αν η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

<u>Λύση</u>

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=x^2-4x+\kappa$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x\in R$.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left(x_0+h\right)^2-4\left(x_0+h\right)+\kappa-\left(x_0{}^2-4x_0+\kappa\right)=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2-4x_0-4h+\kappa-x_0^2+4x_0-\kappa=2x_0h+h^2-4h$$

Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2x_0h+h^2-4h}{h}=\frac{h\left(2x_0+h-4\right)}{h}=2x_0+h-4$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h-4\right)=2x_0-4 \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε ότι η γενική εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

  $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in R$ (2)

  Αρκεί να υπολογίσουμε, με τα δεδομένα της άσκησης, τους αριθμούς $\alpha,\beta\in R$, της (2).

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, επειδή δε μας είναι γνωστό από την αρχή.
  Γνωρίζουμε ότι, κάθε σημείο του άξονα $x'x$, έχει τεταγμένη ίση με μηδέν. Επομένως και το σημείο $A\in x'x$, θα έχει τεταγμένη:

$f(x_0)=0$

Δηλαδή:
$A(x_0,0)$

- Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A, ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$, και σχηματίζει με τον εαυτό του, γωνία $\hat{\omega}=0^o$.
  Άρα θα ισχύει:
  $εφ0^o=0$
  Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης, θα είναι:
  $\alpha=εφ0=f'(x_0)=0$
  Επομένως η εξίσωση (2), γίνεται:
  $(\varepsilon): y=0x+\beta \Leftrightarrow$
  $y=\beta, \beta\in R$ (3)
  Επειδή και $f'(x_0)=0$, από την (1), για $x=x_0$, έχουμε εξίσωση ως προς x_0:
  $2x_0-4=0 \Leftrightarrow$
  $x_0=2$
  Γενικά, κάθε ευθεία παράλληλη στο $x'x$, έχει εξίσωση $y=\beta,\beta\in R$, ενώ ο άξονας $x'x$, έχει εξίσωση $y=0$.
  Οπότε το σημείο επαφής είναι:
  $A(2,0)$

- Επειδή το σημείο $A(2,0)$ ανήκει στην εξίσωση της εφαπτομένης (3), οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Δηλαδή:
  $0=0\cdot 2+\beta \Leftrightarrow$
  $\beta=0$
  Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$, του οποίου η εξίσωση είναι:
  $y=0$

- Το σημείο $A(2,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. Άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση:
  $f(x)=x^2-4x+\kappa$
  Δηλαδή:
  $0=2^2-4\cdot 2+\kappa \Leftrightarrow$
  $\kappa=8-4 \Leftrightarrow$
  $\kappa=4$

  Άρα η τιμή της παραμέτρου $\kappa\in R$, για την οποία η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον $x'x$, είναι $\kappa=4$.

Μεθοδολογία

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

- Όμως, όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, δηλαδή $f(x_0)=0$. Επομένως το σημείο επαφής είναι:
  $A(x_0, 0)$

- Η γωνία κλίσης του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι ίση με μηδέν. Οπότε έχουμε:
  $\varepsilon\varphi 0 = 0 = f'(x_0)$

- Από την εξίσωση $f'(x_0)=0$, προσδιορίζουμε την τετμημένη x_0 του σημείου επαφής.

- Επειδή το σημείο A ανήκει και στην καμπύλη της f, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως, επιλύουμε την εξίσωση $f(x_0)=0$ και προσδιορίζουμε την τιμή του $\kappa \in R$.

- Γενική σκέψη: Η γραφική παράσταση C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f εφάπτεται στον οριζόντιο άξονα $x'x$, όταν και μόνον όταν υπάρχει $x_0 \in D_f$ έτσι ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής σχέσεις:

  $$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=0 \end{cases}$$

  (Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι $y=0$).

Άσκηση 7 (Δοθείσης συνάρτησης ζητείται να αποδειχθεί ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη της)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+x+2$. Να δείξετε ότι, η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+1, x\in\mathbb{R}$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=x^2+x+2$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x\in R$.

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής :
Βρίσκουμε τη διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left(x_0+h\right)^2+\left(x_0+h\right)+2-\left({x_0}^2+x_0+2\right)=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2+x_0+h+2-x_0^2-x_0-2=2x_0h+h^2+h$$

Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2x_0h+h^2+h}{h}=\frac{h\left(2x_0+h+1\right)}{h}=2x_0+h+1$$

Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h+1\right)=2x_0+1 \quad (1)$$

Εφόσον η f παραγωγίζεται, για κάθε $x\in R$, άρα θα δέχεται και εφαπτομένη σε κάθε σημείο της.
Γενική σκέψη: Μια ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε κάποιο σημείο της, όταν και μόνον όταν υπάρχει στο πεδίο ορισμού της ένα x_0, τέτοιο ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\begin{cases} f'(x_0)=\alpha \\ f(x_0)=\alpha x_0+\beta, \end{cases}$$

δηλαδή θα πρέπει να βρεθεί κοινή λύση και για τις δύο αυτές εξισώσεις.
Αν δεν υπάρχει κοινή λύση, τότε δεν μπορεί η (ε) να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

- Έστω $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, το σημείο επαφής (αν αυτό υπάρχει).

- Κατασκευάζουμε την ισότητα: $f'(x_0)=\alpha$, όπου απαιτούμε, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στη θέση x_0, να είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε). Δηλαδή:
  $f'(x_0)=2x_0+1$,
  που προκύπτει από την (1) για $x=x_0$.
  Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι ίσος με 3.Επομένως έχουμε την ισότητα:
  $2x_0+1=3$ (2)

- Κατασκευάζουμε την ισότητα: $f(x_0)=\alpha x_0+\beta$, όπου $f(x_0)=x_0^2+x_0+2$ και όπου $\alpha x_0+\beta$, θέτουμε $3x_0+1$, αφού η τετμημένη x_0 του κοινού σημείου επαφής τους $A\left(x_0,f(x_0)\right)$, θα επαληθεύει τις αντίστοιχες εξισώσεις του.

  Επομένως προκύπτει η ισότητα:
  $x_0^2+x_0+2=3x_0+1$ (3)

  Οπότε από (2) και (3), έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_0+1=3 \\ x_0^2+x_0+2=3x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_0=2 \\ x_0^2-2x_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0=1 \\ (x_0-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

  $x_0=1$,
  που είναι η κοινή ρίζα και των δύο ισοτήτων.

  Επομένως υπάρχει $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της f, έτσι ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+1$, να εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A\left(1,f(1)\right)$.

  ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για την επίλυση του πιο πάνω συστήματος των εξισώσεων (2),(3), μπορούμε να εργασθούμε και ως εξής:

- Επιλύουμε την πιο εύκολη ως προς τις πράξεις, εξίσωση του x_0, και την τιμή που βρίσκουμε την αντικαθιστούμε στην δεύτερη ισότητα του συστήματος. Αν αυτή επαληθεύεται, τότε υπάρχει σημείο επαφής. Αν όχι, τότε δεν υπάρχει σημείο επαφής.

Δηλαδή, εδώ θα έχουμε:

$2x_0 + 1 = 3 \Leftrightarrow$

$2x_0 = 2 \Leftrightarrow$

$x_0 = 1$,

οπότε για $x_0 = 1$, η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$1^2 + 1 + 2 \overset{(;)}{=} 3 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow$

$4 = 4$, που ισχύει προφανώς.

Μεθοδολογία

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A(x_0, f(x_0))$.

- Μια ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε κάποιο σημείο της, όταν και μόνον όταν υπάρχει x_0 στο πεδίο ορισμού της f τέτοιο ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\begin{cases} f'(x_0) = \alpha \\ f(x_0) = \alpha x_0 + \beta, \end{cases}$$

δηλαδή θα πρέπει να βρεθεί κοινή λύση και για τις δύο αυτές εξισώσεις.
Αν δεν υπάρχει κοινή λύση, τότε δεν μπορεί η (ε) να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

- Από την εξίσωση: $f'(x_0) = \alpha$, προσδιορίζουμε την τιμή του x_0.

- Αν για την τιμή του x_0 που βρήκαμε, επαληθεύεται και η εξίσωση $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$, τότε η δοσμένη ευθεία εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

- Αν για την τιμή του x_0 που βρήκαμε, δεν επαληθεύεται η δεύτερη εξίσωση, τότε η δοσμένη ευθεία δεν εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

Άσκηση 8 (Εύρεση παραμέτρου, ώστε μία ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=x^2+x+4$ και ευθεία, με εξίσωση $(\varepsilon): y=3x+\kappa, \kappa \in R$. Να προσδιορίσετε την τιμή του κ, ώστε η (ε) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Λύση

- Αρχικά προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, που είναι το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο των R, στο οποίο ο τύπος $f(x)=x^2+x+4$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, ορίζεται για κάθε $x \in R$.

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 εργαζόμαστε ως εξής.
  Βρίσκουμε τη διαφορά: $f(x_0+h)-f(x_0)$
  $f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+(x_0+h)+4-(x_0{}^2+x_0+4)=$
  $x_0^2+2x_0h+h^2+x_0+h+4-x_0^2-x_0-4=2x_0h+h^2+h$
  Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
  $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{2x_0h+h^2+h}{h}=\dfrac{h(2x_0+h+1)}{h}=2x_0+h+1$
  Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
  $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h+1)=2x_0+1,(1)$

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το σημείο $A(x_0,f(x_0))$

- Γνωρίζουμε ότι, όταν μια ευθεία με εξίσωση $y=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in R$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως

  $\begin{cases} f'(x_0)=\alpha \\ f(x_0)=\alpha x+\beta \end{cases}$ επομένως θα ισχύουν $(\Sigma)\begin{cases} f'(x_0)=3 \\ f(x_0)=3x_0+\kappa \end{cases}$

  Δηλαδή , συντελεστής διεύθυνσης $f'(x_0)=2x_0+1$, της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, (που προκύπτει από την (1) για $x=x_0$) θα πρέπει να είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνση $\alpha = 3$ της ευθείας (ε) οπότε έχουμε την ισότητα:

$2x_0 + 1 = 3, (2)$

Εξάλλου ο τύπος της συνάρτησης f για $x = x_0$, δίνει: $f(x_0) = x_0^2 + x_0 + 4, (3)$

Οπότε το σύστημα (Σ), λόγω των (2) και (3), γίνεται : $(\Sigma')\begin{cases} 2x_0 + 1 = 3 \\ x_0^2 + x_0 + 4 = 3x_0 + \kappa \end{cases}$

Επιλύοντας ως προς x_0 , την πρώτη εξίσωση του (Σ΄), έχουμε:

$2x_0 + 1 = 3 \Leftrightarrow 2x_0 = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$ που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής $A(x_0, f(x_0))$

Τέλος , αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος (Σ΄) την τιμή $x_0 = 1$, προκύπτει εξίσωση ως προς κ: $1^2 + 1 + 4 = 3 \cdot 1 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 6 - 3 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Επομένως , για $\kappa = 3$, έχουμε την εφαπτομένη με εξίσωση $y = 3x + 3$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο $A(1, f(1))$

Μεθοδολογία

- Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , εφόσον αυτό δεν μας το έχουν δώσει. Επίσης, δικαιολογούμε την παραγωγισιμότητά της στο x_0.

- Θεωρούμε ως σημείο επαφής το $A(x_0, f(x_0))$.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, μας δίνεται από την αρχή ότι είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μια παραγωγίσιμης συνάρτησης f

- Ο συντελεστής α ή β δίνεται ως έκφραση κάποιας παραμέτρου, δηλαδή $\beta(\kappa)$. (Συνήθως οι παράμετροι συμβολίζονται με τους $\kappa, \lambda, \mu, \nu$). Αφού η ευθεία (ε) , είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , θα ισχύουν συγχρόνως

  $$(\Sigma)\begin{cases} f'(x_0) = \alpha \\ f(x_0) = \alpha x_0 + \beta(\kappa), \kappa \in R \end{cases}$$

- Επιλύοντας ως προς x, την πρώτη εξίσωση του (Σ), αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση ως προς κ , που θα είναι και η τιμή για την οποία η δοσμένη ευθεία θα είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. (Αν προκύψει εξίσωση αδύνατη ως προς κ , τότε η δοσμένη ευθεία δεν είναι δυνατόν να είναι εφαπτομένη της f για καμία τιμή του $\kappa \in R$

Ημερομηνία τροποποίησης: 30/9/11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

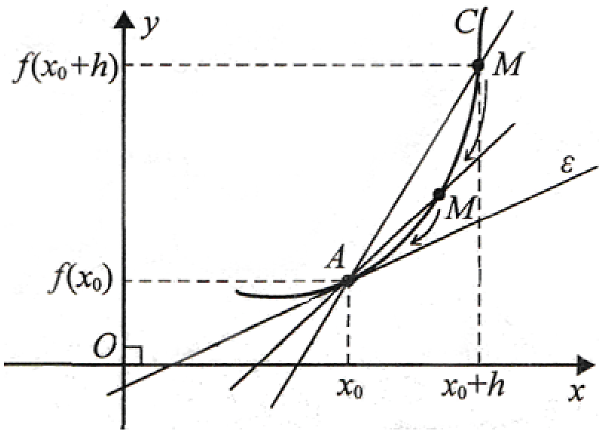
Τι ορίζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;

Λύση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C.

Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0+h, f(x_0+h))$ της C με $h \neq 0$ και φέρνουμε την ευθεία AM.

Παρατηρούμε ότι καθώς το M κινούμενο πάνω στην C πλησιάζει το A, τότε η τετμημένη x_0+h του σημείου αυτού προσεγγίζει το x_0 (δηλαδή $h \to 0$) και η ευθεία AM φαίνεται να παίρνει μια **οριακή θέση ε** η οποία λέγεται εφαπτομένη της C στο A.



Την οριακή θέση ε της τέμνουσας AM ορίζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A.

Ερώτηση θεωρίας 2

Τι ορίζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

Λύση

Την οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας ενός κινητού τη λέμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0.

$$\upsilon = \lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta S}{h}$$

Δηλαδή η στιγμιαία ταχύτητα (ή απλώς ταχύτητα) ενός κινητού είναι το όριο του λόγου μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς να γίνει ίση με το μηδέν.

Παράδειγμα

Η θέση ενός σωματιδίου το οποίο κινείται ευθύγραμμα κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ εκφράζεται από τη συνάρτηση $S(t) = t^2$ (σε m). Να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητά του όταν $t = 2\,\text{sec}$.

Λύση

- Η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα από 2 έως $2+h$ sec είναι:

$$\frac{S(2+h)-S(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$$

$$\frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = (4+h)\ \text{m/sec}$$

- Η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = 2\,\text{sec}$ είναι:

$$\upsilon(2) = \lim_{h\to 0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4\ \text{m/sec}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Το διάστημα που διανύει ένα κινητό που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται από τη συνάρτηση $S(t)=\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$ όπου α μια σταθερά. Αν το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα να βρεθεί:

α) Η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [4,6].

β) Το μέτρο της ταχύτητας του κινητού, όταν t=2 sec (2 sec μετά την εκκίνησή του).

<u>Λύση</u>

α) Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε:

Μέση ταχύτητα=$\frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνος}}$

Άρα η μέση ταχύτητα $\overline{\upsilon}$ του κινητού στο χρονικό διάστημα [4,6] είναι:

$$\overline{\upsilon}=\frac{S(6)-S(4)}{6-4}=\frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot 6^2-\frac{1}{2}\alpha\cdot 4^2}{2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha(36-16)}{2}=\frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot 20}{2}=\frac{\alpha\cdot 20}{4}=5\alpha\ \text{m/sec}$$

β) Για $h\neq 0$, έχουμε

$$\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=\frac{\frac{1}{2}\alpha(2+h)^2-\frac{1}{2}\alpha\cdot 2^2}{h}=\frac{\frac{1}{2}\alpha(4+4h+h^2)-\frac{1}{2}\alpha\cdot 4}{h}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\alpha(\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4})}{h}=\frac{\alpha(4h+h^2)}{2h}=\frac{\alpha\cancel{h}(4+h)}{2\cancel{h}}=\frac{\alpha(4+h)}{2}$$

Επομένως $\upsilon(2)=S'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(4+h)}{2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4\alpha}{2}=2\alpha\ \text{m/sec}$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του κινητού, όταν $t=2\sec$, είναι $2\alpha\ \text{m/sec}$, όπου α μια σταθερά.

Άσκηση 2 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Μια βιοτεχνία εκτιμά ότι το κόστος (σε ευρώ) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = x(x+10)$.
Να βρεθεί:

α) Το κόστος για την παραγωγή 50 μονάδων προϊόντος.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους για $x = 10$ μονάδες του προϊόντος.

<u>Λύση</u>

α) $K\left(x\right) = x\left(x+10\right) = x^2 + 10x$

Το κόστος για την παραγωγή 50 μονάδων του προϊόντος είναι:

$K(50) = 50^2 + 10 \cdot 50 = 2500 + 500 = 3.000$ ευρώ.

β) Για $h \neq 0$, έχουμε

$$\frac{K(10+h) - K(10)}{h} = \frac{[(10+h)^2 + 10(10+h)] - (10^2 + 10 \cdot 10)}{h} =$$

$$\frac{\cancel{100} + 20h + h^2 + \cancel{100} + 10h - \cancel{200}}{h} =$$

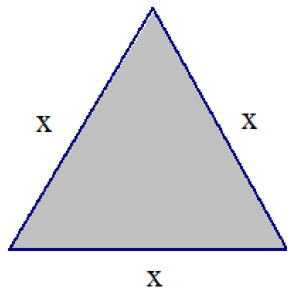
$$= \frac{30h + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(30+h)}{\cancel{h}} = 30 + h$$

Επομένως $K'(10) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{K(10+h) - K(10)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(30+h) = 30$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του κόστους για $x = 10$ μονάδες του προϊόντος είναι 30.

Άσκηση 3 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Οι πλευρές μήκους x (x>0) ενός ισοπλεύρου τριγώνου αυξάνονται συνεχώς. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του για οποιαδήποτε τιμή του x είναι σταθερός.



<u>Λύση</u>

Η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του x, είναι:

$$\Pi(x) = x + x + x = 3x$$

Έστω x_0 μια οποιαδήποτε τιμή του x. Ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου Π του ισοπλεύρου τριγώνου για $x = x_0$ είναι:

$$\Pi'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Pi(x_0+h)-\Pi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)-3x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x_0+3h-3x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3 \text{ (σταθερός αριθμός)}$$

Άρα για οποιαδήποτε τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς x, είναι ο σταθερός αριθμός 3.

Άσκηση 4 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να υπάρχει η παράγωγος)

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

α) $f(x)=x^2-x$ στο $x=1$

β) $f(x)=2-\ln 2$ στο $x=2$

<u>Λύση</u>

α) Για την εύρεση της παραγώγου της f στο $x=1$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(1+h)-f(1)$:

$$f(1+h)-f(1)=[(1+h)^2-(1+h)]-0=\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}-h=$$

$$=2h+h^2-h=h^2+h$$

- Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+h^2}{h}=\frac{\cancel{h}(1+h)}{\cancel{h}}=1+h$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(1+h)=1$$

Άρα $f'(1)=1$

β) Για την εύρεση της παραγώγου της f στο $x=2$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(2+h)-f(2)$:

$$f(2+h)-f(2)=(2-\ln 2)-(2-\ln 2)=0$$

- Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{0}{h}=0$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Άρα $f'(2)=0$

Άσκηση 5

Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = t^2 - \alpha t$, με $x, \alpha \in R$ και (α μια σταθερά). Να προσδιοριστεί το $\alpha \in R$ ώστε η ταχύτητα του ως προς t όταν $t = 2$ να είναι ίση με 7.

Λύση

Για $h \neq 0$

$$\frac{S(2+h)-S(2)}{h} = \frac{[(2+h)^2 - \alpha(2+h)] - (2^2 - \alpha \cdot 2)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - 2\alpha - \alpha h - \cancel{4} + 2\alpha}{h} = \frac{4h + h^2 - \alpha h}{h} =$$

$$= \frac{h(4+h-\alpha)}{h} = 4 + h - \alpha$$

Άρα $\upsilon(2) = S'(2) = \lim\limits_{h \to 0}(4 + h - \alpha) = 4 - \alpha$

Σύμφωνα όμως με την εκφώνηση, η ταχύτητα του κινητού όταν $t = 2$ είναι ίση με 7, άρα $\upsilon(2) = 7,\ 4 - \alpha = 7,\ \alpha = -3$.

Άσκηση 6 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Η θεαματικότητα (%) μιας εβδομαδιαίας τηλεοπτικής εκπομπής δίνεται από τη συνάρτηση $\Theta(t) = 4t - \frac{1}{5}t^2$ (ο χρόνος t σε εβδομάδες). Αν η εκπομπή προβλήθηκε 15 εβδομάδες να βρεθεί

α) Η θεαματικότητας της εκπομπής την πέμπτη και τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα ($t = 5$ και $t = 15$). Τι παρατηρείτε;

β) Ο ρυθμός μεταβολής της θεαματικότητας της εκπομπής την πέμπτη και τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα ($t = 5$ και $t = 15$). Τι παρατηρείτε;

<u>Λύση</u>

α) Η θεαματικότητα της εκπομπής την πέμπτη εβδομάδα ($t = 5$) είναι

$$\Theta(5) = 4 \cdot 5 - \frac{1}{5}25 = 20 - 5 = 15\%$$

Η θεαματικότητα της εκπομπής τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα ($t = 15$) είναι

$$\Theta(15) = 4 \cdot 15 - \frac{1}{5}225 = 60 - 45 = 15\%$$

Παρατηρούμε ότι την πέμπτη και τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα η θεαματικότητα της εκπομπής είναι ίδια.

β) Για $h \neq 0$,

$$\frac{\Theta(5+h) - \Theta(5)}{h} = \frac{[4(5+h) - \frac{1}{5}(5+h)^2] - 15}{h} = \frac{20 + 4h - \frac{1}{5}(25 + 10h + h^2) - 15}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{20} + 4h - \cancel{5} - 2h - \frac{1}{5}h^2 - \cancel{15}}{h} = \frac{2h - \frac{1}{5}h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2 - \frac{1}{5}h)}{\cancel{h}} = 2 - \frac{1}{5}h$$

Επομένως $\Theta'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Theta(5+h) - \Theta(5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2 - \frac{1}{5}h) = \lim\limits_{h \to 0} 2 = 2\%$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της θεαματικότητας της εκπομπής όταν $t = 5$ είναι 2%.
Το θετικό πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της θεαματικότητας τη χρονική αυτή στιγμή φανερώνει ότι την πέμπτη εβδομάδα η ακροαματικότητα αυξήθηκε με ρυθμό 2%.

Ο ρυθμός μεταβολής της θεαματικότητας της εκπομπής όταν $t = 15$ είναι

Για $h \neq 0$, $\frac{\Theta(15+h) - \Theta(15)}{h} = \frac{[4(15+h) - \frac{1}{5}(15+h)^2] - 15}{h} =$

$$=\frac{60+4h-\frac{1}{5}(225+30h+h^2)-15}{h}=\frac{\cancel{60}+4h-\cancel{45}-6h-\frac{1}{5}h^2-\cancel{15}}{h}=$$

$$=\frac{-2h-\frac{1}{5}h^2}{h}=\frac{\cancel{h}(-2-\frac{1}{5}h)}{\cancel{h}}=-2-\frac{1}{5}h$$

Άρα $\Theta'(15)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Theta(15+h)-\Theta(15)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-2-\frac{1}{5}h)=-2\%$

Το αρνητικό πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της θεαματικότητας όταν $t=15$ φανερώνει ότι τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα η ακροαματικότητα μειώθηκε με ρυθμό 2%.

Παρατηρούμε ότι την πέμπτη και τη δέκατη πέμπτη εβδομάδα ο ρυθμός μεταβολής είναι απόλυτα ο ίδιος την πέμπτη όμως εβδομάδα αυξήθηκε ενώ τη δέκατη πέμπτη μειώθηκε.

Άσκηση 7 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Σ’ ένα ρόμβο η μεγάλη διαγώνιος του είναι τετραπλάσια από τη μικρή. Αν το εμβαδόν του ρόμβου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ όπου δ_1 και δ_2 είναι οι διαγώνιοι του, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ρόμβου συναρτήσει της μικρής του διαγωνίου δ_1 όταν δ_1=4 m.

<u>Λύση</u>

Για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του ρόμβου πρέπει να το εκφράσουμε ως συνάρτηση μιας μεταβλητής. Αν ονομάσουμε x τη μικρή διαγώνιο του ρόμβου τότε η μεγάλη διαγώνιος του θα είναι 4x. Οπότε το εμβαδόν του ρόμβου συναρτήσει της διαγωνίου του x θα είναι $E(x) = \frac{x \cdot 4x}{2} = 2x^2$

Για $h \neq 0$ έχουμε $\frac{E(4+h)-E(4)}{h} = \frac{2(4+h)^2 - 2\cdot 4^2}{h} = \frac{2(16+8h+h^2)-32}{h} =$

$= \frac{\cancel{32} + 16h + 2h^2 - \cancel{32}}{h} = 16 + h$

Άρα $E'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{E(4+h)-E(4)}{h} = \lim_{h\to 0}(16+h) = 16 \text{ m}^2$

Άσκηση 8 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να υπάρχει η παράγωγος)

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$f(x) = 2\sqrt{2}x - 5$ στο $x = -4$

<u>Λύση</u>

Για την εύρεση της παραγώγου της f στο $x = -4$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(-4+h) - f(-4)$:

  $$f(-4+h) - f(-4) = [2\sqrt{2}(-4+h) - 5] - [2\sqrt{2}(-4) - 5] =$$

  $$= -8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}h - \cancel{5} + 8\sqrt{2} + \cancel{5} = 2\sqrt{2}h$$

- Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$:

  $$\frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \frac{2\sqrt{2}\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2\sqrt{2}$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h \to 0} 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

  Άρα $f'(-4) = 2\sqrt{2}$

Άσκηση 9 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να μην υπάρχει η παράγωγος)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-1}$ στο σημείο x = 1.

<u>Λύση</u>

Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει να βρούμε τις τιμές του x που κάνουν το υπόρριζο θετικό. Έχουμε $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=[1,+\infty)$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x = 1 του πεδίου ορισμού της.

Γιατί για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{(1+h)-1}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h} \qquad (1)$$

Για να ορίζεται όμως η τετραγωνική ρίζα πρέπει $h>0$, οπότε η (1) γράφεται

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{h^{\frac{1}{2}}}{h}=\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}1}{\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}}=\frac{1}{0}$

Επειδή το όριο όμως του παρονομαστή είναι 0, δεν ορίζεται το κλάσμα. Άρα το ζητούμενο όριο δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός.

Με βάση τον ορισμό της παραγώγου αφού το όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο $x=1$ του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση 10 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να υπάρχει η παράγωγος)

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=|x|-2$ στο σημείο x = 0.

Λύση

Γιατί για $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(|0+h|-2)-(|0|-2)}{h}=\frac{|h|-2+2}{h}=\frac{|h|}{h} \qquad (1)$$

- Αν $h>0$ τότε $|h|=h$ οπότε η (1) γράφεται

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$ (2)

- Αν $h<0$ τότε $|h|=-h$ οπότε η (1) γράφεται

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-1)=-1$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ στο x = 0.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)=|x|-2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x =0 του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση 11 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=2x^2+3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x)=2x^2+3$ είναι πολυώνυμο, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$

- Η τιμή της συνάρτησης για $x_0=2$ είναι $f(2)=2\cdot 2^2+3=11$

- Θα προσδιορίσουμε τα α,β της εξίσωσης της εφαπτομένης:

  $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in R,(1)$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση $x_0=2$, εργαζόμαστε ως εξής

- Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $f(2+h)-f(2)=2(2+h)^2+3-11=2\left(4+4h+h^2\right)-8=8+8h+2h^2-8=8h+2h^2,(2)$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\overset{(2)}{=}\frac{8h+2h^2}{h}=\frac{\cancel{h}(8+2h)}{\cancel{h}}=8+2h,(3)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(8+2h)=8$, οπότε $\alpha=8,(4)$

- Το σημείο επαφής είναι $A(2,11)$ και $\alpha=8$, οπότε οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης (1): $11=8\cdot 2+\beta\Leftrightarrow\beta=-5,(5)$

- Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης , λόγω των $(4),(5)$ είναι $y=8x-5$

Άσκηση 12 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο της καμπύλης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{2x^2+7}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

<u>Λύση</u>

Επειδή η παράσταση $2x^2+7>0$ για κάθε $x\in R$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$

- Η τιμή της συνάρτησης για $x_0=1$ είναι: $f(1)=\sqrt{2\cdot 1^2+7}=\sqrt{9}=3$
- Θα προσδιορίσουμε τα α,β της εξίσωσης της εφαπτομένης : $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in R,(1)$
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση $x_0=1$, εργαζόμαστε ως εξής :
- Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(1+h)-f(1)=\sqrt{2(1+h)^2+7}-3=\sqrt{2\left(1+2h+h^2\right)+7}-3=\sqrt{9+4h+2h^2}-3,(2)$$

Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{(2)}{=}\frac{\sqrt{9+4h+2h^2}-3}{h}=\frac{\left(\sqrt{9+4h+2h^2}-3\right)\left(\sqrt{9+4h+2h^2}+3\right)}{h\left(\sqrt{9+4h+2h^2}+3\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{9+4h+2h^2}\right)^2-3^2}{h\left(\sqrt{9+4h+2h^2}+3\right)}=\frac{9+4h+2h^2-9}{h\left(\sqrt{9+4h+2h^2}+3\right)}=$$

$$\frac{\cancel{h}(4+2h)}{\cancel{h}\left(\sqrt{9+4h+2h^2}+3\right)}=\frac{4+2h}{\sqrt{9+4h+2h^2}+3}(3)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{(3)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\frac{4+2h}{\sqrt{9+4h+2h^2}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, οπότε

$$\alpha=\frac{2}{3},(4)$$

- Το σημείο επαφής είναι $A(1,3)$ και $\alpha = \frac{2}{3}$,οπότε οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης (1) : $3 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{3} = \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{3}, (5)$
- Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης , λόγω των $(4),(5)$ είναι : $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

Άσκηση 13 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας συνάρτησης, όταν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x^2+x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=1$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$ είναι πολυώνυμο, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.

Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης, θα έχουμε: $f(x_0)=x_0{}^2+x_0+1$

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+(x_0+h)+1-\left(x_0^2+x_0+1\right)=$$

  $$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)+x_0+h+1-x_0^2-x_0-1=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2+x_0+h+1-x_0^2-x_0-1=2x_0h+h^2+h,(1)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\frac{2x_0h+h^2+h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h+1)}{\cancel{h}}=2x_0+h+1,(2)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(2)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h+1)=2x_0+1$, άρα $f'(x_0)=2x_0+1,(3)$

- Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, δίνεται από τον τύπο: $(\varepsilon):y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in R,(4)$

- Από την υπόθεση έχουμε ότι , $\alpha=1,(5)$,οπότε η (4) λόγω της (5) γίνεται :

  $(\varepsilon):y=1\cdot x+\beta$ ή $y=x+\beta,\beta\in R$

- Γνωρίζουμε ακόμη ότι: $\alpha=f'(x_0)=1$, εξάλλου λόγω της (3) έχουμε :

  $1=2x_0+1\Leftrightarrow x_0=0$

  που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής $A(x_0,f(x_0))$

- Για $x_0 = 0$ έχουμε από τον τύπο της $f : f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(0,1)$, το οποίο ανήκει και στην εφαπτομένη της καμπύλης της f και επομένως θα επαληθεύει την εξίσωση της (ε) , δηλαδή : $1 = 1 \cdot 0 + \beta$ ή $\beta = 1$
- Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f είναι η : $(\varepsilon) : y = x + 1$

Άσκηση 14 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας συνάρτησης, όταν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=-2$.

Λύση

- Πρέπει $x^2\neq 0$ ή $x\neq 0$, επομένως το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$
- Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτομένη $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- Όμως έχουμε $\alpha=-2$. Άρα $y=-2x+\beta,(1)$
- $f(x)=\frac{1}{x^2}$,οπότε για $x=x_0$ έχουμε : $f(x_0)=\frac{1}{x_0^2},(2)$
- Η f παραγωγίζεται. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:
- Βρίσκουμε τη διαφορά: $f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{(x_0+h)^2}-\frac{1}{x_0^2}=\frac{x_0^2-(x_0+h)^2}{x_0^2(x_0+h)^2}=$

$$\frac{x_0^2-x_0^2-2x_0h-h^2}{x_0^2(x_0+h)^2}=-\frac{h(2x_0+h)}{x_0^2(x_0+h)^2},(3)$$

Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{-\frac{h(2x_0+h)}{x_0^2(x_0+h)^2}}{h}=-\frac{\cancel{h}(2x_0+h)}{\cancel{h}x_0^2(x_0+h)^2}=$$

$$-\frac{(2x_0+h)}{x_0^2(x_0+h)^2},(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{\left(2x_0+h\right)}{x_0^2\left(x_0+h\right)^2}\right)=-\dfrac{2x_0}{x_0^2x_0^2}=-\dfrac{2}{x_0^3}$,

  άρα $f'\left(x_0\right)=-\dfrac{2}{x_0^3},\left(5\right)$, που κατ' ανάγκη θα είναι ίσος με τον δοσμένο συντελεστή διεύθυνσης -2 .

  Άρα, από την (5) και από $\alpha=f'\left(x_0\right)=-2\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x_0^3}=-2\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1$, που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής.

  Επομένως $f\left(1\right)=\dfrac{1}{1^2}=1$, οπότε το σημείο επαφής είναι το $A\left(1,f\left(1\right)\right)$ που ανήκει και στην εφαπτομένη της καμπύλης της f , οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την (ε). Δηλαδή, $1=-2\cdot 1+\beta$ ή $\beta=3$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f είναι η : $\left(\varepsilon\right): y=-2x+3$

Άσκηση 15 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με με $f(x)=x^2-4x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα xx'.

<u>Λύση</u>

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.

  Έστω $A(x_0, f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτόμενη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in R,(1)$

  Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα xx', τότε θα ισχύει : $\alpha=f'(x_0)=0,(2)$

  Οπότε η (1) λόγω (2) γίνεται: $(\varepsilon): y=0x+\beta \Leftrightarrow y=\beta$, δηλαδή οριζόντια ευθεία

  Υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ ως εξής :

- Βρίσκουμε τη διαφορά: $f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2-4(x_0+h)-(x_0^2-4x_0)=$

$$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)-4x_0-4h-x_0^2+4x_0=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2-4x_0-4h-x_0^2+4x_0=2x_0h+h^2-4h,(3)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2-4h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h-4)}{\cancel{h}}=2x_0+h-4,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h-4)=2x_0-4$.

  Άρα, $f'(x_0)=2x_0-4,(5)$

- Εξάλλου από (2), είναι και $f'(x_0)=0$. Από (2) και (5) έχουμε: $2x_0-4=0\Leftrightarrow x_0=2$, οπότε $f(2)=2^2-4\cdot 2=4-8=-4$.Επομένως το σημείο επαφής είναι, το $A(2,-4)$

- Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην εφαπτομένη , οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της: $y=\beta$. Άρα έχουμε, $-4=\beta$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2,-4)$,που είναι παράλληλη στον xx', είναι η: $y=-4$

Άσκηση 16 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = x^2 - 7x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα xx' γωνία 135^0.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 2$ είναι πολυώνυμο, άρα ορίζεται για κάθε $x \in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f με την εφαπτομένη: $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in R, (1)$

Επειδή η γωνία κλίσης της (ε) με τον άξονα xx' είναι 135°, θα έχουμε:

$\alpha = f'(x_0) = \varepsilon\varphi 135^0 = -1, (2)$

Οπότε η (1) λόγω της (2), γίνεται: $(\varepsilon): y = -x + \beta$. Εξάλλου, έχουμε: $f(x_0) = {x_0}^2 - 7x_0 + 2$.

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής :
- Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - 7(x_0 + h) + 2 - (x_0^2 - 7x_0 + 2) =$$

$$(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 7x_0 - 7h + 2 - x_0^2 + 7x_0 - 2 =$$

$$x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 7x_0 - 7h + 2 - x_0^2 + 7x_0 - 2 = 2x_0h + h^2 - 7h, (3)$$

Για $h \neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \overset{(3)}{=} \frac{2x_0h + h^2 - 7h}{h} = \frac{\cancel{h}(2x_0 + h - 7)}{\cancel{h}} = 2x_0 + h - 7, (4)$$

Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \overset{(4)}{=} \lim\limits_{h \to 0}(2x_0 + h - 7) = 2x_0 - 7$, άρα $f'(x_0) = 2x_0 - 7, (5)$

Όμως, από τη (2) έχουμε: $f'(x_0) = -1$

Οπότε από (2) και (5) προκύπτει η σχέση:

$$2x_0 - 7 = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 7 - 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 3$$

Άρα, $f(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 = 9 - 21 + 2 = -10$

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $A(3, f(3))$ ή $A(3, -10)$

Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της : $y = -x + \beta$. Έχουμε: $-10 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -7$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης, στο σημείο $A(3, -10)$ της γραφικής παράστασης της f και με γωνία κλίσης 135^o ως προς τον άξονα xx' , είναι: $(\varepsilon): y = -x - 7$

Άσκηση 17 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x}{x+1}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που σχηματίζει με τον άξονα xx', γωνία 60^o.

Λύση

Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{-1\}$ και η f παραγωγίζεται σε αυτό.

Έστω $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f, με την εφαπτομένη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta\,, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, (1)$

Επειδή η γωνία κλίσης της (ε) ως προς τον άξονα xx',είναι 60^o, θα έχουμε :
$\alpha=f'\left(x_0\right)=\varepsilon\varphi 60^o=\sqrt{3},(2)$

Οπότε η (1) λόγω (2), γίνεται: $(\varepsilon): y=\sqrt{3}x+\beta\,,\beta\in\mathbb{R}$

- Υπολογίζουμε την $f'\left(x_0\right)$ ως εξής :

  Βρίσκουμε τη διαφορά :

$$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\frac{\sqrt{3}\left(x_0+h\right)}{\left(x_0+h\right)+1}-\frac{\sqrt{3}x_0}{x_0+1}=\frac{\sqrt{3}\left(x_0+h\right)\left(x_0+1\right)-\sqrt{3}x_0\left(x_0+h+1\right)}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(x_0+h\right)\left(\sqrt{3}x_0+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}x_0^2-\sqrt{3}x_0h-\sqrt{3}x_0}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}x_0^2+\sqrt{3}x_0+\sqrt{3}x_0h+\sqrt{3}h-\sqrt{3}x_0^2-\sqrt{3}x_0h-\sqrt{3}x_0}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)}=\frac{\sqrt{3}h}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)},(3)$$

- Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{\dfrac{\sqrt{3}h}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)}}{h}=\frac{\sqrt{3}\cancel{h}}{\cancel{h}\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\left(x_0+h+1\right)\left(x_0+1\right)},(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}}{(x_0+h+1)(x_0+1)}=\frac{\sqrt{3}}{(x_0+1)^2}$, άρα

  $f'(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{(x_0+1)^2},(5)$. Όμως από τη (2) έχουμε : $f'(x_0)=\sqrt{3}$, οπότε από (2) και (5) προκύπτει : $\frac{\sqrt{3}}{\left(x_0+1\right)^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\left(x_0+1\right)^2=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=1\Leftrightarrow$

  $x_0+1=\pm1\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=-2$

  Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες :

- Για $x_0=0$, τότε $f(0)=\frac{\sqrt{3}\cdot 0}{0+1}=0$, άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(0,0\right)$

- Επειδή το σημείο A ανήκει και στην εφαπτομένη ,οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της : $y=\sqrt{3}x+\beta,\beta\in\mathbb{R}$.Οπότε θα έχουμε: $0=\sqrt{3}\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=0$ και επομένως η εξίσωση εφαπτομένης στο $A\left(0,0\right)$, είναι: $y=\sqrt{3}x$

- Για $x_0=-2$, τότε $f\left(-2\right)=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(-2\right)}{-2+1}=-\frac{2\sqrt{3}}{-1}=2\sqrt{3}$, άρα το σημείο επαφής είναι το $B\left(-2,2\sqrt{3}\right)$

- Επειδή το σημείο B ανήκει και στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της : $y=\sqrt{3}x+\beta,\beta\in\mathbb{R}$. Δηλαδή θα έχουμε:

  $2\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\left(-2\right)+\beta\Leftrightarrow\beta=4\sqrt{3}$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο B, είναι:

  $y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$.

Άσκηση 18 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+5x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y=9x-2$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x)=x^2+5x+1$είναι πολυώνυμο , άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f, με την εφαπτομένη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta\,, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, (1)$. Η (ε) είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y=9x-2$.Άρα θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης , δηλαδή θα ισχύει: $\alpha=f'(x_0)=9, (2)$. Οπότε η (1) λόγω της (2) γίνεται: $(\varepsilon): y=9x+\beta$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:
- Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+5(x_0+h)+1-\left(x_0^2+5x_0+1\right)=$$

$$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)+5x_0+5h+1-x_0^2-5x_0-1=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2+5x_0+5h+1-x_0^2-5x_0-1=2x_0h+h^2+5h, (3)$$

Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2+5h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h+5)}{\cancel{h}}=2x_0+h+5, (4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim_{h\to 0}(2x_0+h+5)=2x_0+5\text{, άρα } f'(x_0)=2x_0+5, (5)$$

Όμως, από τη (2) έχουμε $f'(x_0)=9$

Άρα από (2) και (5) έχουμε: $2x_0+5=9\Leftrightarrow 2x_0=4\Leftrightarrow x_0=2$

Οπότε, $f(2)=2^2+5\cdot 2+1=15$

Επομένως το σημείο επαφής, είναι το $A(2,15)$

Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην εφαπτομένη , άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της : $(\varepsilon): y = 9x + \beta$.

Έχουμε: $15 = 9\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 15 - 18 = \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(2,15)$, παράλληλης προς την ευθεία $(\eta): y = 9x - 2$ είναι: $(\varepsilon): y = 9x - 3$

Άσκηση 19 (Εύρεση σημείων στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης είναι παράλληλη στον άξονα xx' ή τέμνει υπό δοσμένη γωνία τον άξονα xx' ή είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x-5}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, που είναι κάθετη προς την ευθεία $(\zeta): y=-2x+3$.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A=[5,+\infty)$, και παραγωγίζεται.

Έστω $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της καμπύλη της συνάρτησης f με την εφαπτομένη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha, \beta\in R, (1)$. Η (ε) είναι κάθετη προς την ευθεία $(\zeta): y=-2x+3$ άρα το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης θα είναι ίσο με -1, δηλαδή ισχύει

$$\alpha\cdot(-2)=-1 \Leftrightarrow -2\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Άρα, $\alpha=f'\left(x_0\right)=\frac{1}{2}, (2)$

- Οπότε η (1) λόγω της (2), γίνεται: $(\varepsilon): y=\frac{1}{2}x+\beta$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής :

- Βρίσκουμε τη διαφορά : $f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}-\sqrt{x_0-5}, (3)$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}-\sqrt{x_0-5}}{h}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}-\sqrt{x_0-5}\right)\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}\right)^2-\left(\sqrt{x_0-5}\right)^2}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=$$

$$\frac{x_0+h-5-\left(x_0-5\right)}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=\frac{x_0+h-5-x_0+5}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=$$

$$\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}, (4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{(x_0+h)-5}+\sqrt{x_0-5}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-5}}$

  το οποίο υπάρχει αν $x_0>5$, άρα $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-5}},(5)$

  Όμως, από τη (2) έχουμε: $f'\left(x_0\right)=\frac{1}{2}$

  Άρα από (2) και (5) έχουμε:

  $$\frac{1}{2\sqrt{x_0-5}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x_0-5}=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_0-5}\right)^2=1^2\Leftrightarrow$$

  $x_0-5=1\Leftrightarrow x_0=6$,

  που είναι δεκτή λόγω του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Οπότε

  $f\left(6\right)=\sqrt{6-5}=\sqrt{1}=1$

- Επομένως το σημείο επαφής είναι το $A\left(6,1\right)$

- Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της: $\left(\varepsilon\right): y=\frac{1}{2}x+\beta$. Έτσι έχουμε:

  $$1=\frac{1}{2}\cdot 6+\beta\Leftrightarrow 1=3+\beta\Leftrightarrow\beta=1-3=-2$$

  Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A\left(6,1\right)$, που είναι κάθετη προς την ευθεία $\left(\zeta\right): y=-2x+3$, είναι: $\left(\varepsilon\right): y=\frac{1}{2}x-2$.

Άσκηση 20 (Εύρεση παραμέτρου, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εφάπτεται στον άξονα xx'

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-\kappa x+\kappa, \kappa \neq 0$. Να προσδιορίσετε την τιμή του μη μηδενικού κ, ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται στον άξονα xx'.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x \in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.

  Έστω $A(x_0, f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f που βρίσκεται πάνω στον άξονα xx'

  Επομένως η τεταγμένη του θα είναι μηδέν . Άρα, $A(x_0, 0)$
  Εξάλλου η εφαπτομένη, είναι ο άξονας xx' και έχει εξίσωση $y=0$, δηλαδή $y=0x+0$.
  Άρα ισχύουν ταυτόχρονα: $f(x_0)=0,(1)$ και $f'(x_0)=0,(2)$

Υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2-\kappa(x_0+h)+\kappa-(x_0^2-\kappa x_0+\kappa)=$$

  $$(x_0^2+2x_0h+h^2)-\kappa x_0-\kappa h+\kappa-x_0^2+\kappa x_0-\kappa=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2-\kappa x_0-\kappa h+\kappa-x_0^2+\kappa x_0-\kappa=2x_0h+h^2-\kappa h,(3)$$

- Για $h \neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2-\kappa h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h-\kappa)}{\cancel{h}}=2x_0+h-\kappa,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h-\kappa)=2x_0-\kappa$,

  άρα $f'(x_0)=2x_0-\kappa,(5)$

- Εξάλλου από (2), είναι και $f'(x_0)=0$, οπότε από (2) και (5) προκύπτει η:

$$2x_0 - \kappa = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\kappa}{2}$$

Επομένως, από (1) έχουμε:

$$f\left(x_0\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\kappa}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 - \kappa\cdot\frac{\kappa}{2} + \kappa = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa^2}{2} + \kappa = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa^2}{4} - \frac{2\kappa^2}{4} + \frac{4\kappa}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\kappa - \kappa^2}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\kappa - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\kappa\left(4-\kappa\right) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 4$ ή $\kappa = 0$ (απορρίπτεται)

Άρα, $\kappa = 4$.

Άσκηση 21 (Εύρεση παραμέτρου, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εφάπτεται στον άξονα xx')

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2-\kappa x+\kappa, \kappa\neq 0$. Να προσδιορίσετε την τιμή του κ, αν η γραφική παράσταση της εφάπτεται στον άξονα xx'.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.

  Έστω $A(x_0,f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f που βρίσκεται πάνω στον άξονα xx'

  Άρα η τεταγμένη του θα είναι μηδέν, δηλαδή $A(x_0,0)$

  Εξάλλου η εφαπτομένη ,είναι ο άξονας xx' και έχει εξίσωση: $y=0$, δηλαδή : $y=0x+0$.

  Άρα θα ισχύουν ταυτόχρονα: $f(x_0)=0,(1)$ και $f'(x_0)=0,(2)$

Υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=2(x_0+h)^2-\kappa(x_0+h)+\kappa-\left(2x_0^2-\kappa x_0+\kappa\right)=$$

  $$2\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)-\kappa x_0-\kappa h+\kappa-2x_0^2+\kappa x_0-\kappa=$$

  $$2x_0^2+4x_0h+2h^2-\kappa x_0-\kappa h+\kappa-2x_0^2+\kappa x_0-\kappa=4x_0h+2h^2-\kappa h,(3)$$

- Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{4x_0h+2h^2-\kappa h}{h}=\frac{\cancel{h}(4x_0+2h-\kappa)}{\cancel{h}}=$$

  $$4x_0+2h-\kappa,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(4x_0+2h-\kappa)=4x_0-\kappa$, άρα $f'(x_0)=4x_0-\kappa,(5)$

- Εξάλλου από (2) είναι και $f'(x_0)=0$, οπότε από (2) και (5) έχουμε:

$$4x_0-\kappa=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{\kappa}{4}.$$

Επομένως, από (1) έχουμε:

$$f(x_0)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\kappa}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\kappa}{4}\right)^2-\kappa\cdot\frac{\kappa}{4}+\kappa=0 \Leftrightarrow 2\frac{\kappa^2}{16}-\frac{\kappa^2}{4}+\kappa=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{8}-\frac{2\kappa^2}{8}+\frac{8\kappa}{8}=0 \Leftrightarrow \frac{8\kappa-\kappa^2}{8}=0 \Leftrightarrow 8\kappa-\kappa^2=0 \Leftrightarrow \kappa(8-\kappa)=0$$

$\Leftrightarrow \kappa=8$ ή $\kappa=0$ (απορρίπτεται). Άρα $\kappa=8$

Άσκηση 22 (Δοθείσης συνάρτησης ζητείται να αποδειχθεί ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη της)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=6x^2-5x+1$. Να διαπιστώσετε αν η ευθεία με εξίσωση: $(\varepsilon): y=7x-5$, εφάπτεται ή όχι της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

<u>Λύση</u>

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Έστω $A(x_0, f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f
- Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'(x_0)=7$ (1) και $f(x_0)=7x_0-5$ (2)
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=6(x_0+h)^2-5(x_0+h)+1-\left(6x_0^2-5x_0+1\right)=$$

  $$6\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)-5x_0-5h+1-6x_0^2+5x_0-1=$$

  $$6x_0^2+12x_0h+6h^2-5x_0-5h+1-6x_0^2+5x_0-1=12x_0h+6h^2-5h,(3)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{12x_0h+6h^2-5h}{h}=\frac{\cancel{h}(12x_0+6h-5)}{\cancel{h}}=$$

  $$12x_0+6h-5,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(12x_0+6h-5)=12x_0-5$, άρα $f'(x_0)=12x_0-5,(5)$
- Όμως από την (1) πρέπει και $f'(x_0)=7$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:

  $$12x_0-5=7\Leftrightarrow 12x_0=12\Leftrightarrow x_0=1$$. Οπότε

  $f(1)=6\cdot 1^2-5\cdot 1+1=6-5+1=2$, δηλαδή $f(1)=2$.

  Από τη (2) έχουμε: $f(x_0)=7x_0-5$. Όμως είναι και $f(x_0)=6\cdot x_0{}^2-5\cdot x_0+1,(6)$

Από τη (2) και (6) προκύπτει η ισότητα:

$$6\cdot x_0^{\,2} - 5\cdot x_0 + 1 = 7x_0 - 5 \Leftrightarrow 6x_0^{\,2} - 12x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x_0^{\,2} - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(x_0 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$, που είναι η κοινή λύση τους.

Άρα η ευθεία (ε), εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο $A\left(1, 2\right)$

Άσκηση 23 (Δοθείσης συνάρτησης ζητείται να αποδειχθεί ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη της)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^2-4x+2$. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση:

$(\zeta): y=2x-1$, εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Έστω $A(x_0,f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f
- Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'(x_0)=2$ (1) και $f(x_0)=2x_0-1$(2)
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=3(x_0+h)^2-4(x_0+h)+2-(3x_0^2-4x_0+2)=$$

  $$3(x_0^2+2x_0h+h^2)-4x_0-4h+2-3x_0^2+4x_0-2=$$

  $$3x_0^2+6x_0h+3h^2-4x_0-4h+2-3x_0^2+4x_0-2=6x_0h+3h^2-4h,(3)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{6x_0h+3h^2-4h}{h}=$$

  $$\frac{\cancel{h}(6x_0+3h-4)}{\cancel{h}}=6x_0+3h-4,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(6x_0+3h-4)=6x_0-4$, άρα $f'(x_0)=6x_0-4,(5)$
- Όμως από την (1), πρέπει και $f'(x_0)=2$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:

  $$6x_0-4=2\Leftrightarrow 6x_0=6\Leftrightarrow x_0=1$$

- Οπότε, $f(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+2=3-4+2=1$, δηλαδή $f(1)=1$. Από τη (2) έχουμε: $f(x_0)=2x_0-1$. Όμως , $f(x_0)=3{x_0}^2-4x_0+2,(6)$. Από τη (2) και την (6), προκύπτει η ισότητα:

$$3x_0^{\ 2} - 4x_0 + 2 = 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 3x_0^{\ 2} - 6x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0^{\ 2} - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$, που είναι η κοινή λύση.

Άρα η ευθεία (ε), εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο $A(1,1)$

Άσκηση 24 (Εύρεση παραμέτρου, ώστε μία ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+x+1$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=5x+\kappa, \kappa\in R$.
Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$, ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Έστω $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f
- Επειδή, από υπόθεση η (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'(x_0)=5,(1)$ και $f(x_0)=5x_0+\kappa,(2)$
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:
  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+(x_0+h)+1-\left(x_0^2+x_0+1\right)=$$

  $$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)+x_0+h+1-x_0^2-x_0-1=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2+x_0+h+1-x_0^2-x_0-1=2x_0h+h^2+h(3).$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2+h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h+1)}{\cancel{h}}=2x_0+h+1,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h+1)=2x_0+1$, άρα $f'(x_0)=2x_0+1,(5)$
- Όμως από την (1) πρέπει και $f'(x_0)=5$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:
  $2x_0+1=5\Leftrightarrow 2x_0=5-1\Leftrightarrow x_0=2,(6)$
- Από (2) έχουμε:

  $$f(x_0)=5x_0+\kappa\Leftrightarrow x_0{}^2+x_0+1=5x_0+\kappa\overset{(6)}{\Leftrightarrow}2^2+2+1=5\cdot 2+\kappa\Leftrightarrow$$

  $$7=10+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-3$$

- Άρα για την τιμή του $\kappa = -3$, η ευθεία (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$

Άσκηση 25 (Εύρεση παραμέτρου, ώστε μία ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x-2}$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=x+\lambda, \lambda\in R$.
Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$, ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f

Λύση

- Πρέπει $x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $[2,+\infty)$ και παραγωγίζεται στο $(2,+\infty)$
- Έστω $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f
- Επειδή, από υπόθεση η (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'\left(x_0\right)=1,(1)$ και $f\left(x_0\right)=x_0+\lambda,(2)$
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:
  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}-\sqrt{x_0-2},(3)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}-\sqrt{x_0-2}}{h}=$$

  $$\frac{\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}-\sqrt{x_0-2}\right)\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}\right)}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}\right)}=\frac{\left(x_0+h-2-x_0+2\right)}{h\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}\right)}=$$

  $$\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}},(4)$$

  Υπολογίζουμε το όριο:

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(4)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{\left(x_0+h\right)-2}+\sqrt{x_0-2}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$$, άρα

  $$f'\left(x_0\right)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}},(5)$$

- Από (1) και (5) έχουμε

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=1 \Leftrightarrow 1=2\sqrt{x_0-2} \Leftrightarrow 1^2=\left(2\sqrt{x_0-2}\right)^2 \Leftrightarrow 1=4\left(x_0-2\right) \Leftrightarrow$$

$$1=4x_0-8 \Leftrightarrow 9=4x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{9}{4},(6)$$

Η τιμή $x_0=\frac{9}{4}\in[2,+\infty)$, άρα είναι δεκτή

- Από (2) και (6) έχουμε:

$$f(x_0)=x_0+\lambda \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{9}{4}+\lambda \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{9}{4}+\lambda \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}+\lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{9}{4}+\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{4}-\frac{9}{4} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{7}{4}$$

- Άρα, για την τιμή $\lambda=-\frac{7}{4}$ η ευθεία (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(\frac{9}{4},f\left(\frac{9}{4}\right)\right)$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Η ταχύτητα, ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t) = 2t^2 - 8$.

α) Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$ (3 sec μετά την εκκίνησή του).

β) Πόση είναι τότε η επιτάχυνση του κινητού;

<u>Λύση</u>

α) Όταν $t = 3$ η ταχύτητα του κινητού είναι:

$\upsilon(3) = 2{\cdot}3^2 - 8 = 10 \text{ m/sec}$

β) Η επιτάχυνση του κινητού είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του.

Για $h \neq 0$, έχουμε $\dfrac{\upsilon(3+h)-\upsilon(3)}{h} = \dfrac{[2(3+h)^2-8]-10}{h} =$

$$= \frac{2(9+6h+h^2)-8-10}{h} = \frac{\cancel{18}+12h+2h^2-\cancel{18}}{h} =$$

$$= \frac{12h+2h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(12+2h)}{\cancel{h}} = 12+2h$$

Επομένως $\alpha(3) = \upsilon'(3) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\upsilon(3+h)-\upsilon(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(12+2h) = 12 \text{ m/sec}^2$.

Άρα όταν $t = 3$ η επιτάχυνση του κινητού είναι 12 m/sec^2.

Άσκηση 2 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Μια διαφημιστική εταιρεία ισχυρίζεται ότι ο αριθμός των μονάδων ενός προϊόντος που πωλούνται ημερησίως t ημέρες μετά την έναρξη μιας διαφημιστικής εκστρατείας δίνονται από τη συνάρτηση $\Pi(t) = -t^2 + 180t$

α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων του προϊόντος 2 ημέρες ($t = 2$) μετά την έναρξη της διαφημιστικής εκστρατείας;

β) Ποια ημέρα μετά την έναρξη της διαφημιστικής εκστρατείας από την εταιρεία ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων της ισούται με 100 μονάδες;

Λύση

α) Για $h \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\Pi(2+h)-\Pi(2)}{h} = \frac{[-(2+h)^2+180(2+h)]-356}{h} = \frac{-(4+4h+h^2)+360+180h-356}{h} =$$

$$= \frac{-\cancel{4}-4h-h^2+\cancel{360}+180h-\cancel{356}}{h} = \frac{176h-h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(176-h)}{\cancel{h}} =$$

$$= 176-h$$

Επομένως $\Pi'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Pi(2+h)-\Pi(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(176-h) = 176$ μονάδες προϊόντος

Άρα δύο ημέρες μετά την έναρξη της διαφημιστικής εκστρατείας ο ρυθμός των πωλήσεων του προϊόντος είναι 176 μονάδες.

β) Έστω t_0 η ζητούμενη τιμή του t. Πρέπει $\Pi'(t_0) = 100$

Για $h \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\Pi(t_0+h)-\Pi(t_0)}{h} = \frac{[-(t_0+h)^2+180(t_0+h)]-(-t_0{}^2+180t_0)}{h} =$$

$$= \frac{-(t_0{}^2+2t_0h+h^2)+180t_0+180h+t_0{}^2-180t_0}{h} =$$

$$= \frac{-t_0{}^2-2t_0h-h^2+180t_0+180h+t_0{}^2-180t_0}{h} = \frac{-2t_0h-h^2+180h}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(-2t_0-h+180)}{\cancel{h}} = -2t_0-h+180$$

Επομένως $\Pi'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Pi(t_0 + h) - \Pi(t_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(-2t_0 - h + 180) = -2t_0 + 180$

Αλλά $\Pi'(t_0) = 100$ άρα $-2t_0 + 180 = 100$, $-2t_0 = -80$, $t_0 = 40$ ημέρες.

Άρα 40 ημέρες μετά την έναρξη της διαφημιστικής εκστρατείας ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων του προϊόντος είναι 100 μονάδες την ημέρα.

Άσκηση 3 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Αν το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α (α>0) δίνεται από τον τύπο $E=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς την πλευρά του όταν $\alpha=6$.

Λύση
Για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του ισοπλεύρου τριγώνου πρέπει να τον εκφράσουμε ως συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Αν ονομάσουμε x την πλευρά του τότε το εμβαδόν του ως συνάρτηση της πλευράς του x, είναι $E(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Για $h\neq 0$, έχουμε $\frac{E(6+h)-E(6)}{h}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(6+h)^2-9\sqrt{3}}{h}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(36+12h+h^2)-9\sqrt{3}}{h}=$

$$=\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{3}h+\frac{\sqrt{3}}{4}h^2-9\sqrt{3}}{h}=\frac{3\sqrt{3}h+\frac{\sqrt{3}}{4}h^2}{h}=$$

$$=\frac{\cancel{h}(3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}h)}{\cancel{h}}=3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}h$$

Επομένως $E'(6)=\lim_{h\to 0}\frac{E(6+h)-E(6)}{h}=\lim_{h\to 0}(3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}h)=3\sqrt{3}$ τ.μ

Άρα όταν η πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 6, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ως προς την πλευρά του είναι $3\sqrt{3}$ τ.μ

Άσκηση 4 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να υπάρχει η παράγωγος)

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$f(x)=\sqrt{x}-1$ στο $x=16$

<u>Λύση</u>

Για την εύρεση της παραγώγου της f στο $x=16$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(16+h)-f(16)$:

$$f(16+h)-f(16)=\sqrt{16+h}-1-(\sqrt{16}-1)=$$

$$=\sqrt{16+h}-\sqrt{16}=\sqrt{16+h}-4$$

Για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\frac{f(16+h)-f(16)}{h}$:

$$\frac{f(16+h)-f(16)}{h}=\frac{\sqrt{16+h}-4}{h}=$$

(Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή δηλαδή με την $\left(\sqrt{16+h}+4\right)$ και έχουμε:

$$=\frac{\left(\sqrt{16+h}-4\right)\left(\sqrt{16+h}+4\right)}{h\left(\sqrt{16+h}+4\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{16}+h-\cancel{16}}{h\left(\sqrt{16+h}+4\right)}=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{16+h}+4)}=\frac{1}{\sqrt{16+h}+4}$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$f'(16)=\lim_{h\to 0}\frac{f(16+h)-f(16)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{16+h}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

Άρα $f'(16)=\frac{1}{8}$

Άσκηση 5 (Εύρεση παραγώγου της f στο x_0 με βάση τον ορισμό - Να μην υπάρχει η παράγωγος)

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης:

$f(x) = 2|x+1|$ στο σημείο $x = -1$

<u>Λύση</u>

Για την εύρεση της παραγώγου της f στο $x = -1$ εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τη διαφορά $f(-1+h) - f(-1)$:

$f(-1+h) - f(-1) = 2|(-1+h)+1| - 2|-1+1| = 2|h|$ (1)

για $h \neq 0$ βρίσκουμε το $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$:

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{2|h|}{h}$$

- Αν $h > 0$ τότε $|h| = h$ οπότε η (1) γράφεται $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

  Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 = 2$ (2)

- Αν $h < 0$ τότε $|h| = -h$ οπότε η (1) γράφεται $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{-2h}{h} = -2$

  Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-2) = -2$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ στο $x = -1$.
Επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 2|x+1|$ στο σημείο $x = -1$ του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση 6 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα κίνησης)

Ένα κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή και η θέση του κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = t^2 - 4t$. Να βρεθεί

α) Η επιτάχυνση του κινητού όταν $\upsilon(t) = 0$.

β) Πότε το κινητό κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

γ) Να βρεθεί το συνολικό διάστημα S που διάνυσε το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 3sec.

<u>Λύση</u>

α) Επειδή η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του κινητού για να βρεθεί η επιτάχυνση του κινητού πρέπει πρώτα να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού.

Η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(t_0 + h)^2 - 4(t_0 + h) - (t_0^2 - 4t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{t_0^2 + 2t_0 h + h^2 - 4t_0 - 4h - t_0^2 + 4t_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2t_0 h + h^2 - 4h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2t_0 + h - 4)}{h} =$$

$= \lim_{h \to 0}(2t_0 + h - 4) = 2t_0 - 4$ δηλαδή $\upsilon(t_0) = 2t_0 - 4$

Όταν $\upsilon(t_0) = 0$, $2t_0 - 4 = 0$, $t_0 = 2$

Η επιτάχυνση του κινητού όταν $t = t_0 = 2$ είναι:

$$\alpha(2) = \upsilon'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\upsilon(2+h) - \upsilon(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h) - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 2h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2\ m/sec^2$$

β) Το κινητό κινείται

- στη θετική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t) > 0$ δηλαδή όταν $2t - 4 > 0$, $t > 2$

- στην αρνητική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t) < 0$ δηλαδή όταν $2t - 4 < 0$, $0 \leq t < 2$

γ) Το διάστημα που διάνυσε το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 3sec

- για το χρονικό διάστημα [0,2] είναι $s_1 = |S(2) - S(0)| = |-4 - 0| = 4\text{ m}$

- για το χρονικό διάστημα [2,3] είναι $s_2 = |S(3) - S(2)| = |-3 - (-4)| = |-3 + 4| = 1\text{ m}$

Άρα το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 3sec είναι $s = s_1 + s_2 = 4\text{m} + 1\text{m} = 5\text{m}$

Άσκηση 7 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα οικονομίας)

Το κόστος (σε ευρώ) από την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος υποθέτουμε ότι δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=\alpha+20x-\frac{1}{20}x^2$, $\alpha\in R$.

α) Να προσδιορίσετε το α αν το κόστος για την κατασκευή 10 μονάδων προϊόντος είναι 215 ευρώ

β) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν x = 10 είναι 19 μονάδες προϊόντος.

<u>Λύση</u>

α) Το κόστος για την παραγωγή 10 μονάδων ενός προϊόντος είναι

$$K(10)=\alpha+20\cdot10-\frac{1}{20}10^2=\alpha+200-5=\alpha+195$$

Αλλά σύμφωνα με την εκφώνηση $\alpha+195=215,\ \alpha=215-195,\ \alpha=20$

β) Όταν $\alpha=20$ η συνάρτηση του κόστους γράφεται $K(x)=20+20x-\frac{1}{20}x^2$

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν $x=10$ είναι

$$K'(10)=\lim_{h\to0}\frac{K(10+h)-K(10)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{[20+20(10+h)-\frac{1}{20}(10+h)^2]-(20+20\cdot10-\frac{1}{20}10^2)}{h}$$

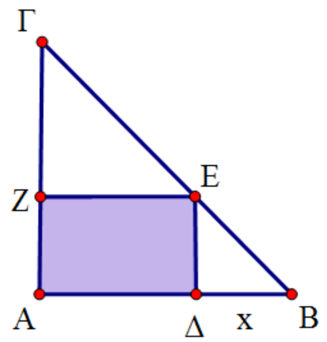
$$=\lim_{h\to0}\frac{20+200+20h-\frac{1}{20}(100+20h+h^2)-20-200+\frac{1}{20}100}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{20}+200+20h-\cancel{5}-h-\frac{1}{20}h^2-\cancel{20}-200+\cancel{5}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{19h-\frac{1}{20}h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h(19-\frac{1}{20}h)}{h}=\lim_{h\to0}(19-\frac{1}{20}h)=19$$ μονάδες προϊόντος

Άσκηση 8 (Εύρεση ρυθμού μεταβολής - Σε προβλήματα γεωμετρίας)

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^{\circ}$) με πλευρά ΑΒ = ΑΓ = 20 cm εγγράφουμε ορθογώνιο ΑΔΕΖ (η κορυφή Δ στην κάθετη πλευρά ΑΒ, η Ζ στην κάθετη πλευρά ΑΓ και η Ε στην υποτείνουσα). Αν ΔΒ=x



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ συναρτήσει του x.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν x = 2.

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε του ορθογωνίου ως προς x, είναι 11.

<u>Λύση</u>

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές $\hat{B}=45^{0}$. Άρα και το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και επομένως ΔΕ=x οπότε ΑΒ=20-x. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ συναρτήσει του x είναι $E(x)=x(20-x)=20x-x^2$

β) Για $h\neq 0$ έχουμε $\frac{E(2+h)-E(2)}{h}=\frac{20(2+h)-(2+h)^2-36}{h}=\frac{40+20h-(4+4h+h^2)-36}{h}=$

$$\frac{\cancel{40}+20h-\cancel{4}-4h-h^2-\cancel{36}}{h}=\frac{16h-h^2}{h}=\frac{h(16-h)}{h}=16-h$$

Επομένως $E'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{E(2+h)-E(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(16-h)=16cm^2$

γ) Έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε του ορθογωνίου ως προς την κάθετη πλευρά x όταν $x=x_0$ είναι 11, τότε

$$E'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{20x_0+20h-x_0^2-2x_0\cdot h-h^2-20x_0+x_0^{\,2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20h-2x_0\cdot h-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(20-2x_0-h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(20-2x_0-h)=20-2x_0$$

Αλλά $E'(x_0)=11$ άρα

$20-2x_0=11$ δηλαδή

$9=2x_0$

Επομένως $x_0=4,5cm$

Άσκηση 9 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας συνάρτησης, όταν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x^2+\kappa x+2, \kappa\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο με τετμημένη $x_0=3$, που έχει συντελεστή διεύθυνσης 5.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f με την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha, \beta\in R$ είναι το $A(3, f(3))$ και από υπόθεση δίνεται $\alpha=5$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται : $y=5\cdot x+\beta, \beta\in R, (1)$
- Το $f(3)=3^2+\kappa\cdot 3+2=9+3\kappa+2=11+3\kappa, (2)$
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση $x_0=3$, εργαζόμαστε ως εξής :
- Βρίσκουμε τη διαφορά :

$$f(3+h)-f(3)=(3+h)^2+\kappa(3+h)+2-11-3\kappa=$$

$$9+6h+h^2+3\kappa+\kappa h-9-3\kappa=6h+h^2+h\kappa, (3)$$

Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{6h+h^2+h\kappa}{h}=\frac{\cancel{h}(6+h+\kappa)}{\cancel{h}}=6+h+\kappa, (4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(6+h+\kappa)=6+\kappa$,άρα $f'(x_0)=6+\kappa, (5)$ που αναγκαστικά θα είναι ίσος με τον δοσμένο συντελεστή διεύθυνσης 5 .
- Άρα, λόγω της (5) και του $\alpha=f'(x_0)=5$: έχουμε την εξίσωση : $6+\kappa=5\Leftrightarrow \kappa=-1$

  Επομένως ο τύπος της f για $\kappa=-1$ γίνεται: $f(x)=x^2-x+2$, οπότε και το σημείο επαφής είναι $A(3,8)$, του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την (1). Άρα, $8=5\cdot 3+\beta\Leftrightarrow \beta=-7$
- Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=5x-7$

Άσκηση 10 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης η οποία περνάει από ένα σημείο που δεν ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που διέρχονται από το σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.

- Για $x=1$, έχουμε από τον τύπο της $f: f(1)=-\frac{1^2}{2}+2=\frac{3}{2}$, άρα $f(1)\neq 2$, που έχει η τεταγμένη του σημείου Α. Επομένως το σημείο $A(1,2)$, δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

  Έστω $K\left(x_0, f(x_0)\right)$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτόμενη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in R,(1)$

  Γνωρίζουμε ότι, $\alpha=f'(x_0)$. Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$, εργαζόμαστε ως εξής :

- Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=-\frac{(x_0+h)^2}{2}+2-\left(-\frac{x_0{}^2}{2}+2\right)=$$

$$-\frac{x_0^2+2x_0h+h^2}{2}+2+\frac{x_0^2}{2}-2=-\frac{2x_0h+h^2}{2},(2)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(2)}{=}\frac{-\frac{2x_0h+h^2}{2}}{h}=-\frac{\cancel{h}(2x_0+h)}{2\cancel{h}}=-\frac{(2x_0+h)}{2},(3)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{(2x_0+h)}{2}\right)=-\frac{2x_0}{2}=-x_0$, άρα $\alpha=f'(x_0)=-x_0$. Οπότε η (1) γίνεται: $(\varepsilon): y=-x_0x+\beta, \beta\in R,(4)$

- Επειδή το σημείο $A(1,2)$, ανήκει στην (ε), θα επαληθεύουν οι συντεταγμένες του την εξίσωση (4), άρα $2=-x_0 \cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=x_0+2$.Οπότε η (4) λόγω του $\beta=x_0+2$, γίνεται: $(\varepsilon): y=-x_0 x+(x_0+2),(5)$

- Ισχύει: $f(x_0)=-\frac{x_0^2}{2}+2,(6)$. Όμως και το σημείο $K(x_0, f(x_0))$, ανήκει στην εφαπτομένη, άρα η (5) λόγω (6), δίνει:

$$-\frac{x_0^2}{2}+2=-x_0 \cdot x_0+(x_0+2) \Leftrightarrow -x_0^2+4=-2x_0^2+2x_0+4 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0$$

$$\Leftrightarrow x_0(x_0-2)=0 \Leftrightarrow x_0=0 \text{ ή } x_0=2$$

- Για $x_0=0$ η (5) γίνεται: $y=-0 \cdot x+(0+2) \Leftrightarrow y=2$, άρα η εφαπτομένη είναι η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=2$, στο σημείο $K(0,2)$

- Για $x_0=2$ η (5) γίνεται: $y=-2 \cdot x+(2+2) \Leftrightarrow y=-2x+4$ άρα η δεύτερη εφαπτομένη, είναι η ευθεία με εξίσωση: $y=-2x+4$, στο σημείο $\Lambda(2,0)$

Άσκηση 11 (Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης η οποία περνάει από ένα σημείο που δεν ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=x^3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $A(5,13)$ και εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, σε σημείο με τετμημένη ακέραιο θετικό αριθμό.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x \in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.
- Για $x=5$, έχουμε από τον τύπο της f: $f(5)=5^3=125$. Άρα $f(5)\neq 13$, που έχει η τεταγμένη του σημείου Α. Επομένως το σημείο $A(5,13)$, δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
- Έστω $K(x_0, f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτόμενη: $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta, \alpha, \beta \in R, (1)$

  Γνωρίζουμε ότι, $\alpha = f'(x_0)$. Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)$, εργαζόμαστε ως εξής :
- Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^3-x_0^3=x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-x_0^3=$$

$$3x_0^2h+3x_0h^2+h^3, (2)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(2)}{=}\frac{3x_0^2h+3x_0h^2+h^3}{h}=\frac{\cancel{h}(3x_0^2+3x_0h+h^2)}{\cancel{h}}=$$

$$3x_0^2+3x_0h+h^2, (3)$$

- Υπολογίζουμε το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(3x_0^2+3x_0h+h^2)=3x_0^2$, άρα $\alpha=f'(x_0)=3x_0^2$, οπότε η (1) γίνεται : $(\varepsilon): y=3x_0^2x+\beta, \beta\in R, (4)$
- Επειδή το σημείο $A(5,13)$, ανήκει στην (ε), θα επαληθεύουν οι συντεταγμένες του την εξίσωση (4). Δηλαδή, $13=3x_0^2\cdot 5+\beta \Leftrightarrow \beta=-15x_0^2+13$, οπότε η (4) λόγω του $\beta=-15x_0^2+13$ γίνεται : $(\varepsilon): y=3x_0^2x-15x_0^2+13, (5)$

- Ισχύει : $f\left(x_0\right)=x_0^3,(6)$.Όμως και το σημείο $K\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, ανήκει στην εφαπτομένη , άρα η (5) λόγω (6), δίνει: $x_0^3=3x_0^2x_0-15x_0^2+13 \Leftrightarrow 2x_0^3-15x_0^2+13=0$

  Η εξίσωση έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους αριθμούς $\pm1,\pm13$ (που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0=13$).

  Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $x_1=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης και παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της. Έτσι η εξίσωση γίνεται :

2	-15	0	13	ρ=1
	2	-13	-13	
2	-13	-13	0	

  $\left(x_0-1\right)\cdot\left(2x_0^2-13x-13\right)=0 \Leftrightarrow x_0-1=0$ ή $2x_0^2-13x_0-13=0$

  Δηλαδή $x_0=1$ ή $2x_0^2-13x_0-13=0 \Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=\dfrac{13\pm\sqrt{273}}{4}$. Δεκτή είναι η τιμή $x_0=1$,γιατί είναι ακέραιος θετικός αριθμός

- Για $x_0=1$ η (5) γίνεται: $(\varepsilon): y=3\cdot1^2\cdot x-15\cdot1^2+13 \Leftrightarrow y=3x-15+13 \Leftrightarrow y=3x-2$. Άρα η εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $A(5,13)$,είναι η ευθεία : $y=3x-2$

Άσκηση 12 (Εύρεση παραμέτρου, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εφάπτεται στον άξονα xx')

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda, \kappa,\lambda \in R$. Αν $g(x)=\kappa x^2-3$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=5$, τότε να βρείτε τους αριθμούς κ,λ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να εφάπτεται στον άξονα xx' .

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=5$ και $g(x)=\kappa x^2-3$, θα έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to 1}\left(\kappa x^2-3\right)=5 \Leftrightarrow \kappa \cdot 1^2-3=5 \Leftrightarrow \kappa-3=5 \Leftrightarrow \kappa=8$, οπότε ο τύπος της f , για $\kappa=8$ γίνεται $f(x)=x^2-8x+\lambda$

- Έστω $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f που βρίσκεται πάνω στον άξονα xx'

  Επομένως η τεταγμένη του θα είναι μηδέν, άρα $A\left(x_0,0\right)$

  Εξάλλου η εφαπτομένη είναι ο άξονας xx' και έχει εξίσωση $y=0$, δηλαδή $y=0x+0$, οπότε ισχύουν ταυτόχρονα: $f\left(x_0\right)=0,(1) \text{ και } f'\left(x_0\right)=0,(2)$

- Υπολογίζουμε την $f'\left(x_0\right)$ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+h\right)^2-8\left(x_0+h\right)+\lambda-\left(x_0^2-8x_0+\lambda\right)=$$

  $$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)-8x_0-8h+\lambda-x_0^2+8x_0-\lambda=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2-8x_0-8h+\lambda-x_0^2+8x_0-\lambda=2x_0h+h^2-8h,(3)$$

- Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2-8h}{h}=\frac{\cancel{h}\left(2x_0+h-8\right)}{\cancel{h}}=2x_0+h-8,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο:

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(4)}{=}\lim_{h\to 0}\left(2x_0+h-8\right)=2x_0-8 \text{ ,άρα } f'\left(x_0\right)=2x_0-8,(5)$$

- Εξάλλου από (2) είναι και $f'(x_0)=0$, οπότε από (2) και (5) έχουμε:

  $2x_0-8=0 \Leftrightarrow 2x_0=8 \Leftrightarrow x_0=4$ (6)

- Εξάλλου, $f\left(x_0\right)=x_0^2-8x_0+\lambda$ και λόγω της (1) είναι και $f\left(x_0\right)=0$. Άρα, $x_0^2-8x_0+\lambda=0,\left(7\right)$

  Η εξίσωση (7) λόγω (6), γίνεται: $4^2-8\cdot 4+\lambda=0 \Leftrightarrow 16-32+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=16$

Άσκηση 13 (Εύρεση παραμέτρου, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης εφάπτεται στον άξονα xx')

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+2\kappa x-\lambda, \kappa,\lambda\in R$. Να βρείτε τους αρνητικούς αριθμούς κ,λ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να εφάπτεται στον άξονα xx', όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=\lambda x^2+x-1$ διέρχεται από το σημείο $M(1,-1)$.

<u>Λύση</u>

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $M(1,-1)$, θα έχουμε: $-1=\lambda\cdot 1^2+1-1\Leftrightarrow \lambda=-1<0$ (δεκτή) λόγω υπόθεσης που πρέπει οι κ,λ να είναι αρνητικοί. Οπότε ο τύπος της f γίνεται $f(x)=x^2+2\kappa x+1$
- Έστω $A(x_0,f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f που βρίσκεται πάνω στον άξονα xx'
  Άρα η τεταγμένη του θα είναι μηδέν, οπότε έχουμε $A(x_0,0)$
- Εξάλλου η εφαπτομένη, είναι ο άξονας xx' και έχει εξίσωση: $y=0$, δηλαδή, $y=0x+0$. Άρα ισχύουν ταυτόχρονα: $f(x_0)=0,(1)$ και $f'(x_0)=0,(2)$
- Υπολογίζουμε την $f'(x_0)$ ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+2\kappa(x_0+h)+1-(x_0^2+2\kappa x_0+1)=$$

$$(x_0^2+2x_0h+h^2)+2\kappa x_0+2\kappa h+1-x_0^2-2\kappa x_0-1=$$

$$x_0^2+2x_0h+h^2+2\kappa x_0+2\kappa h+1-x_0^2-2\kappa x_0-1=2x_0h+h^2+2\kappa h,(3)$$

- Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2+2\kappa h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h+2\kappa)}{\cancel{h}}=$$

$$2x_0+h+2\kappa,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h+2\kappa)=2x_0+2\kappa$, άρα $f'(x_0)=2x_0+2\kappa,(5)$

- Εξάλλου, $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0+2\kappa=0 \Leftrightarrow x_0=-\kappa,(6)$ και $f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^2+2\kappa x_0+1=0,(7)$.

  Η εξίσωση (7) λόγω της (6), γίνεται:

  $$x_0^2+2(-x_0)x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0^2+1=0 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$$

- Για $x_0=1$, από την (6) έχουμε: $\kappa=-1<0$ (δεκτή) από την υπόθεση

- Για $x_0=-1$, από την (6) έχουμε: $\kappa=1>0$ (απορρίπτεται) από την υπόθεση

Άσκηση 14 (Δοθείσης συνάρτησης ζητείται να αποδειχθεί ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη της)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4x^2+2\lambda x+3, \lambda \in R$. Να βρείτε το θετικό αριθμό λ, για τον οποίον, η ευθεία $(\eta): y=-2x-1$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x \in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.
- Έστω $A(x_0, f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της συνάρτησης f
- Επειδή, από υπόθεση η (η) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'(x_0)=-2,(1)$ και $f(x_0)=-2x_0-1,(2)$
- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=4(x_0+h)^2+2\lambda(x_0+h)+3-(4x_0^2+2\lambda x_0+3)=$$

  $$4(x_0^2+2x_0h+h^2)+2\lambda x_0+2\lambda h+3-4x_0^2-2\lambda x_0-3=$$

  $$4x_0^2+8x_0h+4h^2+2\lambda x_0+2\lambda h+3-4x_0^2-2\lambda x_0-3=8x_0h+4h^2+2\lambda h,(3)$$

  Για $h \neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{8x_0h+4h^2+2\lambda h}{h}=\frac{\cancel{h}(8x_0+4h+2\lambda)}{\cancel{h}}=$$

  $$8x_0+4h+2\lambda,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(8x_0+4h+2\lambda)=8x_0+2\lambda$,άρα $f'(x_0)=8x_0+2\lambda,(5)$
- Όμως από την (1), πρέπει και $f'(x_0)=-2$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:

  $$8x_0+2\lambda=-2 \Leftrightarrow 8x_0=-2-2\lambda \Leftrightarrow x_0=-\frac{1+\lambda}{4},(6)$$

- Από τη (2), έχουμε:

$$f\left(x_0\right) = -2x_0 - 1 \Leftrightarrow 4{x_0}^2 + 2\lambda x_0 + 3 = -2x_0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$4{x_0}^2 + 2\lambda x_0 + 2x_0 + 4 = 0 \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$$

$$4\left(-\frac{1+\lambda}{4}\right)^2 + 2\lambda\left(-\frac{1+\lambda}{4}\right) + 2\left(-\frac{1+\lambda}{4}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(1+\lambda\right)^2}{4} - \frac{\lambda\left(1+\lambda\right)}{2} - \frac{1+\lambda}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{4} - \frac{\lambda+\lambda^2}{2} - \frac{1+\lambda}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+2\lambda+\lambda^2}{4} - \frac{2\lambda+2\lambda^2}{4} - \frac{2+2\lambda}{4} + \frac{16}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{15-2\lambda-\lambda^2}{4} = 0$$

$\Leftrightarrow 15 - 2\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -5$ (απορρίπτεται) ή $\lambda_2 = 3$ (δεκτή)

Άσκηση 15 (Δοθείσης συνάρτησης ζητείται να αποδειχθεί ότι μια ευθεία είναι εφαπτομένη της)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda, \kappa,\lambda\in R$. Να βρείτε τους αριθμούς $\kappa,\lambda\in R$, ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$, να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(2,f(2)\right)$.

<u>Λύση</u>

- Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.
- Επειδή , από υπόθεση η ευθεία (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο $A\left(2,f(2)\right)$, απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα:

  $f'(2)=3,(1)$ και $f(2)=3\cdot 2-2=4,(2)$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση 2, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(2+h)-f(2)=(2+h)^2-\kappa(2+h)+\lambda-\left(2^2-2\kappa+\lambda\right)=$$

  $$4+4h+h^2-2\kappa-\kappa h+\lambda-\left(4-2\kappa+\lambda\right)=$$

  $$4+4h+h^2-2\kappa-\kappa h+\lambda-4+2\kappa-\lambda=4h+h^2-\kappa h \quad (3)$$

  Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{4h+h^2-\kappa h}{h}=\frac{\cancel{h}\left(4+h-\kappa\right)}{\cancel{h}}=4+h-\kappa,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\left(4+h-\kappa\right)=4-\kappa$, άρα $f'(2)=4-\kappa,(5)$

  Εξάλλου, $f(2)=2^2-\kappa\cdot 2+\lambda=4-2\kappa+\lambda,(6)$

  Η (1) λόγω της (5) γίνεται: $f'(2)=3=4-\kappa\Leftrightarrow \kappa=1$

  Η (2) λόγω της (6) γίνεται: $f(2)=4-2\kappa+\lambda=4\Leftrightarrow 4-2\cdot 1+\lambda=4\Leftrightarrow \lambda=2$

Άσκηση 16 (Εύρεση παραμέτρου, ώστε μία ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+x+\lambda$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=\lambda x-2, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$, ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτής

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του β) ερωτήματος τέμνονται πάνω στον άξονα yy'.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x \in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x \in R$.

- Έστω $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f

- Επειδή, από υπόθεση η (ε) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'\left(x_0\right)=\lambda,(1)$ και $f\left(x_0\right)=\lambda x_0-2,(2)$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+h\right)^2+\left(x_0+h\right)+\lambda-\left(x_0^2+x_0+\lambda\right)=$$

  $$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)+x_0+h+\lambda-x_0^2-x_0-\lambda=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2+x_0+h+\lambda-x_0^2-x_0-\lambda=2x_0h+h^2+h(3).$$

  Για $h \neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2+h}{h}=\frac{\cancel{h}\left(2x_0+h+1\right)}{\cancel{h}}=2x_0+h+1,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\left(2x_0+h+1\right)=2x_0+1$, άρα $f'\left(x_0\right)=2x_0+1,(5)$

- Όμως από την (1) πρέπει και $f'\left(x_0\right)=\lambda$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:

  $$2x_0+1=\lambda,(6)$$

- Από (2) $f(x_0)=\lambda x_0-2 \Leftrightarrow x_0{}^2+x_0+\lambda=\lambda x_0-2 \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

$$x_0{}^2+x_0+2x_0+1=(2x_0+1)x_0-2$$

$\Leftrightarrow x_0{}^2+x_0+2x_0+1=2x_0{}^2+x_0-2 \Leftrightarrow x_0{}^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=-1$ ή $x_0=3$

- Για $x_0=-1$, έχουμε: $2(-1)+1=\lambda \Leftrightarrow \lambda=-1$

- Για $x_0=3$, έχουμε: $2\cdot 3+1=\lambda \Leftrightarrow \lambda=7$

β)
- Για $\lambda=-1$, έχουμε: $(\varepsilon_1): y=-x-2$
- Για $\lambda=7$, έχουμε: $(\varepsilon_2): y=7x-2$

γ) Για να βρούμε το κοινό σημείο (αν υπάρχει ένα τέτοιο σημείο), των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=-x-2 \\ y=7x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-2 \\ -x-2=7x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-2 \\ -8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$$

Άρα υπάρχει σημείο τομής, το $K(0,-2)$ και επειδή η τετμημένη του σημείου είναι 0, το σημείο αυτό ανήκει στον άξονα yy'.

Άσκηση 17 (Εύρεση παραμέτρου, ώστε μία ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+(2\lambda-1)x-2, \lambda\in R$ και η ευθεία με εξίσωση : $(\eta): y=\lambda x-3$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$, ώστε η ευθεία (η) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο α) ερώτημα , να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων επαφής τους.

γ)Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του β) ερωτήματος, τέμνονται στο σημείο Μ ,που ανήκει στον άξονα yy' .

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται για κάθε $x\in R$ και παραγωγίζεται για κάθε $x\in R$.

- Έστω $A(x_0,f(x_0))$, το σημείο επαφής της καμπύλης της f

- Επειδή, από υπόθεση η (η) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f , απαιτούμε να ισχύουν ταυτόχρονα: $f'(x_0)=\lambda,(1)$ και $f(x_0)=\lambda x_0-3,(2)$

- Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στη θέση x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

  Βρίσκουμε τη διαφορά:

  $$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2+(2\lambda-1)(x_0+h)-2-\left(x_0^2+(2\lambda-1)x_0-2\right)=$$

  $$\left(x_0^2+2x_0h+h^2\right)+(2\lambda-1)x_0+(2\lambda-1)h-2-x_0^2-(2\lambda-1)x_0+2=$$

  $$x_0^2+2x_0h+h^2+2\lambda x_0-x_0+2\lambda h-h-2-x_0^2-2\lambda x_0+x_0+2=$$

  $$2x_0h+h^2+2\lambda h-h,(3)$$

- Για $h\neq 0$, βρίσκουμε το πηλίκο:

  $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(3)}{=}\frac{2x_0h+h^2+2\lambda h-h}{h}=\frac{\cancel{h}(2x_0+h+2\lambda-1)}{\cancel{h}}=$$

  $$2x_0+h+2\lambda-1,(4)$$

- Υπολογίζουμε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(4)}{=}\lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h+2\lambda-1)=2x_0+2\lambda-1$, άρα $f'(x_0)=2x_0+2\lambda-1,(5)$

- Όμως από την (1) πρέπει και $f'(x_0)=\lambda$. Άρα από (1) και (5) έχουμε:

$$2x_0+2\lambda-1=\lambda \Leftrightarrow 2x_0+2\lambda-\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1-2x_0,(6)$$

- Η (2) γίνεται: $f(x_0)=\lambda x_0-3 \Leftrightarrow x_0{}^2+(2\lambda-1)x_0-2=\lambda x_0-3 \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

$$x_0{}^2+(2(1-2x_0)-1)x_0-2=(1-2x_0)x_0-3 \Leftrightarrow$$

$$x_0{}^2+(2-4x_0-1)x_0-2=x_0-2x_0{}^2-3 \Leftrightarrow$$

$$x_0{}^2+x_0-4x_0^2-2=x_0-2x_0{}^2-3 \Leftrightarrow -x_0{}^2=-1 \Leftrightarrow x_0{}^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$$

- Από την (6) για $x_0=-1$, έχουμε: $\lambda=1-2(-1)=1+2=3$

- Από την (6) για $x_0=1$, έχουμε: $\lambda=1-2\cdot 1=1-2=-1$

- Άρα έχουμε δύο τιμές του λ, για τις οποίες η ευθεία (η) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f, τις εξής: $\lambda=3$ ή $\lambda=-1$

β)

- Για $\lambda=-1$, έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης: $(\eta_1): y=-x-3,(i)$ στο σημείο $A(1,-4)$

- Για $\lambda=3$, έχουμε την εξίσωση της εφαπτομένης: $(\eta_1): y=3x-3,(ii)$ στο σημείο $B(-1,-6)$

γ) Για να βρούμε το κοινό σημείο (αν υπάρχει), των ευθειών $(\eta_1)\ \text{και}\ (\eta_2)$, αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=-x-3 \\ y=3x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-3 \\ -x-3=3x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-3 \\ -4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases},$$

άρα υπάρχει σημείο τομής το $K(0,-3)$ και επειδή η τετμημένη του σημείου είναι 0, το σημείο αυτό ανήκει στον άξονα yy'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Αν Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in B$ στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ορίζεται μια νέα συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f' .

Παράδειγμα

Αν $f\left(x\right)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$, τότε

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=\left(x+h\right)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=h(2x+h).$$

Για $h\neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h\ .$$

Επομένως

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η παράγωγος της f σε ένα σημείο $x_0\in B$ ισούται με την τιμή της παραγώγου συνάρτησης στο x_0, $f'(x_0)$. Για παράδειγμα, η παράγωγος της $f(x)=x^2$ στο $x_0=3$ είναι η τιμή της συνάρτησης $f'(x)=2x$ στο $x_0=3$, δηλαδή $f'(3)=2\cdot 3=6$.

Η παράγωγος της συνάρτησης f', όταν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της συνάρτησης f συμβολίζεται με f'' και ορίζεται σε ένα σύνολο $\Gamma\subseteq B$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν $x(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει την τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\upsilon(t)=x'(t)\ .$$

Αν επιπλέον η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση που μας δίνει την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι:

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) = x''(t) \ ,$$

Δηλαδή η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η (πρώτη) παράγωγος της ταχύτητας ή αλλιώς η δεύτερη παράγωγος της $x(t)$.

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

Θα αναφερθούμε τώρα σε μερικούς κανόνες που θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της παραγώγου πολύπλοκων συναρτήσεων.

Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι:

$$f'(x)=(c)'=0$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$.

Έχουμε:

$$f(x+h)-f(x)=c-c=0.$$

Για $h\neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

δηλαδή

$$(c)'=0.$$

Παραδείγματα

$$(3)'=0,$$

$$\left(\eta\mu\frac{\pi}{8}\right)'=0.$$

Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι:

$$f'(x)=(x)'=1$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$.

Έχουμε:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h.$$

Για $h\neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

δηλαδή

$$(x)'=1.$$

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι

η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^\rho$, όπου ρ ρητός αριθμός, είναι:

$$f'(x)=(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$$

Παραδείγματα

$$\left(x^9\right)' = 9 \cdot x^{9-1} = 9x^8,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right) = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0.$$

Αποδεικνύεται ότι :

Η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ είναι:

$$f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Η παράγωγος της τριγωνομετρικής συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι:

$$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι:

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$$

Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Σημείωση: Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι σχετικές συναρτήσεις.

Κανόνες Παραγώγισης

Αν η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη, τότε:

Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$ (παράγωγος γινομένου σταθεράς *c* με συνάρτηση) είναι: $$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$.

Έχουμε:

$$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\left[f(x+h)-f(x)\right].$$

Για $h\neq 0$, ισχύει:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

δηλαδή

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x).$$

Παραδείγματα

$$\left(7x^3\right)'=7\left(x^3\right)'=7\cdot 3x^2=21x^2,$$

$$\left(-4\sigma\upsilon\nu x\right)'=-4\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=-4\left(-\eta\mu x\right)=4\eta\mu x.$$

Αν οι συναρτήσεις *f*, *g* είναι παραγωγίσιμες, τότε:

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$ (παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων) είναι:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε:

$$F(x+h)-F(x)=\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]=$$

$$=\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]$$

Για $h\neq 0$, ισχύει:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

δηλαδή

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x).$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\left(x^6+\eta\mu x\right)' = \left(x^6\right)' + \left(\eta\mu x\right)' = 6x^5+\sigma\upsilon\nu x.$$

<u>Σημείωση</u>: Ο παραπάνω κανόνας ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\left(f(x)+g(x)+h(x)\right)'=f'(x)+g'(x)+h'(x).$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\left(x^2+e^x+\ln x\right)'=\left(x^2\right)'+\left(e^x\right)'+\left(\ln x\right)'=2x+e^x+\frac{1}{x}.$$

Αν οι συναρτήσεις *f*, *g* είναι παραγωγίσιμες, τότε:

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)\cdot g(x)$ (παράγωγος γινομένου συναρτήσεων) είναι:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\left(x^4e^x\right)'=\left(x^4\right)'e^x+x^4\left(e^x\right)'=4x^3e^x+x^4e^x=x^3e^x\left(4+x\right).$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $\frac{f(x)}{g(x)}$ (παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων) είναι:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\left(\frac{x}{x^3-8}\right)'=\frac{(x)'\left(x^3-8\right)-x\left(x^3-8\right)'}{\left(x^3-8\right)^2}=\frac{1\cdot\left(x^3-8\right)-x\cdot 3x^2}{\left(x^3-8\right)^2}=\frac{x^3-8-3x^3}{\left(x^3-8\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^3-8}{\left(x^3-8\right)^2}=\frac{-2\left(x^3+4\right)}{\left(x^3-8\right)^2}.$$

Οι παραπάνω κανόνες παραγώγισης δεν επαρκούν για την παραγώγιση συναρτήσεων της μορφής $F(x)=\eta\mu(x^2-1)$

Παρατηρώντας όμως ότι θέτοντας στη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ όπου *x* το $g(x)=x^2-1$ προκύπτει η συνάρτηση $F(x)$. Δηλαδή $F(x)=\eta\mu(x^2-1)=f(g(x))$. Σε μία τέτοια περίπτωση η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση της g με την f** .

Αποδεικνύεται ότι:

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(g(x))$ (παράγωγος σύνθετης συνάρτησης) είναι: $$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε την $f(g(x))$, πρώτα παραγωγίζουμε την *f* σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της *g*.

Άρα η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)=\eta\mu(x^2-1)$ είναι:

$$F'(x)=\left(\eta\mu(x^2-1)\right)'=\sigma\upsilon\nu(x^2-1)\cdot(x^2-1)'=\sigma\upsilon\nu(x^2-1)\cdot 2x=2x\sigma\upsilon\nu(x^2-1)$$

<u>Παράδειγμα</u>

$$\left[\left(2x^2-5x+3\right)^3\right]'=3\left(2x^2-5x+3\right)^2\cdot\left(2x^2-5x+3\right)'=3\left(2x^2-5x+3\right)^2\cdot(4x-5).$$

<u>Σημείωση</u>: Οι παραπάνω τύποι (κανόνες παραγώγισης) ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι σχετικές συναρτήσεις.

Πίνακες Παραγώγων

Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x)=c$	$f'(x)=(c)'=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=(x)'=1$
$f(x)=x^{\rho}$	$f'(x)=\left(x^{\rho}\right)'=\rho x^{\rho-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=\left(e^{x}\right)'=e^{x}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$f'(x)=(\varepsilon\phi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$

Κανόνες παραγώγισης

Κανόνες παραγώγισης
$\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$
$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$
$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^{2}}$
$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$

<u>Πίνακας παραγώγων σύνθεσης συνάρτησης f με τις βασικές συναρτήσεις</u>

Συνάρτηση	Παράγωγος
$g(x)=\left[f(x)\right]^{\rho}$	$g'(x)=\left(\left[f(x)\right]^{\rho}\right)'=\rho\left[f(x)\right]^{\rho-1}\cdot f'(x)$
$g(x)=\sqrt{f(x)}$	$g'(x)=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
$g(x)=\eta\mu f(x)$	$g'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)$	$g'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\varepsilon\varphi f(x)$	$g'(x)=\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$g(x)=e^{f(x)}$	$g'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$g(x)=\ln f(x)$	$g'(x)=\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

<u>Σημείωση</u>: Όλοι οι τύποι στους παραπάνω πίνακες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι σχετικές συναρτήσεις.

<u>**Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια**</u>

Είναι σημαντικό να κάνουμε κάποια σχόλια και παρατηρήσεις που θα μας βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση όλων των εννοιών που διαπραγματευθήκαμε στην ενότητα αυτή και επιπλέον θα μας δώσουν κάποια στοιχεία που θα διευκολύνουν την επίλυση των ασκήσεων.

1. Το πεδίο ορισμού της f' είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της *f* .
   Έτσι, αν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και η f' έχει πεδίο ορισμού το σύνολο Β, το Β αποτελείται από το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Δηλαδή: $B \subseteq A$

2. Προσοχή στη διαφορά μεταξύ της $f'(x)$ και του $f'(x_0)$. Η $f'(x)$ είναι η (πρώτη) παράγωγος της συνάρτησης *f* , δηλαδή συνάρτηση, ενώ το $f'(x_0)$ είναι η τιμή της παραγώγου της *f* στο σημείο x_0.

3. Αν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης *f* στο σημείο x_0, τότε γράφουμε $f'(x_0)$ και **όχι** $\left(f(x_0)\right)'$ γιατί
   $\left(f(x_0)\right)' = 0$ ως παράγωγος της **σταθερής συνάρτησης** $f(x_0)$**.**

4. Αν $\upsilon(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει την ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα τη χρονική στιγμή *t* , τότε η παράγωγος της ταχύτητας, $\upsilon'(t)$, μας δίνει την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή *t* , $\alpha(t)$.

Ανακεφαλαίωση

Τα βασικά σημεία των εννοιών που παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή είναι:

Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης:

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Αν Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in B$ στο $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ορίζεται μια νέα συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με f' .

Ορισμός Δεύτερης Παραγώγου Συνάρτησης:

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της συνάρτησης *f* και συμβολίζεται με f''.

Επιτάχυνση ενός κινητού:

Αν $x(t)$ η συνάρτηση που μας δίνει την τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα τη χρονική στιγμή *t* , τότε η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή *t* θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$\upsilon(t) = x'(t)$.

Αν επιπλέον η συνάρτηση ***υ*** είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση που μας δίνει την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή *t* θα είναι:

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = x''(t)$,

Δηλαδή η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή *t* είναι η (πρώτη) παράγωγος της ταχύτητας ή αλλιώς η δεύτερη παράγωγος της $x(t)$.

Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x)=c$	$f'(x)=(c)'=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=(x)'=1$
$f(x)=x^{\rho}$	$f'(x)=(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=(e^{x})'=e^{x}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$f'(x)=(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Κανόνες παραγώγισης

Κανόνες παραγώγισης
$(cf(x))'=cf'(x)$
$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

<u>**Πίνακας παραγώγων σύνθεσης συνάρτησης f με τις βασικές συναρτήσεις**</u>

Συνάρτηση	Παράγωγος
$g(x)=[f(x)]^{\rho}$	$g'(x)=\left([f(x)]^{\rho}\right)'=\rho[f(x)]^{\rho-1}\cdot f'(x)$
$g(x)=\sqrt{f(x)}$	$g'(x)=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
$g(x)=\eta\mu f(x)$	$g'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)$	$g'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\varepsilon\varphi f(x)$	$g'(x)=\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$g(x)=e^{f(x)}$	$g'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$g(x)=\ln f(x)$	$g'(x)=\left(\ln f(x)\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

<u>Παραδείγματα Εφαρμογής</u>

Παράδειγμα 1 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 8"

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt[5]{x^3},\ x>0$.

β) $g(x)=3x^4-5x^3+x^2-2x+11$.

γ) $\alpha(t)=t^2\ln t,\ t>0$.

δ) $h(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{e^x}$

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(3x^4-5x^3+x^2-2x+11\right)'=\left(3x^4\right)'-\left(5x^3\right)'+\left(x^2\right)'-\left(2x\right)'+\left(11\right)'=$$

$$3\left(x^4\right)'-5\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'-2\left(x\right)'+\left(11\right)'=3\cdot 4x^3-5\cdot 3x^2+2x-2\cdot 1+0=$$

$$=12x^3-15x^2+2x-2\ .$$

γ) Για κάθε $t>0$ έχουμε:

$$\alpha'(t)=\left[t^2\ln t\right]'=\left(t^2\right)'\ln t+t^2\left(\ln t\right)'=2t\ln t+t^2\frac{1}{t}=t\left(2\ln t+1\right).$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h'(x) = \left(\frac{x^3 - 3x - 2}{e^x}\right)' = \frac{\left(x^3 - 3x - 2\right)' e^x - \left(x^3 - 3x - 2\right)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(3x^2 - 3\right)e^x - \left(x^3 - 3x - 2\right)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(3x^2 - 3 - x^3 + 3x + 2\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{e^x}$$

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια :

Η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης γίνεται με τη χρήση των παραγώγων βασικών συναρτήσεων και των κανόνων παραγώγισης .

Παράδειγμα 2 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 9"

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης *f* καθώς και την τιμή της στο σημείο x_0, όταν:

α) $f(x) = \left(x^2 + 3x - 9\right)^{20}$, $x_0 = 2$.

β) $f(x) = e^{\eta\mu x + \ln 2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(Θέμα Β)

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x) = \left(x^2 + 3x - 9\right)^{20}$ είναι σύνθεση της $g(x) = x^2 + 3x - 9$ με την $h(x) = x^{20}$ ($f(x) = h\left(g(x)\right)$).

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left[\left(x^2 + 3x - 9\right)^{20}\right]' = 20\left(x^2 + 3x - 9\right)^{19}\left(x^2 + 3x - 9\right)' = 20\left(x^2 + 3x - 9\right)^{19}\left(2x + 3\right)$$

Η τιμή της παραγώγου της f στο σημείο $x_0 = 2$ είναι:

$$f'(2) = 20\left(2^2 + 3\cdot 2 - 9\right)^{19}\left(2\cdot 2 + 3\right) = 20\cdot 1^{19}\cdot 7 = 140 .$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = e^{\eta\mu x + \ln 2}$ είναι σύνθεση της $g(x) = \eta\mu x + \ln 2$ με την $h(x) = e^x$ ($f(x) = h\left(g(x)\right)$).

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(e^{\eta\mu x + \ln 2}\right)' = e^{\eta\mu x + \ln 2}\left(\eta\mu x + \ln 2\right)' = e^{\eta\mu x + \ln 2}\sigma\upsilon\nu x .$$

Η τιμή της παραγώγου της f στο σημείο $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ είναι:

$$f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\eta\mu\frac{\pi}{2} + \ln 2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = e^{1+\ln 2}\cdot 0 = 0 .$$

Παράδειγμα 3 (Εύρεση εφαπτομένης)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 10"

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 5x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ **.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* , η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^o$.

(Θέμα Γ)

Λύση

Έστω $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη της καμπύλης της *f* .

Αν $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο στο οποίο εφάπτεται η ευθεία *ε* στη γραφική παράσταση της *f* για τον συντελεστή διεύθυνση της ε θα έχουμε:

$$\alpha = f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega \ .$$

Επομένως,

$$f'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^o = 1.$$

Η παράγωγος της *f* για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x - 2\right)' = 3x - 5 \ .$$

Άρα:

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 3x_0 - 5 = 1 \Leftrightarrow 3x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ και}$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 6 - 10 - 2 = -6 \,.$$

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $M(2,-6)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης, $\alpha = 1$.

Η εξίσωση της *ε* γίνεται: $y = x + \beta$ (1) .

Εφόσον το σημείο $M(2,-6)$ανήκει στη ζητούμενη ευθεία, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της.

Για $x = 2$και $y = -6$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow -6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8 \,.$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* , που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^o$είναι η $y = x - 8$.

Επισημάνσεις - Παρατηρήσεις - Σχόλια :

Για να ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης συνάρτησης *f* , πρέπει η ευθεία (ε) να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega \neq 90^o$.

Παράδειγμα 4 (Απόδειξη σχέσης με παραγώγους)

Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 11"

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(x+1) - x\sigma\upsilon\nu x$. Να δείξετε ότι $f''(x) + f(x) = 2\eta\mu x$

(Θέμα Γ)

Λύση

Για να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο της *f* , θα βρούμε πρώτα την (πρώτη) παράγωγο της .
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = \left[2\eta\mu(x+1) - x\sigma\upsilon\nu x\right]' = 2\left[\eta\mu(x+1)\right]' - \left(x\sigma\upsilon\nu x\right)' =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu(x+1)\cdot(x+1)' - \left[\left(x\right)'\sigma\upsilon\nu x + x\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\right] = 2\sigma\upsilon\nu(x+1)\cdot 1 - \left[1\cdot\sigma\upsilon\nu x + x(-\eta\mu x)\right] =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu(x+1) - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\ .$$

Οπότε:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left[2\sigma\upsilon\nu(x+1) - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x\right]' = 2\left[\sigma\upsilon\nu(x+1)\right]' - \left(\sigma\upsilon\nu x\right)' + \left(x\eta\mu x\right)' =$$

$$= 2\left[-\eta\mu(x+1)\right](x+1)' - \left(-\eta\mu x\right) + (x)'\eta\mu x + x\left(\eta\mu x\right)' = -2\eta\mu(x+1)\cdot 1 + \eta\mu x + 1\cdot\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x =$$

$$= -2\eta\mu(x+1) + \eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu(x+1) + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x\ .$$

Επομένως

$$f''(x) + f(x) = \left[-2\eta\mu(x+1) + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x\right] + \left[2\eta\mu(x+1) - x\sigma\upsilon\nu x\right] =$$

$$-2\eta\mu(x+1) + 2\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu(x+1) - x\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu x\ .$$

Άρα $f''(x) + f(x) = 2\eta\mu x$.

Παράδειγμα 5 (Εύρεση παραμέτρων)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 12"

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = (\alpha+1)x^3 + \beta x^2 - 2x - e,\ \alpha \neq -1$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* στο σημείο $x_0 = 1$ ισούται με –3 και $f''(0) = 2$.

(Θέμα Γ)

Λύση

Η αξιοποίηση των δεδομένων μας προϋποθέτει την εύρεση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της *f* .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left[(\alpha+1)x^3 + \beta x^2 - 2x - e\right]' = (\alpha+1)\left(x^3\right)' + \beta\left(x^2\right)' - 2\left(x\right)' - \left(e\right)' =$$

$$= (\alpha+1)\cdot 3x^2 + \beta \cdot 2x - 2\cdot 1 - 0 = 3(\alpha+1)x^2 + 2\beta x - 2$$

και

$$f''(x) = \left[3(\alpha+1)x^2 + 2\beta x - 2\right]' = 3(\alpha+1)\left(x^2\right)' + 2\beta\left(x\right)' - \left(2\right)' =$$

$$= 3(\alpha+1)\left(x^2\right)' + 2\beta\left(x\right)' - \left(2\right)' = 3(\alpha+1)\cdot\left(2x\right) + 2\beta\cdot 1 - 0 = 6(\alpha+1)x + 2\beta .$$

Άρα $f'(x) = 3(\alpha+1)x^2 + 2\beta x - 2$ και $f''(x) = 6(\alpha+1)x + 2\beta$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* στο σημείο $x_0 = 1$ είναι –3 και η δεύτερη παράγωγος της *f* στο 0 ισούται με 2. Οπότε έχουμε :

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow f'(1) = -3 \Leftrightarrow 3(\alpha+1)\cdot 1^2 + 2\beta\cdot 1 - 2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + 3 + 2\beta - 2 = -3 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = -4 \quad (1)$$

και

$$f''(0) = 2 \Leftrightarrow 6(\alpha+1)\cdot 0 + 2\beta = 2 \Leftrightarrow 2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Για $\beta = 1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$(1) \Leftrightarrow 3\alpha + 2\cdot 1 = -4 \Leftrightarrow 3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -2.$$

Επομένως $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

Παράδειγμα 6 (Εύρεση της ταχύτητας , του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση - Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 13"

Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = \ln(t^2 + 8)$, όπου *t* ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και το *x* σε μέτρα.

α) Να βρείτε την ταχύτητα του υλικού σημείου σε χρόνο *t*.

β) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο *t*, καθώς και η επιτάχυνση του σημείου τη χρονική στιγμή, $t = 2\sec$.

(Θέμα Γ)

Λύση

α) Η ταχύτητα του υλικού σημείου σε χρόνο *t* δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης *x*, οπότε:

$$\upsilon(t) = x'(t) = \left[\ln(t^2+8)\right]' = \frac{1}{t^2+8}(t^2+8)' = \frac{1}{t^2+8}(2t+0) = \frac{2t}{t^2+8},\ t \geq 0\ .$$

Άρα $\upsilon(t) = \dfrac{2t}{t^2+8}$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο *t*, δίνεται από την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης *υ* (δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης *x*) και εκφράζει την επιτάχυνση *α* του υλικού σημείου ως προς το χρόνο *t*. Επομένως έχουμε:

$$\alpha(t) = \upsilon'(t) = \left(\frac{2t}{t^2+8}\right)' = \frac{(2t)'\left(t^2+8\right) - 2t\left(t^2+8\right)'}{(t^2+8)^2} = \frac{2\left(t^2+8\right) - 2t\cdot 2t}{(t^2+8)^2} =$$

$$= \frac{2t^2+16-4t^2}{(t^2+8)^2} = \frac{16-2t^2}{(t^2+8)^2} = \frac{2(8-t^2)}{(t^2+8)^2}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο *t* είναι:

$$\upsilon'(t) = \alpha(t) = \frac{2(8-t^2)}{(t^2+8)^2},\ t \geq 0$$

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή, $t = 2\sec$ είναι:

$$\alpha(2) = \frac{2(8-2^2)}{(2^2+8)^2} = \frac{8}{12^2} = \frac{1}{18}\,m/s^2$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 12/10/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

Πώς ορίζεται η παράγωγος μίας συνάρτησης;

<u>Λύση</u>

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq R$ και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε κάθε στοιχείο $x \in B$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό τον

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ με $x \in B$.

Ερώτηση θεωρίας 2

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A και $F(x)=cf(x)$ με $c\in R$, τότε να αποδείξετε ότι $(cf(x))'=cf'(x)$, $x\in A$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\big(f(x+h)-f(x)\big)$ και για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

Ερώτηση θεωρίας 3

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με μηδέν , δηλαδή $(c)'=0$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$, και για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=0$

επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=0$.

Άρα $\left(c\right)'=0$

Ερώτηση θεωρίας 4

Έστω f , g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα σύνολο $A \subseteq R$. Να αποδείξετε για τη συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$ ότι ισχύει: $F'(x) = \left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

<u>Λύση</u>

Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = \left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right) =$$

$$\left(f(x+h) - f(x)\right) + \left(g(x+h) - g(x)\right)$$

και για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ επομένως

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(x) + g'(x)$$

άρα $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

Ερώτηση θεωρίας 5

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$ επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$.

Άρα $(x)'=1$

Ερώτηση θεωρίας 6

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Δείξτε ότι $f'(x)=2x$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=\left(x+h\right)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=2xh+h^2$, και για $h\neq 0$ βρίσκουμε

το πηλίκο $\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\dfrac{2xh+h^2}{h}=\dfrac{\cancel{h}\left(2x+h\right)}{\cancel{h}}=2x+h$ επομένως

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(2x+h\right)$ Άρα $\left(x^2\right)'=2x$

Ερώτηση θεωρίας 7

Ποια η σχέση των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και f'.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f' είναι υποσύνολο ή ίσο με το πεδίο ορισμού της f

Παράδειγμα 1.

Πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x}$: Πρέπει η υπόρριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, δηλαδή $x \geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x}$ είναι το διάστημα $[0,+\infty)$.
Πεδίο ορισμού της $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: Πρέπει η υπόριζος υπόρριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη. Άρα $x>0$ οπότε Πεδίο ορισμού της $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ είναι το $(0,+\infty)$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f' είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f.

Παράδειγμα 2.

Πεδίο ορισμού της $g(x)=x^3$ είναι το $\mathbb{R}$
Πεδίο ορισμού της $g'(x)=3x^2$ είναι το $\mathbb{R}$

Άρα το πεδίο ορισμού της g' ισούται με το πεδίο ορισμού της g

Παρατήρηση: Τι σχέση έχουν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g με τα πεδία ορισμού των παραγώγων τους f', g'.

Γενικά το πεδίο ορισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης ισούται ή είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Ερώτηση θεωρίας 8

Να γράψετε τους κανόνες Παραγώγισης γινομένου – πηλίκου – σύνθετης συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

Παράγωγος γινομένου = (παράγωγος του πρώτου παράγοντα επί τον δεύτερο παράγοντα συν τον πρώτο παράγοντα επί την παράγωγο του δεύτερου παράγοντα)

Δηλαδή $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Παράγωγος πηλίκου =(παράγωγος του αριθμητή επί τον παρανομαστή πλην παράγωγος του παρανομαστή επί τον αριθμητή προς το τετράγωνο του παρανομαστή)

Δηλαδή $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

Παράγωγος σύνθετης =Παράγωγος της συνάρτησης με μεταβλητή την άλλη συνάρτηση επί την παράγωγο της άλλης συνάρτησης.

Δηλαδή $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

Ερώτηση θεωρίας 9

Να συμπληρώσετε τις παραγώγους, τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων και τις εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων σ΄ αυτά.

α/α	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f'(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
1	$f(x)=x^2$	$f'(x)=$	$f'(0)=$	$y=$
2	$f(x)=3x^2-2011$	$f'(x)=$	$f'(1)=$	$y=$
3	$f(x)=ημx$	$f'(x)=$	$f'(\frac{\pi}{2})=$	$y=$
4	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=$	$f'(\frac{1}{3})=$	$y=$
5	$f(x)=συνx$	$f'(x)=$	$f'(\frac{\pi}{6})=$	$y=$
6	$f(x)=e^x$	$f'(x)=$	$f'(0)=$	$y=$
7	$f(x)=εφx$	$f'(x)=$	$f'(0)=$	$y=$
8	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=$	$f'(-1)=$	$y=$
9	$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$	$f'(x)=$	$f'(1)=$	$y=$
10	$f(x)=x\,e^x-e^x$	$f'(x)=$	$f'(0)=$	$y=$

<u>Λύση</u>

α/α	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f'(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ
1	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$f'(0)=0$	$y=0$
2	$f(x)=3x^2-2011$	$f'(x)=6x$	$f'(1)=6$	$y=6x-2014$
3	$f(x)=ημx$	$f'(x)=συνx$	$f'(\frac{\pi}{2})=0$	$y=1$
4	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f'(\frac{1}{3})=3$	$y=3x-1-\ln 3$
5	$f(x)=συνx$	$f'(x)=-ημx$	$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
6	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f'(0)=1$	$y=x+1$
7	$f(x)=εφx$	$f'(x)=\frac{1}{συν^2x}$	$f'(0)=1$	$y=x$
8	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(-1)=-1$	$y=-x-2$
9	$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$	$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$	$f'(1)=\frac{1}{2}$	$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
10	$f(x)=x\,e^x-e^x$	$f'(x)=x\,e^x$	$f'(0)=0$	$y=-1$

Σημείωση: Οι παράγωγοι υπολογίζονται με βάση τον πίνακα που βρίσκεται στις Σημειώσεις των ΨΕΒ αυτής της ενότητας.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+2}$

<u>Λύση</u>

$$f'(x)=(\sqrt[3]{3x^2+2})'=((3x^2+2)^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}(3x^2+3)^{\frac{1}{3}-1}\left(3x^2+3\right)'=\frac{1}{3}(3x^2+3)^{-\frac{2}{3}}\left(6x\right)=$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(3x^2+3)^{\frac{2}{3}}}\cdot 6x=\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+3)^2}}$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Για να βρούμε την παράγωγο ρίζας με υπόρριζη ποσότητα συνάρτηση μετασχηματίζουμε τη ρίζα σε δύναμη και παραγωγίζουμε με τον κανόνα παραγώγισης συναρτήσεων που έχουν δυνάμεις.

Δηλ. $\left(\sqrt[\nu]{(f(x))^{\mu}}\right)'=\left((f(x))^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu}{\nu}(f(x))^{\frac{\mu}{\nu}-1}\cdot f'\left(x\right)$

Άσκηση 2 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Λύση

$$f'(x)=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$\frac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε την παράγωγο πηλίκου εφαρμόζουμε τον κανόνα

Παράγωγος πηλίκου =(παράγωγος του αριθμητή επί τον παρανομαστή πλην παράγωγος του παρανομαστή επί τον αριθμητή προς το τετράγωνο του παρανομαστή)

Δηλ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Άσκηση 3 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

Λύση

$$f'(x)=\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'+1\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Μεθοδολογία

(Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγώγισης $[\ln(f(x))]'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$)

Άσκηση 4 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω $f(x) = -x^2 + 2x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y = \alpha x + \beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Έχουμε $f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) = -1 - 2 = -3$ άρα A(-1,-3).

Το σημείο A(-1,-3) είναι σημείο επαφής άρα ισχύουν $\{ f'(-1) = \alpha$ και οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε): $y = \alpha x + \beta \}$(1)

Για να βρούμε το $f'(-1)$ υπολογίζουμε την $f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(-1) = -2(-1) + 2 = 4$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{ 4 = \alpha$ και $-3 = \alpha(-1) + \beta \}$ $\Leftrightarrow$ $\{ \alpha = 4$ και $-3 = 4(-1) + \beta \}$ $\Leftrightarrow$ $\{ \alpha = 4$ και $\beta = 1 \}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι (ε): $y = 4x + 1$

<u>Μεθοδολογία</u>

Χρησιμοποιούμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης στην τετμημένη του σημείου επαφής.

Άσκηση 5 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω $f(x) = -2x^2 + 7x + 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι κάθετη στην ευθεία: $y = -\frac{1}{11}x + 101$

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y = \alpha x + \beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Α(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

$\{ f'(\gamma) = \alpha$ και οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y = \alpha x + \beta$ και της συνάρτησης $y = -2x^2 + 7x + 1$ }(1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x) = (-2x^2 + 7x + 1)' = -4x + 7$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma) = -4\gamma + 7$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{-4\gamma + 7 = \alpha$ και $\delta = \alpha\gamma + \beta$ και $\delta = -2\gamma^2 + 7\gamma + 1\}$(2) όμως (ε) κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{11}x + 101$ σημαίνει ότι οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών έχουν γινόμενο -1 άρα $\alpha(-\frac{1}{11}) = -1$ άρα $\alpha = 11$

Οπότε η (2) $\Leftrightarrow \{\alpha = 11,\ -4\gamma + 7 = 11,\ \delta = 11\gamma + \beta,\ \delta = -2\gamma^2 + 7\gamma + 1\}$

$\Leftrightarrow \{\alpha = 11,\ \gamma = -1,\ \delta = 11(-1) + \beta,\ \delta = -2(-1)^2 + 7(-1) + 1\}$

$\Leftrightarrow \{\alpha = 11,\ \gamma = -1, \delta = 11(-1) + \beta,\ \delta = -8\}$

$\Leftrightarrow \{\alpha = 11,\ \gamma = -1,\ -8 = 11(-1) + \beta,\ \delta = -8\} \Leftrightarrow \{\alpha = 11,\ \gamma = -1,\ \beta = 3,\ \delta = -8\}$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι (ε): $y = 11x + 3$

Μεθοδολογία

Χρησιμοποιούμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης στην τετμημένη του σημείου επαφής και ότι οι συντελεστές διεύθυνσης δύο κάθετων ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1.

Άσκηση 6 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω $f(x)=x^2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες στη C_f που περνούν από το σημείο A(0,-4).

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

$\{f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=x^2\}$ (1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(x^2)'=2x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=2\gamma$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{2\gamma=\alpha\ ,\ \delta=\alpha\gamma+\beta\ ,\ \delta=\gamma^2\}$(2).

Όμως η (ε) περνά από το σημείο A(0,-4) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση της (ε) άρα $-4=\alpha\cdot 0+\beta$ άρα $\beta=-4$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$\{\beta=-4\ ,\ \alpha=2\gamma\ ,\ \delta=\alpha\gamma-4\ ,\ \delta=\gamma^2\}\Leftrightarrow$

$\{\beta=-4\ ,\ \alpha=2\gamma\ ,\ \delta=2\gamma^2-4\ ,\ \delta=\gamma^2\}\Leftrightarrow$

$\{\beta=-4\ ,\ \alpha=2\gamma\ ,\ \delta=2\gamma^2-4\ ,\ 2\gamma^2-4=\gamma^2\}\Leftrightarrow$

$\{\beta=-4\ ,\ \alpha=2\gamma\ ,\ \delta=2\gamma^2-4\ ,\ \gamma^2=4\}\Leftrightarrow$

$\{\beta=-4\ ,\ \gamma=2\ ,\ \alpha=4\ ,\ \delta=4\}$ ή $\{\beta=-4\ ,\ \gamma=-2\ ,\ \alpha=-4\ ,\ \delta=4\}$

οπότε τα σημεία επαφής είναι $B_1(2,4)$ και $B_2(-2,4)$ και οι αντίστοιχες εξισώσεις εφαπτωμένων στα σημεία αυτά είναι $y=4x-4$ και $y=-4x-4$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Χρησιμοποιούμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης στην τετμημένη του σημείου επαφής και ότι οι συντεταγμένες του σημείου από το οποίο διέρχεται μια ευθεία επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Έστω η συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(-1)=7$ και $f(x)=3(x-2)^2 g(2x-5)$

1.Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.
2. Υπολογίστε την $f''(x)$
3. Υπολογίστε την $f''(2)$

<u>Λύση</u>

1. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη από υπόθεση, η $(2x-5)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική , η $3(x-2)^2$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική άρα και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως γινόμενο δύο φορές παραγωγισίμων συναρτήσεων.

2. Υπολογισμός της f''

$$f'(x)=\left(3(x-2)^2 g(2x-5)\right)'=3\left((x-2)^2\right)' g(2x-5)+3(x-2)^2 g'(2x-5)(2x-5)'$$

$$=3\cdot2(x-2)(x-2)' g(2x-5)+3(x-2)^2 g'(2x-5)\cdot2$$

$$=6(x-2)\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]$$

$$f''(x)=\{6(x-2)\cdot\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]\}'=$$

$$6(x-2)'\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]+6(x-2)\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]'=$$

$$6\cdot1\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]+6(x-2)\{\left[g(2x-5)\right]'+\left[(x-2)g'(2x-5)\right]'\}=$$

$$6\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]+$$

$$6(x-2)[\left(g'(2x-5)\right)(2x-5)'+(x-2)'g'(2x-5)+(x-2)g''(2x-5)(2x-5)']=$$

$$6\left[g(2x-5)+(x-2)g'(2x-5)\right]+6(x-2)\left[\left(g'(2x-5)\right)\cdot2+1\cdot g'(2x-5)+(x-2)g''(2x-5)\cdot2\right]$$

$$=6\left[g(2x-5)+4(x-2)g'(2x-5)+2(x-2)^2 g''(2x-5)\right]$$

άρα $f''(x)=6\left[g(2x-5)+4(x-2)g'(2x-5)+2(x-2)^2 g''(2x-5)\right]$

3. Υπολογισμός της $f''(2)$

$$f''(2) = 6\left[g(2\cdot 2-5)+4(2-2)g'(2\cdot 2-5)+2(2-2)^2 g''(2\cdot 2-5)\right]$$

$= 6g(-1) = 6\cdot 7 = 42$ Άρα $f''(2) = 42$

<u>Μεθοδολογία</u>

Εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και σύνθετης συνάρτησης

Άσκηση 2 (Απόδειξη σχέσης με παραγώγους)

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$

1.Υπολογίστε την $f'(x)$ και επαληθεύστε ότι ισχύει η σχέση $2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$

2.Στη συνέχεια επαληθεύστε ότι ισχύει η σχέση $4f''(x)\left(1+x^2\right)+4xf'(x)-f(x)=0$

<u>Λύση</u>

1.Υπολογίστε την $f'(x)$ και επαληθεύστε ότι ισχύει η σχέση $2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)')=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}\left(\frac{(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}})^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$$ άρα $$f'(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow 2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

2.Στη συνέχεια επαληθεύστε ότι ισχύει η σχέση $4f''(x)(1+x^2)+4xf'(x)-f(x)=0$

Από το 1. ερώτημα έχουμε $2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$\left(2f'(x)\sqrt{1+x^2}\right)'=f'(x)\Leftrightarrow 2[f''(x)\sqrt{1+x^2}+f'(x)\left(\sqrt{1+x^2}\right)']=f'(x)\Leftrightarrow$$

$$2[f''(x)\sqrt{1+x^2}+f'(x)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)']=f'(x)\Leftrightarrow$$

$$2[f''(x)\sqrt{1+x^2}+f'(x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}]=f'(x)\Leftrightarrow$$

$$2[f''(x)\sqrt{1+x^2}+f'(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}]=f'(x)\Leftrightarrow$$

$$2[f''(x)(1+x^2)+f'(x)x]=f'(x)\sqrt{1+x^2}\ (1)$$

Όμως ισχύει $2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)\Leftrightarrow f'(x)\sqrt{1+x^2}=\dfrac{f(x)}{2},(2)$

$$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2\left[f''(x)\left(1+x^2\right)+xf'(x)\right]=\frac{f(x)}{2}\Leftrightarrow$$

$$4\left[f''(x)\left(1+x^2\right)+xf'(x)\right]=f(x)\Leftrightarrow$$

$$4f''(x)\left(1+x^2\right)+4xf'(x)-f(x)=0$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Χρησιμοποιούμε τους κανόνες παραγώγισης τετραγωνικής ρίζας και σύνθετης συνάρτησης.

Άσκηση 3 (Εύρεση παραμέτρων)

Έστω $f\left(x\right)=\frac{\alpha}{x^2}+1, \alpha\neq 0$. Να βρείτε το α ώστε η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(1,f(1)) να είναι κάθετη στην ευθεία $y=-3x+5$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $y=-3x+5$ πρέπει το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της εφαπτομένης και της ευθείας να ισούται με -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο Α(1, f(1)) ισούται με $f'(1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

$y=-3x+5$ είναι -3 άρα $f'(1)(-3)=-1$.

Για να βρούμε το $f'(1)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(\frac{\alpha}{x^2}+1)'=\alpha(x^{-2})'=-2\alpha x^{-2-1}=-2\alpha x^{-3}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(1)=-2\alpha(1)^{-3}=-2\alpha$ οπότε από $f'(1)(-3)=-1$ έχουμε $-2\alpha(-3)=-1 \Leftrightarrow 6\alpha=-1$ άρα $\alpha=-\frac{1}{6}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Χρησιμοποιούμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης στην τετμημένη του σημείου επαφής και ότι οι συντελεστές διεύθυνσης δύο κάθετων ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1.

Άσκηση 4 (Εύρεση παραμέτρων)

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η ευθεία (ε) : $y = \alpha x + 1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$.

<u>Λύση</u>

Αν Α(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma) = \alpha$ και οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y = \alpha x + 1$ και της συνάρτησης $y = -x^2$ } (1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x) = (-x^2)' = -2x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma) = -2\gamma$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{-2\gamma = \alpha\ ,\ \delta = \alpha\gamma + 1,\ \delta = -\gamma^2\} \Leftrightarrow \{\alpha = -2\gamma\ ,\ \delta = -2\gamma^2 + 1,\ \ -2\gamma^2 + 1 = -\gamma^2\ \} \Leftrightarrow$

$\{\gamma^2 = 1,\ \alpha = -2\gamma\ ,\ \delta = -2 + 1\} \Leftrightarrow \{(\gamma = 1$ ή $\gamma = -1),\ \alpha = -2\gamma\ ,\ \delta = -1\} \Leftrightarrow$

$\{(\gamma = 1,\ \alpha = -2\ ,\ \delta = -1)$ ή $(\gamma = -1,\ \alpha = 2\ ,\ \delta = -1)\ \}$

Άρα οι τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η ευθεία (ε): $y = \alpha x + 1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ είναι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -2$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Χρησιμοποιούμε από τη θεωρία ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης στην τετμημένη του σημείου επαφής.

Άσκηση 5 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

Ο πληθυσμός A μιας περιοχής δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη) από τον τύπο $A(t) = 10e^{0,04t}$ (σε χιλιάδες). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο, ύστερα από 25 έτη.

<u>Λύση</u>

ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο είναι

$A'(t) = (10e^{0,04t})' = 10e^{0,04t}(0,04)' = 10e^{0,04t}0,04 = 0,4e^{0,04t}$ οπότε ύστερα από 25 έτη θα είναι

$A'(25) = 0,4e^{(0,04)25} = 0,4e$ (σε χιλιάδες) $= (0,4)(2,7) = 1,08$ (σε χιλιάδες) $= 1080$ άτομα

<u>Μεθοδολογία</u>

Υπενθυμίζουμε ότι, ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης f στη θέση x_0 καλούμε την παράγωγο της f στη θέση x_0.

Άσκηση 6 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(0,3) και Β(x,0) ως προς x όταν το $x = 10$.

<u>Λύση</u>

$(AB) = \sqrt{(0-x)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{x^2+9}$ άρα θέτοντας $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ έχουμε

$f'(x) = (\sqrt{x^2+9})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+9}}(x^2+9)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ οπότε

ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(0,3) και Β(x,0) ως προς x όταν το $x = 10$ είναι:

$$f'(10) = \frac{10}{\sqrt{10^2+9}} = \frac{10}{\sqrt{109}}$$

<u>Μεθοδολογία</u>

Βρίσκουμε μια σχέση για την απόσταση ΑΒ συναρτήσει του x και στη συνέχεια παραγωγίζουμε τα μέλη αυτής ως προς x

(Υπενθυμίζουμε ότι η απόσταση δύο σημείων Α(α,β) και Β(γ,δ) υπολογίζεται από τη σχέση

$(AB) = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2}$)

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η ταχύτητα, ενός κινητού, κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), και δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t) = 3t^2 - 5$.

1. Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t.

2. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = 10$ sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

<u>Λύση</u>

1. Η επιτάχυνση του κινητού ισούται με την παράγωγο της ταχύτητος του κινητού

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = (3t^2 - 5)' = 6t$

2. $\alpha(10) = 6(10) = 60$ m/(sec)^2

<u>Μεθοδολογία</u>

Η επιτάχυνση του κινητού ισούται με την παράγωγο της ταχύτητας του κινητού.

Άσκηση 2 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (σε sec) και το x σε μέτρα (m).

1. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t.
2. Ποια η ταχύτητα του κινητού σε χρόνο 2 sec και ποια σε χρόνο 4 sec.
3. Πότε το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο.
4. Πότε το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση.
5. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των 5 πρώτων sec.

<u>Λύση</u>

1. Η ταχύτητα του κινητού ισούται με την παράγωγο της θέσης του κινητού.

$$\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 2t^2 + t)' = 3t^2 - 4t + 1$$

2. Η ταχύτητα του κινητού σε χρόνο 2 sec και σε χρόνο 4 sec αντίστοιχα είναι

$\upsilon(2) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$ m/sec και $\upsilon(4) = 3\cdot 4^2 - 4\cdot 4 + 1 = 48 - 16 + 1 = 33$ m/sec

3. Το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν

$\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ sec ή $t = \dfrac{1}{3}$ sec

4. Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι θετική και στην αρνητική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι αρνητική

$\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 > 0 \Leftrightarrow t < \dfrac{1}{3}$ ή $t > 1$

$$\upsilon(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t < 1$$

5. Βρίσκουμε το πρόσημο της $\upsilon(t)$ στο διάστημα [0,5].

t	0	1/3	1	5
$\upsilon(t)$	+	0	-	0	+
Διαστήματα	$\left\lvert x\left(\frac{1}{3}\right) - x(0)\right\rvert$		$\left\lvert x(1) - x\left(\frac{1}{3}\right)\right\rvert$		$\left\lvert x(5) - x(1)\right\rvert$

Ολικό διάστημα s (από 0 μέχρι 5) $= \left| x(\frac{1}{3}) - x(0) \right| + \left| x(1) - x(\frac{1}{3}) \right| + \left| x(5) - x(1) \right|$

Όπου $x(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 - 2(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} = \frac{4}{27}$

$x(0) = 0$,

$x(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 2 - 2 = 0$

$x(5) = 5^3 - 2\cdot 5^2 + 5 = 125 - 50 + 5 = 75 + 5 = 80$ άρα

Ολικό διάστημα s (από 0 μέχρι 5) $= |x(\frac{1}{3}) - x(0)| + |x(1) - x(\frac{1}{3})| + |x(5) - x(1)| =$

$= |\frac{4}{27} - 0| + |0 - \frac{4}{27}| + |80 - 0| = (\frac{8}{27} + 80)$ m

<u>Μεθοδολογία</u>

Ένα κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν.
Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι θετική και σε αρνητική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι αρνητική.

<<Για να υπολογίσουμε το ολικό διάστημα που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 διαμερίζουμε το διάστημα $[t_1, t_2]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η ταχύτητα έχει σταθερό πρόσημο

t	t_1	t_0	t_2
$\upsilon(t)$	-		+
Διαστήματα	$\lvert x(t_0) - x(t_1)\rvert$		$\lvert x(t_2) - x(t_0)\rvert$

Ολικό διάστημα s (από t_1 μέχρι t_2) $= |x(t_0) - x(t_1)| + |x(t_2) - x(t_0)|$>>

Ημερομηνία τροποποίησης: 21/10/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}\right)$

Λύση

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}\right)'=\left(\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{3}-1}\left(x^2+2\right)'=$$

$$-\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{-\frac{4}{3}}\left(2x\right)=-\frac{2x}{3\left(x^2+2\right)^{\frac{4}{3}}}$$

Άσκηση 2 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-3x+7}{2x+5}$

<u>Λύση</u>

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-3x+7}{2x+5}\right)'=\frac{(x^2-3x+7)'(2x+5)-(x^2-3x+7)(2x+5)'}{(2x+5)^2}=$$

$$=\frac{(2x-3)(2x+5)-(x^2-3x+7)2}{(2x+5)^2}=\frac{4x^2+10x-6x-15-2x^2+6x-14}{(2x+5)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+10x-29}{(2x+5)^2}$$

Άσκηση 3 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

<u>Λύση</u>

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - (\ln x)x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Άσκηση 4 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{(x-4)^4}{2x^2-3x+5}$

<u>Λύση</u>

$$f'(x) = \left(\frac{(x-4)^4}{2x^2-3x+5}\right)' = \frac{((x-4)^4)'(2x^2-3x+5)-(x-4)^4(2x^2-3x+5)'}{(2x^2-3x+5)^2} =$$

$$= \frac{4(x-4)^3(2x^2-3x+5)-(x-4)^4(4x-3)}{(2x^2-3x+5)^2} = \frac{(x-4)^3\{4(2x^2-3x+5)-(x-4)(4x-3)\}}{(2x^2-3x+5)^2} =$$

$$= (x-4)^3\,\frac{8x^2-12x+20-4x^2+3x+16x-12}{(2x^2-3x+5)^2} = (x-4)^3\,\frac{4x^2+7x+8}{(2x^2-3x+5)^2}$$

Άσκηση 5 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(x^2+2), \quad x \in \mathbb{R}$.

Α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f'(x)$.

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση $f''(x)$.

Γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f' στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

<u>Λύση</u>

Α) $f'(x) = [e^{-x}(x^2+2)]' = (e^{-x})'(x^2+2) + e^{-x}(x^2+2)' =$

$-e^{-x}(x^2+2) + e^{-x}2x = -e^{-x}(x^2-2x+2)$

Β) $f''(x) = [-e^{-x}(x^2-2x+2)]' = (-e^{-x})'(x^2-2x+2) - e^{-x}(x^2-2x+2)' =$

$= e^{-x}(x^2-2x+2) - e^{-x}(2x-2) = e^{-x}(x^2-2x+2-2x+2) =$

$e^{-x}(x^2-4x+4) = e^{-x}(x-2)^2$

Άρα $f''(x) = e^{-x}(x-2)^2$

Γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η παράγωγος $f'(x)$ δεν έχει ρίζες δηλαδή ότι $f'(x) \neq 0$ που ισχύει αφού $e^{-x} \neq 0$ και $x^2-2x+2 \neq 0$ αφού η διακρίνουσα Δ=4-8=-4<0

Δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η παράγωγος $f''(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα που ισχύει αφού από $f''(x) = 0$ έχουμε $e^{-x}(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Άσκηση 6 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο A(-2, f(-2)).

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Έχουμε $f(-2)=(-2)^3+1=-8+1=-7$ άρα A(-2,-7)

Το σημείο A(-2,-7) είναι σημείο επαφής, άρα ισχύουν

{ $f'(-2)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ }(1)

Για να βρούμε το $f'(-2)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(x^3+1)'=3x^2$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το

$f'(-2)=3(-2)^2=12$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{\alpha=12,\ -7=\alpha(-2)+\beta\} \Leftrightarrow \{\alpha=12,\ -7=12(-2)+\beta\} \Leftrightarrow \{\alpha=12,\ \beta=17\}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο A(-2, f (-2)) είναι: $y=12x+17$

Άσκηση 7 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x^2+5x+6$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι παράλληλη στην ευθεία: $y=11x+2011$

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=3x^2+5x+6$ } (1).

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(3x^2+5x+6)'=6x+5$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=6\gamma+5$. Οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{6\gamma+5=\alpha$, $\delta=\alpha\gamma+\beta$, $\delta=3\gamma^2+5\gamma+6\}$ (2). Όμως η εφαπτομένη $y=\alpha x+\beta$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=11x+2011$ που σημαίνει ότι οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι ίσοι, άρα $\alpha=11$. Οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$$\{\alpha=11,\ 6\gamma+5=11,\ \delta=11\gamma+\beta,\ \delta=3\gamma^2+5\gamma+6\} \Leftrightarrow$$

$$\{\alpha=11,\ \gamma=1,\ \delta=11+\beta,\ \delta=3\cdot1^2+5\cdot1+6\}\Leftrightarrow$$

$$\{\alpha=11,\ \gamma=1,\ \delta=11+\beta,\ \delta=14\} \Leftrightarrow$$

$$\{\alpha=11,\ \gamma=1,\ 14=11+\beta,\ \delta=14\}\Leftrightarrow$$

$$\{\alpha=11,\ \gamma=1,\ \beta=3,\ \delta=14\}$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=11x+3$.

Άσκηση 8 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της f που περνούν από το σημείο Α(0,9).

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y = \alpha x + \beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma) = \alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y = \alpha x + \beta$ και της συνάρτησης $y = -x^2$ } (1).

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x) = (-x^2)' = -2x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma) = -2\gamma$. Οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{\alpha = -2\gamma,\ \delta = \alpha\gamma + \beta,\ \delta = -\gamma^2\}$ (2). Όμως η εφαπτομένη (ε) $y = \alpha x + \beta$ περνά από το σημείο Α(0,9) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της (ε). Άρα $9 = \beta$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη

$\{\beta = 9,\ \alpha = -2\gamma,\ \delta = \alpha\gamma + 9,\ \delta = -\gamma^2\} \Leftrightarrow \{\beta = 9,\ \alpha = -2\gamma,\ -\gamma^2 = \alpha\gamma + 9,\ \delta = -\gamma^2\} \Leftrightarrow$

$\{\beta = 9,\ \alpha = -2\gamma,\ -\gamma^2 = -2\gamma^2 + 9,\ \delta = -\gamma^2\} \Leftrightarrow \{\beta = 9,\ \alpha = -2\gamma,\ \gamma^2 = 9,\ \delta = -\gamma^2\} \Leftrightarrow$

$\{\beta = 9,\ \alpha = -2\gamma,\ (\ \gamma = 3$ ή $\gamma = -3),\ \delta = -9\} \Leftrightarrow$

$\{\beta = 9,\ \alpha = -6,\ \gamma = 3,\ \delta = -9\}$ ή $\{\beta = 9,\ \alpha = 6,\ \gamma = -3,\ \delta = -9\}$

άρα οι εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της f που περνούν από το σημείο Α(0,9) είναι $y = -6x + 9$, $y = 6x + 9$.

Άσκηση 9 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που είναι κάθετη στην ευθεία: $y = \frac{1}{4}x + 2011$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y = \alpha x + \beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma) = \alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y = \alpha x + \beta$ και της συνάρτησης $y = -3x^2 + 2x - 1$ } (1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x) = (-3x^2 + 2x - 1)' = -6x + 2$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma) = -6\gamma + 2$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{\alpha = -6\gamma + 2,\ \delta = \alpha\gamma + \beta,\ \delta = -3\gamma^2 + 2\gamma - 1\}$ (2), όμως η εφαπτομένη $y = \alpha x + \beta$ είναι κάθετη στην ευθεία:

$y = \frac{1}{4}x + 2011$, σημαίνει ότι οι συντελεστές διεύθυνσης τους έχουν γινόμενο -1 δηλαδή $\alpha\frac{1}{4} = -1$ δηλ. $\alpha = -4$. Οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$\{\alpha = -4,\ -4 = -6\gamma + 2,\ \delta = -4\gamma + \beta,\ \delta = -3\gamma^2 + 2\gamma - 1\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha = -4,\ \gamma = 1,\ \delta = -4 + \beta,\ \delta = -3 + 2 - 1\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha = -4,\ \gamma = 1,\ \delta = -4 + \beta,\ \delta = -2\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha = -4,\ \gamma = 1,\ -2 = -4 + \beta,\ \delta = -2\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha = -4,\ \gamma = 1,\ \beta = 2,\ \delta = -2\}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -4x + 2$.

Άσκηση 10 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες στη C_f που περνούν από την αρχή των αξόνων.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=x^2+1$ }(1).

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(x^2+1)'=2x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=2\gamma$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με
$\{\alpha=2\gamma,\ \delta=\alpha\gamma+\beta,\ \delta=\gamma^2+1\ \}$(2). Όμως η εφαπτομένη (ε) $y=\alpha x+\beta$ περνά από την αρχή των αξόνων (0,0) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του (0,0) επαληθεύουν την εξίσωση της (ε).

Άρα $\beta=0$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$\{\beta=0,\ \alpha=2\gamma,\ \delta=\alpha\gamma+0,\ \delta=\gamma^2+1\ \} \Leftrightarrow \{\beta=0,\ \alpha=2\gamma,\ \delta=2\gamma^2,\ 2\gamma^2=\gamma^2+1\} \Leftrightarrow$

$\{\beta=0,\ \alpha=2\gamma,\ \delta=2\gamma^2,\ \gamma^2=1\} \Leftrightarrow \{\beta=0,\ \alpha=2\gamma,\ \delta=2\gamma^2,\ (\ \gamma=1$ ή $\gamma=-1)\} \Leftrightarrow$

$\{\beta=0,\ \alpha=2,\ \delta=2,\ \gamma=1\}$ ή $\{\beta=0,\ \alpha=-2,\ \delta=2,\ \gamma=-1\}$ άρα οι εφαπτόμενες στη C_f

που περνούν από την αρχή των αξόνων είναι $y=2x$ και $y=-2x$.

Άσκηση 11 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

Σε ένα σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία $A(0,x)$ και $B(x^3+3x,0)$ με $x>0$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x όταν $x=2$.

<u>Λύση</u>

Αν $f(x)=$ Εμβαδόν (OAB) $=\frac{1}{2}(OA)(OB)$, όμως $(OA)=x$, $(OB)=x^3+3x$, τότε $f(x)=\frac{1}{2}x\left(x^3+3x\right)$.

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x(x^3+3x)\right)'=\frac{1}{2}(x^4+3x^2)'=\frac{1}{2}(4x^3+6x)$$ άρα

$f'(x)=2x^3+3x$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x, όταν $x=2$, είναι $f'(2)=2\cdot 2^3+3\cdot 2=16+6=22$

Άσκηση 12 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ=4 cm και ΒΓ=$\sqrt{t}$ cm όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής (ως προς το χρόνο):

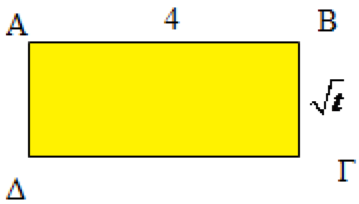
Α) Της περιμέτρου του ορθογωνίου όταν t=4sec

Β) Του εμβαδού του ορθογωνίου όταν ΒΓ=3 cm.

<u>Λύση</u>

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi(t) = 2(AB) + 2(B\Gamma) = 2\cdot 4 + 2\sqrt{t} = 8 + 2\sqrt{t}$$



Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου όταν t=4 sec ισούται με την αριθμητική τιμή της Π'(t) όταν t=4 sec

$$\Pi'(t) = (8 + 2\sqrt{t})' = 2\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ οπότε}$$

$$\Pi'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Β) Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι:

$$E(t) = (AB)(B\Gamma) = 4\sqrt{t} \quad \text{οπότε } E'(t) = (4\sqrt{t})' = 4\frac{1}{2\sqrt{t}} = 2\frac{1}{\sqrt{t}} \text{ άρα}$$

$$E'(9) = 2\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \qquad *$$

*Διόρθωση της τιμής του t από «3» σε «9»

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Παραγώγιση συναρτήσεων)

Έστω η συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(-2)=3$ και $f(x)=(x+1)^2 \cdot g(5x+3)$.

1. Δείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

2. Υπολογίστε την $f''(x)$

3. Υπολογίστε την $f''(-1)$

<u>Λύση</u>

1. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη από υπόθεση, η $(5x+3)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, η $(x+1)^2$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική άρα και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως γινόμενο δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

2. Υπολογισμός της $f''(x)$

$$f'(x)=((x+1)^2 g(5x+3))'=((x+1)^2)'g(5x+3)+(x+1)^2(g(5x+3))'=$$

$$2(x+1)(x+1)'g(5x+3)+(x+1)^2 g'(5x+3)(5x+3)'=$$

$$2(x+1)g(5x+3)+(x+1)^2 g'(5x+3)5=$$

$2(x+1)g(5x+3)+5(x+1)^2 g'(5x+3)$ άρα

$$f'(x)=2(x+1)g(5x+3)+5(x+1)^2 g'(5x+3)$$

$$f''(x)=\{2(x+1)g(5x+3)+5(x+1)^2 g'(5x+3)\}'=$$

$$2\{(x+1)g(5x+3)\}'+5\{(x+1)^2 g'(5x+3)\}'=$$

$$2\{(x+1)'g(5x+3)+(x+1)(g(5x+3))'\}+5\{((x+1)^2)'g'(5x+3)+(x+1)^2(g'(5x+3))'\}=$$

$$2\{g(5x+3)+(x+1)g'(5x+3)(5x+3)'\}+5\{2(x+1)g'(5x+3)+(x+1)^2 g''(5x+3)(5x+3)'\}=$$

$$2\{g(5x+3)+5(x+1)g'(5x+3)\}+5\{2(x+1)g'(5x+3)+5(x+1)^2 g''(5x+3)\}=$$

$$2g(5x+3)+10(x+1)g'(5x+3)+10(x+1)g'(5x+3)+25(x+1)^2 g''(5x+3)=$$

$$2g(5x+3)+20(x+1)g'(5x+3)+25(x+1)^2 g''(5x+3)$$

Άρα

$$f''(x) = 2g(5x+3) + 20(x+1)g'(5x+3) + 25(x+1)^2 g''(5x+3)$$

3. Υπολογισμός της $f''(-1)$

$$f''(-1) = 2g(5(-1)+3) + 20(-1+1)g'(5(-1)+3) + 25(-1+1)^2 g''(5(-1)+3) =$$

$2g(-2) + 0 = 2g(-2)$, όμως $g(-2) = 3$ από υπόθεση άρα $f''(-1) = 2(3) = 6$

Άσκηση 2 (Εύρεση εφαπτομένης)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{3x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=e^{3x}$ }(1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(e^{3x})'=e^{3x}(3x)'=3e^{3x}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=3e^{3\gamma}$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με
$\{3e^{3\gamma}=\alpha,\ \delta=\alpha\gamma+\beta,\ \delta=e^{3\gamma}\}$ (2). Όμως η εφαπτομένη $y=\alpha x+\beta$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων (0,0) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες (0,0) επαληθεύουν την εξίσωση $y=\alpha x+\beta$ άρα $\beta=0$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη

$$\{\beta=0,\ 3e^{3\gamma}=\alpha,\ \delta=\alpha\gamma+0,\ \delta=e^{3\gamma}\} \Leftrightarrow \{\beta=0,\ 3e^{3\gamma}=\alpha,\ \delta=3e^{3\gamma}\gamma,\ \delta=e^{3\gamma}\} \Leftrightarrow$$

$$\{\beta=0,\ 3e^{3\gamma}=\alpha,\ e^{3\gamma}=3e^{3\gamma}\gamma,\ \delta=e^{3\gamma}\} \Leftrightarrow \{\beta=0,\ 3e^{3\gamma}=\alpha,\ \gamma=\frac{1}{3},\ \delta=e^{3\gamma}\} \Leftrightarrow$$

$\{\beta=0,\ 3e^{3\frac{1}{3}}=\alpha,\ \gamma=\frac{1}{3},\ \delta=e^{3\frac{1}{3}}\} \Leftrightarrow \{\beta=0,\ 3e=\alpha,\ \gamma=\frac{1}{3},\ \delta=e\}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $y=3ex$.

Άσκηση 3 (Εύρεση εφαπτομένης)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{3}{x}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(1,f(1))

β)Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και τους άξονες συντεταγμένων.

Λύση

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

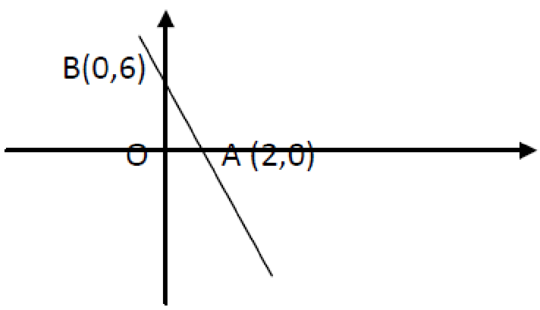
Από Α(1, f (1))=(1,3) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(1)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Α(1,3) επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=\frac{3}{x}$ }(1)

Για να βρούμε το $f'(1)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=-\frac{3}{x^2}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(1)=-\frac{3}{1^2}=-3$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{-3=\alpha\,,\ 3=\alpha+\beta\,\}\Leftrightarrow\{\alpha=-3\,,\ 3=-3+\beta\,\}\Leftrightarrow\{\alpha=-3\,,\ \beta=6\,\}$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(1, f(1)) είναι $y=-3x+6$.

β) Η ευθεία $y=-3x+6$ τέμνει τους άξονες στα σημεία.



Για $x=0\Rightarrow y=6$ άρα Β(0,6)

Για $y=0\Rightarrow x=2$ άρα Α(2,0)

Εμβ.$=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}2\cdot 6=6$ τετραγωνικές μονάδες

Άσκηση 4 (Εύρεση εφαπτομένης)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+2$, $x\in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45 μοίρες με τον άξονα $x'x$.

<u>Λύση</u>

α) Υπολογισμός της $f'(x)$

$$f'(x)=(x^2-4x+2)'=2x-4$$

β) (Υπενθυμίζουμε από τη θεωρία ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο επαφής $A(x_0,f(x_0))$ με τον άξονα $x'x$, ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας. Δηλαδή $\epsilon\phi\omega=f'(x_0)$)

Οπότε $f'(x_0)=\epsilon\phi 45^o=1 \Leftrightarrow 2x_0-4=1 \Leftrightarrow 2x_0=5 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{5}{2}$,

$$f(x_0)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\frac{5}{2}+2=\frac{25}{4}-\frac{40}{4}+\frac{8}{4}=-\frac{7}{4}$$

άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(\frac{5}{2},-\frac{7}{4})$.

Άσκηση 5 (Εύρεση εφαπτομένης)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Λύση</u>

Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Αν Β(γ,δ) σημείο επαφής τότε ισχύουν:

{ $f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=\frac{\ln x}{x}$ }(1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-(\ln x)1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2}$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{\alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2}$, $\delta=\alpha\gamma+\beta$, $\delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}$ } (2). Όμως η (ε) $y=\alpha x+\beta$ περνά από την αρχή των αξόνων (0,0) σημαίνει ότι οι συντεταγμένες (0,0) επαληθεύουν την εξίσωση δηλ. $\beta=0$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$$\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2},\ \delta=\alpha\gamma+0,\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow$$

$$\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2},\ \delta=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2},\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow$$

$$\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2}\ ,\ \frac{\ln\gamma}{\gamma}=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma}\ ,\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow$$

$$\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2},\ \ln\gamma=\frac{1}{2},\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow$$

$$\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2},\ \ln\gamma=\frac{1}{2}\ln e\ ,\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow\{\beta=0,\ \alpha=\frac{1-\ln\gamma}{\gamma^2}\ ,\ \gamma=\sqrt{e},\ \delta=\frac{\ln\gamma}{\gamma}\}\Leftrightarrow$$

$$\{\beta = 0\ ,\ \ \alpha = \frac{1-\frac{1}{2}}{e}\ \ ,\ \gamma = \sqrt{e}\ \ ,\ \delta = \frac{1}{2\sqrt{e}}\ \} \Leftrightarrow \{\beta = 0\ ,\ \ \alpha = \frac{1}{2e}\ ,\ \gamma = \sqrt{e}\ \ ,\ \delta = \frac{1}{2\sqrt{e}}\ \}$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $y = \frac{1}{2e}x$.

Άσκηση 6 (Εύρεση εφαπτομένης)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2-x$.
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(0, 1) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g.

<u>Λύση</u>

Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(0, 1) ,στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτή η ευθεία εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g.

Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(0, 1).
Η εξίσωση της εφαπτομένης έχει τη μορφή (ε): $y=\alpha x+\beta$ όπου α, β παράμετροι και α συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β.

Από Α(0,1) σημείο επαφής τότε ισχύουν :

{ $f'(0)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Α(0,1) επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=\alpha x+\beta$ και της συνάρτησης $y=e^x$ } (1)

Για να βρούμε το $f'(0)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(e^x)'=e^x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(0)=e^0=1$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με $\{\alpha=1,\ 1=\beta,\ 1=e^0=1\}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(0 , 1) είναι $y=x+1$.
θα δείξουμε ότι αυτή η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g.
Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο επαφής Β(γ,δ) ώστε να ισχύουν
{ $g'(\gamma)=1$ και οι συντεταγμένες του Β(γ,δ) επαληθεύουν τις εξισώσεις της ευθείας (ε): $y=x+1$ και της συνάρτησης $y=-x^2-x$ } (2)

Για να βρούμε το $g'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $g'(x)=(-x^2-x)'=-2x-1$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $g'(\gamma)=-2\gamma-1$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$$\{-2\gamma-1=1,\ \delta=\gamma+1,\ \delta=-\gamma^2-\gamma\} \Leftrightarrow \{\gamma=-1,\ \delta=-1+1,\ \delta=-\gamma^2-\gamma\} \Leftrightarrow$$

$$\{\gamma=-1,\ \delta=0,\ 0=-(-1)^2-(-1)\} \Leftrightarrow$$

$\{\gamma=-1,\ \delta=0,\ 0=-1+1\} \Leftrightarrow \{\gamma=-1,\ \delta=0,\ 0=0\}$ άρα η $y=x+1$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g στο σημείο Β(-1,0).

Άσκηση 7 (Απόδειξη σχέσης με παραγώγους)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$, $f''(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι: $(1-x)f''(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) $f'(x)=(2x-x^2)'=2-2x$

$f''(x)=(2-2x)'=-2$

β) $(1-x)f''(x)+f'(x)=(1-x)(-2)+2-2x=-2+2x+2-2x=0$

Άσκηση 8 (Απόδειξη σχέσης με παραγώγους)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$, $f''(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι: $2f'(x)-f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) $f(x)=(e^{2x})'=e^{2x}(2x)'=2e^{2x}$, $\quad f''(x)=(2e^{2x})'=2e^{2x}(2x)'=4e^{2x}$

β) $2f'(x)-f''(x)=2(2e^{2x})-4e^{2x}=4e^{2x}-4e^{2x}=0$

Άσκηση 9 (Απόδειξη σχέσης με παραγώγους)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την $f'(x)$, $f''(x)$

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του α αν ισχύει

$f''(x)+2f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

α) $f'(x)=(e^{\alpha x})'=e^{\alpha x}(\alpha x)'=\alpha e^{\alpha x}$

$f''(x)=(\alpha e^{\alpha x})'=\alpha(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}(\alpha x)'=\alpha^2 e^{\alpha x}$

β) Έχουμε από την υπόθεση ότι $f''(x)+2f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\alpha^2 e^{\alpha x}+2\alpha e^{\alpha x}=3e^{\alpha x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$(\alpha^2+2\alpha)e^{\alpha x}=3e^{\alpha x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha=3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha=-3$ ή $\alpha=1$.

Άσκηση 10 (Εύρεση παραμέτρων)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-\alpha x$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να υπολογίσετε το α, αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο (2, f(2)) να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°.

<u>Λύση</u>

α) Για να βρούμε το $f'(2)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(2x^2-\alpha x)'=4x-\alpha$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(2)=4\cdot 2-\alpha=8-\alpha$ άρα $f'(2)=8-\alpha$, (1).

β) (Υπενθυμίζουμε από τη θεωρία ότι η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο επαφής $A(x_0,f(x_0))$ με τον άξονα $x'x$, ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας.

Δηλ. $\epsilon\phi\omega=f'(x_0)$)

Άρα $f'(2)=\varepsilon\varphi 45^{o}=1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}8-\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=7$

Άσκηση 11 (Εύρεση παραμέτρων)

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α αν η ευθεία (ε): $y=\alpha x$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$.

<u>Λύση</u>

Αν Α(γ,δ) σημείο επαφής της εφαπτομένης $y=\alpha x$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$, τότε { $f'(\gamma)=\alpha$ και οι συντεταγμένες του Α(γ,δ) επαληθεύουν την $y=\alpha x$ και την $f(x)=x^2+1$ } (1)

Για να βρούμε το $f'(\gamma)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(x^2+1)'=2x$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(\gamma)=2\gamma$ οπότε η (1) είναι ισοδύναμη με

$\{2\gamma=\alpha$, $\delta=\alpha\gamma$ και $\delta=\gamma^2+1\} \Leftrightarrow \{2\gamma=\alpha$, $\delta=2\gamma^2$ και $\delta=\gamma^2+1\} \Leftrightarrow$

$\{2\gamma=\alpha$, $\delta=2\gamma^2$ και $2\gamma^2=\gamma^2+1\} \Leftrightarrow$

$\{2\gamma=\alpha$, $\delta=2\gamma^2$ και $\gamma^2=1\} \Leftrightarrow \{2\gamma=\alpha$, $\delta=2$ και ($\gamma=1$ ή $\gamma=-1)\} \Leftrightarrow$

$\{\alpha=2,\ \delta=2,\ \gamma=1\}$ ή $\{\alpha=-2,\ \delta=2,\ \gamma=-1\}$.

Άρα οι τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε η ευθεία (ε): $y=\alpha x$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$, είναι $\alpha=2$, $\alpha=-2$.

Άσκηση 12 (Εύρεση παραμέτρων)

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε P(0)=-1, η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ στο σημείο (1,P(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=5x+10$, $P'(0)=2$, $P''(1)=2$.

<u>Λύση</u>

Από P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού έπεται ότι είναι της μορφής

$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$

P(0)=-1 σημαίνει ότι $\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0+\delta=-1$, άρα $\delta=-1$ (1)

Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) στο σημείο (1,P(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=5x+10$, που σημαίνει ότι $P'(1)=5$. Όμως

$P'(x)=(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)'=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, άρα

$P'(1)=5\Leftrightarrow 3\alpha\cdot 1^2+2\beta\cdot 1+\gamma=5\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta+\gamma=5$ (2)

$P'(0)=2\Leftrightarrow 3\alpha\cdot 0+2\beta 0+\gamma=2\Leftrightarrow \gamma=2$ (3)

$P''(1)=2$, όμως $P''(x)=(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)'=6\alpha x+2\beta$ οπότε

$P''(1)=2\Leftrightarrow 6\alpha\cdot 1+2\beta=2\Leftrightarrow 6\alpha+2\beta=2$ (4)

Από (1), (2), (3), (4) έχουμε {δ=-1, 3α+2β+γ=5 ,γ=2, 6α+2β=2} $\Leftrightarrow$

{δ=-1,γ=2, 3α+2β+2=5, 3α+β=1}$\Leftrightarrow$ {δ=-1, γ=2, 3α+2β=3 , 3α+β=1}$\Leftrightarrow$

{δ=-1, γ=2, 1-β+2β=3 , 3α+β=1} $\Leftrightarrow$ {δ=-1, γ=2, β=2 , 3α+β=1} $\Leftrightarrow$

{δ=-1, γ=2, β=2 , 3 α+2=1} $\Leftrightarrow$ {δ=-1, γ=2, β=2 , α=$-\frac{1}{3}$} άρα το πολυώνυμο είναι

$P(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+2x-1$.

Άσκηση 13 (Εύρεση παραμέτρων)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να περνά από το σημείο Α(1 , 2) και η ευθεία (ε): $y=x$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ περνά από το σημείο Α(1 , 2) που σημαίνει ότι $f(1)=2$ δηλαδή
$\alpha \cdot 1^2+\beta \cdot 1+\gamma=2$ άρα α+β+γ=2 (1)

Η ευθεία (ε): $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης στην αρχή των αξόνων. Δηλαδή { $f'(0)=1$, οι συντεταγμένες (0,0) του σημείου επαφής επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης (ε): $y=x$ και την εξίσωση της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ }(2)

Για να βρούμε το $f'(0)$ υπολογίζουμε την $f'(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)'=2\alpha x+\beta$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $f'(0)=2\alpha \cdot 0+\beta=\beta$ οπότε η (2) είναι ισοδύναμη με

$\{\beta=1\ ,\ 0=0\ ,\ 0=\alpha \cdot 0+\beta \cdot 0+\gamma\} \Leftrightarrow \beta=1\ ,\ \gamma=0$ και από (1) α+β+γ=2 έχουμε α+1+0=2 άρα α=1, β=1, γ=0.

Άσκηση 14 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η θέση ενός κινητού , που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση ,δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $x(t)=t^2+2t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (σε sec) και το x σε μέτρα (m).

1. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t.

2. Ποια η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 0 sec και ποια σε χρόνο 4 sec.

3. Πότε το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο.

4. Πότε το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση.

<u>Λύση</u>

1. Η ταχύτητα του κινητού ισούται με την παράγωγο της θέσης του κινητού.

$$\upsilon(t)=x'(t)=(t^2+2t)'=2t+2$$

2. $\upsilon(0)=2(0)+2=2$ m/sec , $\upsilon(4)=2(4)+2=10$ m/sec .

3. Το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν. Δηλ. όταν

$\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow 2t+2=0$, όμως $t\geq 0$ άρα το κινητό δεν είναι ποτέ (στιγμιαία) ακίνητο.

4. Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι θετική και σε αρνητική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι αρνητική

$\upsilon(t)=2t+2>0$ για κάθε $t\geq 0$ άρα το κινητό κινείται πάντοτε στη θετική κατεύθυνση.

Άσκηση 15 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t από τον τύπο $x(t) = 3t^2 - t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (σε sec) και το x σε μέτρα (m).

1. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [2, 4] sec.

2. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t.

3. Ποια η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 sec και ποια σε χρόνο 4 sec.

4. Πότε το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο.

<u>Λύση</u>

1. Η μέση ταχύτητα ισούται με το πηλίκο $\dfrac{\text{τελική θέση του σημείου} - \text{αρχική θέση του σημείου}}{\text{τελικός χρόνος} - \text{αρχικός χρόνος}}$

Δηλ. $\overline{\upsilon}([2,4]) = \dfrac{x(4) - x(2)}{4-2} = \dfrac{(3(4)^2 - 4) - (3(2)^2 - 2)}{2} = \dfrac{44-10}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$ m/sec

2. Η ταχύτητα του κινητού ισούται με την παράγωγο της θέσης του κινητού.

$\upsilon(t) = x'(t) = (3t^2 - t)' = (6t - 1)$ m/sec

3. $\upsilon(2) = (6(2) - 1) = 11$ m/sec, $\upsilon(4) = (6(4) - 1) = 23$ m/sec

4. Το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν. Δηλαδή όταν

$\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{6}$ sec.

Άσκηση 16 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t) = A\eta\mu\omega t$, όπου t ο χρόνος και τα Α, ω σταθερές.

1. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t

2. Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης.

Λύση

1. Η ταχύτητα του κινητού ισούται με την παράγωγο της θέσης του κινητού

$\upsilon(t) = y'(t) = (A\eta\mu\omega t)' = A(\sigma\upsilon\nu\omega t)(\omega t)' = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$ άρα $\upsilon(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$

Η επιτάχυνση του κινητού ισούται με την παράγωγο της ταχύτητας του κινητού

$\alpha(t) = \upsilon'(t) = (A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t)' = A\omega(-\eta\mu\omega t)(\omega t)' = -A\omega^2\eta\mu\omega t$ άρα $\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu\omega t$

2.Έχουμε $\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu\omega t = -\omega^2 A\eta\mu\omega t = -\omega^2 y(t)$

Άρα $\alpha(t) = -\omega^2 y(t)$ δηλαδή η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης.

Άσκηση 17 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

Έστω ένα ορθογώνιο Παραλληλογραμμο με περίμετρο 40μ, και με μήκος μιας πλευράς ισο με x μ.

Α) Βρείτε το εμβαδό του ορθογωνίου Ε(x).

Β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

Γ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν x=3 μ.

<u>Λύση</u>

Α) Το εμβαδό του ορθογωνίου $E = x \cdot y$ όπου y σε μ η άλλη πλευρά του ορθογωνίου. Θα εκφράσουμε το y συναρτήσει του x.

Έχουμε ότι Περίμετρος ορθ. Παρ/μου $= 2x + 2y = 40 \Rightarrow 2y = 40 - 2x \Rightarrow y = 20 - x$ οπότε

$E(x) = x \cdot y = x(20 - x) = 20x - x^2$ άρα $E(x) = 20x - x^2$ σε $μ^2$

Β) Τα μήκη των πλευρών είναι μη αρνητικοί αριθμοί συνεπώς έχουμε

$\{x \geq 0,\ y \geq 0\} \Leftrightarrow \{x \geq 0,\ 20 - x \geq 0\} \Leftrightarrow \{x \geq 0,\ x \leq 20\} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 20$ άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x) είναι το κλειστό διάστημα [0,20].

Γ) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν x=3 μ ισούται με την αριθμητική τιμή της παραγώγου συνάρτησης Ε'(x) αν στη θέση του x βάλουμε την τιμή 3

$E'(x) = (20x - x^2)' = 20 - 2x$ οπότε $E'(3) = 20 - 6 = 14$ $μ^2$/sec

Άσκηση 18 (Εύρεση του ρυθμού μεταβολής)

1. Η θέση ενός κινητού που κινείται σε μια ευθεία δίνεται από τη συνάρτηση $s(t)=t^3+3t^2-9t-27$, με $t\in[0,8]$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του διαστήματος τη χρονική στιγμή t=2 sec.

β) Τι εκφράζει ο ρυθμός μεταβολής του ερωτήματος (α)

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του είναι 36 μον. μήκους/sec

δ) Να βρείτε πότε κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση ;

ε) Να βρείτε την επιτάχυνση που έχει το κινητό τη χρονική στιγμή t=3 sec.

στ) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των πρώτων 4 sec.

<u>Λύση</u>

α) Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ενός κινητού είναι η πρώτη παράγωγος

$s'(t)=3t^2+6t-9$ άρα $s'(2)=3\cdot 2^2+6\cdot 2-9=15$.

Άρα ρυθμός μεταβολής 15 μον. μήκους/sec

β) Ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης ενός κινητού είναι η στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t)$

γ) $s'(t)=3t^2+6t-9=36 \Leftrightarrow$ t=3 sec ή t=-5 sec (απορρίπτεται) άρα τη χρονική στιγμή $t=3\,\text{sec}$ έχει ταχύτητα 36 μον. μήκους/sec

δ) Το κινητό κινείται σε θετική κατεύθυνση, όταν η ταχύτητα $\upsilon(t)>0$ και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t)<0$. Βρίσκουμε το πρόσημο της ταχύτητας $\upsilon(t)=s'(t)=3t^2+6t-9=3(t^2+2t-3)$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $t_1=-3$ (απορρίπτεται), $t_2=1$

t	0		1		8
$\upsilon(t)$		-	0	+	

Άρα κατά τη διάρκεια του 1ου δευτερολέπτου το κινητό κινείται κατά την αρνητική κατεύθυνση, από το 1ο δευτερόλεπτο μέχρι το τέλος του 8ου το κινητό κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση.

ε) Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας άρα

$s''(t)=6t+6 \Rightarrow s''(3)=24$ μον. μήκους/sec^2

στ) Η απόσταση που διανύθηκε στη διάρκεια του 1 sec είναι

$S_1=\left|s(1)-s(0)\right|=\left|-32-(-27)\right|=5$ και η απόσταση που διανύθηκε από το 1sec έως το 4 sec είναι $S_2=\left|s(4)-s(1)\right|=\left|49-(-32)\right|=81$

Άρα το ολικό διάστημα είναι $S=S_1+S_2=5+81=86$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1 (Εύρεση της ταχύτητας, του ολικού διαστήματος ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση)

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (σε sec) και το x σε μέτρα (m).

1. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t

2. Ποια η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 0 sec και ποια σε χρόνο 3 sec.

3. Πότε το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο.

4. Πότε το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση.

5. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των 3 πρώτων sec.

<u>Λύση</u>

1. Η ταχύτητα του κινητού ισούται με την παράγωγο της θέσης του κινητού

$\upsilon(t) = x'(t) = (2t^3 - 9t^2 + 12t)' = 6t^2 - 18t + 12$ άρα $\upsilon(t) = 6t^2 - 18t + 12$

2. $\upsilon(0) = 6 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 12 = 12$ m/sec, $\upsilon(3) = 6 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 12 = 12$ m/sec

επειδή στην εκφώνηση ζητείται τη χρονική στιγμή 3 sec

3. Το κινητό είναι (στιγμιαία) ακίνητο όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν. Δηλαδή όταν

$\upsilon(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 2$

4. Το κινητό κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι θετική και σε αρνητική κατεύθυνση όταν η ταχύτητα του είναι αρνητική

$\upsilon(t) > 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 18t + 12 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow t < 1$ ή $t > 2$

$\upsilon(t) < 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 18t + 12 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2$

5. Βρίσκουμε το πρόσημο της $\upsilon(t)$ στο διάστημα [0,3]

t	0	1	2	3
$\upsilon(t)$	+	○ -	○ +	
Διαστήματα	$\lvert x(1) - x(0)\rvert$	$\lvert x(2) - x(1)\rvert$	$\lvert x(3) - x(2)\rvert$	

Ολικό διάστημα s (από 0 μέχρι 3) $=|x(1)-x(0)|+|x(2)-x(1)|+|x(3)-x(2)|$

Όπου $x(1)=2\cdot1^3-9\cdot1^2+12\cdot1=2-9+12=5$

$x(0)=2\cdot0^3-9\cdot0^2+12\cdot0=0$

$x(2)=2\cdot2^3-9\cdot2^2+12\cdot2=16-36+24=4$

$x(3)=2\cdot3^3-9\cdot3^2+12\cdot3=54-81+36=9$ άρα

Ολικό διάστημα s (από 0 μέχρι 3) $=|x(1)-x(0)|+|x(2)-x(1)|+|x(3)-x(2)|=$

$|5-0|+|4-5|+|9-4|=5+1+5=11$ m

Άρα το ολικό διάστημα s που έχει διανύσει το κινητό στη διάρκεια των 3 πρώτων sec είναι 11 m.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/01/2015

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Μονοτονία - Ακρότατα και Παράγωγος

Στις προηγούμενες παραγράφους αναφερθήκαμε στις έννοιες της μονοτονίας, των ακρότατων μιας συνάρτησης, καθώς και στην έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στον τρόπο εύρεσης της μονοτονίας και των ακρότατων μιας συνάρτησης με τη βοήθεια της παραγώγου.

Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η σύνδεση αυτή ας παρακολουθήσουμε τις σκέψεις και τη διαδικασία επίλυσης του ακόλουθου προβλήματος.

Πρόβλημα

Ένας κτηματομεσίτης πουλάει ένα μέρος μιας έκτασης και δίνει τη δυνατότητα στους υποψήφιους αγοραστές να επιλέξουν με όποιο τρόπο θέλουν το οικόπεδο που θα αγοράσουν αρκεί να έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και σταθερή περίμετρο 200 μέτρα. Ένας υποψήφιος αγοραστής προκειμένου να επιλέξει αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδόν, σκέφτεται ως εξής:

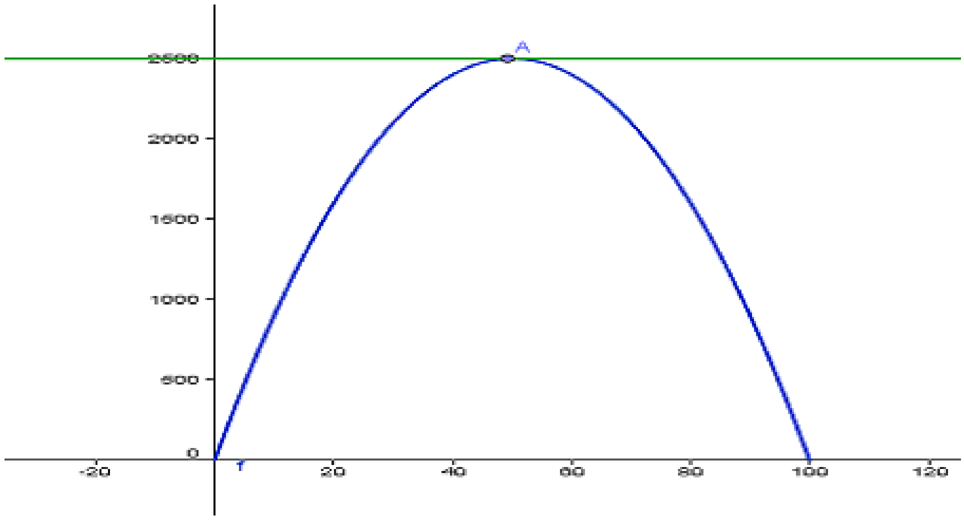
Αν x η μια πλευρά του οικοπέδου, τότε η άλλη πλευρά του είναι $100-x$. Επομένως το εμβαδόν του Ε=Ε(x) είναι: $E = x\cdot(100-x), x \in (0,100)$.

Επειδή $E = x\cdot(100-x) \Leftrightarrow E = -x^2+100x$ και $\alpha = -1 < 0$, κατά τα γνωστά από το τριώνυμο β΄ βαθμού, το εμβαδόν Ε παίρνει για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{100}{2\cdot(-1)} = 50$ μέγιστη τιμή

$E = \dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \dfrac{4(-1)\cdot 0-100^2}{4\cdot(-1)} = 2500$ τετρ. μέτρα.

Άρα από τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με σταθερή περίμετρο 200 μέτρων, το τετράγωνο είναι αυτό που συμφέρει τον αγοραστή αφού αυτό έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Το συμπέρασμα αυτό διαπιστώνεται και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(x) που απεικονίζεται στο σχήμα (1)



Σχήμα (1)

Ειδικότερα, από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι:

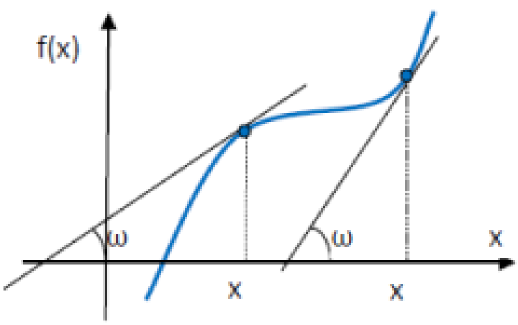
- Αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης Ε(x) πριν και μετά τη θέση μεγίστου

  Συγκεκριμένα από το σχήμα (1) παρατηρούμε ότι:

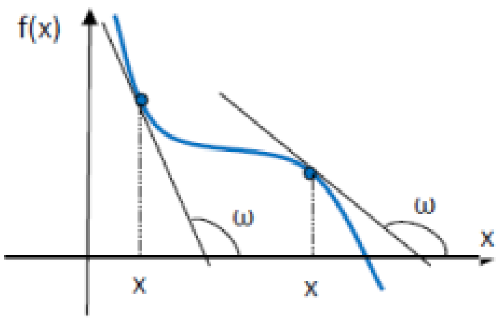
  - Η συνάρτηση Ε(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,50]
  - Η συνάρτηση Ε(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [50,100)

- Η εφαπτομένη της συνάρτησης Ε(x) στο $x_0 = 50$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Επιπλέον, παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις μιας γνησίως αύξουσας και μιας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης στα σχήματα (2) και (3) διαπιστώνουμε ότι:



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Στο σχήμα (2) όπου έχουμε μια γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση, η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης φαίνεται να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ **οξεία γωνία ω** και επειδή $f'(x) = εφω > 0$, η παράγωγος είναι θετική.

Στο σχήμα (3) όπου έχουμε μια γνησίως φθίνουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση, η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης φαίνεται να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ **αμβλεία γωνία ω** και επειδή $f'(x) = εφω < 0$, η παράγωγος είναι αρνητική.

Εξάλλου, η παράγωγος της συνάρτησης E(x) είναι: $E'(x) = -2x + 100$ και παρατηρούμε ότι:

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 50$

  Δηλαδή η παράγωγος μηδενίζεται στη θέση του μεγίστου

- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 100 < 0 \Leftrightarrow x > 50$

  Δηλαδή η παράγωγος είναι αρνητική μετά από τη θέση μεγίστου

- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 100 > 0 \Leftrightarrow x < 50$

  Δηλαδή η παράγωγος είναι θετική πριν από τη θέση μεγίστου

Οι παραπάνω παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι το πρόσημο της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης σχετίζεται:

- Με τη μονοτονία της συνάρτησης και
- Με τα ακρότατα της συνάρτησης

Πράγματι, υπάρχει σχέση ανάμεσα στη μονοτονία, τα ακρότατα και την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης και συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Μονοτονία και παράγωγος

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του διαστήματος Δ, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του διαστήματος Δ, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

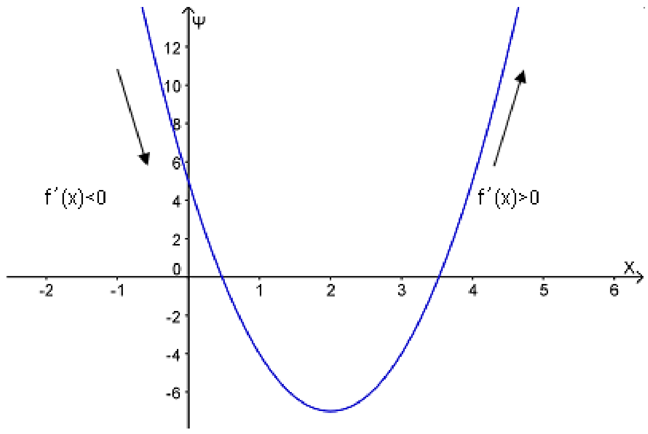
<u>Παράδειγμα</u>:

$f(x)=3x^2-12x+5, f'(x)=6x-12,\ \ x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 6x-12<0 \Leftrightarrow 6x<12 \Leftrightarrow x<2$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 6x-12>0 \Leftrightarrow 6x>12 \Leftrightarrow x>2$.



Σχήμα (4)

Άρα:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ αφού $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ακρότατα και παράγωγος

- Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν
  - $f'(x_o)=0$ για κάποιο $x_o\in(\alpha,\beta)$
  - $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$
  - $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$

x	α		x_0		β
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	Μέγιστο	↘	

τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_o$ μέγιστο.

- Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν
  - $f'(x_o)=0$ για κάποιο $x_o\in(\alpha,\beta)$
  - $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$
  - $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$

x	α		x_0		β
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ελάχιστο	↗	

τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_o$ ελάχιστο.

__Παράδειγμα__:

$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad f'(x) = -2x + 2, \ x \in \mathbb{R}$

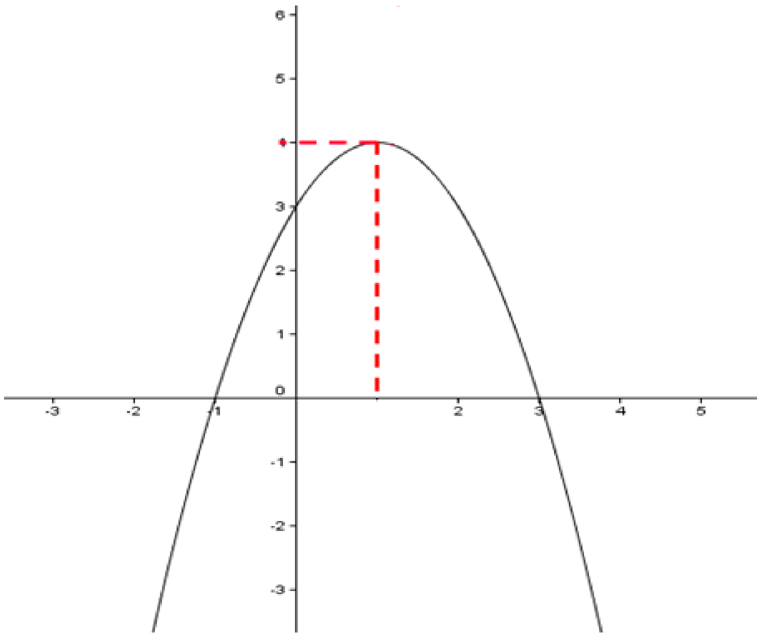
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 2 < 0 \Leftrightarrow -2x < -2 \Leftrightarrow x > 1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 2 > 0 \Leftrightarrow -2x > -2 \Leftrightarrow x < 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	Μέγιστο $f(1) = 4$	↘

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ με τιμή $f(1) = 4$ αφού $f'(1) = 0$,

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

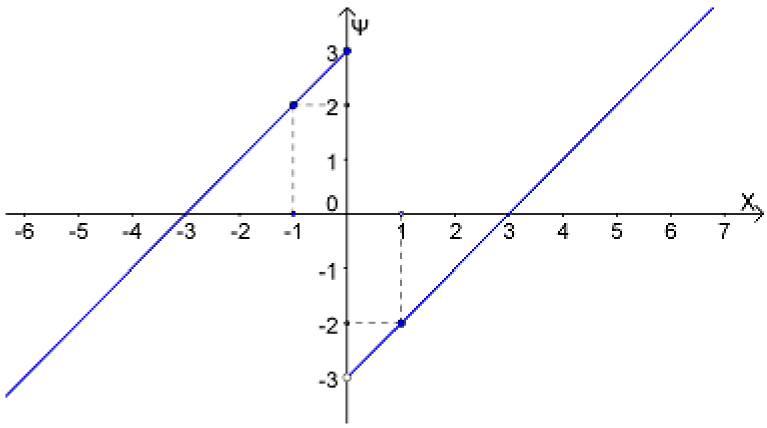


Σχήμα (5)

Σημειώσεις

1. Το Θεώρημα 1 (Μονοτονία και παραγώγος) εφαρμόζεται σε διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων.

   Για **παράδειγμα** η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{αν } x\le 0 \\ x-3 & \text{αν } x>0 \end{cases}$ έχει παράγωγο $f'(x)=1>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ αφού υπάρχουν αριθμοί $x_1<x_2$ με $f(x_1)>f(x_2)$ π.χ. $-1<1$ με $f(-1)=2>-2=f(1)$



Σχήμα (6)

2. Το Θεώρημα 1 (Μονοτονία και παράγωγος) δεν εφαρμόζεται αντίστροφα. Δηλαδή όταν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκην $f'(x)>0$ (αντίστοιχα $f'(x)<0$).

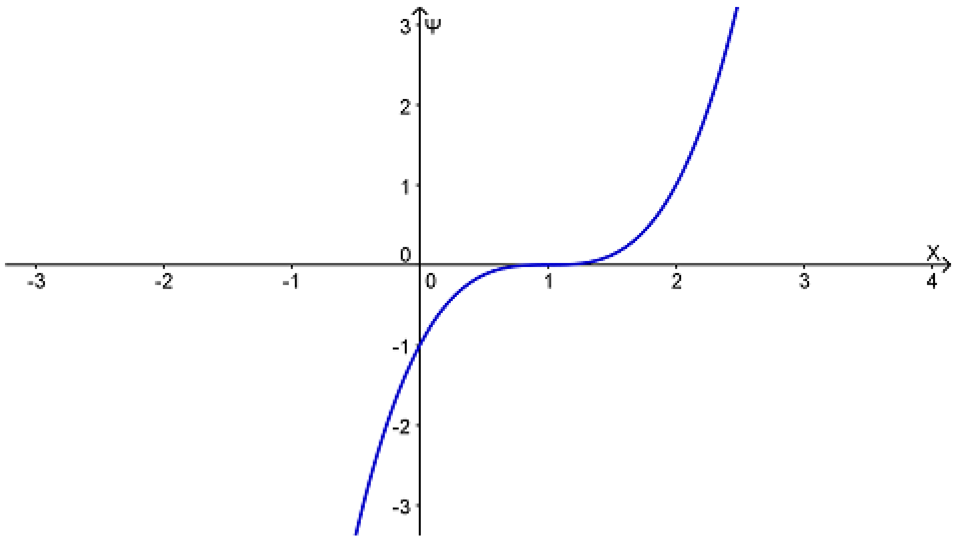
   Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R, αλλά $f'(x)=-3x^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. Αποδεικνύεται ότι όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ και παρουσιάζει ακρότατο σ' αυτό (μέγιστο ή ελάχιστο) τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. Επομένως αν μία συνάρτηση έχει παράγωγο σε κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε τα σημεία των ακροτάτων της πρέπει να αναζητηθούν μεταξύ των αριθμών στους οποίους μηδενίζεται η παράγωγος. Ωστόσο, ο μηδενισμός της παραγώγου σε σημείο x_0 διαστήματος (α,β) δεν αρκεί ώστε το x_o να είναι σημείο ακροτάτου. Απαιτείται επιπλέον και η αλλαγή του πρόσημου της f' εκατέρωθεν του x_o.

4. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο x_o του πεδίου ορισμού της χωρίς απαραίτητα να μηδενίζεται η παράγωγος σ' αυτό, αλλά δεν θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε τέτοιες περιπτώσεις.

5. Αν για κάποιο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x_0)=0$ και $f'(x)>0$ (αντίστοιχα $f'(x)<0$) στα διαστήματα (α, x_0) και (x_0,β) τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_o και είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) στο (α,β)

   Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(x)=3(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$, οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$ (Σχήμα 7)



Σχήμα (7)

6. Για τη συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων από τη μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων μιας συνάρτησης, χρησιμοποιούμε πίνακες όπως οι παρακάτω (πίνακες μεταβολών) στους οποίους φαίνονται τα ενδεχόμενα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της πρώτης παραγώγου, με τη βοήθεια των οποίων συμπεραίνουμε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της και την ύπαρξη ακρότατων.

x	α		x_0		β
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$			$\nearrow$		

Σχήμα 8

x	α		x_0		β
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	Μέγιστο	$\searrow$	

Σχήμα 9

7. Ένα ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα μέγιστο όταν πρόκειται για τοπικά ακρότατα, όπως θα δούμε στη συνέχεια (Παράδειγμα 5).

Παραδείγματα Εφαρμογής

Παράδειγμα 1 (Μονότονη συνάρτηση)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 3"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = x^{11} + x^7 + e^x$

β) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{e^x}$

(Θέμα Β)

Λύση

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 11x^{10} + 7x^6 + e^x$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ αφού $11x^{10} \geq 0$, $7x^6 \geq 0$ και $e^x > 0$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 1 (Μονοτονία και παράγωγος) η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{e^x}\right)' = \frac{\left(x^2 + 2x + 3\right)' e^x - \left(x^2 + 2x + 3\right)\left(e^x\right)'}{e^{2x}} =$$

$$\frac{\left(2x + 2\right)e^x - \left(x^2 + 2x + 3\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{\left(2x + 2 - x^2 - 2x - 3\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{-\left(x^2 + 1\right)}{e^x}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) < 0$ αφού $e^x > 0$ και $-(x^2 + 1) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 1 (Μονοτονία και παράγωγος) η g θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2 (Πολυωνυμικές συναρτήσεις)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 4"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

(Θέμα Β)

Λύση

Η συνάρτηση g, ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = 4x^3 - 16x \Leftrightarrow g'(x) = 4x(x^2 - 4)$.

Το πρόσημο της παραγώγου $g'(x)$ σε κάθε υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της προσδιορίζει και το είδος της μονοτονίας για τη συνάρτηση g. Για το πρόσημο της $g'(x)$ εργαζόμαστε ως εξής:

1. Λύνουμε την εξίσωση:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \text{ ή } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 2 \quad (\text{ρίζες της } g'(x) = 0)$$

2. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $g'(x)$:

x	-∞		-2		0		2		+∞
x		-		-	0	+		+	
$x^2 - 4$		+	0	-		-	0	+	
$x(x^2 - 4)$		-	0	+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι

- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

3. Συνοψίζοντας έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών για τη μονοτονία της g

x	-∞		-2		0		2		+∞
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘	T.E. $g(-2) = -15$	↗	T.M. $g(0) = 1$	↘	T.E. $g(2) = -15$	↗	

4. Συμπεραίνουμε ότι:

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[0,2]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτά και $g'(x)<0$ για κάθε x στο εσωτερικό τους
- Η g είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-2,0]$, $[2,+\infty)$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτά και $g'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό τους
- Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-2$ με τιμή $g(-2)=-15$ αφού $g'(-2)=0$, $g'(x)<0$ στο $(-\infty,-2)$ και $g'(x)>0$ στο $(-2,0)$
- Η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2=0$ με τιμή $g(0)=1$ αφού $g'(0)=0$, $g'(x)>0$ στο $(-2,0)$ και $g'(x)<0$ στο $(0,2)$
- Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_3=2$ με τιμή $g(2)=-15$ αφού $g'(2)=0$, $g'(x)<0$ στο $(0,2)$ και $g'(x)>0$ στο $(2,+\infty)$.

Σχόλιο-Σημείωση-Παρατήρηση:

Για την εύρεση της μονοτονίας και τον προσδιορισμό των ακροτάτων (αν υπάρχουν) συνάρτησης f, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Προσδιορίζουμε (αν υπάρχουν) τις ρίζες της παραγώγου
2. Προσδιορίζουμε το πρόσημο της παραγώγου στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης
3. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στον πίνακα μεταβολών
4. Παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα από τη μελέτη ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα για τη συνάρτηση.

Παράδειγμα 3 (Πολυωνυμικές συναρτήσεις)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 5"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$.

(Θέμα Γ)

Λύση

Η συνάρτηση $h(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$, ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=12x^3-24x^2+12x \Leftrightarrow h'(x)=12x(x^2-2x+1) \Leftrightarrow$
$h'(x)=12x(x-1)^2$.

Το πρόσημο της παραγώγου $h'(x)$ σε κάθε υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της προσδιορίζει και το είδος της μονοτονίας για τη συνάρτηση h. Για το πρόσημο της $h'(x)$ εργαζόμαστε όπως και στο στο προηγούμενο παράδειγμα.

1. Λύνουμε την εξίσωση: $h'(x)=0 \Leftrightarrow 12x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \quad (\text{ρίζες της } h'(x)=0)$$

2. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $g'(x)$:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	-	0	+		+
$(x-1)^2$	+		+	0	+
$12x(x-1)^2$	-	0	+	0	+

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι

- $h'(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

3. Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$\searrow$	Ελάχιστο $h(0)=1$	$\nearrow$		$\nearrow$

4. Συμπεράσματα:

- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό και $h'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του
- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$ (Βλέπε Σημείωση 5 - Θεωρία)

- Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 1$ αφού $h'(0) = 0$, $h'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $h'(x) > 0$ στο $(0, 1)$

- Η h δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 1$ παρότι η παράγωγος h' μηδενίζεται σ' αυτό, αφού η h' δεν αλλάζει πρόσημο πριν και μετά το $x_1 = 1$
  (Βλέπε Σημείωση 5 - Θεωρία).

Παράδειγμα 4 (Ρητή συνάρτηση)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 6"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αφού $x^2 + 3 \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' = \frac{(x-1)'(x^2+3) - (x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} =$$

$$\frac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2} = -\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}$$

Το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή αφού ο παρονομαστής $(x^2+3)^2$ είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για τον αριθμητή $x^2 - 2x - 3$ κατά τα γνωστά έχουμε:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$ και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$ δηλαδή $x_1 = -1$ ή $x_2 = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	0	-	0	+	

Άρα:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\left(x^2 + 3\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\left(x^2 + 3\right)^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\left(x^2 + 3\right)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$

Συνοψίζοντας έχουμε τον πίνακα μεταβολών για τη μονοτονία της f

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	T.E. $f(-1) = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	T.M. $f(3) = \frac{1}{6}$	$\searrow$	

και επομένως:

- H f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$

- H f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 3]$ αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 3)$

- H f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$

- H f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ με τιμή $f(3) = \frac{1}{6}$

Παράδειγμα 5 (Ρητή συνάρτηση)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 7"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

(Θέμα Γ)

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ αφού $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και είναι παραγωγίσιμη στο Α ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2+3\right)'\left(x-1\right) - \left(x-1\right)'\left(x^2+3\right)}{\left(x-1\right)^2} = \frac{2x\left(x-1\right) - x^2 - 3}{\left(x-1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{\left(x-1\right)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{\left(x-1\right)^2}$$

Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$

- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x \neq 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, 3)$

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Συνοψίζοντας έχουμε τον πίνακα μεταβολών για τη μονοτονία της g

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ. $g(-1)=-2$	$\searrow$		$\searrow$	Τ.Ε. $g(3)=6$	$\nearrow$	

και επομένως:

- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ αφού $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$
- Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1)$ και $(1,3]$ αφού $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,1)\cup(1,3)$
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ αφού $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$
- Η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ με τιμή $g(-1)=-2$
- Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$ με τιμή $g(3)=6$

Παρατήρηση:

Είναι $g(-1)=-2<6=g(3)$ (Βλέπε θεωρία – Σχόλιο 7)

Παράδειγμα 6 (Εκθετική)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 8"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=e^x-e^2x$.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη (ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(e^x-e^2x)'=e^x-e^2$.

Για την $f'(x)$ έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e^2=0 \Leftrightarrow e^x=e^2 \Leftrightarrow x=2$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 < 0 \Leftrightarrow e^x < e^2 \Leftrightarrow x < 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^2 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ελάχιστο $f(2) = -e^2$	$\nearrow$	

Επομένως

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$ αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 2$ με τιμή $f(2) = e^2 - 2e^2 = -e^2$

Παράδειγμα 7 (Λογαριθμική)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 9"

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

(Θέμα Β)

<u>Λύση</u>

Η g(x) έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) στο A με:

$$g'(x) = (x^2 - 2\ln x)' = 2x - 2\frac{1}{x} = 2\frac{x^2 - 1}{x}.$$

Για την $g'(x)$ έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$

- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-1}{x} < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1$

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	Ελάχιστο $g(1)=1$	$\nearrow$	

Άρα:

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ αφού $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ αφού $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$
- Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με τιμή $g(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.

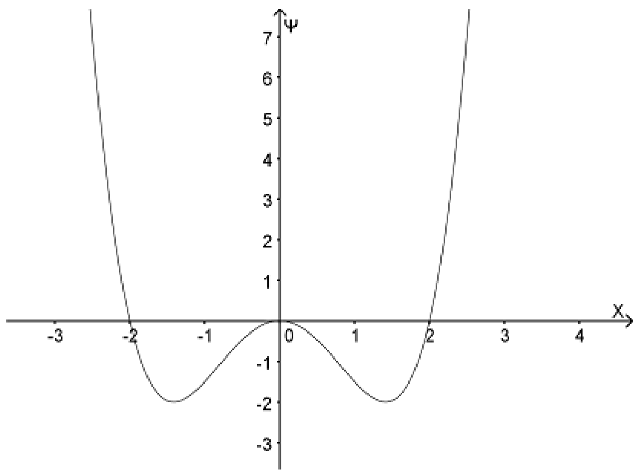
Παράδειγμα 8 (Γραφική παράσταση παραγώγου)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 10"

Στο Σχήμα (1) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f για την οποία δίνεται ότι:

$f(-2) = \kappa$ και $f(2) = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f

β) Να αποδείξετε ότι κ > λ.



Σχήμα 1

(Θέμα Γ)

Λύση

α) Από τη γραφική παράσταση της f' συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της f παρατηρώντας ότι:

- Η f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της f' για $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
  Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in (-2,0) \cup (0,2)$

- Η γραφική παράσταση της f' για $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
  Άρα $f'(x) > 0$ για $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

- Η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $x = -2$, $x = 0$ και $x = 2$.
  Άρα η $f'(x)$ μηδενίζεται στα $x = -2$, $x = 0$ και $x = 2$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	T.M. $f(-2)=\kappa$	↘		↘	T.E. $f(2)=\lambda$	↗	

Επομένως:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$ αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,2]$ αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ (βλέπε Σημείωση 5 - Θεωρία)

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = \kappa$

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ με τιμή $f(2) = \lambda$

- Η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x = 0$

β) Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,2]$, από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης έχουμε:

$$-2 < 2 \Leftrightarrow f(-2) > f(2) \Leftrightarrow \kappa > \lambda .$$

Παράδειγμα 9 (Πρόβλημα μεγιστοποίησης)
Μπορείτε να το δείτε στη βιντεοδιάλεξη "Υποενότητα 11"

Όταν σε μια επιχείρηση η τιμή πώλησης ανά τεμάχιο προϊόντος είναι 6€, οι μηνιαίες πωλήσεις της ανέρχονται κατά μέσο όρο σε 4000 τεμάχια. Η εκτίμηση μετά από σχετική μελέτη έδειξε ότι η μείωση στις πωλήσεις είναι ανάλογη της αύξησης στην τιμή πώλησης και ειδικότερα η αύξηση της τιμής πώλησης κατά 1€ αντιστοιχεί σε μείωση πωλήσεων κατά 400 τεμάχια. Σύμφωνα με την προηγούμενη εκτίμηση:

Να βρείτε ποια αύξηση δίνει μέγιστα μηνιαία έσοδα από την πώληση των προϊόντων

(Θέμα Δ)

Λύση

Αρχικά θα προσδιορίσουμε τη συναρτήση $E(x)$ που δίνει τα έσοδα όταν η αύξηση της τιμής πώλησης του ενός τεμαχίου είναι x €.

Για τη διαμόρφωση της συνάρτησης λαμβάνοντας υπόψη μας ότι:

- η μείωση στις πωλήσεις είναι ανάλογη της αύξησης στην τιμή πώλησης
- σε 1 € αύξηση αντιστοιχούν 400 τεμάχια μειωμένες πωλήσεις
- Τα μηνιαία έσοδα E(x) προκύπτουν από το γινόμενο (Τεμάχια)·(Τιμή πώλησης)

και με τη βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί ότι:

Αύξηση	**Τιμή πώλησης**	**Τεμάχια**	**E(x)=(Τεμάχια).(Τιμή Πώλησης)**
1	6+1	4000-1·400	E(1)= (4000-1·400)·(6+1)
2	6+2	4000-2·400	E(2)= (4000-2·400)·(6+2)
……….	………	………………	………………………………………
x	6+x	4000-x·400	E(x)= (4000-x·400)·(6+x)

Επομένως:

$$E(x) = (4000 - 400x)(6 + x) \Leftrightarrow E(x) = 400(10 - x)(6 + x) \Leftrightarrow$$

$$E(x) = 400(-x^2 + 4x + 60) \quad x \geq 0 .$$

Αναζητούμε λοιπόν το μέγιστο της συνάρτησης E για $x \geq 0$ και επειδή η E είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ έχουμε:

$E'(x) = 400(-x^2 + 4x + 60)' = 400(-2x + 4)$, οπότε:

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 4 < 0 \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow x > 2$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	0		2		$+\infty$
$E'(x)$		+	0	-	
$E(x)$		$\nearrow$	Μέγιστο $E(2) = 25.600$	$\searrow$	

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Η Ε παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$ με τιμή $E(2) = 400(10 - 2)(6 + 2) = 25.600$
Επομένως σε αύξηση της τιμής κατά 2€ έχουμε τιμή πώλησης 6 + 2 = 8€ και μέγιστα μηνιαία έσοδα 25.600€.

Ημερομηνία τροποποίησης: 2/11/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Ερώτηση θεωρίας 1

Πότε μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ, είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό, χρησιμοποιώντας την $f'(x)$;

Λύση

Όταν $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

- Όταν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ (Θεώρημα σελίδα 40 του σχολικού βιβλίου) ή
- Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ και η παράγωγος της f διατηρεί θετικό πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (Σχόλιο σελίδα 40 του σχολικού βιβλίου)

Ερώτηση θεωρίας 2

Πότε μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ, είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, χρησιμοποιώντας την $f'(x)$;

<u>Λύση</u>

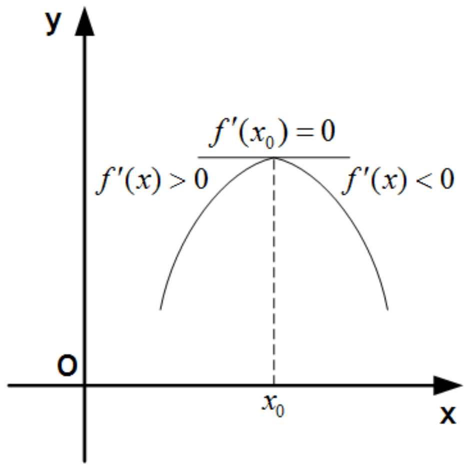
Όταν $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

- Όταν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ (Θεώρημα σελίδα 40 του σχολικού βιβλίου) ή
- Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ και η παράγωγος της f διατηρεί αρνητικό πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (Σχόλιο σελίδα 40 του σχολικού βιβλίου)

Ερώτηση θεωρίας 3

Ποιο είναι το κριτήριο, ώστε μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο (α,β) να παρουσιάζει μέγιστο στο (α,β);

<u>Λύση</u>



Πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- $f'(x_0)=0$.
- $f'(x)<0$ στο $\left(x_0,\beta\right)$.
- $f'(x)>0$ στο $\left(\alpha,x_0\right)$.

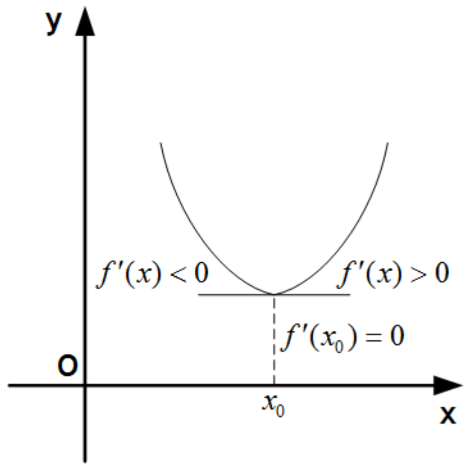
Ερώτηση θεωρίας 4

Ποιο είναι το κριτήριο, ώστε μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο (α,β) να παρουσιάζει ελάχιστο στο (α,β);

<ins>Λύση</ins>

Πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- $f'(x_0)=0$.
- $f'(x)<0$ στο $\left(\alpha,x_0\right)$.
- $f'(x)>0$ στο $\left(x_0,\beta\right)$.



ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$

β) $g(x)=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+2x+3$.

<u>Λύση</u>

α) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x)=3x^2+6x-9,\ x\in\mathbb{R}$.
Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$.
Γι' αυτήν ισχύει $\Delta=4+12=16$ και έχει ως λύσεις τους αριθμούς $x_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$ ή $x_2=\dfrac{-2-4}{2}=-3$.
Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9>0 \Leftrightarrow x^2+2x-3>0$ **(1)**

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2+2x-3 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		+	0	-	0	+	

Έτσι διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $x<-3$ ή $x>1$.
Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[1,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3,1]$

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-9\cdot(-3)+4=31$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)=1^3+3\cdot1^2-9\cdot1+4=-1$.

β) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της g που είναι $g'(x)=-x^3+4x^2-5x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+4x^2-5x+2=0$ **(2)**.
Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $x_1=2$ είναι ρίζα της εξίσωσης και παραγοντοποιούμε το 1ο μέλος της. Έτσι η εξίσωση γίνεται:

-1	4	-5	2	ρ=2
	-2	4	-2	
-1	2	-1	0	

(2) $\Leftrightarrow (x-2)\cdot(-x^2+2x-1)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $-(x^2-2x+1)=0$.
Δηλαδή $x=2$ ή $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση
$g'(x)>0 \Leftrightarrow -x^3+4x^2-5x+2>0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(-x^2+2x-1)>0$ **(3)**, σύμφωνα με το προηγούμενο σχήμα Horner.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

- $-x^2+2x-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2<0$ για κάθε $x\neq1$

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα με το πρόσημο των παραγόντων και του γινομένου $(x-2)\cdot(-x^2+2x-1)$ και έχουμε:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-2$	-		-	0	+
$-x^2+2x+1$	-	0	-		-
Γινόμενο	+	0	+	0	-

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $(x-2)\cdot(-x^2+2x-1)>0$ όταν $x<2$ και $x\neq1$.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $g'(x)>0$ είναι τα $x\in(-\infty,1)\cup(1,2)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της g, τις ρίζες της εξίσωσης $g'(x)=0$ και το πρόσημο της g'.
Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της g και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	0	-	
$g(x)$		↗		↗	Ο.Μ.	↘	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$
- Έχει μέγιστο το $g(2) = -\frac{2^4}{4} + \frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 + 3 = -4 + \frac{32}{3} - 10 + 7 = -7 + \frac{32}{3} = \frac{11}{3}$

Παρατηρήσεις:
1. Αν η παράγωγος μηδενίζεται σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο x_0.
2. Αν η παράγωγος διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β) και το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού, τότε η συνάρτηση θεωρείται γνησίως μονότονη στο (α, β).

<u>Μεθοδολογία</u>

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (αν δε δίνεται).
2. Υπολογίζουμε την παράγωγο f'.
3. Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.
4. Λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0$ (ή την $f'(x)<0$)
5. Φτιάχνουμε πίνακα που περιλαμβάνει : το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες και το πρόσημο της f', τη μονοτονία, τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

6. Εφαρμόζουμε τις προτάσεις από τη θεωρία, γράφουμε τα διαστήματα μονοτονίας, τη θέση, την τιμή και το είδος του ακροτάτου.

7. Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα και έχει μόνο ένα ακρότατο, τότε αυτό είναι ολικό.

Άσκηση 2 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2x - e^x + 1$

β) $g(x) = x \cdot (\ln x - 2)$.

<u>Λύση</u>

α) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x) = 2 - e^x, x \in \mathbb{R}$.
Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.
Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \ln 2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\ln 2, +\infty)$
- Έχει μέγιστο το $f(\ln 2) = 2\ln 2 - e^{\ln 2} + 1 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

β) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Είναι $x > 0$. Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της g που είναι $g'(x) = (x)' \cdot (\ln x - 2) + x \cdot (\ln x - 2)' =$

$= \ln x - 2 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 2 + 1 = \ln x - 1, \ x \in (0, +\infty)$.
Λύνουμε την εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, (δεκτή γιατί $e \in (0, +\infty)$

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$.
Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της g, τις ρίζες της εξίσωσης $g'(x) = 0$ και το πρόσημο της g'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της g και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση g :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$
- Έχει ελάχιστο το $g(e) = e \cdot (\ln e - 2) = e \cdot (1 - 2) = -e$

Μεθοδολογία

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (αν δε δίνεται).
- Υπολογίζουμε την παράγωγο f'.
- Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.
- Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0$ (ή την $f'(x) < 0$)
- Φτιάχνουμε πίνακα που περιλαμβάνει : το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες και το πρόσημο της f', τη μονοτονία, τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.
- Εφαρμόζουμε τις προτάσεις από τη θεωρία, γράφουμε τα διαστήματα μονοτονίας, τη θέση, την τιμή και το είδος του ακροτάτου.
- Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα και έχει μόνο ένα ακρότατο, τότε αυτό είναι ολικό.

Άσκηση 3 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x - x + 1, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι $\ln x - x + 1 \le 0$, για κάθε $x>0$.

γ) Αν $x>1$, να λυθεί η ανίσωση $\ln\left(x^2+3\right)-x^2<\ln 4x-4x+3$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}, x>0$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι τα $x\in(0,1)$.
Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'.
Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.
- Έχει μέγιστο το $f(1)=\ln 1-1+1=0$.

β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μεγίστου της συνάρτησης f μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω ανισότητα:

Ισχύει $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \le \ln 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \le 0$, για κάθε $x > 0$.

γ) Παρατηρώντας τα δύο μέλη της ανίσωσης διαπιστώνουμε ότι είναι της μορφής $f\left(x^2+3\right) < f(4x)$:

Πράγματι αν κάνουμε τις πράξεις στα δύο μέλη της ανίσωσης αυτή γίνεται:

$$\ln\left(x^2+3\right) - x^2 < \ln 4x - 4x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+3\right) - x^2 - 2 < \ln 4x - 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+3\right) - x^2 - 3 + 1 < \ln 4x - 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+3\right) - \left(x^2+3\right) + 1 < \ln 4x - 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right) < f(4x) \; (1)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1,+\infty\right)$, άρα για την ανίσωση **(1)** έχουμε $f\left(x^2+3\right) < f(4x) \Leftrightarrow x^2+3 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$ **(2)**.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 - 12 = 4$ και ρίζες $x = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$.

Το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	-	0	+	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης **(2)** είναι τα $x \in \left(-\infty,1\right) \cup \left(3,+\infty\right)$ **(3)**

Όμως εμείς θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση για $x > 1$ **(4)**

Έτσι αν συναληθεύσουμε τις **(3)** και **(4)** , προκύπτει ότι η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $x > 3$.

<u>Μεθοδολογία</u>

1. Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \ge k$ (ή $f(x) \le k$), όπου $k \in \mathbb{R}$, η οποία ισχύει για κάθε $x \in A$, όπου A είναι το πεδίο ορισμού της f, μπορούμε να:

   α) Μελετήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Αν η f έχει μέγιστο τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, τότε από τον ορισμό του μεγίστου προκύπτει ότι $f(x) \leq k$, για κάθε $x \in A$.

Αν η f έχει ελάχιστο τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, τότε από τον ορισμό του ελαχίστου προκύπτει ότι $f(x) \geq k$, για κάθε $x \in A$.

β) Μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας αποδεικνύουμε την ανισότητα.

Συγκεκριμένα,
αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε
$\alpha < x < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$,

ενώ

αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε
$\alpha < x < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(x) > f(\beta)$.

2. Αν έχουμε μια συνάρτηση f γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ και θέλουμε να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $f(g(x)) > f(h(x))$ **(1)**, η οποία δεν λύνεται με τις γνωστές, από προηγούμενες τάξεις, μεθόδους, τότε αν η f είναι γνησίως αύξουσα η ανίσωση **(1)** γίνεται $f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$, ενώ αν η f είναι γνησίως φθίνουσα η ανίσωση (1) γίνεται $f(g(x)) > f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$. Προφανώς οι ανισώσεις $g(x) > h(x)$ και $g(x) < h(x)$ είναι πιο απλές.

Άσκηση 4 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ αν η συνάρτηση έχει ακρότατο στο σημείο $x_0=-2$.

Λύση

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά η πρώτη παράγωγος f' τότε η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=x_0$, δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η f' έχουμε πιθανό ακρότατο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2+2\alpha x-1$.
Θα έχουμε κατ' αρχάς
$f'(-2)=0\Leftrightarrow 3\cdot(-2)^2+2\alpha\cdot(-2)-1=0\Leftrightarrow$
$12-4\alpha-1=0\Leftrightarrow 4\alpha=11\Leftrightarrow \alpha=\frac{11}{4}$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν για την τιμή αυτή $\alpha=\frac{11}{4}$ η πρώτη παράγωγος f' αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά.

Έχουμε ότι $f(x)=x^3+\frac{11}{4}x^2-x+1,\ x\in R$ και $f'(x)=3x^2+\frac{11}{2}x-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+11x-2=0\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=\frac{1}{6}$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		$1/6$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Άρα η f' αλλάζει πρόσημο , άρα η τιμή $\alpha=\frac{11}{4}$ είναι δεκτή.

Μεθοδολογία

Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f έχει ακρότατο στο σημείο x_0 και ζητείται ο υπολογισμός της τιμής μιας παραμέτρου που περιέχεται στον τύπο της f, τότε βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$ και στη συνέχεια από την ισότητα $f'(x_0)=0$ υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου. Έπειτα αντικαθιστούμε την τιμή της παραμέτρου στον τύπο της f και εξετάζουμε αν αλλάζει το πρόσημο της f' αριστερά και δεξιά του x_0. Έτσι επιβεβαιώνουμε την ύπαρξη του ακροτάτου σ' εκείνο το σημείο.

Άσκηση 5 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{\alpha x^2}{2} + 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Λύση</u>

Αφού θέλουμε η f να είναι γνησίως αύξουσα πρέπει

1°: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2°: Επίσης αν η f' μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και διατηρεί όμως το θετικό πρόσημο της εκατέρωθεν του $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε πάλι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Άρα πρέπει να ισχύει $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \alpha x + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αυτό συμβαίνει όταν η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 \leq 36 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{36} \Leftrightarrow |\alpha| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq \alpha \leq 6$.

- Αν $-6 < \alpha < 6$, τότε $\Delta < 0$, άρα $3x^2 - \alpha x + 3 > 0$ οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\alpha = -6$, τότε $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3\left(x^2 + 2x + 1\right) = 3\left(x+1\right)^2 > 0$, για κάθε $x \neq -1$, ενώ $f'(-1) = 0$.
  Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\alpha = 6$, τότε $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3\left(x-1\right)^2 > 0$, για κάθε $x \neq 1$, ενώ $f'(1) = 0$.
  Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν αναζητούμε τις τιμές κάποιας παραμέτρου που περιέχεται στον τύπο μιας συνάρτησης ώστε αυτή να είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) τότε εκμεταλλευόμαστε τη σχέση $f'(x) \geq 0$ (ή $f'(x) \leq 0$).

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές της παραμέτρου που βρήκαμε, στον τύπο της f και επαληθεύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα).

Άσκηση 6 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε τα ακρότατα να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

β) Αν x_0 είναι η θέση του ακροτάτου της f, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ να ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x)=2x-6,\ x\in\mathbb{R}$.
Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.
Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-6>0 \Leftrightarrow x>3$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε.	↗

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[3,+\infty\right)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,3\right]$.

Έχει ελάχιστο το $f(3)=3^2-6\cdot 3+\lambda=\lambda-9$.

β) Επειδή το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ ή $A\left(3,\lambda-9\right)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ έχουμε $\lambda-9=3\cdot 3-2 \Leftrightarrow \lambda=16$

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν ζητείται η τιμή μιας παραμέτρου ώστε το ακρότατο μιας συνάρτησης να ικανοποιεί κάποια ισότητα, τότε αρχικά βρίσκουμε το ακρότατο της συνάρτησης και στη συνέχεια εκμεταλλευόμενοι την ισότητα που επαληθεύει υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Άσκηση 7 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Απ' όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $25\mathrm{m}^2$, να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη περίμετρο.

<u>Λύση</u>

Πρέπει να βρούμε τις διαστάσεις του ζητούμενου ορθογωνίου. Έστω λοιπόν ότι αυτές είναι x και y.
Επειδή τα ορθογώνια έχουν εμβαδόν 25 m^2, η βοηθητική σχέση μεταξύ των διαστάσεων x και y είναι η $x \cdot y = 25 \Leftrightarrow y = \frac{25}{x}, x \neq 0$ **(1)** .
Το μέγεθος που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, γι' αυτό φτιάχνουμε μια ισότητα που συνδέει τα δύο μεγέθη που είναι η περίμετρος Π και η πλευρά x του ορθογωνίου.

Η περίμετρος δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 2y$, η οποία λόγω της **(1)** γίνεται
$\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{25}{x} = 2x + \frac{50}{x}$.

Γι' αυτήν τη συνάρτηση πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της το οποίο εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν οι δύο μεταβλητές x και y που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή του τύπου της. Επειδή οι μεταβλητές x και y παριστάνουν μήκος είναι $x > 0$ **(2)** και
$y > 0 \Leftrightarrow \frac{25}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ **(3)**.

Συναληθεύοντας τις σχέσεις **(2)** και **(3)** έχουμε $x > 0$.
Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\Pi(x)$ είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $\Pi(x) = 2x + \frac{50}{x}, x \in (0, +\infty)$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της $\Pi(x)$ που είναι $\Pi'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2}, x > 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 50}{x^2} = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25$ που ισχύει μόνο για $x = 5$, αφού $x > 0$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 50}{x^2} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 50 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{25} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 5.$$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $\Pi'(x) > 0$ είναι τα $x \in (5, +\infty)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της $\Pi(x)$, τις ρίζες της εξίσωσης $\Pi'(x)=0$ και το πρόσημο της $\Pi'(x)$. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\Pi(x)$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $\Pi(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		5		$+\infty$
$\Pi'(x)$		-	0	+	
$\Pi(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση $\Pi(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[5,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,5]$.
- Έχει ελάχιστο για $x=5m$.

Άρα η περίμετρος γίνεται ελάχιστη όταν οι διαστάσεις είναι $x=5m$ και $y=\frac{25}{5}=5m$, δηλαδή όταν το σχήμα είναι τετράγωνο.

<u>Μεθοδολογία</u>

Υπάρχουν ασκήσεις στις οποίες ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους ή η τιμή που πρέπει να παίρνει ένα μέγεθος ώστε ένα άλλο μέγεθος να μεγιστοποιείται ή να ελαχιστοποιείται. Αυτά λέγονται προβλήματα μέγιστης – ελάχιστης τιμής. Σε τέτοια προβλήματα:

α) Προσδιορίζουμε τα δύο μεγέθη και τα συμβολίζουμε με κατάλληλες μεταβλητές.

β) Γράφουμε την ισότητα που συνδέει τις δύο μεταβλητές. Αυτή αποτελεί τον τύπο μιας συνάρτησης.

γ) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές που παίρνει το ένα από τα δύο μεγέθη που αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή.

δ) Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα της.

ε) Απαντάμε με ακρίβεια στην ερώτηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη των ακροτάτων.

Άσκηση 8 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Το κόστος για την ημερήσια παραγωγή x εκατοντάδων κιλών ψωμιού σ' ένα αρτοποιείο είναι $K(x)=\frac{2}{5x}+x^2-6$ δεκάδες ευρώ. Αν η τιμή πώλησης του ψωμιού είναι 1,6 €/κιλό, να βρείτε την ημερήσια παραγωγή ψωμιού ώστε το κέρδος να γίνει μέγιστο, καθώς και το μέγιστο κέρδος.

<u>Λύση</u>

Η είσπραξη από την πώληση x εκατοντάδων κιλών ψωμιού δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=1,6\cdot x=\frac{8}{5}x$ δεκάδες ευρώ.

Το κέρδος από την πώληση x εκατοντάδων κιλών ψωμιού σε μία ημέρα δίνεται από τη συνάρτηση $P(x)=E(x)-K(x)=\frac{8}{5}x-\frac{2}{5x}-x^2+6$, δεκάδες ευρώ.

Γι' αυτήν τη συνάρτηση πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού, το οποίο εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x . Επειδή η μεταβλητή x παριστάνει βάρος είναι $x>0$
Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $P(x)$ είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $P(x)=\frac{8}{5}x-\frac{2}{5x}-x^2+6, x\in(0,+\infty)$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της $P(x)$ που είναι $P'(x)=\frac{8}{5}+\frac{2}{5x^2}-2x=\frac{-10x^3+8x^2+2}{5x^2}, x>0$.
Λύνουμε την εξίσωση

$$P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-10x^3+8x^2+2}{5x^2}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$-10x^3+8x^2+2=0\Leftrightarrow -5x^3+4x^2+1=0 \text{ (1)}$$

Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $x_1=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης και παραγοντοποιούμε το $1^{ο}$ μέλος της.

-5	4	0	1	ρ=1
	-5	-1	-1	
-5	-1	-1	0	

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

(1) $\Leftrightarrow (x-1)\cdot(-5x^2-x-1)=0\Leftrightarrow x-1=0$ ή

$-(5x^2+x+1)=0$

Δηλαδή $x=1$ ή $5x^2+x+1=0$ **(2)**

Όμως η εξίσωση **(2)** έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$ άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άρα η εξίσωση $P'(x) = 0$ έχει ρίζα το $x = 1$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $P'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-10x^3 + 8x^2 + 2}{5x^2} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -10x^3 + 8x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x^3 + 4x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(-5x^2 - 4x - 1) > 0$ **(3)**, σύμφωνα με το προηγούμενο σχήμα Horner.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $-5x^2 - 4x - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -19 < 0$ και $\alpha = -5 < 0$
- Κατασκευάζουμε τον πίνακα με το πρόσημο των παραγόντων και του γινομένου $(x-1)\cdot(-5x^2 - 4x - 1)$ και έχουμε:

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$		-	0	+	
$-5x^2 - 4x - 1$		-		-	
Γινόμενο		+	0	-	

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $(x-1)\cdot(-5x^2 - 4x - 1) > 0$ όταν $0 < x < 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $P'(x) > 0$ είναι τα $x \in (0,1)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της $P(x)$, τις ρίζες της εξίσωσης $P'(x) = 0$ και το πρόσημο της $P'(x)$. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $P(x)$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	-	
$P(x)$		$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση P(x):

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

- Έχει μέγιστο για $x=1$ το $P(1)=\frac{8}{5}1-\frac{2}{5\cdot 1}-1^2+6=\frac{6}{5}+5=6,2$.

Άρα το κέρδος γίνεται μέγιστο όταν το αρτοποιείο παράγει $x=100$ κιλά ψωμί. Το μέγιστο κέρδος είναι 62 ευρώ.

<u>Μεθοδολογία</u>

Υπάρχουν ασκήσεις στις οποίες ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους ή η τιμή που πρέπει να παίρνει ένα μέγεθος ώστε ένα άλλο μέγεθος να μεγιστοποιείται ή να ελαχιστοποιείται. Αυτά λέγονται προβλήματα μέγιστης – ελάχιστης τιμής. Σε τέτοια προβλήματα:

α) Προσδιορίζουμε τα δύο μεγέθη και τα συμβολίζουμε με κατάλληλες μεταβλητές.

β) Γράφουμε την ισότητα που συνδέει τις δύο μεταβλητές. Αυτή αποτελεί τον τύπο μιας συνάρτησης.

γ) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές που παίρνει το ένα από τα δύο μεγέθη που αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή.

δ) Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα της.

ε) Απαντάμε με ακρίβεια στην ερώτηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη των ακροτάτων.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0$ **(1)**.

Όμως είναι $(x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα η **(1)** $\Leftrightarrow x^2-2x>0$ **(2)**

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-2x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		+	0	-	0	+	

Έτσι διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση **(2)** άρα και η **(1)** αληθεύει για $x<0$ ή $x>2$.
Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'.

Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	○	-	‖	-	○	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	‖	↘	Τ.Ε.	↗	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$

  Έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0+\dfrac{1}{0-1}=-1$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=2+\dfrac{1}{2-1}=3$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Γενικά ισχύουν τα ίδια που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα.
Επιπλέον επισημαίνουμε ότι:

1. Στον πίνακα μονοτονίας χρησιμοποιήσαμε διπλή γραμμή στο $x_0=1$, για να δείξουμε ότι αυτό δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Όταν γράφουμε τα διαστήματα μονοτονίας, αυτά πρέπει να είναι κλειστά, δηλ. της μορφής $[\alpha,\beta]$, εκτός αν κάποιο από τα άκρα των διαστημάτων είναι $-\infty$ ή $+\infty$ ή δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σημείο $x_0=1$.

Άσκηση 2 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=(x-3)\cdot e^x-\frac{x^2}{2}+2x$

β) $g(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+x$

<u>Λύση</u>

α) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι

$f'(x)=(x-3)'\cdot e^x+(x-3)\cdot(e^x)'-x+2=$

$e^x+(x-3)\cdot e^x-x+2=(x-2)\cdot e^x-(x-2)=$

$=(x-2)\cdot(e^x-1),\ x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(e^x-1)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $e^x-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=2$ ή $e^x=1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(e^x-1)>0$.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα με το πρόσημο των παραγόντων και του γινομένου $(x-2)\cdot(e^x-1)$ και έχουμε:

x	-∞	0		2		+∞
$x-2$	-		-	0	+	
e^x-1	-	0	+		+	
Γινόμενο	+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $(x-2)\cdot(e^x-1)>0$ όταν $x<0$ ή $x>2$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι τα $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f και τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=(0-3)\cdot e^0-\dfrac{0^2}{2}+2\cdot 0=-3$ και τοπικό ελάχιστο το

  $f(2)=(2-3)\cdot e^2-\dfrac{2^2}{2}+2\cdot 2=-e^2-2+4=2-e^2$

β) Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
Είναι $x>0$. Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της g που είναι

$$g'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\cdot\ln x+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot(\ln x)'-\left(\frac{x^2}{4}\right)'+(x)'=$$

$$=(x-1)\cdot\ln x+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}+1=$$

$$(x-1)\cdot\ln x+\frac{x}{2}-1-\frac{x}{2}+1=(x-1)\cdot\ln x,\ x\in(0,+\infty).$$

Λύνουμε την εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\cdot\ln x=0\Leftrightarrow x-1=0$ ή $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=1$ (δεκτή γιατί $x\in(0,+\infty)$)

Άρα το $x=1$ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $g'(x)=0$.
Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $g'(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x>0$.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- $\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα με το πρόσημο των παραγόντων και του γινομένου $(x-1)\cdot\ln x$ και έχουμε:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	○	+	
$\ln x$		-	○	+	
Γινόμενο		+	○	+	

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι $(x-1)\cdot\ln x>0$ όταν $x>0$ και $x\neq 1$.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $g'(x)>0$ είναι τα $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.
Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της g, τις ρίζες της εξίσωσης $g'(x)=0$ και το πρόσημο της g'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της g.
Η μονοτονία της g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	○	+	
$g(x)$		↗		↗	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση g :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
- Δεν έχει τοπικά ακρότατα αφού δεν αλλάζει το πρόσημο της g' εκατέρωθεν του σημείου $x_0=1$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Στην περίπτωση β) βλέπουμε ότι η παράγωγος διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα (α,x_0) και (x_0,β) όπου x_0 η ρίζα της παραγώγου. Σ' αυτή την περίπτωση η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο x_0 και είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α,β).

Άσκηση 3 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x},\ x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1}\geq x,\ x>0$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\left(0,+\infty\right)$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι

$$f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)}{x^2},\ x>0.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(x-1\right)}{x^2}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}e^x\left(x-1\right)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(x-1\right)}{x^2}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}e^x\left(x-1\right)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι τα $x\in\left(1,+\infty\right)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f(1)=\frac{e}{1}=e$.

β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ελάχιστου της συνάρτησης f μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω ανισότητα:

Ισχύει $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq e \overset{x>0}{\Leftrightarrow} e^x \geq e \cdot x \Leftrightarrow \frac{e^x}{e} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x > 0$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Όταν δίνεται μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, και ζητείται να αποδειχτεί μια ανισότητα της μορφής $g(x) \leq h(x)$ ή $g(x) \geq h(x)$, για κάθε $x \in A$, τότε μελετάμε τα ακρότατα της f και αν αυτή έχει μέγιστο (ελάχιστο) το $k \in \mathbb{R}$, τότε από τον ορισμό του ακροτάτου προκύπτει $f(x) \leq k$ (ή $f(x) \geq k$) για κάθε $x \in A$.

Στη συνέχεια μπορούμε να:

Α΄ τρόπος: κάνουμε πράξεις στις ανισότητες $f(x) \leq k$(ή $f(x) \geq k$) μέχρι να καταλήξουμε ισοδύναμα στη ζητούμενη ανισότητα $g(x) \leq h(x)$ ή $g(x) \geq h(x)$, για κάθε $x \in A$ ή

Β΄ τρόπος: κάνουμε πράξεις στις ανισότητες $g(x) \leq h(x)$ ή $g(x) \geq h(x)$ και να καταλήξουμε ισοδύναμα σε μια από τις ανισότητες $f(x) \leq k$(ή $f(x) \geq k$) που ισχύουν για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 4 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\kappa x^3}{3}+x^2+\kappa^2 x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=-1$ να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή και το είδος όλων των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\kappa x^2+2x+\kappa^2,\ x\in\mathbb{R}$.
Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ με $x_0\in(\alpha,\beta)$ και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά η πρώτη παράγωγος f' τότε η f παρουσιάζει ακρότατο για $x=x_0$, δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η f' έχουμε πιθανό ακρότατο.

Θα έχουμε κατ' αρχάς

$f'(-1)=0\Leftrightarrow \kappa(-1)^2+2\cdot(-1)+\kappa^2=0\Leftrightarrow \kappa^2+\kappa-2=0$ η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=1+8=9$

και ρίζες $\kappa=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$.

Για κάθε μία από τις τιμές του κ που βρέθηκαν θα κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων για τη συνάρτηση f.

- Αν $\kappa=1$, τότε $f'(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow (x+1)^2>0$, για κάθε $x\neq -1$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία της f .
Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.
Άρα η τιμή $\kappa=1$ δεν είναι δεκτή.

- Αν $\kappa=-2$, τότε $f'(x)=-2x^2+2x+4,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=1+8=9$ και ρίζες $x=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow -2x^2+2x+4>0$ **(1)**.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2+2x+4$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-2x^2+2x+4$		-	0	+	0	-	

Έτσι διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $-1<x<2$.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι τα $x\in(-1,2)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[2,+\infty)$.
- Έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=\dfrac{-2\cdot(-1)^3}{3}+(-1)^2+(-2)^2\cdot(-1)-3=\dfrac{2}{3}+1-4-3=-\dfrac{16}{3}$

  και τοπικό μέγιστο το $f(2)=\dfrac{-2\cdot 2^3}{3}+2^2+(-2)^2\cdot 2-3=-\dfrac{16}{3}+4+8-3=\dfrac{11}{3}$.

Άρα η τιμή $\kappa=-2$ είναι δεκτή.

Μεθοδολογία

Αν αναζητούμε τις τιμές κάποιας παραμέτρου που περιέχεται στον τύπο μιας συνάρτησης ώστε αυτή να έχει τοπικό ελάχιστο (ή τοπικό μέγιστο) στο σημείο x_0, εκμεταλλευόμαστε τη σχέση $f'(x_0)=0$.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τιμές της παραμέτρου που βρήκαμε, στον τύπο της f και μελετάμε τα ακρότατα της. Δεχόμαστε την τιμή της παραμέτρου για την οποία η συνάρτηση εμφανίζει το είδος του ακροτάτου που ζητείται, ενώ απορρίπτουμε την τιμή για την οποία η συνάρτηση έχει ακρότατο διαφορετικού είδους ή δεν έχει ακρότατα.

Άσκηση 5 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε τα ακρότατα να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{3(\lambda - 1)}{2}x^2 - 3\lambda x, \lambda > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν x_1 η θέση του τοπικού ελαχίστου και x_2 η θέση του τοπικού μεγίστου, να βρείτε την τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $f(x_1) = -f(x_2)$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x) = 3x^2 - 3(\lambda - 1)x - 3\lambda, x \in \mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3(\lambda - 1)x - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0$.
η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ και ρίζες

$$x = \frac{\lambda - 1 \pm (\lambda + 1)}{2} = \begin{cases} \frac{\lambda - 1 + \lambda + 1}{2} = \lambda \\ \frac{\lambda - 1 - \lambda - 1}{2} = -1 \end{cases}.$$

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3(\lambda - 1)x - 3\lambda > 0 \Leftrightarrow x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda > 0$ **(1)**.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

(*Για τη σωστή τοποθέτηση των ριζών* -1 *και* λ *πάνω στον άξονα παρατηρούμε ότι είναι* $\lambda > 0 > -1$)

x	$-\infty$		-1		λ		$+\infty$
$x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda$		+	0	-	0	+	

Έτσι διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $x < -1$ ή $x > \lambda$.
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x) > 0$ είναι τα $x \in (-\infty, -1) \cup (\lambda, +\infty)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ και το πρόσημο της f'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		-1		λ		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι, η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[\lambda,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\lambda]$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=(-1)^3-\dfrac{3(\lambda-1)}{2}(-1)^2-3\lambda\cdot(-1)=$

  $=-1-\dfrac{3(\lambda-1)}{2}+3\lambda=$

  $=\dfrac{-2-3\lambda+3+6\lambda}{2}=\dfrac{3\lambda+1}{2}$ και τοπικό ελάχιστο το

  $f(\lambda)=\lambda^3-\dfrac{3(\lambda-1)}{2}\cdot\lambda^2-3\lambda\cdot\lambda=$

  $=\lambda^3-\dfrac{3(\lambda-1)\cdot\lambda^2}{2}-3\lambda^2=$

  $=\dfrac{2\lambda^3-3\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda^2}{2}=\dfrac{-\lambda^3-3\lambda^2}{2}$.

β) Σύμφωνα με τη μελέτη ακροτάτων της συνάρτησης f στο α) ερώτημα η θέση τοπικού ελαχίστου είναι $x_1=\lambda$ και η θέση τοπικού μεγίστου είναι $x_2=-1$.

Έτσι έχουμε $f(x_1)=-f(x_2)\Leftrightarrow f(\lambda)=-f(-1)\Leftrightarrow \dfrac{-\lambda^3-3\lambda^2}{2}=-\dfrac{3\lambda+1}{2}\Leftrightarrow$

$\lambda^3+3\lambda^2=3\lambda+1\Leftrightarrow \lambda^3-1+3\lambda^2-3\lambda=0\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)\cdot(\lambda^2+\lambda+1)+3\lambda\cdot(\lambda-1)=0\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)\cdot(\lambda^2+4\lambda+1)=0\Leftrightarrow \lambda-1=0$ ή $\lambda^2+4\lambda+1=0$.

Άρα είναι $\lambda=1$ ενώ η εξίσωση $\lambda^2+4\lambda+1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=16-4=12$ και ρίζες

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3} < 0 \\ \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

οι οποίες απορρίπτονται αφού είναι $\lambda > 0$.

Τελικά δεκτή λύση είναι η $\lambda = 1$.

Μεθοδολογία

Όταν ζητείται η τιμή μιας παραμέτρου ώστε το ακρότατο μιας συνάρτησης να ικανοποιεί κάποια ισότητα, τότε αρχικά βρίσκουμε το ακρότατο της συνάρτησης και στη συνέχεια εκμεταλλευόμενοι την ισότητα που επαληθεύει υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Άσκηση 6 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε «το μέγιστο να είναι ελάχιστο»)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x+\lambda,\ \lambda>0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστο.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το μέγιστο της f να παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της f που είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\lambda=\frac{1-\lambda x}{x},\ x>0$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda x}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-\lambda x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda}$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-\lambda x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{\lambda}$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι τα $x\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της f, τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ και το πρόσημο της f'.

Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0		$\frac{1}{\lambda}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{\lambda}\right]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$.
- Έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\ln\frac{1}{\lambda}-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}+\lambda=-\ln\lambda-1+\lambda$.

β) Θεωρούμε ότι το μέγιστο της f είναι μια συνάρτηση ως προς λ την οποία θα μελετήσουμε ως προς τα ακρότατα.

Έτσι θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda)=-\ln\lambda-1+\lambda,\ \lambda>0$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της g που είναι $g'(\lambda)=-\dfrac{1}{\lambda}+1=\dfrac{\lambda-1}{\lambda},\ \lambda>0$.

Λύνουμε την εξίσωση $g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda-1}{\lambda}=0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $g'(\lambda)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda-1}{\lambda}>0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda-1>0 \Leftrightarrow \lambda>1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $g'(\lambda)>0$ είναι τα $\lambda\in(1,+\infty)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της g, τις ρίζες της εξίσωσης $g'(\lambda)=0$ και το πρόσημο της g'. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της g.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$g'(\lambda)$		-	0	+	
$g(\lambda)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση g :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- Έχει ελάχιστο για $\lambda=1$.

<u>Μεθοδολογία</u>

Αν ο τύπος μιας συνάρτησης f περιέχει μια παράμετρο λ και ζητάμε την τιμή της παραμέτρου ώστε το μέγιστο της συνάρτησης να παίρνει την ελάχιστη τιμή του, τότε:

α) Αρχικά μελετάμε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατά της.

β) Βρίσκουμε το μέγιστο της f, το οποίο περιέχει την παράμετρο λ.

γ) Θεωρούμε μια άλλη συνάρτηση g που ισούται με τη μέγιστη τιμή της f και έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την παράμετρο λ.

δ) Κάνουμε μελέτη ακροτάτων της συνάρτησης g και υπολογίζουμε την τιμή του λ.

Άσκηση 7 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Για την πραγματοποίηση μιας εκδρομής απαιτείται η συμμετοχή τουλάχιστον 30 ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 30 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 300€ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5€. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε το ταξιδιωτικό γραφείο να έχει τα περισσότερα έσοδα; Ποιο θα είναι το αντίτιμο για κάθε άτομο σ' αυτή την περίπτωση;

<u>Λύση</u>

Έστω ότι είναι x τα άτομα που δηλώνουν συμμετοχή. Προφανώς ισχύει $x \geq 30$.
Κάθε άτομο που συμμετέχει θα πληρώσει $300-(x-30)\cdot 5$ ευρώ.

Άρα η συνάρτηση που παριστάνει τα έσοδα του ταξιδιωτικού γραφείου δίνεται από τον τύπο
$E(x)=x\cdot(300-(x-30)\cdot 5)=x\cdot(300-5x+150)=450x-5x^2$.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, σύμφωνα με τα παραπάνω είναι το $[30,+\infty)$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $E(x)=450x-5x^2, x\in[30,+\infty)$.
Βρίσκουμε την παράγωγο της $E(x)$ που είναι $E'(x)=450-10x, x\geq 30$.
Λύνουμε την εξίσωση $E'(x)=0 \Leftrightarrow 450-10x=0 \Leftrightarrow x=45$.
Έπειτα λύνουμε την ανίσωση $E'(x)>0 \Leftrightarrow 450-10x>0 \Leftrightarrow x<45$. Όμως είναι $x\geq 30$
Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $E'(x)>0$ είναι τα $x\in[30,45)$.

Στη συνέχεια φτιάχνουμε πίνακα που περιέχει το πεδίο ορισμού της E(x), τις ρίζες της εξίσωσης $E'(x)=0$ και το πρόσημο της
$E'(x)$. Τέλος στον ίδιο πίνακα σημειώνουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $E(x)$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $E(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	30		45		$+\infty$
$E'(x)$		+	0	-	
$E(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Τέλος γράφουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα και είναι ότι η συνάρτηση $E(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[30,45]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[45,+\infty)$.
- Έχει μέγιστο για $x=45$.

Άρα το ταξιδιωτικό γραφείο έχει τα περισσότερα έσοδα όταν συμμετέχουν 45 άτομα. Σ' αυτή την περίπτωση κάθε άτομο θα πληρώσει $300-\left(45-30\right)\cdot 5=300-75=225$ ευρώ.

<u>Μεθοδολογία</u>

Υπάρχουν ασκήσεις στις οποίες ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους ή η τιμή που πρέπει να παίρνει ένα μέγεθος ώστε ένα άλλο μέγεθος να μεγιστοποιείται ή να ελαχιστοποιείται. Αυτά λέγονται προβλήματα μέγιστης – ελάχιστης τιμής. Σε τέτοια προβλήματα:

α) Προσδιορίζουμε τα δύο μεγέθη και τα συμβολίζουμε με κατάλληλες μεταβλητές.

β) Γράφουμε την ισότητα που συνδέει τις δύο μεταβλητές. Αυτή αποτελεί τον τύπο μιας συνάρτησης.

γ) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές που παίρνει το ένα από τα δύο μεγέθη που αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή.

δ) Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα της.

ε) Απαντάμε με ακρίβεια στην ερώτηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη των ακροτάτων.

Ημερομηνία τροποποίησης: 8/11/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$

β) $g(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 3$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18,\ x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1 = -2$ και $x_2 = 3$.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 18 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0$ **(1)**

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 6$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	0	-	0	+	

Άρα η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $x < -2$ ή $x > 3$ και το ίδιο ισχύει και για την $f'(x) > 0$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-2\right]$ και $\left[3,+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-2,3\right]$
- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=\left(-2\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\left(-2\right)^2-18\cdot\left(-2\right)+2=-8-6+36+2=24$ και τοπικό ελάχιστο το $f(3)=3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2-18\cdot 3+2=27-\frac{27}{2}-54+2=-25-\frac{27}{2}=-\frac{77}{2}$.

β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=-x^2+4x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1=1$ και $x_2=3$.
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3>0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+4x-3$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞		1		3		+∞
$-x^2+4x-3$		-	0	+	0	-	

Άρα η ανίσωση $g'(x)>0$ αληθεύει για $1<x<3$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞		1		3		+∞
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,3\right]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,1\right]$ και $\left[3,+\infty\right)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο το $g(3)=-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3-3=-9+18-12=-3$ και τοπικό ελάχιστο το $g(1)=-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1-3=-\frac{1}{3}-4=-\frac{13}{3}$

Άσκηση 2 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα:

α) $f(x) = -2x^3 - 4x + 5$

β) $g(x) = 5x^3 + 15x^2 + 15x - 4$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = -6x^2 - 4 = -\left(6x^2 + 4\right) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και δεν έχει ακρότατα.

β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(x) = 15x^2 + 30x + 15,\ x \in \mathbb{R}$.

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2 + 30x + 15 = 0 \Leftrightarrow 15\left(x+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 15x^2 + 30x + 15 > 0 \Leftrightarrow 15\left(x+1\right)^2 > 0$ που ισχύει για κάθε $x \neq -1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$		↗		↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+4x-1$

β) $g(x)=-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}+2x^2-8x-2$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=x^3-3x^2+4,\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4=0$ **(1)**

  Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner η εξίσωση **(1)** γίνεται:

  (1) $\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ή $x^2-4x+4=0$.
  Δηλαδή $x=-1$ ή $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$.

1	-3	0	4	ρ=-1
	-1	4	-4	
1	-4	4	0	

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4>0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-2)^2>0$ **(2)**

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και το πρόσημο του γινομένου:

- $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

- $(x-2)^2>0$ για κάθε $x\neq 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
x^2-4x+4		+		+	0	+	
Γινόμενο		-	0	+	0	+	

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗		↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$
- Έχει ελάχιστο το $f(-1)=\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3+4\cdot(-1)-1=\frac{1}{4}+1-4-1=-\frac{15}{4}$.

β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=-x^3+2x^2+4x-8, x\in\mathbb{R}$.

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+2x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow -x^2(x-2)+4(x-2)=0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x-2)\cdot(4-x^2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $4-x^2=0$
  Δηλαδή $x=2$ ή $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

  Τελικά η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x=2$ (διπλή) ή $x=-2$.

- $g'(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(4-x^2)>0 \Leftrightarrow -(x-2)^2\cdot(x+2)>0$ (1)

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και το πρόσημο του γινομένου:

- $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$
- $-(x-2)^2<0$ για κάθε $x\neq 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-(x-2)^2$		$-$		$-$	0	$-$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$-$	

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	-	
$g(x)$		↗	Τ.Μ.	↘		↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,+\infty)$

Έχει μέγιστο το $g(-2)=-\dfrac{(-2)^4}{4}+\dfrac{2\cdot(-2)^3}{3}+2\cdot(-2)^2-8\cdot(-2)-2=$

$$=-4-\frac{16}{3}+8+16-2=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}.$$

Άσκηση 4 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+2$

β) $g(x)=-3e^{-x}-x$

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=e^{2x}\cdot(2x)'-2e^{x}=2e^{2x}-2e^{x}=2e^{x}\cdot(e^{x}-1),\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x}\cdot(e^{x}-1)=0\overset{e^{x}>0}{\Leftrightarrow}e^{x}-1=0\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=0$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x}\cdot(e^{x}-1)>0\overset{e^{x}>0}{\Leftrightarrow}e^{x}-1>0\Leftrightarrow e^{x}>1\Leftrightarrow$
  $e^{x}>e^{0}\Leftrightarrow x>0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

- Έχει ελάχιστο το $f(0)=e^{0}-2e^{0}+2=1-2+2=1$.

β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=-3e^{-x}\cdot(-x)'-1=3e^{-x}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

- $g'(x)=0\Leftrightarrow 3e^{-x}-1=0\Leftrightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -x=\ln\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow -x=-\ln 3\Leftrightarrow x=\ln 3$.

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \ln e^{-x} > \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -x > \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow -x > -\ln 3 \Leftrightarrow x < \ln 3$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		ln3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \ln 3]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\ln 3, +\infty)$.

- Έχει μέγιστο το $g(\ln 3) = -3e^{-\ln 3} - \ln 3 = -3\cdot\frac{1}{3} - \ln 3 = -1 - \ln 3$.

Άσκηση 5 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$

β) $g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $e^x \neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{\left(x^3\right)'\cdot e^x - x^3\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{3x^2\cdot e^x - x^3\cdot e^x}{e^{2x}}=$

$=\dfrac{x^2\cdot e^x\cdot(3-x)}{e^{2x}}=\dfrac{x^2\cdot(3-x)}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2\cdot(3-x)}{e^x}=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x^2\cdot(3-x)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ή $3-x=0$

  Δηλαδή $x=0$ (διπλή) ή $x=3$.

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2\cdot(3-x)}{e^x}>0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x^2\cdot(3-x)>0$ **(1)**

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και το πρόσημο του γινομένου:

- $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$
- $x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$

x	$-\infty$	0		3		$+\infty$
$3-x$	+		+	0	-	
x^2	+	0	+		+	
Γινόμενο	+	0	+	0	-	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης **(1)** και της $f'(x)>0$ είναι $x<3$ και $x\neq 0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$		↗		↗	Ο.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,3]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$

Έχει μέγιστο το $f(3)=\dfrac{3^3}{e^3}=\dfrac{27}{e^3}$.

β) Είναι $x>0$ και $\ln x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.
Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=\dfrac{\left(x^2\right)'\cdot\ln x-x^2\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=\dfrac{2x\ln x-x^2\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=$

$$=\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}=\frac{x\cdot(2\ln x-1)}{\ln^2 x},x\in A.$$

- $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(2\ln x-1)}{\ln^2 x}=0 \overset{\ln^2 x>0}{\Leftrightarrow} x\cdot(2\ln x-1)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

  $\Leftrightarrow 2\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

- $g'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(2\ln x-1)}{\ln^2 x}>0 \overset{\ln^2 x>0}{\Leftrightarrow} x\cdot(2\ln x-1)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

  $\Leftrightarrow 2\ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	‖	-	○	+	
$g(x)$	‖	↘	‖	↘	Ο.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt{e}, +\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(0,1)$ και $\left(1, \sqrt{e}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $g\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{e}\right)^2}{\ln\sqrt{e}} = \dfrac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$.

Άσκηση 6 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $x > 0$ (1) και $x \neq 0$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $x > 0$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}, \; x > 0$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < e$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

- Έχει μέγιστο το $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$.

β) Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = e$, θα ισχύει

$f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$.

Άσκηση 7 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + x^2 + \lambda x - 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3\kappa x^2 + 2x + \lambda,\ x \in \mathbb{R}$.
Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά η πρώτη παράγωγος f' τότε η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$, δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η f' έχουμε πιθανό ακρότατο.

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$, θα έχουμε κατ’αρχάς

- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + \lambda = 0 \Leftrightarrow 3\kappa - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 3\kappa + \lambda = 2$ **(1)** και
- $f'(3) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 27\kappa + 6 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 27\kappa + \lambda = -6$ **(2)**

Αφαιρώντας κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** έχουμε: $24\kappa = -8 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{3}$ **(3)**

Αντικαθιστώντας την **(3)** στην **(1)** έχουμε $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \lambda = 2 \Leftrightarrow -1 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν για τις τιμές αυτές των κ, λ η πρώτη παράγωγος f' αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά των τιμών που μηδενίζεται.

Για τις τιμές αυτές των κ, λ έχουμε ότι $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ και

$f'(x) = -x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

Άρα η f' αλλάζει πρόσημο, άρα και οι τιμές $\kappa = -\frac{1}{3}, \lambda = 3$ είναι δεκτές.

Άσκηση 8 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \lambda^2 x - 3,\ x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -x^2 + 2x - \lambda^2,\ x \in \mathbb{R}$.

Αφού θέλουμε η f να είναι γνησίως φθίνουσα πρέπει

1^o: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - \lambda^2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2^o: Επίσης αν η f' μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και διατηρεί όμως το αρνητικό πρόσημο της εκατέρωθεν του $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε πάλι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα πρέπει να ισχύει $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - \lambda^2 \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα είναι $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda^2 \le 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} \ge \sqrt{1} \Leftrightarrow |\lambda| \ge 1 \Leftrightarrow \lambda \le -1$ ή $\lambda \ge 1$.

- Αν $\lambda < -1$ ή $\lambda > 1$, τότε $\Delta < 0$, άρα $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = -1$, τότε $f'(x) = -x^2 + 2x - 1 = -\left(x^2 - 2x + 1\right) = -\left(x - 1\right)^2 < 0$, για κάθε $x \ne 1$, ενώ $f'(1) = 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = 1$, τότε $f'(x) = -x^2 + 2x - 1 = -\left(x^2 - 2x + 1\right) = -\left(x - 1\right)^2 < 0$, για κάθε $x \ne 1$, ενώ $f'(1) = 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $\lambda \in [-1, 1]$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

β) $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x+2}$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $x^2+4\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{(x)'\cdot\left(x^2+4\right)-x\cdot\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{x^2+4-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0\overset{\left(x^2+4\right)^2>0}{\Leftrightarrow}4-x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}>0\overset{\left(x^2+4\right)^2>0}{\Leftrightarrow}4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x^2}<\sqrt{4}\Leftrightarrow|x|<2\Leftrightarrow-2<x<2$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,2]$

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(2)=\frac{2}{2^2+4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=\frac{-2}{(-2)^2+4}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$.

β) Είναι $x^2-2x+2\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta=4-8=-4<0$.
Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=\frac{(2x)'\cdot\left(x^2-2x+2\right)-2x\cdot\left(x^2-2x+2\right)'}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$

$$=\frac{2\left(x^2-2x+2\right)-2x\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-4x+4-4x^2+4x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\frac{-2x^2+4}{\left(x^2-2x+2\right)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

- $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+4}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=0\overset{\left(x^2-2x+2\right)^2>0}{\Leftrightarrow}4-2x^2=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$.

- $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-2x^2+4}{\left(x^2-2x+2\right)^2}>0\overset{\left(x^2-2x+2\right)^2>0}{\Leftrightarrow}4-2x^2>0\Leftrightarrow x^2<2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x^2}<\sqrt{2}\Leftrightarrow|x|<\sqrt{2}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$ και $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

Έχει τοπικό μέγιστο το $g\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=$$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{2}=\sqrt{2}+1$ και τοπικό ελάχιστο το

$$g\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)+2}=\frac{-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{-\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{-\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=$$

$$\frac{-2\sqrt{2}+2}{2}=\frac{2(-\sqrt{2}+1)}{2}=-\sqrt{2}+1$$

Άσκηση 2 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων πολυωνυμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-9}$.

β) $g(x)=x+\dfrac{16}{x}$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 9 \Leftrightarrow x\neq 3$ και $x\neq -3$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{(x-5)'\cdot(x^2-9)-(x-5)\cdot(x^2-9)'}{(x^2-9)^2}=$

$$=\frac{x^2-9-2x\cdot(x-5)}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2-9-2x^2+10x}{(x^2-9)^2}=\frac{-x^2+10x-9}{(x^2-9)^2},x\in A.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+10x-9}{(x^2-9)^2}=0 \overset{(x^2-9)^2>0}{\Leftrightarrow} -x^2+10x-9=0\Leftrightarrow x^2-10x+9=0$ η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1=1$ ή $x_2=9$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+10x-9}{(x^2-9)^2}>0 \overset{(x^2-9)^2>0}{\Leftrightarrow} -x^2+10x-9>0$ με $x\neq\pm 3$ **(1)**

Το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+10x-9$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$-x^2+10x-9$		-	0	+	0	-	

Άρα η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $1<x<9$ και $x\neq 3$ και το ίδιο ισχύει και για την $f'(x)>0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		1		3		9		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	‖	+	0	-	
$f(x)$		↘	‖	↘	Τ.Ε.	↗	‖	↗	Τ.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[1,3)$ και $(3,9]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3),(-3,1]$ και $[9,+\infty)$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(9)=\dfrac{9-5}{9^2-9}=\dfrac{4}{72}=\dfrac{1}{18}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)=\dfrac{1-5}{1^2-9}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$.

β) Είναι $x\neq 0$.
Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(x)=1-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{x^2-16}{x^2},\ x\in\mathbb{R}^*$.

- $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-16}{x^2}=0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2-16=0\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$

- $g'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-16}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2-16>0\Leftrightarrow x^2>16\Leftrightarrow$

- $\Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{16}\Leftrightarrow |x|>4\Leftrightarrow x>4$ ή $x<-4$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞		-4		0		4		+∞
$g'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$g(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	‖	↘	Τ.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-4]$ και $[4,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-4,0)$ και $(0,4]$.

Έχει τοπικό μέγιστο το $g(-4)=-4+\dfrac{16}{-4}=-8$ και τοπικό ελάχιστο το $g(4)=4+\dfrac{16}{4}=8$.

Άσκηση 3 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=x\cdot\ln x$

β) $g(x)=\ln^2 x$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $x>0$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\ x>0$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.
- $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+1>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

β) Είναι $x>0$.
Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της g είναι $g'(x) = 2\ln x \cdot (\ln x)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}, x > 0$.

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

- Έχει ελάχιστο το $g(1) = \ln^2 1 = 0$.

Άσκηση 4 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-x}-x^2+x+1$.

<u>Λύση</u>

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=e^{x^2-x}\cdot\left(x^2-x\right)'-2x+1=$

$=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)-(2x-1)=(2x-1)\cdot\left(e^{x^2-x}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)\cdot\left(e^{x^2-x}-1\right)=0\Leftrightarrow 2x-1=0$ ή $e^{x^2-x}-1=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $e^{x^2-x}=1$ που ισχύει για $x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow(2x-1)\cdot\left(e^{x^2-x}-1\right)>0$.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και το πρόσημο του γινομένου:

- $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

- $e^{x^2-x}-1>0\Leftrightarrow e^{x^2-x}>1\Leftrightarrow e^{x^2-x}>e^0\Leftrightarrow x^2-x>0$ **(1)**

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x<0$ ή $x>1$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		-		-	0	+		+	
$e^{x^2-x}-1$		+	0	-		-	0	+	
Γινόμενο		-	0	+	0	-	0	+	

Άρα η ανίσωση $f'(x)>0$ αληθεύει για $0<x<\frac{1}{2}$ ή $x>1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και $[1,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=e^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=e^{-\frac{1}{4}}+\frac{5}{4}$

  και τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=e^{0^2-0}-0^2+0+1=2$ και $f(1)=e^{1^2-1}-1^2+1+1=2$.

Άσκηση 5 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\left(2-\ln x\right)+\frac{x^2}{4}+x$$

<u>Λύση</u>

Είναι $x>0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\left(0,+\infty\right)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)'\cdot\left(2-\ln x\right)+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\left(2-\ln x\right)'+\left(\frac{x^2}{4}\right)'+\left(x\right)'=$

$$=\left(x+1\right)\cdot\left(2-\ln x\right)+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{2}+1=$$

$$=\left(x+1\right)\cdot\left(2-\ln x\right)-\frac{x}{2}-1+\frac{x}{2}+1=\left(x+1\right)\cdot\left(2-\ln x\right),\ x>0\,.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\cdot\left(2-\ln x\right)=0\overset{x+1>0}{\Leftrightarrow}2-\ln x=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\cdot\left(2-\ln x\right)>0\overset{x+1>0}{\Leftrightarrow}2-\ln x>0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\ln x<2\Leftrightarrow\ln x<\ln e^2\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<e^2$.

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,e^2\right]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^2,+\infty\right)$.

- Έχει μέγιστο το $f\left(e^2\right)=\left(\dfrac{\left(e^2\right)^2}{2}+e^2\right)\cdot\left(2-\ln e^2\right)+\dfrac{\left(e^2\right)^2}{4}+e^2=$

$=\left(\dfrac{e^4}{2}+e^2\right)\cdot\left(2-2\right)+\dfrac{e^4}{4}+e^2=\dfrac{e^4}{4}+e^2$.

Άσκηση 6 (Εύρεση μονοτονίας – ακρότατων εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{3x-\ln\left(e^x-2\right)}{2}$.

<u>Λύση</u>

Είναι $e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow \ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\left(\ln 2,+\infty\right)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[(3x)'-\left(\ln\left(e^x-2\right)\right)'\right]=\dfrac{1}{2}\left[3-\dfrac{1}{e^x-2}\cdot\left(e^x-2\right)'\right]=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[3-\frac{e^x}{e^x-2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{3e^x-6-e^x}{e^x-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\left(e^x-3\right)}{e^x-2}=\frac{e^x-3}{e^x-2},\ x>\ln 2.$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-3}{e^x-2}=0 \overset{e^x-2>0}{\Leftrightarrow} e^x-3=0 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$

  (δεκτή, αφού $3>2 \Leftrightarrow \ln 3>\ln 2$)

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-3}{e^x-2}>0 \overset{e^x-2>0}{\Leftrightarrow} e^x-3>0 \Leftrightarrow e^x>3 \Leftrightarrow \ln e^x>\ln 3 \Leftrightarrow x>\ln 3$.

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\ln 3,+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\ln 2,\ln 3\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f\left(\ln 3\right)=\dfrac{3\ln 3-\ln\left(e^{\ln 3}-2\right)}{2}=\dfrac{3\ln 3-\ln(3-2)}{2}=\dfrac{3\ln 3}{2}$.

Άσκηση 7 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 2x^2 - \kappa^2 x + 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Αν η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή και το είδος όλων των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3\kappa x^2 + 4x - \kappa^2,\ x \in \mathbb{R}$.
Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά η πρώτη παράγωγος f' τότε η f παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$, δηλαδή εκεί που μηδενίζεται η f' έχουμε πιθανό ακρότατο.

Επειδή η f έχει ακρότατο στο σημείο $x_1 = 1$, θα έχουμε κατ'αρχάς
$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 3\kappa - 4 = 0$ που έχει ρίζες $\kappa = 4$ ή $\kappa = -1$.

- Αν $\kappa = 4$, τότε $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 16x + 2, x \in R$ και $f'(x) = 12x^2 + 4x - 16,\ x \in \mathbb{R}$.

  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$, που έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 + 48 = 49$ και ρίζες $x = \dfrac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

  - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 4x - 16 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 > 0$ **(1)**

  Το πρόσημο του τριωνύμου $3x^2 + x - 4$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 + x - 4$		+	0	-	0	+	

  Έτσι η ανίσωση (1) αληθεύει για $x < -\dfrac{4}{3}$ ή $x > 1$. Το ίδιο ισχύει και για την $f'(x) > 0$.

  Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$ και $[1,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{4}{3},1\right]$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(-\frac{4}{3}\right)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)$.

Άρα η τιμή $\kappa=4$ δεν είναι δεκτή.

o Αν $\kappa=-1$, τότε $f(x)=-x^3+2x^2-x+2, x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=-3x^2+4x-1, x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+4x-1=0$, που έχει διακρίνουσα $\Delta=16-12=4$ και ρίζες

$$x=\frac{-4\pm 2}{-6}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{3}\end{cases}.$$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow -3x^2+4x-1>0$

Το πρόσημο του τριωνύμου $-3x^2+4x-1$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+4x-1$	-	0	+	0	-	

Έτσι η ανίσωση $f'(x)>0$ αληθεύει για $\frac{1}{3}<x<1$.

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{3},1\right]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $\left[1, +\infty\right)$

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = -1 + 2 - 1 + 2 = 2$ και τοπικό ελάχιστο το

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2 =$$

$$-\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{54 - 9 + 6 - 1}{27} = \frac{50}{27}.$$

Άρα η τιμή $\kappa = -1$ είναι δεκτή.

Άσκηση 8 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να υπάρχουν ακρότατα σε ορισμένες θέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa x+\frac{1}{x}, x>0$ και $\kappa>0$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f για τις διάφορες τιμές του $\kappa>0$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\kappa>0$, αν το ακρότατο της f ισούται με κ^2.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\kappa-\frac{1}{x^2}=\frac{\kappa x^2-1}{x^2}, x>0$.

Αφού $\kappa>0$, θα έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\kappa x^2-1}{x^2}=0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} \kappa x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{\kappa} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$.

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\kappa x^2-1}{x^2}>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} \kappa x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\kappa} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}>\sqrt{\frac{1}{\kappa}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{\kappa}},+\infty\right)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right]$.

- Έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)=\kappa\cdot\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\kappa}}}=\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa}}+\sqrt{\kappa}=\frac{2\kappa}{\sqrt{\kappa}}=2\sqrt{\kappa}$

β) Αφού το ελάχιστο της f ισούται με κ^2, έχουμε:

$\kappa^2=2\sqrt{\kappa} \Leftrightarrow \left(\kappa^2\right)^2=\left(2\sqrt{\kappa}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^4=4\kappa \Leftrightarrow \kappa(\kappa^3-4)=0 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa^3-4=0 \Leftrightarrow \kappa^3=4 \Leftrightarrow \kappa=\sqrt[3]{4}$

Άσκηση 9 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε τα ακρότατα να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{\lambda+2}{2}x^2-2\lambda x+1,\ \lambda<2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, για τις διάφορες τιμές του $\lambda<2$.

β) Αν x_1 η θέση του τοπικού ελαχίστου και x_2 η θέση του τοπικού μεγίστου, να βρείτε την τιμή του $\lambda<2$ για την οποία ισχύει $f(x_2)=2f(x_1)$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι η $f'(x)=-x^2+(\lambda+2)x-2\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+(\lambda+2)x-2\lambda=0 \Leftrightarrow x^2-(\lambda+2)x+2\lambda=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $x=\lambda$ ή $x=2$.

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+(\lambda+2)x-2\lambda>0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+(\lambda+2)x-2\lambda$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		λ		2		$+\infty$
$-x^2+(\lambda+2)x-2\lambda$		-	0	+	0	-	

Άρα η ανίσωση $f'(x)>0$ αληθεύει για $\lambda<x<2$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		λ		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[\lambda,2]$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,\lambda]$ και $[2,+\infty)$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(2)=-\frac{2^3}{3}+\frac{\lambda+2}{2}\cdot 2^2-2\lambda\cdot 2+1=-\frac{8}{3}+2\lambda+4-4\lambda+1=$

  $=-\frac{8}{3}-2\lambda+5=\frac{7-6\lambda}{3}$ και τοπικό ελάχιστο το

  $f(\lambda)=-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda+2}{2}\cdot\lambda^2-2\lambda\cdot\lambda+1=-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^3+2\lambda^2}{2}-2\lambda^2+1=$

  $=\frac{-2\lambda^3+3\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda^2+6}{6}=\frac{\lambda^3-6\lambda^2+6}{6}$

β) Σύμφωνα με τη μελέτη ακροτάτων της συνάρτησης f στο α) ερώτημα η θέση τοπικού ελαχίστου είναι $x_1=\lambda$ και η θέση τοπικού μεγίστου είναι $x_2=2$.

Έτσι έχουμε $f(x_2)=2f(x_1)\Leftrightarrow f(2)=2f(\lambda)\Leftrightarrow \frac{7-6\lambda}{3}=2\cdot\frac{\lambda^3-6\lambda^2+6}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7-6\lambda}{3}=\frac{\lambda^3-6\lambda^2+6}{3}\Leftrightarrow 7-6\lambda=\lambda^3-6\lambda^2+6\Leftrightarrow \lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1=0$

$\Leftrightarrow \lambda^3-1-6\lambda^2+6\lambda=0\Leftrightarrow(\lambda-1)\cdot(\lambda^2+\lambda+1)-6\lambda\cdot(\lambda-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-5\lambda+1)=0\Leftrightarrow \lambda-1=0$ ή $\lambda^2-5\lambda+1=0$.

Άρα είναι $\lambda=1$ ενώ η εξίσωση $\lambda^2-5\lambda+1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=25-4=21$ και ρίζες

$$\lambda=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}=\begin{cases}\frac{5+\sqrt{21}}{2}>2\\ \\ \frac{5-\sqrt{21}}{2}<2\end{cases}.$$

Τελικά δεκτές είναι οι τιμές $\lambda=1$ και $\lambda=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Άσκηση 10 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε τα ακρότατα να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{2x}}{2}-(\lambda+1)e^x+\lambda x+\lambda^2, \lambda>1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, για τις διάφορες τιμές του $\lambda>1$.

β) Αν x_1 η θέση του τοπικού ελαχίστου και x_2 η θέση του τοπικού μεγίστου, να βρείτε την τιμή του $\lambda>1$ για την οποία ισχύει $f(x_1)-\lambda\ln\lambda=-f(x_2)-\frac{1}{2}$.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot(2x)'-(\lambda+1)\cdot e^x+\lambda=e^{2x}-\lambda e^x-e^x+\lambda=$

$=e^x\left(e^x-\lambda\right)-\left(e^x-\lambda\right)=\left(e^x-\lambda\right)\cdot\left(e^x-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^x-\lambda\right)\cdot\left(e^x-1\right)=0\Leftrightarrow e^x-\lambda=0$ ή $e^x-1=0\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^x=\lambda$ ή $e^x=1\Leftrightarrow x=\ln\lambda$ ή $x=0$.

  (Είναι $\ln\lambda>0$ αφού $\lambda>1$)

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\left(e^x-\lambda\right)\cdot\left(e^x-1\right)>0$

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και το πρόσημο του γινομένου:

- $e^x-\lambda>0\Leftrightarrow e^x>\lambda\Leftrightarrow\ln e^x>\ln\lambda\Leftrightarrow x>\ln\lambda$
- $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow\ln e^x>\ln 1\Leftrightarrow x>\ln 1=0$

x	$-\infty$	0		$\ln\lambda$	$+\infty$
$e^x-\lambda$	-		-	0	+
e^x-1	-	0	+		+
Γινόμενο	+	0	-	0	+

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης $f'(x)>0$ είναι $x<0$ ή $x>\ln\lambda$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$\ln\lambda$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[\ln\lambda,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ln\lambda]$.

- Έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=\frac{e^0}{2}-(\lambda+1)e^0+\lambda\cdot 0+\lambda^2=\frac{1}{2}-\lambda-1+\lambda^2=\lambda^2-\lambda-\frac{1}{2}$ και τοπικό ελάχιστο το

$$f(\ln\lambda)=\frac{e^{2\ln\lambda}}{2}-(\lambda+1)e^{\ln\lambda}+\lambda\cdot\ln\lambda+\lambda^2=\frac{\lambda^2}{2}-\lambda(\lambda+1)+\lambda\ln\lambda+\lambda^2=$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}-\lambda^2-\lambda+\lambda\ln\lambda+\lambda^2=\frac{\lambda^2}{2}-\lambda+\lambda\ln\lambda.$$

β) Σύμφωνα με τη μελέτη ακροτάτων της συνάρτησης f στο α) ερώτημα η θέση τοπικού ελαχίστου είναι $x_1=\ln\lambda$ και η θέση τοπικού μεγίστου είναι $x_2=0$.

Έτσι έχουμε $f(x_1)-\lambda\ln\lambda=-f(x_2)-\frac{1}{2}\Rightarrow f(\ln\lambda)-\lambda\ln\lambda=-f(0)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda^2}{2}-\lambda+\lambda\ln\lambda-\lambda\ln\lambda=-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda=-2\lambda^2+2\lambda\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\lambda^2-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(3\lambda-4)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ (απορρίπτεται αφού $\lambda>1$) ή $\lambda=\frac{4}{3}$.

Τελικά δεκτή είναι η τιμή $\lambda=\frac{4}{3}$.

Άσκηση 11 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε «το μέγιστο να είναι ελάχιστο»)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda^3 x+\dfrac{4}{x^2}-\lambda^3,\ \lambda>0,\ x>0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το ελάχιστο της f να παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\lambda^3-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{\lambda^3\cdot x^3-8}{x^3},\ x>0$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^3\cdot x^3-8}{x^3}=0 \overset{x^3>0}{\Leftrightarrow} \lambda^3\cdot x^3-8=0 \overset{\lambda^3>0}{\Leftrightarrow} x^3=\dfrac{8}{\lambda^3} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{2}{\lambda}$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^3\cdot x^3-8}{x^3}>0 \overset{x^3>0}{\Leftrightarrow} \lambda^3\cdot x^3-8>0 \overset{\lambda^3>0}{\Leftrightarrow} x^3>\dfrac{8}{\lambda^3} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x>\dfrac{2}{\lambda}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{2}{\lambda}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{2}{\lambda},+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{2}{\lambda}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)=\lambda^3\cdot\dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{4}{\frac{4}{\lambda^2}}-\lambda^3=2\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3=-\lambda^3+3\lambda^2,\ \lambda>0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda^2,\ \lambda>0$.
Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της g είναι $g'(\lambda) = -3\lambda^2 + 6\lambda,\ \lambda > 0$.

- $g'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(-\lambda + 2) = 0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$.
- $g'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 + 6\lambda > 0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $-3\lambda^2 + 6\lambda$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-3\lambda^2 + 6\lambda$		-	0	+	0	-	

Όμως ξέρουμε ότι είναι $\lambda > 0$. Άρα η ανίσωση $g'(\lambda) > 0$ αληθεύει για $0 < \lambda < 2$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

λ	0		2		$+\infty$
$g'(\lambda)$		+	0	-	
$g(\lambda)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.
- Έχει μέγιστο για $\lambda = 2$.

Άρα το ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν $\lambda = 2$.

Άσκηση 12 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε «το μέγιστο να είναι ελάχιστο»)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\lambda^3\ln x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2\lambda^3}{3}, \lambda>0, x>0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστο.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το μέγιστο της f να παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγός της είναι $f'(x)=2\lambda^3\frac{1}{x}-2x^2=\frac{2\lambda^3-2x^3}{x}, x>0$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda^3-2x^3}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda^3-2x^3=0 \Leftrightarrow x^3=\lambda^3 \Leftrightarrow x=\lambda$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda^3-2x^3}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda^3-2x^3>0 \Leftrightarrow x^3<\lambda^3 \Leftrightarrow x<\lambda$ αφού $\lambda>0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		λ		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$		↗	Ο.Μ.	↘	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\lambda]$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\lambda,+\infty)$.
- Έχει μέγιστο για $x=\lambda$ το $f(\lambda)=2\lambda^3\ln\lambda-\frac{2\lambda^3}{3}+\frac{2\lambda^3}{3}=2\lambda^3\ln\lambda$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda)=2\lambda^3\ln\lambda, \lambda>0$.
Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της g είναι

$$g'(\lambda) = (2\lambda^3)' \cdot \ln\lambda + 2\lambda^3 \cdot (\ln\lambda)' = 6\lambda^2 \ln\lambda + 2\lambda^3 \cdot \frac{1}{\lambda} =$$

$$= 6\lambda^2 \ln\lambda + 2\lambda^2 = 2\lambda^2 (3\ln\lambda + 1).$$

- $g'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 (3\ln\lambda + 1) = 0 \overset{\lambda^2>0}{\Leftrightarrow} 3\ln\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\lambda = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda = e^{-\frac{1}{3}}$.

- $g'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 (3\ln\lambda + 1) > 0 \overset{\lambda^2>0}{\Leftrightarrow} 3\ln\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln\lambda > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda > e^{-\frac{1}{3}}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

λ	0		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$g'(\lambda)$		-	0	+	
$g(\lambda)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right]$.

- Έχει ελάχιστο για $\lambda = e^{-\frac{1}{3}}$.

Άρα το μέγιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν $\lambda = e^{-\frac{1}{3}}$.

Άσκηση 13 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ανοικτό από πάνω και η βάση του είναι τετράγωνο. Ο όγκος του κουτιού είναι 500cm^3. Θέλουμε να καλύψουμε εξωτερικά το κουτί (και τη βάση του) με πλαστικό.

α) Να δείξετε ότι η ισότητα που εκφράζει την επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως συνάρτηση της πλευράς x της βάσης του είναι $E(x)=x^2+\frac{2000}{x}, x>0$

β) Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού ώστε να χρειαστούμε το λιγότερο πλαστικό για την κάλυψή του;

(Δίνονται: Όγκος παραλληλεπιπέδου: $V=E_\beta\cdot h$, όπου E_β: εμβαδό βάσης και h: το ύψος)

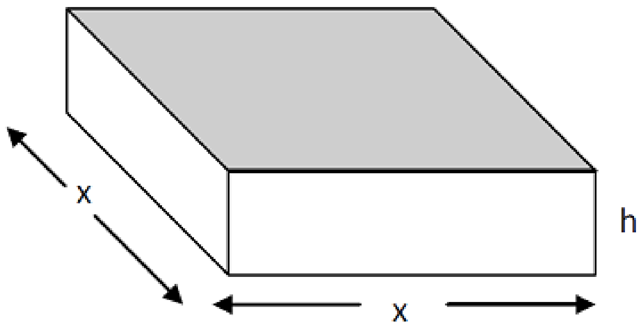
<u>Λύση</u>

α) Έστω x η πλευρά του τετραγώνου της βάσης και h το ύψος του παραλληλεπιπέδου.

Έχουμε $V=E_\beta\cdot h$, άρα είναι $x^2\cdot h=500\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}h=\frac{500}{x^2}$. **(1)**

Η επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $E=x^2+4x\cdot h$.
Αντικαθιστώντας τη σχέση **(1)** έχουμε, τελικά τη συνάρτηση

$E(x)=x^2+4x\cdot\frac{500}{x^2}=x^2+\frac{2000}{x}$.



Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε:

$x>0$ (2) και $h>0$ άρα $\frac{500}{x^2}>0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(3)**.

Από τη συναλήθευση των **(2)** και **(3)** προκύπτει $x>0$.

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι $E(x)=x^2+\frac{2000}{x}, x>0$.

β) Η παράγωγος της συνάρτησης $E(x)$ είναι $E'(x)=2x-\frac{2000}{x^2}=\frac{2x^3-2000}{x^2},\ x>0$.

- $E'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^3-2000}{x^2}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^3-2000=0\Leftrightarrow x^3=1000\Leftrightarrow x=10$.

- $E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x^3-2000}{x^2}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^3-2000>0\Leftrightarrow x^3>1000\Leftrightarrow x>10$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $E(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		10		$+\infty$
$E'(x)$		-	0	+	
$E(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $E(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[10,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10]$.
- Έχει ελάχιστο για $x=10$.

Άρα το λιγότερο πλαστικό θα χρειαστεί, όταν οι διαστάσεις του κουτιού είναι $x=10\text{cm}$ και $h=\frac{500}{x^2}=\frac{500}{10^2}=5\text{ cm}$.

Άσκηση 14 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Το ωριαίο κόστος από την κατανάλωση καυσίμων ενός αυτοκινήτου που κινείται στη διαδρομή Πάτρα – Αθήνα και αντίστροφα δίνεται από τον $K_1(\upsilon) = 10 + \frac{\upsilon^2}{500}$ €/ώρα. Αν για αυτό το ταξίδι με επιστροφή (συνολικά 500km) χρειάζονται επιπλέον 20€ για διόδια, να βρείτε το ελάχιστο συνολικό κόστος ενός τέτοιου ταξιδιού, καθώς και την ταχύτητα που πρέπει να έχει το αυτοκίνητο.

<u>Λύση</u>

Έστω ότι το ταξίδι με επιστροφή διαρκεί t ώρες.

Τότε έχουμε $\upsilon = \frac{500}{t} \Leftrightarrow t = \frac{500}{\upsilon}$ **(1)**.

Σε t ώρες το αυτοκίνητο καταναλώνει καύσιμα αξίας

$K_1(\upsilon) \cdot t = \left(10 + \frac{\upsilon^2}{500}\right) \cdot t \overset{(1)}{=} \left(10 + \frac{\upsilon^2}{500}\right) \cdot \frac{500}{\upsilon} = \frac{5000}{\upsilon} + \upsilon$ ευρώ.

Το συνολικό κόστος του ταξιδιού δίνεται από τον τύπο $K(\upsilon) = \frac{5000}{\upsilon} + \upsilon + 20$ ευρώ, με $\upsilon > 0$.

Η παράγωγος της $K(\upsilon)$ είναι $K'(\upsilon) = -\frac{5000}{\upsilon^2} + 1 = \frac{\upsilon^2 - 5000}{\upsilon^2}$, $\upsilon > 0$

- $K'(\upsilon) = 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2 - 5000}{\upsilon^2} = 0 \overset{\upsilon^2>0}{\Leftrightarrow} \upsilon^2 - 5000 = 0 \Leftrightarrow \upsilon^2 = 5000 \overset{\upsilon>0}{\Leftrightarrow} \upsilon = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$.

- $K'(\upsilon) > 0 \Leftrightarrow \frac{\upsilon^2 - 5000}{\upsilon^2} > 0 \overset{\upsilon^2>0}{\Leftrightarrow} \upsilon^2 - 5000 > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \upsilon^2 > 5000 \Leftrightarrow \sqrt{\upsilon^2} > \sqrt{5000} \overset{\upsilon>0}{\Leftrightarrow} \upsilon > \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $K(\upsilon)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

υ	0		$50\sqrt{2}$		$+\infty$
$K'(\upsilon)$		-	0	+	
$K(\upsilon)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $\mathrm{K}(\upsilon)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[50\sqrt{2},+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,50\sqrt{2}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $\mathrm{K}\left(50\sqrt{2}\right)=\dfrac{5000}{50\sqrt{2}}+50\sqrt{2}+20=50\sqrt{2}+50\sqrt{2}+20=100\sqrt{2}+20$.

Άρα το ελάχιστο συνολικό κόστος του ταξιδιού είναι $100\sqrt{2}+20\simeq 160$ € και πραγματοποιείται όταν η ταχύτητα είναι $\upsilon=50\sqrt{2}\simeq 70$ km/h.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -συνx - 2x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $συνx^2 + 2x^2 < συν(3x+4) + 6x + 8$.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = ημx - 2 < 0$, για κάθε $x \in R$, αφού είναι $-1 \le ημx \le 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και $ημx < 2 \Leftrightarrow ημx - 2 < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Παρατηρώντας τα δύο μέλη της ανίσωσης φαίνεται ότι αυτή είναι της μορφής $f(x^2) > f(3x+4)$.

Πράγματι είναι:

$$συνx^2 + 2x^2 < συν(3x+4) + 6x + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -συνx^2 - 2x^2 > -συν(3x+4) - 2(3x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) > f(3x+4) \overset{f:\text{γν.φθίν.}}{\Leftrightarrow} x^2 < 3x+4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \quad \textbf{(1)}$$

Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -1$ και $x_2 = 4$ και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		+	0	-	0	+	

Άρα η ανίσωση **(1)** αληθεύει για $-1 < x < 4$. Το ίδιο ισχύει και για την αρχική.

Άσκηση 2 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln x$.

β) Να αποδείξετε ότι $x^{e}\geq e^{-\frac{1}{x}}, x>0$.

Λύση

α) Είναι $x>0$.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1, x>0$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x+1>0\Leftrightarrow\ln x>-1\Leftrightarrow\ln x>\ln e^{-1}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.
- Έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

β) Αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$, ισχύει:

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow x\cdot\ln x\geq-\frac{1}{e}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}e\ln x\geq-\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln x^{e}\geq-\frac{1}{x}\overset{\text{lnx, γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}x^{e}\geq e^{-\frac{1}{x}}$$, για κάθε $x>0$.

Άσκηση 3 (Απόδειξη ή λύση ανισότητας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{\frac{4}{x}}, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι $e^{\frac{4-x}{x}}\geq\frac{4}{x}$, για κάθε $x>0$.

γ) Να δείξετε ότι $2e^2>\pi e^{\frac{4}{\pi}}$.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.
Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x)=(x)'\cdot e^{\frac{4}{x}}+x\cdot\left(e^{\frac{4}{x}}\right)'=e^{\frac{4}{x}}+x\cdot e^{\frac{4}{x}}\cdot\left(\frac{4}{x}\right)'=$$

$$=e^{\frac{4}{x}}+x\cdot e^{\frac{4}{x}}\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right)=e^{\frac{4}{x}}+e^{\frac{4}{x}}\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)=\frac{(x-4)e^{\frac{4}{x}}}{x}, x>0.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(x-4)e^{\frac{4}{x}}}{x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}(x-4)e^{\frac{4}{x}}=0\overset{e^{\frac{4}{x}}>0}{\Leftrightarrow}x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{(x-4)e^{\frac{4}{x}}}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}(x-4)e^{\frac{4}{x}}>0\overset{e^{\frac{4}{x}}>0}{\Leftrightarrow}x-4>0\Leftrightarrow x>4$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$.

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,4]$.
- Έχει ελάχιστο το $f(4)=4\cdot e^{\frac{4}{4}}=4e$.

β) Αφού έχει ελάχιστο για $x=4$, ισχύει

$f(x)\geq f(4)\Leftrightarrow x\cdot e^{\frac{4}{x}}\geq 4e\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{4}{x}}}{e}\geq \frac{4}{x}\Leftrightarrow e^{\frac{4}{x}-1}\geq \frac{4}{x}\Leftrightarrow e^{\frac{4-x}{x}}\geq \frac{4}{x}$, για κάθε $x>0$

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,4]$, στο οποίο έχουμε:

$0<2<\pi<4\Rightarrow f(2)>f(\pi)\Rightarrow 2e^{\frac{4}{2}}>\pi e^{\frac{4}{\pi}}\Rightarrow 2e^{2}>\pi e^{\frac{4}{\pi}}$.

Άσκηση 4 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε τα ακρότατα να ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}+\beta x^2,\ x>0$ και $\beta>0$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2\beta$.

β) Να δείξετε ότι το ακρότατο είναι ελάχιστο.

γ) Να βρείτε τις τιμές των α και β αν το ακρότατο είναι ίσο με 6.

<u>Λύση</u>

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Η παράγωγος της f είναι η $f'(x)=-\dfrac{\alpha}{x^2}+2\beta x,\ x>0$.

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$, θα ισχύει κατ'αρχάς

$f'(1)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{\alpha}{1^2}+2\beta\cdot 1=0 \Leftrightarrow -\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=2\beta$ **(1)**

Η f' γίνεται $f'(x)=-\dfrac{2\beta}{x^2}+2\beta x=\dfrac{-2\beta+2\beta x^3}{x^2}=\dfrac{2\beta\left(x^3-1\right)}{x^2}=\dfrac{2\beta(x-1)\left(\underbrace{x^2+x+1}_{+}\right)}{\underbrace{x^2}_{+}}$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε.	↗	

Άρα ισχύει $\alpha=2\beta$.

β) Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο το $f(1)=\dfrac{2\beta}{1}+\beta\cdot 1^2=3\beta$.

γ) Επειδή το ακρότατο είναι ίσο με 6, έχουμε $f(1)=6 \Leftrightarrow 3\beta=6 \Leftrightarrow \beta=2$ και στη συνέχεια από τη σχέση **(1)**, έχουμε $\alpha=2\beta=4$.

Άσκηση 5 (Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε «το μέγιστο να είναι ελάχιστο»)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}-\lambda x+\lambda e-e^{\lambda}, \lambda>0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο.

β) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το ελάχιστο της f να παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}-\lambda, x\in\mathbb{R}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\left(e^{\lambda x}-1\right)=0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} e^{\lambda x}-1=0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}=1 \Leftrightarrow \lambda x=0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x=0$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda\left(e^{\lambda x}-1\right)>0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$

  $e^{\lambda x}-1>0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}>1 \Leftrightarrow e^{\lambda x}>e^{0} \Leftrightarrow \lambda x>0 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x>0$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f :

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

- Έχει ελάχιστο το $f(0)=e^{\lambda\cdot 0}-\lambda\cdot 0+\lambda e-e^{\lambda}=1+\lambda e-e^{\lambda}, \lambda>0$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda)=1+\lambda e-e^{\lambda}, \lambda>0$.
Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$.
Η παράγωγος της g είναι $g'(\lambda)=e-e^{\lambda}, \lambda>0$

- $g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow e-e^{\lambda}=0 \Leftrightarrow e^{\lambda}=e \Leftrightarrow \lambda=1$

- $g'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow e - e^{\lambda} > 0 \Leftrightarrow e^{\lambda} < e \Leftrightarrow \lambda < 1$

Όμως είναι και $\lambda > 0$, άρα η ανίσωση $g'(\lambda) > 0$ αληθεύει για $0 < \lambda < 1$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

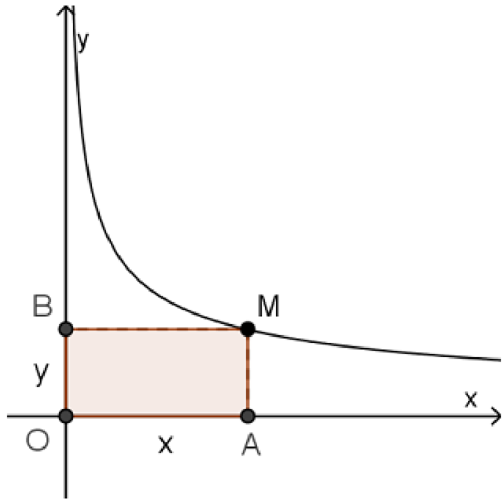
λ	0		1		$+\infty$
$g'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
$g(\lambda)$		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$
- Έχει μέγιστο για $\lambda = 1$

Άσκηση 6 (Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων στη Γεωμετρία-Φυσική-Οικονομία κ.λ.π)

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$. Από τυχαίο σημείο $M(x,f(x))$, της γραφικής παράστασης φέρνουμε κάθετες προς τους ημιάξονες Ox και Oy και σχηματίζεται το ορθογώνιο OAMB.



α) Να δείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $\Pi(x)=2x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

β) Να βρείτε ποιο είναι το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f για το οποίο έχουμε την ελάχιστη περίμετρο καθώς και την ελάχιστη τιμή αυτής της περιμέτρου.

Λύση

α) Έστω ότι το ορθογώνιο έχει διαστάσεις x και y.

Από το παραπάνω σχήμα καταλαβαίνουμε ότι $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **(1)**.

Η περίμετρος του ορθογωνίου ισούται με $\Pi=2x+2y$, η οποία με τη βοήθεια της **(1)** παίρνει τη μορφή $\Pi(x)=2x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Για το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης έχουμε $x>0$ (2) και $y>0\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow x>0$ **(3)**.

Από τις **(2)** και **(3)** διαπιστώνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\Pi(x)$ είναι το $(0,+\infty)$.

β) Η παράγωγος της $\Pi(x)$ είναι

$$\Pi'(x)=2+2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=2-2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=2-\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{2\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}},\ x>0\ .$$

- $\Pi'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}}=0\overset{\sqrt{x^3}>0}{\Leftrightarrow}2\sqrt{x^3}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^3=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

- $\Pi'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}}>0\overset{\sqrt{x^3}>0}{\Leftrightarrow}2\sqrt{x^3}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{x^3}>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^3>\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$		$+\infty$
$\Pi'(x)$		-	0	+	
$\Pi(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η $\Pi(x)$:

- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{4}},+\infty\right)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right]$.
- Έχει ελάχιστο για $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ το

$$\Pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+2\sqrt[6]{4}$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+2\sqrt[6]{2^2}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+2\sqrt[3]{2}$$

$$=\frac{2+2\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2+2\cdot 2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{6}{\sqrt[3]{4}}=\frac{6\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4^2}}=\frac{6\sqrt[3]{2^3 2}}{4}=\frac{12\sqrt[3]{2}}{4}=3\sqrt[3]{2}$$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης για το οποίο η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ελάχιστη είναι το $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\sqrt[6]{4}\right)$ και η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου είναι $\Pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=3\sqrt[3]{2}$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 9/11/2011