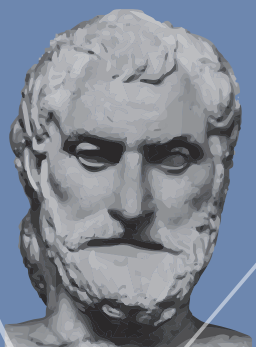
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Μαθηματικά
Β΄ μέρος



Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Λύσεις των ασκήσεων

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
& Σπουδών Υγείας
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
& Σπουδών Υγείας
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Β΄ ΜΕΡΟΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση *να μη το διαβάσεις·* τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούργιο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και συ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος χωρίς βοήθεια τις ασκήσεις για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε πίσω λοιπόν στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρ' όλα αυτά δεν μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης, τότε και *μόνο* τότε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες, ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος που κρατάς είναι λοιπόν φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' έναν φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις μη του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και συ το έργο. Μετά μπορείτε, να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

(Από το Τμήμα Μ.Ε. του Π.Ι.)

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 και 1.2 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες: $x = 1$ ή $x = 2$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1,2}\}$.

ii) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν $x-1 \geq 0$ και $2-x \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 1$ και $x \leq 2$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1,2}]$.

iii) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν $1-x^2 \geq 0$ και $x \neq 0$.
Η ανίσωση $1-x^2 \geq 0$ αληθεύει, όταν $x^2 \leq 1$, δηλαδή όταν $-1 \leq x \leq 1$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = [\mathbf{-1,0}) \cup (\mathbf{0,1}]$.

iv) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\boldsymbol{A} = (-\infty, \mathbf{0})$.

2. i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{1}) \text{ ή } \boldsymbol{x} \in (\mathbf{3}, +\infty)$$

ii) Ομοίως έχουμε:

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{-1} < \boldsymbol{x} < \mathbf{1}.$$

iii) Ομοίως είναι $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$.

3. i) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2+1) > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{0}.$$

ii) Ομοίως:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \mathbf{1}.$$

4. α) $A(45) = 2{,}89 \cdot 45 + 70{,}64 = 200{,}69$ cm

β) $\Gamma(45) = 2{,}75 \cdot 45 + 71{,}48 = 195{,}23$ cm.

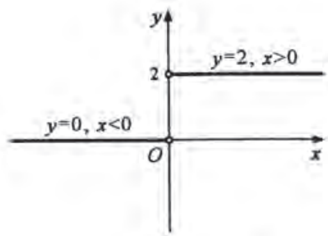
5. Το τετράγωνο έχει περίμετρο x, οπότε η πλευρά του είναι $\frac{x}{4}$ και το εμβαδό του $\frac{x^2}{16}$.

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει περίμετρο $20 - x$, οπότε η πλευρά του είναι $\frac{20-x}{3}$ και το εμβαδό του $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{20-x}{3}\right)^2$.

Επομένως E = Ετετρ + Ετριγ = $\mathbf{\frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(20-x)^2}$ με $x \in (0,20)$.

6. i) Είναι

$$f(x) = \frac{|x|}{x} + 1 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}.$$

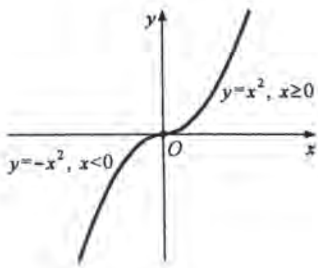


Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το σύνολο των τιμών της f είναι το $\mathbf{f(A) = \{0,2\}}$

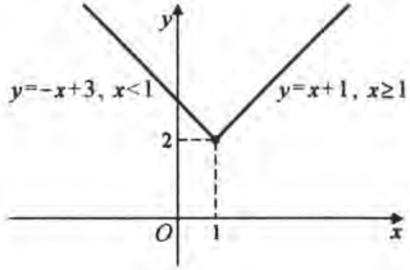
ii) Είναι

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$



Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο των τιμών της f είναι το $\mathbf{f(A) = \mathbb{R}}$.

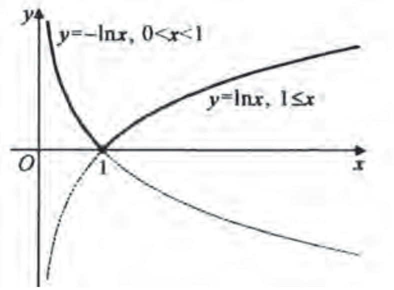
iii) Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο των τιμών της f είναι το $\mathbf{f(A) = [2,+\infty)}$.



iv) Είναι

$$f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ \ln x, & 1\le x\end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το σύνολο των τιμών της f είναι το

$$\boldsymbol{f(A)=[0,+\infty)}.$$

7. i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$, ενώ η g το $B=[0,+\infty)$. Είναι $A\neq B$ και επομένως οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες. Για κάθε $x\geq 0$ έχουμε

$$f(x)=\sqrt{x^2}=x=\left(\sqrt{x}\right)^2=g(x).$$

Άρα οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|}=\frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|(|x|+1)}=\frac{|x|-1}{|x|}=g(x).$$

Επομένως $f=g$.

iii) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A$, έχουμε

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $B=[0,+\infty)$. Επομένως οι συναρτήσεις f και g έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού, οπότε δεν είναι ίσες. Είναι όμως $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$. Άρα οι f, g είναι ίσες στο $\boldsymbol{[0,1)\cup(1,+\infty)}$.

8. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $A=\mathbb{R}^*$, ενώ η g στο $B=\mathbb{R}-\{1\}$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ έχουμε:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{1-x^2+x^2}{x(1-x)}=\boldsymbol{\frac{1}{x(1-x)}}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x}-\frac{x}{1-x}=\frac{1-x^2-x^2}{x(1-x)}=\boldsymbol{\frac{1-2x^2}{x(1-x)}}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x} = \mathbf{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \mathbf{\frac{1-x^2}{x^2}},$$

αφού για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ είναι $g(x) \neq 0$.

9. Οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \mathbf{2\sqrt{x}}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \mathbf{\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \mathbf{x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}},$$

ενώ, για κάθε $x \in A'$ με $g(x) \neq 0$, δηλαδή με $x \neq 1$ ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \mathbf{\frac{x+1}{x-1}}.$$

10. i) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$, ενώ η g το $D_g = [0, +\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 0) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g \circ f$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

ii) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$, ενώ η g το $D_g = [-1,1]$.

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) \in [-1,1])$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}x \in [-1,1] \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g \circ f$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\eta\mu x) = \sqrt{1-\eta\mu^2 x} = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x}|$$

iii) Ομοίως η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R}$ και η g το

$$D_g = \mathbb{R} - \{x | x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $g \circ f$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = \mathbf{1}.$$

11. Η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}$ και η g το $D_g = [2, +\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$\begin{aligned}(x \in D_f \text{ και } (x^2+1) \in D_g) &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2+1 \geq 2)\\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1\\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = A_1.\end{aligned}$$

Επομένως, η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A_1, και τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{\mathbf{x^2 - 1}}.$$

Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει

$$(x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f) \Leftrightarrow (x \geq 2 \text{ και } \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in [2, +\infty) = B_1.$$

Επομένως, η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B_1 και τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 1 = x - 2 + 1 = \mathbf{x - 1}.$$

12. i) Η συνάρτηση $f(x) = ημ(x^2 + 1)$ είναι σύνθεση της $\boldsymbol{h(x) = x^2 + 1}$ με τη $\boldsymbol{g(x) = ημx}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = 2ημ^2 3x + 1$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 3x}$, $\boldsymbol{g(x) = ημx}$ και $\boldsymbol{φ(x) = 2x^2 + 1}$.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 2x}$, $\boldsymbol{g(x) = e^x - 1}$ και $\boldsymbol{φ(x) = \ln x}$.

iv) Η συνάρτηση $f(x) = ημ^2 3x$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\boldsymbol{h(x) = 3x}$, $\boldsymbol{g(x) = ημx}$ και $\boldsymbol{φ(x) = x^2}$.

1.1 και 1.2 — Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,1)$ έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda = \dfrac{1}{-1} = -1$, οπότε η εξίσωσή της είναι:

$$y - 0 = (-1)(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $Γ(2,0)$ και $Δ(1,1)$ έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda = \dfrac{1}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$, οπότε η εξίσωσή της είναι:

$$y - 0 = (-1)(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Επομένως το σχήμα μας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 \le x < 2 \end{cases}}$$

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,2)$ έχει $\lambda = 2$ και εξίσωση $y = 2x$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,0)$ έχει $\lambda = \dfrac{-2}{1} = -2$ και εξίσωση $y - 0 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 4$.

Επομένως το σχήμα μας είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ -2x+4, & 1 < x \le 2 \end{cases}}$$

iii) Ομοίως έχουμε

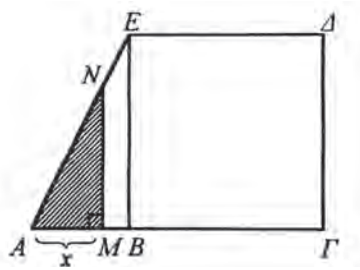
$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \cup [2,3) \\ 0, & x \in [1,2) \cup [3,4) \end{cases}}.$$

2. Το εμβαδόν των δύο βάσεων είναι $2\pi x^2$, ενώ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi xh$, όπου h το ύψος του κυλίνδρου. Έχουμε $V = \pi x\, h = 628$, οπότε $h = \dfrac{628}{\pi x^2} \simeq \dfrac{200}{x^2}$ και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας γίνεται: $2\pi x \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{400\pi}{x}$. Επομένως, το κόστος $K(x)$ είναι:

$$K(x) = 2\pi x^2 \cdot 4 + \frac{400\pi}{x} \cdot 1{,}25 = 8\pi x^2 + \frac{500\pi}{x} \quad \text{με } x > 0.$$

Το εμβαδόν των βάσεων του κουτιού είναι $\pi \cdot 5^2 \cdot 2 = 50\pi$, ενώ το κόστος τους είναι $50 \cdot \pi \cdot 4 = 200\pi$ (δραχμ.).
Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$, ενώ το κόστος της είναι $80\pi \cdot 1{,}25 = 100\pi$.
Επομένως το συνολικό κόστος είναι $300\pi \cong 942$ λεπτά $= 9{,}42$ ευρώ.

3. • Αν $0 < x \le 1$, τότε:
Τα τρίγωνα AMN και ABE είναι όμοια, οπότε



$$\frac{x}{(AB)} = \frac{(MN)}{(BE)} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{(MN)}{2}$$

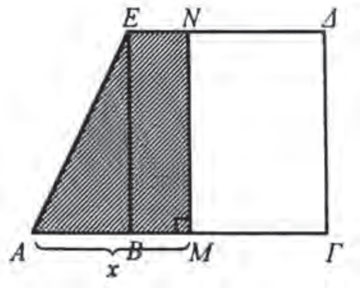
$$\Leftrightarrow (MN) = 2x.$$

Επομένως, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2} x \cdot (MN) = \frac{1}{2} x \cdot 2x = x^2,$$

$$\text{με } 0 < x \le 1.$$

• Αν $1 \le x \le 3$, τότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



$$E(x) = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 + (x-1)2$$

$$= 1 + 2x - 2 = 2x - 1, \text{ με } 1 < x \le 3.$$

Άρα

$$\boldsymbol{E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \le 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \le 3 \end{cases}}$$

4. Από τα όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ANM, έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{MN}=\frac{A\Delta}{AE}\Leftrightarrow\frac{10}{MN}=\frac{5}{5-x}\Leftrightarrow 2(5-x)=MN.$$

Επομένως,

$$E=E(x)=MN\cdot KN=2(5-x)x=\mathbf{-2x^2+10x},\ 0<x<5 \text{ και}$$

$$P=P(x)=2MN+2KN=2\cdot 2(5-x)+2\cdot x=\mathbf{20-2x},\ 0<x<5.$$

5. i) ● Αν $x<-1$, τότε

$$f(x)=\frac{-x-1-x+1}{2}=-x$$

● Αν $-1\le x<1$, τότε

$$f(x)=\frac{x+1-x+1}{2}=1$$

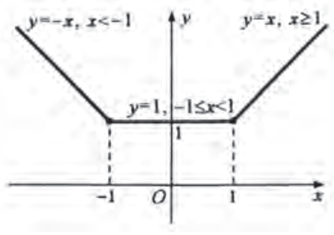
● Αν $1\le x$, τότε

$$f(x)=\frac{x+1+x-1}{2}=x.$$

Άρα

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & -1\le x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}}.$$

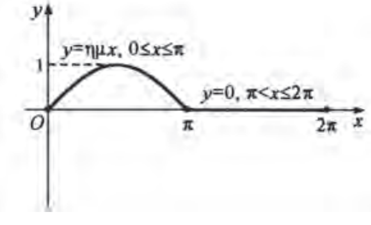
Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Από τη γραφική παράσταση της f φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\mathbf{[1,+\infty)}$.



ii) Έχουμε

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.



6. i) Έχουμε: $f(g(x)) = x^2 + 2x + 2$, δηλαδή $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$. Αν θέσουμε $\omega =$ $x + 1$ ή, ισοδύναμα, $x = \omega - 1$, τότε

$$f(\omega) = (\omega - 1)^2 + 2(\omega - 1) + 2 = \omega^2 - 2\omega + 1 + 2\omega - 2 + 2 = \omega^2 + 1.$$

Επομένως $\mathbf{f(x) = x^2 + 1}$.

ii) $f(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$, δηλαδή $f(-x^2) = \sqrt{1+x^2}$. Θέτουμε $\omega = -x^2$, οπότε

$f(\omega) = \sqrt{1-\omega}$, $\omega \leq 0$. Επομένως μια από τις ζητούμενες συναρτήσεις είναι

η $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 0$.

iii) $g(f(x)) = |\text{συν}x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)} = |\text{συν}x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \text{συν}^2 x$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = 1 - \text{συν}^2 x$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \text{ημ}^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\text{ημ}x|.$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = |\text{ημ}x|}$, ή η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \text{ημ}x}$ ή η συνάρτηση $f(x) = -\text{ημ}x$ κ.τ.λ.

7. Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο $\mathbb{R}$.

— Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$$(x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

— Επομένως ορίζεται η $(f \circ g)(x)$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\alpha x + 2) = \alpha x + 2 + 1 = \boldsymbol{\alpha x + 3}.$$

— Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει: $(x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ορίζεται η $(g \circ f)(x)$ και είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \alpha(x+1) + 2 = \boldsymbol{\alpha x + (\alpha + 2)}.$$

Θέλουμε να είναι $f \circ g = g \circ f$, που ισχύει μόνο όταν

$$(\alpha x + 3 = \alpha x + \alpha + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}.$$

8. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, ενώ η g στο $D_g = [0, +\infty)$.

α) Για να ορίζεται η $f(f(x))$ θα πρέπει:

$$(x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_f) \Leftrightarrow \left(x \neq \alpha \text{ και } \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} \neq \alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \neq \alpha \text{ και } \beta \neq -\alpha^2\right) \Leftrightarrow x \in D_f.$$

Επομένως, η $f\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ και τύπο

$$f(f(x))=\frac{\alpha\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}+\beta}{\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2x+\alpha\beta+\beta x-\alpha\beta}{\alpha x+\beta-\alpha x+\alpha^2}=\frac{x(\alpha^2+\beta)}{\alpha^2+\beta}=x.$$

β) Για να ορίζεται η $g(g(x))$ θα πρέπει:

$$\begin{aligned}(x\in D_g \text{ και } x-2\sqrt{x}+1\in D_g) &\Leftrightarrow (x\geq 0 \text{ και } x-2\sqrt{x}+1\geq 0)\\ &\Leftrightarrow (x\geq 0 \text{ και } \left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0)\\ &\Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow x\in D_g.\end{aligned}$$

Επομένως η $g\circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και τύπο

$$g(g(x))=\left(\sqrt{g(x)}-1\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-1\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-1\right|-1\right)^2=$$

$$=\left(1-\sqrt{x}-1\right)^2=\left(-\sqrt{x}\right)^2=x, \text{ αφού } 0\leq x\leq 1.$$

9. i) Έχουμε:

$$N(t)=10\sqrt{2\left[\left(\sqrt{t}+4\right)^2+\sqrt{t}+4\right]}=10\sqrt{2\left(t+8\sqrt{t}+\sqrt{t}+20\right)}=10\sqrt{2\left(t+9\sqrt{t}+20\right)}.$$

ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned}10\sqrt{2\left(t+9\sqrt{t}+20\right)}=120 &\Leftrightarrow \sqrt{2\left(t+9\sqrt{t}+20\right)}=12\\ &\Leftrightarrow 2\left(t+9\sqrt{t}+20\right)=144\\ &\Leftrightarrow t+9\sqrt{t}+20=72\\ &\Leftrightarrow t+9\sqrt{t}-52=0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{t}=4 \text{ ή } (\sqrt{t}=-13, \text{ απορ.}) \Leftrightarrow t=16.\end{aligned}$$

Επομένως μετά από 16 χρόνια τα αυτοκίνητα θα είναι 120.000.

1.3 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta=(-\infty,1]$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1>-x_2$$

$$1-x_1>1-x_2$$

$$\sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}$$

$$f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-2)-1$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta=(2,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$x_1-2<x_2-2$$

$$\ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)$$

$$\ln(x_1-2)-1<\ln(x_2-2)-1$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=3e^{1-x}+1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1>-x_2$$

$$1-x_1>1-x_2$$

$$e^{1-x_1}>e^{1-x_2}$$

$$3e^{1-x_1}>3e^{1-x_2}$$

$$3e^{1-x_1}+1>3e^{1-x_2}+1$$

$$f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) Η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta=(-\infty,1]$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0$$

$$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$$

$$(x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1$$

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

2. i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1−1 στο $\mathbb{R}$.
Για να βρούμε την αντίστροφη της f, θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε, λοιπόν:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x - 2 = y \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}.$$

Επομένως $f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3}$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, δεν έχει αντίστροφη, γιατί δεν είναι 1–1, αφού $f(1) = f(-1)$, με $1 \neq -1$.

iii) Έχουμε $f(1) = f(2) = 1$ με $1 \neq 2$. Άρα η f δεν είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς δεν έχει αντίστροφη.

iv) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta = (-\infty, 1]$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε, έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt[3]{1-x_1} = \sqrt[3]{1-x_2}$$

$$1 - x_1 = 1 - x_2$$

$$-x_1 = -x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$.
Για να βρούμε την αντίστροφη θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έτσι έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = y$$
$$\Leftrightarrow 1-x = y^3,\ y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1-y^3,\ y \geq 0.$$

Επομένως $f^{-1}(y) = 1-y^3$, $y \geq 0$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x) = 1-x^3$, $x \geq 0$.

v) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) = \Delta$.
Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\ln(1-x_1) = \ln(1-x_2)$$
$$1-x_1 = 1-x_2$$
$$-x_1 = -x_2$$
$$x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1–1 στο Δ.
Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έτσι έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x) = y \Leftrightarrow 1-x = e^y \Leftrightarrow x = 1-e^y$$

Επομένως $f^{-1}(y) = 1-e^y$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x) = 1-e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$e^{-x_1} + 1 = e^{-x_2} + 1$$
$$e^{-x_1} = e^{-x_2}$$
$$x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow e^{-x} + 1 = y \\ &\Leftrightarrow y - 1 = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \ln(y-1) = -x,\ y > 1 \\ &\Leftrightarrow x = -\ln(y-1),\ y > 1 \end{aligned}$$

Επομένως $f^{-1}(y) = -\ln(y-1)$, $y > 1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x) = -\ln(x-1), x > 1$.

vii) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1}$$

$$e^{x_1 + x_2} - e^{x_2} + e^{x_1} - 1 = e^{x_1 + x_2} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$.
Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$, οπότε έχουμε:

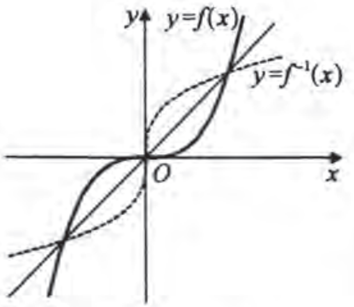
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y \\ &\Leftrightarrow e^x - ye^x = y + 1 \\ &\Leftrightarrow e^x(1-y) = y + 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y},\ \text{με}\ \frac{1+y}{1-y} > 0. \\ &\Leftrightarrow x = \ln\frac{1+y}{1-y},\ \text{με}\ -1 < y < 1. \end{aligned}$$

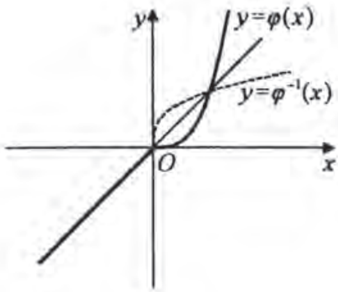
Επομένως $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, $y\in(-1,1)$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η

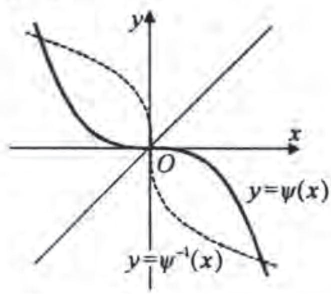
$f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$.

viii) Η f δεν είναι 1–1, γιατί $f(0)=f(2)=0$ με $2\neq 0$. Άρα η f δεν αντιστρέφεται.

3. Οι συναρτήσεις f, φ και ψ αντιστρέφονται, αφού οι παράλληλες προς τον άξονα των x τέμνουν τις γραφικές τους παραστάσεις το πολύ σ' ένα σημείο. Αντίθετα η g δεν αντιστρέφεται. Οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων των παραπάνω συναρτήσεων φαίνονται στα σχήματα.







4. i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

$$-f(x_1)>-f(x_2)$$

$$(-f)(x_1)>(-f)(x_2).$$

Επομένως η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Επειδή οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στο Δ θα ισχύει

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ και } g(x_1)<g(x_2),$$

οπότε θα έχουμε

$$f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2),$$

ή, ισοδύναμα,

$$(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2).$$

Άρα, η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Επειδή οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στο Δ, θα ισχύει

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ και } g(x_1)<g(x_2)$$

και επειδή, επιπλέον, είναι $f(x_1)\geq 0$ και $g(x_1)\geq 0$, θα έχουμε

$$f(x_1)g(x_1)<f(x_2)g(x_2),$$

οπότε

$$(fg)(x_1)<(fg)(x_2).$$

Άρα η fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

1.4 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Από τα σχήματα βρίσκουμε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$ και $f(3)=2$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ και $f(2)=4$

iii) • $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 1, ενώ είναι $f(1)=1$.

• $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 2.

Επιπλέον, η f δεν ορίζεται στο 2.

iv) • $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 1, ενώ είναι $f(1)=1$.

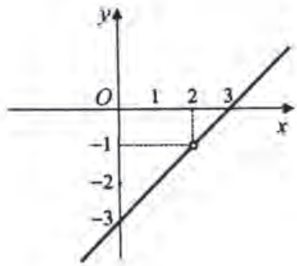
• $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$, οπότε η f δεν έχει όριο στο 2, ενώ είναι $f(2)=2$.

• $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$, ενώ η f δεν ορίζεται στο 3.

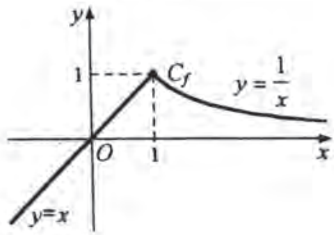
2. i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3.$$

Από τη γραφική παράσταση της f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$.

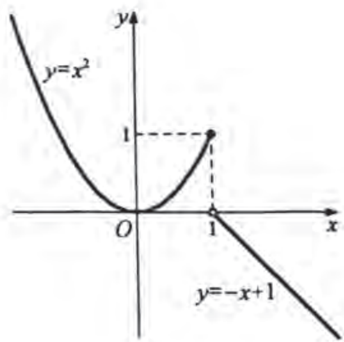


ii) Ομοίως από τη γραφική παράσταση της f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$



iii) Ομοίως από τη γραφική παράσταση της f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, οπότε, η f δεν έχει όριο στο $x_0=1$.



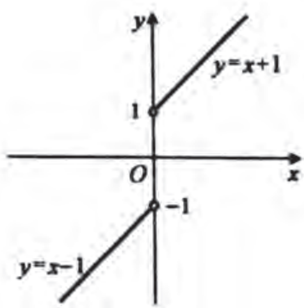
iv) Η συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{0\}$ γράφεται

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}x+1, & x>0\\ x-1, & x<0\end{cases}$$

οπότε από τη γραφική παράσταση της f C_f (διπλανό σχήμα) βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x)=1.$$

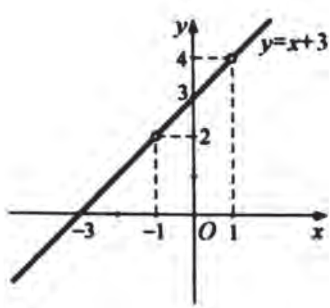
Επομένως, η f δεν έχει όριο στο $x_0=0$.



3. i) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ γράφεται:

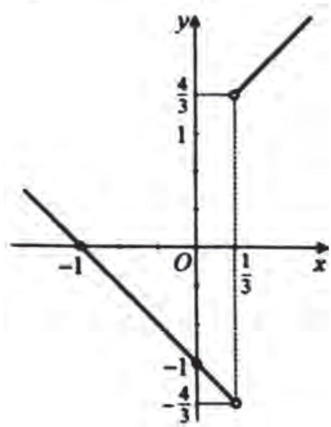
$$f(x)=\frac{x(x^2-1)+3(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{x^2-1}=x+3.$$

Από τη γραφική παράσταση της f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα βρίσκουμε:



$$\lim_{x\to-1}f(x)=2 \text{ και } \lim_{x\to1}f(x)=4.$$

ii) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ γράφεται:



$$f(x)=\frac{(x+1)\sqrt{(3x-1)^2}}{3x-1}=\frac{(x+1)|3x-1|}{3x-1},$$

οπότε

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & \text{αν } x<\frac{1}{3}\\[2mm] x+1, & \text{αν } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Από τη γραφική παράσταση της f που φαίνεται στο διπλανό σχήμα βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}f(x)=-\frac{4}{3} \text{ και } \lim_{x\to\frac{1}{3}^+}f(x)=\frac{4}{3}.$$

Επομένως, η f δεν έχει όριο στο $x_0=\frac{1}{3}$.

4. i) Είναι αληθής, αφού $\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2^+}f(x)=2$.

ii) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim_{x\to1^+}f(x)=2$.

iii) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim_{x\to1^-}f(x)=1$ και $\lim_{x\to1^+}f(x)=2$, που σημαίνει ότι η f δεν έχει όριο στο $x_0=1$.

iv) Αληθής, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$.

v) Δεν είναι αληθής, αφού $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$.

vi) Αληθής, αφού $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3$.

5. Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lambda^2 - 6 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -2.$$

1.5 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}(x^5 - 4x^3 - 2x + 5) = 0^5 - 4\cdot 0^3 - 2\cdot 0 + 5 = 5$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}(x^{10} - 2x^3 + x - 1) = 1^{10} - 2\cdot 1^3 + 1 - 1 = -1$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)^{20} = \left[\lim\limits_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)\right]^{20} = 2^{20}$

iv) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-5)^3\left|x^2 - 2x - 3\right|\right] = \lim\limits_{x\to 3}(x-5)^3 \lim\limits_{x\to 3}\left|x^2 - 2x - 3\right| = (-2)^3\cdot 0 = 0$

v) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 + 2x - 5}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^4 + 2x - 5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

vi) $$\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2 - 3x\right| + \left|x-2\right|}{x^2 + x + 1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\left|x^2 - 3x\right| + \left|x-2\right|\right)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{1} = 2$$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)^2} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.

viii) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 4x + 3)} = \frac{0}{8} = 0.$$

2. Έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}[3(f(x))^2 - 5] = 3\cdot 4^2 - 5 = 43$.

ii) $$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\left|2f(x) - 11\right|}{\lim\limits_{x\to 2}(f(x))^2 + 1} = \frac{\left|-3\right|}{16+1} = \frac{3}{17}.$$

iii) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(f(x)+2)\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3) = (4+2)(4-3) = 6$.

3. i) Για $x = 2$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος. Για $x \neq 2$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^4-16}{x^3-8} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4} = \frac{4\cdot 8}{12} = \frac{8}{3}.$$

ii) Ομοίως για $x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-1}{x+1}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

iii) Ομοίως για $x \neq 1$έχουμε:

$$f(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

iv) Ομοίως για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{(x+3)^3-27}{x} = \frac{(x+3-3)[(x+3)^2+(x+3)\cdot 3+9]}{x}$$

$$= (x+3)^2+3(x+3)+9.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[(x+3)^2+3(x+3)+9] = 27.$$

4. Έχουμε:

i) $$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{3^2-\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{\left(3+\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-x^2)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2-4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-1)\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{1}{12}$.

5. i) Για $x<1$ είναι $f(x)=x^2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$.

Για $x>1$ είναι $f(x)=5x$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=5$.

Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 1.

ii) Για $x<-1$ είναι $f(x)=-2x$, οπότε $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=2$.

Για $x>-1$ είναι $f(x)=x^2+1$, οπότε $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=2$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=2$.

6. Έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}=3\cdot 1=3$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot 1=1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}}{\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\right)=2\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{1}=2$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1-1=0$

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+1}=1\cdot 1=1$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x\left(\sqrt{5x+4}+2\right)}{5x+4-4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{5x+4}+2\right)=1\cdot 4=4.$$

7. i) Έχουμε,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\lim_{x\to\pi}(1-\sigma\upsilon\nu x)=2.$$

ii) Έχουμε,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x}=0$$

iii) Έχουμε,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}.$$

8. i) Είναι, $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1$, οπότε από το θεώρημα της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

ii) Ομοίως, $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^4)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

9. Είναι:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=10$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta)=\lim_{x\to 3^+}(\alpha x+3\beta)=10$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha+\beta=3\alpha+3\beta=10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha \quad +\beta=10 \\ 3\alpha+3\beta=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3} \text{ και } \beta=2.$$

1.5 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Για $x=2$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος. Με το σχήμα του Horner βρίσκουμε $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$, οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+4}=\frac{7}{12}$$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu+1}-\nu x-x+\nu}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^\nu-1)-\nu(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[x(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)-\nu]}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}[x(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)-\nu]=\nu-\nu=0$$

iii) Θέτουμε $\sqrt{x}=t$, οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3+t-2}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+2)} \quad \text{(Σχήμα Horner)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

2. i) Έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}=\frac{\sqrt{(x+5)^2}}{x+5}=\begin{cases}-1, & \text{αν } x<-5 \\ \ \ 1, & \text{αν } x>-5\end{cases},$$

οπότε

$$\lim_{x\to -5^-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x\to -5^+} f(x) = 1.$$

Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 5.

ii) Για $x<5$ είναι:

$$f(x) = \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5} = \frac{-(x-5) + x^2 - 4x - 5}{x-5} = \frac{x^2 - 5x}{x-5} = x.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} x = 5.$

iii) Για $x>5$ είναι:

$$f(x) = \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5} = \frac{x-5 + x^2 - 4x - 5}{x-5} = \frac{x^2 - 3x - 10}{x-5} = x+2$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}(x+2) = 7.$

iv) Θέτουμε $\sqrt{x} = t$, οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t^4 - t}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}$$

$$= \lim_{t\to 1} t(t^2+t+1) = 3.$$

3. i) Είναι $\alpha = \dfrac{1}{\text{συν}\theta}$ και $\beta = \text{εφ}\theta = \dfrac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}$, οπότε

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\text{συν}\theta} - \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\right) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\text{ημ}^2\theta}{\text{συν}\theta(1+\text{ημ}\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}\theta}{1+\text{ημ}\theta} = 0.$$

ii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(1) = 1$

iii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\text{ημ}\theta) = 1.$

4. i) Θέτουμε $g(x) = 4f(x) + 2 - 4x$, οπότε $f(x) = \dfrac{1}{4}g(x) + x - \dfrac{1}{2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -10$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{4}g(x)+x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(-10)+1-\frac{1}{2} = -2.$$

ii) Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, οπότε $f(x)=(x-1)g(x),\ x\neq 1.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1} g(x) = 0\cdot 1 = 0.$$

1.6 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x^4+3x^2)=0$ και $x^4+3x^2>0$ για $x\neq 0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4+3x^2}=+\infty.$

Επειδή, επιπλέον, $\lim\limits_{x\to 0}(x+5)=5$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+5}{x^4+3x^2} = \lim_{x\to 0}\left[(x+5)\cdot\frac{1}{x^4+3x^2}\right] = +\infty$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} 4(x-1)^4=0$ και $4(x-1)^4>0$ κοντά στο 1, είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^4}=+\infty.$

Επειδή, επιπλέον, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=-1<0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{4(x-1)^4} = \lim_{x\to 1}\left[(2x-3)\cdot\frac{1}{4(x-1)^4}\right] = -\infty.$$

iii) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{0\}$ γράφεται

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & \text{αν } x<0\\ 0, & \text{αν } x>0\end{cases},$$

οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x} = -\infty, \text{ ενώ } \lim_{x\to 0^+} f(x)=0\,.$$

Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο $x_0=0$.

2. i) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ γράφεται:

$$f(x)=\frac{3}{1-x}-\frac{4}{1-x^2}=\frac{3(x+1)-4}{1-x^2}=\frac{3x-1}{1-x^2}.$$

Επειδή $x_0=1$ περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της f.

• Αν $x \in (0,1)$ έχουμε $1-x^2>0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2>0$, οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^-}\left[(3x-1)\cdot\frac{1}{1-x^2}\right]=+\infty.$$

• Αν $x \in (1,+\infty)$ έχουμε $1-x^2<0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x^2)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2>0$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\left[(3x-1)\cdot\frac{1}{1-x^2}\right]=-\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει όριο της f στο $x_0=1$.

ii) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{0\}$ γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-2}{-x^2}, & x<0\\[2mm] \dfrac{x^2+3x-2}{x^2}, & x>0\end{cases}$$

• Αν $x<0$ έχουμε $-x^2<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+3x-2)=-2<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{-x^2}=-\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[(x^2+3x-2)\cdot\frac{1}{-x^2}\right]=+\infty.$$

• Αν $x>0$ έχουμε $x^2>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3x-2)=-2<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x^2+3x-2)\cdot\frac{1}{x^2}\right]=-\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει όριο της f στο $x_0=0$.

iii) Η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}-\{0\}$ γράφεται:

$$f(x)=x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=x^2\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)=\frac{x^3+1}{x}.$$

• Αν $x<0$ έχουμε $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+1)=1>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[(x^3+1)\cdot\frac{1}{x}\right] = -\infty.$$

● Αν $x>0$ έχουμε $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+1) = 1 > 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(x^3+1)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει όριο της f στο $x_0 = 0$.

1.6 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8} = \frac{-9}{x\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(4\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{-9}{(x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}\cdot\frac{-9}{\sqrt{x}+2}.$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = [0,4)\cup(4,+\infty)$.

Για $x\in A$ είναι $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}-2\right)^2 = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)} = +\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 4}\frac{-9}{\sqrt{x}+2} = -\frac{9}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}\cdot\frac{-9}{\sqrt{x}+2}\right] = -\infty.$$

2. i) Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\text{συν}x = 0$ και $\text{συν}x > 0$ για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\text{συν}x} = +\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\text{ημ}x) = 1$, οπότε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\text{εφ}x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{1}{\text{συν}x}\right) = +\infty.$$

Ομοίως, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\text{συν}x) = 0$ και $\text{συν}x < 0$ για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\text{συν}x} = -\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\text{ημ}x) = 1$, οπότε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\text{εφ}x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\text{ημ}x\cdot\frac{1}{\text{συν}x}\right] = -\infty.$$

Επομένως, η $f(x) = \text{εφ}x$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{ημ}x) = 0$ και $\text{ημ}x > 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\text{ημ}x} = +\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{συν}x) = 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\text{σφ}x = \lim_{x\to 0^+}\left[\text{συν}x\cdot\frac{1}{\text{ημ}x}\right] = +\infty.$$

Ομοίως, $\lim\limits_{x\to 0^-}(\text{ημ}x) = 0$ και $\text{ημ}x < 0$ για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\text{ημ}x} = -\infty$.

Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}(\text{συν}x) = 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}(\text{σφ}x) = \lim_{x\to 0^-}\left[\text{συν}x\cdot\frac{1}{\text{ημ}x}\right] = -\infty.$$

Επομένως, η $f(x) = \text{σφ}x$ δεν έχει όριο στο 0.

3. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 1}[(\lambda-1)x^2+x-2] = \lambda-2.$$

— Αν $\lambda-2>0$ δηλαδή αν $\lambda>2$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της f στο 1.

— Αν $\lambda-2<0$ δηλαδή αν $\lambda<2$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της f στο 1.

— Αν $\lambda = 2$, τότε $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$, με $x \neq 1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}f(x) = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$.

Επομένως το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 2$.

Ομοίως, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}x = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}(x^2+2x+\mu) = \mu.$$

— Αν $\mu > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x) = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της g στο 0.

— Αν $\mu < 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της g στο 0.

— Αν $\mu = 0$, τότε $g(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$ με $x \neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\mu = 0$.

4. i) Θέτουμε $g(x) = \dfrac{x-4}{f(x)}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$, είναι $g(x) \neq 0$ κοντά στο 1. Επομένως

$$f(x) = \frac{x-4}{g(x)},\ \text{κοντά στο } 1.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x-4) = -3 < 0$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-4}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\left[(x-4)\frac{1}{g(x)}\right] = 0.$$

ii) Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+2}$, οπότε $f(x) = (x+2)g(x)$ κοντά στο 1. Επειδή

$\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}[(x+2)g(x)] = -\infty$$

iii) Θέτουμε $g(x) = f(x)(3x^2-2)$, οπότε $f(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2-2}$ κοντά στο 1.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{3x^2-2} = 1 > 0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[g(x)\cdot\frac{1}{3x^2-2}\right] = +\infty.$$

1.7 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3) = -10\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = -\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3) = 5\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3} = 0$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3}{4x^3}\right) = \dfrac{1}{2}$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^{10}+x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^{10}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^9} = 0$

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{5}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-5x^2-5}{(x^2+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x^2+2x-5}{x^3+2x^2+x+2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

viii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x} - \dfrac{x^2+3}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x+10}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2.$

2. i) Επειδή $\Delta = 4 - 4\cdot 4\cdot 3 < 0$ το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{4x^2-2x+3}$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$ όπου η f γράφεται:

$$f(x) = \sqrt{4x^2-2x+3} = \sqrt{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = +\infty.$$

ii) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2+10x+9$ είναι -9 και -1, οπότε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x^2+10x+9}$ είναι $A = (-\infty,-9]\cup[-1,+\infty)$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,-9]$ όπου η f γράφεται:

$$f(x) = \sqrt{x^2+10x+9}\sqrt{x^2\left(1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}\right) = +\infty.$$

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}$ είναι $A = (-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $[2,+\infty)$ όπου η f γράφεται:

$$f(x)=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right).$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)\right]=+\infty.$$

iv) Το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=(-\infty,\rho_1]\cup[\rho_2,+\infty)$, όπου ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $(x+\alpha)(x+\beta)=0$, που είναι οι αριθμοί $-\alpha,-\beta$. Άρα, η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\gamma)$ με $\gamma<0$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα αυτό, οπότε έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}-x=|x|\sqrt{1+\frac{\alpha+\beta}{x}+\frac{\alpha\beta}{x^2}}-x$$

$$=-x\left(\sqrt{1+\frac{\alpha+\beta}{x}+\frac{\alpha\beta}{x^2}}+1\right).$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{\alpha+\beta}{x}+\frac{\alpha\beta}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty.$$

v) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε η $f(x)$ γράφεται:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2-(4x^2-4x+3)}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}=\frac{-2}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}$$

$$=\frac{-2}{2x-1-x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{-2}{x\left[2-\frac{1}{x}-\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right]}.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2-\frac{1}{x}-\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=0\cdot\frac{-2}{2-0-\sqrt{4-0+0}}=0.$$

3. i) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ είναι το $\mathbb{R}^*$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ .$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

iii) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ είναι το $\mathbb{R}^*$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,0)$, οπότε

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

iv) Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,0)$, οπότε

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$= \frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

v) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ είναι $A = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε

$$f(x) = \frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{(-1)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{1\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= -\frac{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) = -\frac{1+1}{1+1} = -1.$$

vi) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε

$$f(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right) = x\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}$$

$$= x\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} = x\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = x\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

1.7 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f(x)=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right).$$

Επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)=1-\mu$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

— Αν $1-\mu>0$ δηλαδή $\mu<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

— Αν $1-\mu<0$ δηλαδή $\mu>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

— Αν $\mu=1$, τότε $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right]=0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

ii) Έστω $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$

— Αν $\mu=1$, τότε $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2-5x+6}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

— Αν $\mu=0$, τότε $f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{-5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5}=+\infty.$$

— Αν $\mu \neq 0, 1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\mu-1)}{\mu} x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \mu \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ -\infty, & \text{αν } \mu \in (0,1) \end{cases}.$$

2. Περιοριζόμαστε στο $(0,+\infty)$, οπότε:

$$f(x) = \sqrt{x^2+5x+10} - \lambda x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} - \lambda x = x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda\right) = 1-\lambda.$$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

— Αν $1-\lambda > 0$ δηλαδή $\lambda < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

— Αν $1-\lambda < 0$ δηλαδή $\lambda > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

— Αν τέλος $\lambda = 1$, τότε:

$$f(x) = \sqrt{x^2+5x+10} - x = \frac{5x+10}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}$$

$$= \frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)} = \frac{5+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}.$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5+0}{\sqrt{1}+1} = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}.$$

Ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 1$.

3. Είναι

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \alpha x + \beta = \frac{x^2+1-\alpha x^2+\beta x-\alpha x+\beta}{x+1}$$

$$= \frac{(1-\alpha)x^2+(\beta-\alpha)x+1+\beta}{x+1}$$

— Αν $\alpha \neq 1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\alpha)x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1-\alpha)x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha < 1 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha > 1 \end{cases}.$$

— Αν $\alpha = 1$ και $\alpha \neq \beta$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\beta-\alpha)x}{x} = \beta - \alpha \neq 0\,.$$

— Αν $\alpha = \beta = 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+1}{x+1} = 0.$

Ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1.$$

4. i) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ είναι το $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f(x) = \frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ είναι το $\mathbb{R}$. Περιοριζόμαστε στο $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5-x}{x+|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5-x}{x-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}$$

$$= \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{5}{x}+1\right)}{-x\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}-1\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{5}{x}+1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}-1}.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{5}{x}+1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}-1}$$

$$= \frac{1+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \sqrt{3}+1.$$

iii) Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}=x.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty.$$

1.8 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$, αφού

$$2=\lim_{x\to1^-} f(x)\neq\lim_{x\to1^+} f(x)=-1$$

Στα υπόλοιπα σημεία του πεδίου ορισμού της, όπως φαίνεται από το σχήμα, η f είναι συνεχής.

ii) Η f δεν είναι συνεχής στο 1, αφού $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2\neq f(1)=3$. Στα υπόλοιπα σημεία του πεδίου ορισμού της, όπως φαίνεται από το σχήμα, η f είναι συνεχής.

2. i) Είναι: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^2+4)=8$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} x^3=8$ και $f(2)=8$, οπότε $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

ii) Είναι:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{3+x}=2$ και $f(1)=2$, οπότε $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο 1.

iii) Για $x\neq-2$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+2}=(x-1)$,

οπότε

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}(x-1)=-3=f(-2).$$

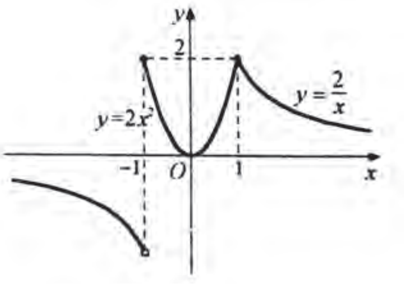
Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=-2$.

3. i) Η $f(x)$ γράφεται $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<-1\\ 2x^2, & -1\le x\le 1.\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$

Στο διάστημα $(-1,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση ενώ στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση.
Στο $x_0 = -1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x} = -2, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x^2 = 2 \text{ και } f(-1) = 2.$$

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο -1. Στο $x = 1$ έχουμε:



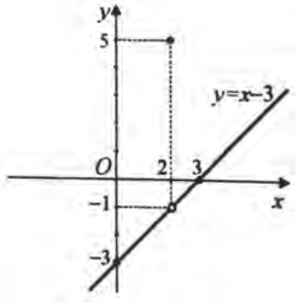
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2 \text{ και } f(1) = 2.$$

Επομενως η f δεν είναι συνεχής στο 1. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ii) Για $x \neq 2$ έχουμε

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3,$$

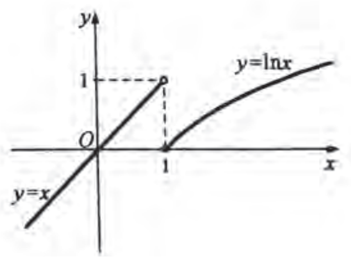


οπότε η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$, ως πολυωνυμική συνάρτηση.
Για $x = 2$ ισχύει

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-3) = -1 \neq f(2) = 5,$$

οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x = 2$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

iii) Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως λογαριθμική.
Στο $x_0 = 1$ έχουμε:



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\ln x\right) = 0 \text{ και } f(1) = 0.$$

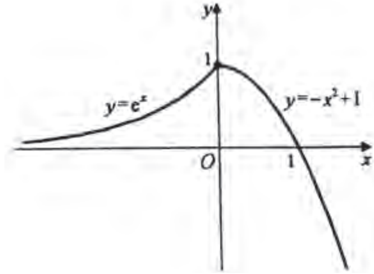
Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

iv) Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=e^x$ και είναι συνεχής.
Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=-x^2+1$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x^2+1)=1$$

και $f(0)=1$.



Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

4. i) Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x^2-3)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$$

και $f(1)=-1$.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ii) Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής.

Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1 \text{ και } f(0)=1.$$

Επομένως η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

5. i) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=\eta\mu u$ και $u=\sigma\upsilon\nu x$.

ii) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=\ln u$ και $u=x^2+x+1$.

iii) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=$ ημu και $u=\dfrac{1}{x^2+1}$.

iv) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=e^u$ και $u=$ ημx.

v) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=\ln u$ και $u=\ln x$.

6. Η συνάρτηση $f(x)=$ ημ$x-x+1$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και ισχύει $f(1)f(\pi)=1(1-\pi)<0$, δηλαδή πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Επομένως, η εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση ημ$x-x+1=0$, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,\pi)$.

7. i) Παρατηρούμε ότι: $f(0)=-1$ και $f(1)=1$, οπότε η $f(x)=x^3+x-1$ στο $[0,1]$ πληρεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Bolzano. Επομένως, η εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση $x^3+x-1=0$, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$. Άρα, ένας από τους ζητούμενους ακεραίους είναι ο $\alpha=0$.

ii) Ομοίως, ένας από τους ζητούμενους ακέραιους είναι ο $\alpha=-1$

iii) Ομοίως, ο $\alpha=-1$

iv) Ομοίως, ο $\alpha=1$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu).$$

Η f είναι συνεχής στο $[\lambda,\mu]$ και ισχύει $f(\lambda)f(\mu)<0$, αφού

$$f(\lambda)=\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)>0 \text{ και } f(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu)<0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_1\in(\lambda,\mu)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.
Ανάλογα βρίσκουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_2\in(\mu,\nu)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.
Επειδή η f είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο, δεν έχει άλλες ρίζες.

9. i) Έχουμε:

$$f(x)=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)$$
$$=(x+2)(x+1)(x-1),$$

οπότε

$$f(x)=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=1.$$

1.8

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το πρόσημο της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	-3	$-\frac{3}{2}$	0	2
$f(x)$	-8	$\frac{5}{8}$	-2	12
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$	$+$

ii) Έχουμε $f(x)=x^2(x^2-9)=x^2(x-3)(x+3)$, οπότε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (διπλή) ή } x=3 \text{ ή } x=-3.$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το πρόσημο της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	-4	-1	1	4
$f(x_0)$	112	-8	-8	112
Πρόσημο της f	$+$	$-$	$-$	$+$

iii) Έχουμε:

$$\text{εφ}x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3} \text{ ή } x=\frac{\pi}{3}, \text{ αφού } x\in(-\pi,\pi).$$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει το πρόσημο της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{12}$	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x_0)$	$-1-\sqrt{3}$	2	$-\sqrt{3}$	2	$-1-\sqrt{3}$
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

iv) Υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x)=0$ στο $[0,2\pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} ημx+συνx=0 &\Leftrightarrow ημx=-συνx \\ &\Leftrightarrow εφx=-1 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει το πρόσημο της $f(x)=ημx+συνx$ σε κάθε διάστημα:

Διάστημα	$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f(x_0)$	1	– 1	1
Πρόσημο της f	+	–	+

10. i) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x-1$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,e]$. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(1),f(e)]=[-1,0]$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=-x+2$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,2)$. Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,2)$, αφού $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=2ημx+1$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$. (Αφού η συνάρτηση του $g(x)=ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο πρώτο τεταρτημόριο). Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[1,2)$, αφού $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=2$.

iv) Η συνάρτηση $f(x)=e^x+1$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,0]$. Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(1,2]$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ και $f(0)=2$.

1.8 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}(x^2-\kappa^2) = \lim_{x\to 2^+}(\kappa x+5) = 4-\kappa^2$$

$$\Leftrightarrow 4-\kappa^2 = 2\kappa+5$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2+2\kappa+1=0$$

$$\Leftrightarrow \kappa=-1.$$

2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(\alpha^2x^2+\beta x-12) = \lim_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta) = 5$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta-12 = \alpha+\beta = 5.$$

Από την επίλυση του τελευταίου συστήματος βρίσκουμε

$$(\alpha = 4, \beta = 1) \quad \text{ή} \quad (\alpha = -3, \beta = 8).$$

3. i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Συνεπώς,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}^2x-1}{x(\text{συν}x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\text{ημ}^2x}{x(1+\text{συν}x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(-\text{ημ}x)\left(\frac{\text{ημ}x}{x}\right)\frac{1}{1+\text{συν}x}\right] = 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

ii) Επειδή η g είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει $g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$.

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
Για $x > 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$|xg(x)-\text{ημ}x| \le x^2$$

$$-x^2 \le xg(x)-\text{ημ}x \le x^2$$

$$-x^2+\text{ημ}x \le xg(x) \le x^2+\text{ημ}x$$

$$-x+\frac{\text{ημ}x}{x} \le g(x) \le x+\frac{\text{ημ}x}{x}.$$

Αλλά

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-x+\frac{\text{ημ}x}{x}\right) = 1 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{\text{ημ}x}{x}\right) = 1,$$

οπότε, από το θεώρημα παρεμβολής, είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$. Επομένως $g(0) = 1$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $\varphi(0)\varphi(1) < 0$, αφού

$$\varphi(0) = f(0) - g(0) < 0 \text{ και } \varphi(1) = f(1) - g(1) > 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\xi) = 0$, οπότε $f(\xi) = g(\xi)$.

5. α) Στο ανοικτό διάστημα $(1,2)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x^4+1)(x-2)+(x^6+1)(x-1)=0.$$

Επομένως, έχουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x^4+1)(x-2)+(x^6+1)(x-1)$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$. Πράγματι

• Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και

• Ισχύει $f(1)\,f(2) = (-2)(65) < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, η f έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$.

β) Στο ανοιχτό διάστημα $(1,2)$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x-2)e^x+(x-1)\ln x=0$$

Επομένως, έχουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$$

έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$. Πράγματι

● Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και

● Ισχύει $f(1)\,f(2) = (-e)\ln 2 < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, η f έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1,2)$.

6. i) Αναζητούμε λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επειδή όμως $f(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ με $x > 0$, ενώ $g(x) = \dfrac{1}{x} < 0$ με $x < 0$, η εξίσωση, $f(x) = g(x)$, αν έχει κάποια λύση, αυτή θα ανήκει στο $(0,+\infty)$.

Συνεπώς, αναζητούμε λύση της $f(x) = g(x)$ στο $(0,+\infty)$ ή, ισοδύναμα, της εξίσωσης $f(x) - g(x) = 0$ στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - g(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$. Η συνάρτηση αυτή είναι:

- συνεχής στο $(0,+\infty)$.
- γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases}, \text{ οπότε } \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2} \end{cases}, \text{ και αρα } e^{x_1} - \dfrac{1}{x_1} < e^{x_2} - \dfrac{1}{x_2}, \text{ δηλαδή } \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της φ είναι το διάστημα $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Άρα η φ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,+\infty)$. Επειδή, όμως, η φ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο $(0,+\infty)$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

ii) Αναζητούμε λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο $(0,+\infty)$ ή, ισοδύναμα, της εξίσωσης $\ln x = \dfrac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$. Η συνάρτηση αυτή:

- Είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Πράγματι

Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases}, \text{ οπότε } \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2} \end{cases}, \text{ και άρα } \ln x_1 - \dfrac{1}{x_1} < \ln x_2 - \dfrac{1}{x_2}, \text{ δηλαδή}$$

$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της φ είναι το διάστημα $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Άρα η φ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,+\infty)$. Επειδή, επιπλέον, η φ είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο $(0,+\infty)$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

7. i) Για κάθε $x \in [-1,1]$ έχουμε

$$f^2(x) = 1 - x^2 \qquad (1)$$

α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ στο $[-1,1]$ γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως, λύσεις της $f(x) = 0$ στο $[-1,1]$ είναι μόνο οι -1 και 1.

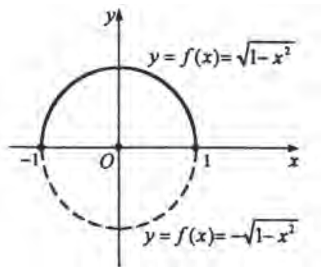
β) Η f στο $(-1,1)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό. Επομένως, στο $(-1,1)$ η f διατηρεί πρόσημο.

● Αν $f(x) > 0$ στο $(-1,1)$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και επειδή $f(-1) = f(1) = 0$, έχουμε

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

● Αν $f(x) < 0$ στο $(-1,1)$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ και επειδή $f(-1) = f(1) = 0$, έχουμε

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}, \; x \in [-1,1]$$



Η γραφική παράσταση της f σε κάθε περίπτωση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ii) α) Έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σ' αυτό. Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$. Έτσι:

— αν $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι

$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = x}$, αφού $x < 0$, ενώ

— αν $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι
$f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = -x}$, αφού $x < 0$.

Επειδή, επιπλέον $f(0) = 0$, έχουμε

$$f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \text{ ή}$$

$$f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0].$$

Ομοίως, έχουμε

$$f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \text{ ή}$$

$$f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, η f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους:

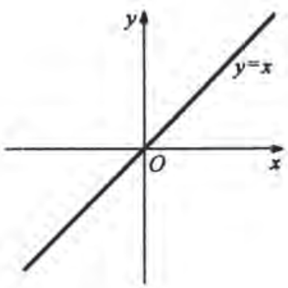
α) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$,

β) $f(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$

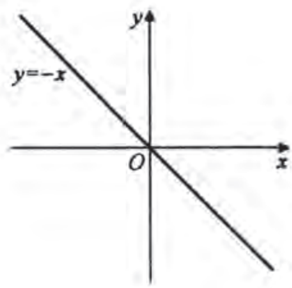
γ) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ή, πιο απλά, $f(x) = |x|$

δ) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$ ή, πιο απλά, $f(x) = -|x|$.

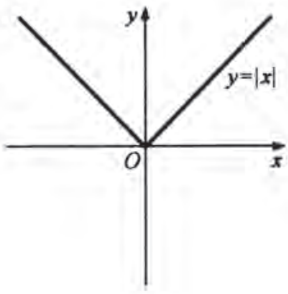
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται σε κάθε περίπτωση στα παρακάτω σχήματα (α), (β), (γ), (δ) αντιστοίχως.



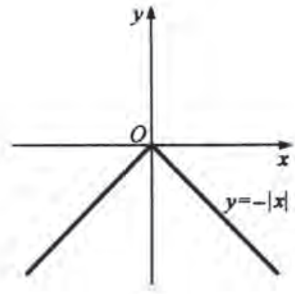
(α)



(β)



(γ)



(δ)

8. i) Η εξίσωση της διαγωνίου OB είναι η

$$y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0) \Leftrightarrow y=x.$$

Ομοίως η εξίσωση της διαγωνίου $ΑΓ$ είναι η

$$y-0=\frac{1-0}{0-1}(x-1) \Leftrightarrow y=-x+1.$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και η γραφική της παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο. Επομένως, το σύνολο τιμών της είναι υποσύνολο του $[0,1]$. Είναι δηλαδή $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

● Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο $y=x$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στον $[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $\varphi(0)=f(0)\geq 0$ και $\varphi(1)=f(1)-1\leq 0$.

— Αν $\varphi(0)=0$, τότε $f(0)=0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ως ρίζα τον $x=0$ και η C_f τέμνει την OB στο $O(0,0)$.

— Αν $\varphi(1)=0$, τότε $f(1)=1$, οπότε η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ως ρίζα τον $x=$ 1 και η C_f τέμνει την OB στο $A(1,1)$.

— Αν $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$, οπότε $f(x_0)=x_0$ και η C_f τέμνει την OB στο σημείο $P(x_0, x_0)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση η C_f τέμνει την OB.

● Για την άλλη διαγώνιο εργαζόμαστε ομοίως.

9. i) Έστω $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο της C_f. Τότε

$$d=d(x)=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2} \quad \text{με } x\in[\alpha,\beta].$$

ii) Η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως ρίζα αθροίσματος συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, θα υπάρχει κάποιο $x_1 \in[\alpha,\beta]$ για το οποίο η d θα πάρει τη μέγιστη τιμή της και κάποιο $x_2 \in[\alpha,\beta]$ για το οποίο η d θα πάρει την ελάχιστη τιμή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+1-1}{x}=\frac{x^2}{x}=x,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Επομένως $f'(0)=0$.

ii) Για $x \in \mathbb{R}^*-\{1\}$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}=\frac{1-x^2}{x^2(x-1)}=\frac{-(x+1)}{x^2},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{x^2}=-2$$

Επομένως $f'(1)=-2$.

iii) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\frac{\eta\mu^2 x}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0.$$

Επομένως $f'(0)=0$.

2. i) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|-0}{x}=|x|,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

Επομένως έχουμε $f'(0)=0$.

ii) ● Για $x>1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1-0}{x-1}=1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(1)=1$$

● Για $x<1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-(x-1)-0}{x-1}=-1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1.$$

Επειδή $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=1$.

iii) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,3)$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-x^2+3x-2}{x-1}=\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}=-x+2,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-x+2)=1.$$

Επομένως $f'(1)=1$.

iv) ● Για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1.$$

● Για $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+1-1}{x}=1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(1)=1.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, με $f'(0)=1$.

3. Για κάθε x από το πεδίο ορισμού της f με $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{xf(x)-0f(0)}{x}=\frac{xf(x)}{x}=f(x),$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

αφού η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.
Επομένως η g παραγωγίζεται στο 0 με $g'(0)=f(0)$.

4. i) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^3=0 \text{ και } f(0)=0.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει. Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο 0. Αφού όμως η f δεν είναι συνεχής στο 0, δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη σ' αυτό.

ii) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(|x-1|+1\right)=1 \text{ και } f(1)=1.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

— Για $x<1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-(x-1)+1-1}{x-1}=-1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1.$$

— Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x-1+1-1}{x-1}=1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=1$.

5. ● Από την άσκηση 1 έχουμε:

i) $f(x)=x^2+1$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (0,1) είναι:

$$y-1=0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=1.$$

ii) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(1)=1$ και $f'(1)=-2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (1,1) είναι:

$$y-1=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+3.$$

iii) $f(x)=\eta\mu^2 x$, $f(0)=0$ και $f'(0)=0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (0,0) είναι:

$$y-0=0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=0.$$

● Από την άσκηση 2 έχουμε:

i) $f(x)=x|x|$, $f(0)=0$ και $f'(0)=0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (0,0) είναι:

$$y-0=0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=0$$

ii) $f(x)=|x-1|$, $f(1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ δεν υπάρχει. Επομένως δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο (1,0).

iii) $f(x)=|x^2-3x|$, $f(1)=2$ και $f'(1)=1$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (1,2) είναι:

$$y-2=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$$

iv) $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x<0\\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=1$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,1)$ είναι:

$$y-1=1(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.$$

2.1 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2-x+x\eta\mu|x|-2}{x}=\frac{x\left(-1+\eta\mu|x|\right)}{x}=-1+\eta\mu|x|,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\eta\mu|x|\right)=-1,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to 0}\left(\eta\mu|x|\right)=0.$$

Επομένως, $f'(0)=-1$.

2. i) Για $h=0$ έχουμε $f(1)=2$.

ii) Για κάθε $h\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h^3+3h^2+3h+2-2}{h}=\frac{h(h^2+3h+3)}{h}=h^2+3h+3,$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3.$$

Επομένως $f'(1)=3$.

3. ● Για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1.$$

● Για $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\eta\mu x+1-1}{x}=\frac{\eta\mu x}{x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$$

Επομένως $f'(0)=1$.

Άρα, ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(0) = 1$, οπότε

$$\varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$

4. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-0}{x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= \frac{\eta\mu^2 x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right] = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι:

$$(x+1) \leq f(x) \leq x^2 + x + 1 \qquad (1)$$

i) Για $x = 0$, από την (1) έχουμε:

$$1 \leq f(0) \leq 1, \text{ οπότε } f(0) = 1.$$

Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x \leq f(x) - 1 \leq x^2 + x \Leftrightarrow x \leq f(x) - f(0) \leq x(x+1) \qquad (2)$$

ii) ● Για $x < 0$, από τη (2) έχουμε:

$$1 \geq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq x+1. \qquad (3)$$

● Για $x > 0$, από τη (2) έχουμε

$$1 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1 \qquad (4)$$

iii) Από τη σχέση (3) επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1 = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

Από τη σχέση (4) επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1.$$

Επομένως $f'(0)=1$.

6. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\eta\mu^2 x-x^4\le xf(x)\le \eta\mu^2 x+x^4 \qquad (1)$$

i) Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.
Για $x>0$, από την (1), έχουμε

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x}-\frac{x^4}{x}\le f(x)\le\frac{\eta\mu^2 x}{x}+\frac{x^4}{x}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x-x^3\le f(x)\le\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x+x^3.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x-x^3\right)=1\cdot 0-0=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x+x^3\right)=1\cdot 0+0=0,$$

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. Άρα $f(0)=0$.

ii) ● Για $x\neq 0$, από την (1), έχουμε

$$\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}-\frac{x^4}{x^2}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{x^4}{x^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-x^2\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2+x^2.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-x^2\right]=1^2-0=1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2+x^2\right]=1+0=1,$$

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1. \qquad (2)$

Άρα $f'(0)=1$.

7. i) Αφού η f είναι συνεχής στο 0 ισχύει

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Αλλά $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0} x = 4\cdot 0 = 0.$

Επομένως, $f(0) = 0$.

ii) Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 4, \text{ λόγω της υπόθεσης.}$$

8. i) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Για $h \neq 0$ είναι

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}.\\ &= -\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}\\ &= -\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} \quad (\text{θέσαμε } k=-h)\\ &= -f'(x_0)\end{aligned}$$

ii) Για $h \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h}\\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\\ &= f'(x_0)-(-f'(x_0))\\ &= 2f'(x_0).\end{aligned}$$

(Σύμφωνα με το ερώτημα i) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$).

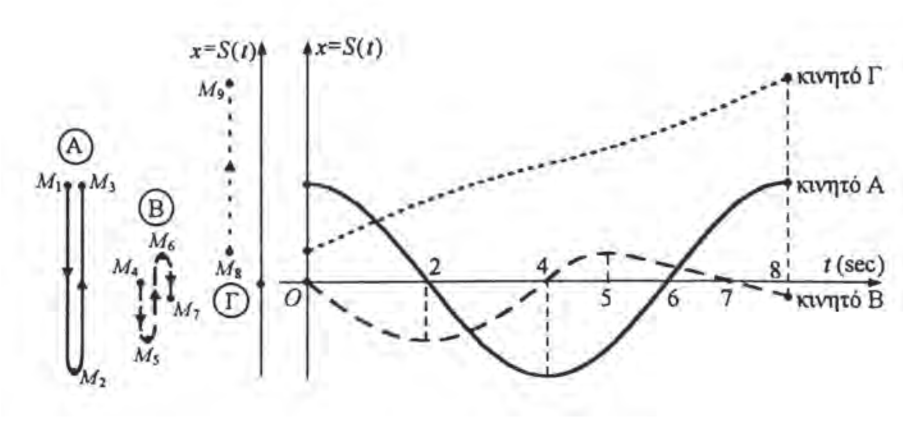
9. i) Από την αρχή του άξονα κίνησης ξεκίνησε το κινητό *B*.

ii) Μόνο προς τα δεξιά κινήθηκε το κινητό *Γ*, αφού η συνάρτηση θέσης του είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec το κινητό *B* άλλαξε φορά κίνησης, γιατί τότε η συνάρτηση θέσης από γνησίως φθίνουσα γίνεται γνησίως αύξουσα.
Τη στιγμή $t = 4$ sec άλλαξε φορά κίνησης το κινητό *A*, αφού η συνάρτηση θέσης του από γνησίως φθίνουσα γίνεται γνησίως αύξουσα. Τέλος τη χρονική στιγμή $t = 5$ sec άλλαξε φορά κίνησης το κινητό *B*, αφού τη συνάρτηση θέσης του από γνησίως αύξουσα γίνεται γνησίως φθίνουσα.

iv) Στο χρονικό διάστημα [0,4] το κινητό *A* κινήθηκε μόνο αριστερά, αφού η συνάρτηση θέσης του είναι γνησίως φθίνουσα.

v) Πιο κοντά στην αρχή των αξόνων τερμάτισε το κινητό *B*.
Όλα τα παραπάνω φαίνονται καλύτερα, αν προβάλλουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσης στον άξονα κίνησης:



vi) Το κινητό *A* διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα, αφού:

— Το *A* κινητό διαγράφει διάστημα ίσο με $M_1M_2 + M_2M_3$

—Το *B* κινητό διαγράφει διάστημα ίσο με $M_4M_5 + M_5M_6 + M_6M_7$

—Το *Γ* κινητό διαγράφει διάστημα ίσο με M_8M_9.

2.2 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 4x^3$, οπότε $f'(-1) = -4$.

ii) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ οπότε } f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = -$ ημx, οπότε $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\text{ημ}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

iv) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε $f'(e) = \frac{1}{e}$.

v) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = e^x$, οπότε $f'(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$.

2. i) ● Για κάθε $x < 1$ ισχύει $f'(x) = 2x$.

● Για κάθε $x > 1$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 = 1$.

— Για $x < 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2.$$

— Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 1$.

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x>1 \end{cases}.$$

ii) ● Για κάθε $x<0$ ισχύει $f'(x)=\text{συν}x$.

● Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=1$.

● Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=0$.

— Για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\text{ημ}x-0}{x}=\frac{\text{ημ}x}{x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\text{ημ}x}{x}=1.$$

— Για $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x}=1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1.$$

Επομένως $f'(0)=1$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\text{συν}x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$.

iii) ● Για κάθε $x<2$ ισχύει $f'(x)=3x^2$.

● Για κάθε $x>2$ ισχύει $f'(x)=4x^3$.

● Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=2$. Επειδή

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}x^3=8 \;\text{ και }\; \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^4=16,$$

η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=2$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<2\\ 4x^3, & x>2\end{cases}$.

iv) ● Για κάθε $x<\frac{2}{3}$ ισχύει $f'(x)=2x$.

● Για κάθε $x>\frac{2}{3}$ ισχύει $f'(x)=3x^2$.

● Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=\frac{2}{3}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x)=\frac{4}{9}=f\left(\frac{2}{3}\right) \text{ και } \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x)=\frac{8}{27}\neq f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Δηλαδή η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=\frac{2}{3}$.

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=\frac{2}{3}$.

Επομένως, $f'(x)=\begin{cases}2x, & x<\frac{2}{3}\\ 3x^2, & x>\frac{2}{3}\end{cases}$.

3. Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία, τα $M_1(x_1,x_1^2)$ και $M_2(x_2,x_2^2)$ με $x_1\neq x_2$, στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες. Τότε, επειδή η f παραγωγίζεται στο πεδίο ορισμού της, θα πρέπει $f'(x_1)=f'(x_2)$, οπότε $2x_1=2x_2$ και άρα $x_1=x_2$, που είναι άτοπο, αφού $x_1\neq x_2$.
Άρα, δεν υπάρχουν διαφορετικές εφαπτομένες της C_f που να είναι παράλληλες. Για τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^3$ δεν συμβαίνει το ίδιο. Πράγματι, για να υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία αυτής, τα $M_1(x_1,x_1^3)$, $M_2(x_2,x_2^3)$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες, αρκεί να ισχύει:

$$\begin{cases}f'(x_1)=f'(x_2)\\ x_1\neq x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1^2=3x_2^2\\ x_1\neq x_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=x_2^2\\ x_1\neq x_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1=-x_2\neq 0.$$

Επομένως, στα σημεία $M_1(x_1,x_1^3)$, $M_2(-x_1,-x_1^3)$ με $x_1\neq 0$ οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

4. ● Στο διάστημα $[-2,0)$ η κλίση της f είναι σταθερή και ίση με

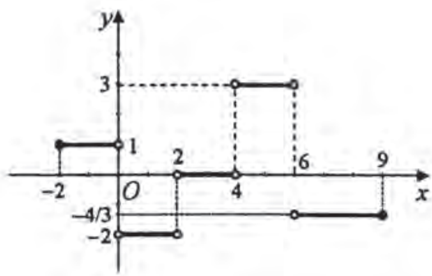
$$\frac{2-0}{0-(-2)}=\frac{2}{2}=1.$$

● Στο $(0,2)$ η f έχει κλίση ίση με $\frac{-2-2}{2-0}=-2$.

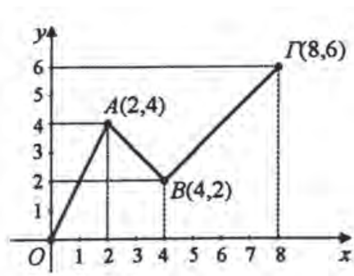
- Στο (2,4) η κλίση της είναι 0.
- Στο (4,6) η κλίση της είναι ίση με $\dfrac{4+2}{6-4}=\dfrac{6}{2}=3$.
- Στο (6,9] η κλίση της f είναι ίση με $\dfrac{0-4}{9-6}=-\dfrac{4}{3}$.

Επομένως, $f'(x)=\begin{cases} 1, & x\in[-2,0) \\ -2, & x\in(0,2) \\ 0, & x\in(2,4) \\ 3, & x\in(4,6) \\ -\dfrac{4}{3}, & x\in(6,9] \end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



5. Στο διάστημα [0,2) είναι $f'(x)=2$. Άρα, στο διάστημα αυτό η f παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση **2**, δηλαδή παράλληλο στην ευθεία $y=2x$. Στο διάστημα (2,4) είναι $f'(x)=-1$. Άρα, στο διάστημα αυτό η f παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση $-$**1**, δηλαδή παράλληλο στην ευθεία $y=-x$. Τέλος, στο διάστημα (4,8] είναι $f'(x)=1$. Άρα, στο διάστημα αυτό η f παριστάνει ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση **1**, δηλαδή παράλληλο στην ευθεία $y=x$.



Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, την υπόθεση ότι η C_f ξεκινάει από το $O(0,0)$ και ότι η f είναι συνεχής στα σημεία 2 και 4, παίρνουμε τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.

2.2 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αρχικά θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0 = \pi$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \eta\mu x = 0,$$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} (\alpha x + \beta) = \alpha\pi + \beta \ \text{ και } \ f(\pi) = \alpha\pi + \beta.$$

Άρα θα πρέπει

$$\alpha\pi + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha\pi \qquad (1)$$

Έτσι η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ \alpha x - \alpha\pi, & x \geq \pi \end{cases}.$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$, αρκεί:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$$

— Για $x < \pi$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \frac{\eta\mu x - 0}{x - \pi},$$

οπότε

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\eta\mu x}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{-(\pi - x)} = -1.$$

— Για $x > \pi$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \frac{\alpha x - \alpha\pi}{x - \pi} = \alpha,$$

οπότε

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \alpha.$$

Άρα $\alpha = -1$, οπότε από την (1) έχουμε $\beta = \pi$.

2. Για κάθε $\xi \in (0,+\infty)$ έχουμε $f'(\xi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:

$$y - \sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x - \xi) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $B(-\xi,0)$, αφού

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(-\xi) + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = \frac{-\sqrt{\xi}}{2} + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = 0.$$

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = 3x^2$, οπότε $f'(\alpha) = 3\alpha^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\alpha,\alpha^3)$ είναι:

$$y - \alpha^3 = 3\alpha^2(x - \alpha) \Leftrightarrow y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3.$$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{cases}$

Έχουμε:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^2 - \alpha^2) - 2\alpha^2(x - \alpha) = 0 \end{cases}$$

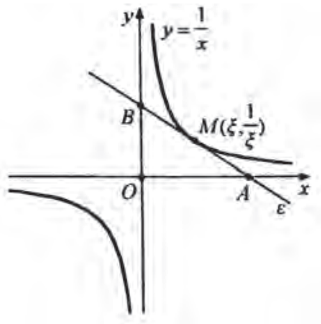
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ (x-\alpha)(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = \alpha \text{ ή } x = -2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha^3 \\ x = \alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = -8\alpha^3 \\ x = -2\alpha \end{cases}.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha,\alpha^3)$ έχει και άλλο κοινό σημείο με την C_f το $N(-2\alpha, -8\alpha^3)$. Είναι

$$f'(-2\alpha) = 3(-2\alpha)^2 = 12\alpha^2 = 4 \cdot 3\alpha^2 = 4 \cdot f'(\alpha).$$

4. i) Είναι



$$f'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$$=\lim_{x\to\xi}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{-1}{\xi x}=-\frac{1}{\xi^2}$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι

$$y-\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}(x-\xi).$$

Για $y=0$ είναι

$$-\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}(x-\xi)\Leftrightarrow \xi=x-\xi \Leftrightarrow x=2\xi.$$

Άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(2\xi,0)$.

Για $x=0$ είναι

$$y-\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}(0-\xi)\Leftrightarrow y=\frac{2}{\xi}.$$

Άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο $B\left(0,\frac{2}{\xi}\right)$.

Επομένως, οι συντεταγμένες του μέσου του AB είναι

$$\frac{2\xi+0}{2}=\xi \text{ και } \frac{0+\frac{2}{\xi}}{2}=\frac{1}{\xi}.$$

Άρα, το μέσο του AB είναι το σημείο $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|2\xi|\cdot\left|\frac{2}{\xi}\right|=\frac{1}{2}\left|2\xi\cdot\frac{2}{\xi}\right|=2 \text{ τ.μ.}$$

2.3 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $f'(x)=7x^6-4x^3+6$

ii) $f'(x)=6x^2+\dfrac{1}{x}$

iii) $f'(x)=x^3-x^2+x-1$

iv) $f'(x)=-\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

2. i) $f'(x)=2x(x-3)+x^2-1=2x^2-6x+x^2-1=3x^2-6x-1$

ii) $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

iii) $f'(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

iv) $f'(x)=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2x+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

v) $f'(x)=2x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+x^2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x\eta\mu x$

$$=x\eta\mu 2x+x^2(\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x)$$

$$=x\eta\mu 2x+x^2\sigma\upsilon\nu 2x=x(\eta\mu 2x+x\sigma\upsilon\nu 2x).$$

3. i) $f'(x)=\dfrac{e^x\ln x-e^x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{e^x\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$

ii) $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-\dfrac{1}{\eta\mu^2x}=\dfrac{\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x}=-\dfrac{4\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$

iii) $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x e^x-\eta\mu x e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{e^{2x}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iv) Έχουμε:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}=\frac{-4x}{x^2-1},$$

οπότε

$$f'(x)=\frac{-4(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}.$$

4. i) ● Για κάθε $x<0$ ισχύει $f'(\mathrm{x})=4x+3$

● Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=12\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+6=\dfrac{6}{\sqrt{x}}+6.$

● Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο $x_0=0.$

— Για $x<0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2x^2+3x}{x}=2x+3,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(2x+3)=3$$

— Για $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{12\sqrt{x}+6x}{x}=\frac{12}{\sqrt{x}}+6,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{12}{\sqrt{x}}+6\right)=+\infty.$$

Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=0.$

$$\text{Άρα } f'(x)=\begin{cases}4x+3, & x<0\\ 6\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right), & x>0\end{cases}.$$

ii) ● Για κάθε $x<0$ ισχύει $f'(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x$

- Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) = 1$.
- Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

— Για $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 + \eta\mu x}{x} = x + \frac{\eta\mu x}{x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = 1, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Επομένως $f'(0) = 1$.

Έτσι $f'(x) = \begin{cases} 2x + \sigma\upsilon\nu x, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$

5. Θα πρέπει να βρούμε εκείνα τα σημεία $(x, f(x))$ της C_f για τα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

i) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2.$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι $(-2, -4)$ και $(2,4)$.

ii) Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x},$$

οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(1,\frac{1}{e}\right)$.

iii) Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1.$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα (–1, –2) και (1,2).

6. ● Για κάθε $x\neq 1$ ισχύει:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-2(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$$

● Για κάθε $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι

$$g(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x-1}=\frac{2(x+1)}{x-1}, \text{ οπότε } g'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}.$$

Δεν ισχύει η ισότητα των f', g', αφού αυτές έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

7. ● Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=2x$, οπότε $f'(1)=2$.

● Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $g'(x)=-\frac{1}{2x^2}$, οπότε $g'(1)=-\frac{1}{2}$.

Επειδή $f'(1)\cdot g'(1)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο (1,1) είναι κάθετες.

8. Παρατηρούμε ότι το σημείο $A(0,1)$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}^*$, βρίσκεται πάνω στην C_f. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\alpha(x+\alpha)-(\alpha x+\alpha)}{(x+\alpha)^2}=\frac{\alpha^2-\alpha}{(x+\alpha)^2},$$

οπότε

$$f'(0)=\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha^2}=\frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Επομένως

$$f'(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\alpha-2=\alpha\Leftrightarrow\alpha=2.$$

9. i) Τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x+1$ είναι αυτά για τα οποία ισχύει $f'(x)=9$. Αλλά $f'(x)=3x^2-3$, οπότε

$$3x^2-3=9\Leftrightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=2.$$

Επομένως, τα σημεία είναι (–2,3) και (2,7).

ii) Τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη είναι κάθετη προς την ευθεία $y = -x$ είναι αυτά για τα οποία ισχύει: $f'(x)\cdot(-1)=-1$ ή ισοδύναμα:

$$(-1)(3x^2-3)=-1\Leftrightarrow 3x^2-3=1\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-2\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως τα σημεία είναι

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{-10\sqrt{3}+45}{9}\right) \text{ και } \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{10\sqrt{3}+45}{9}\right).$$

10. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$ αυτής έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2. \qquad (1)$$

Για να περνάει η ε από το σημείο $A(0,-1)$, αρκεί να ισχύει

$$-1=2x_0\cdot 0-x_0^2\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=1 \text{ ή } x_0=-1.$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες προκύπτουν από την (1), αν θέσουμε $x_0 = 1$ και $x_0 = -1$. Άρα, είναι οι ευθείες $y = 2x-1$ και $y = -2x-1$.

11. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $O(0,0)$, οπότε

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(0)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ \gamma=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=2\alpha x+\beta$.

Επειδή η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στο σημείο $O(0,0)$ θα είναι:

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = 0$.

12. i) Έχουμε

$$f'(x) = ((3x^4 + 4x^3)^{-2})' = -2(3x^4 + 4x^3)^{-2-1} \cdot (3x^4 + 4x^3)'$$

$$= -\frac{2}{(3x^4 + 4x^3)^3} \cdot (12x^3 + 12x^2)$$

$$= \frac{-24(x+1)}{x^7(3x+4)^3}.$$

ii) Για $x \in (1, +\infty)$ έχουμε

$$f'(x) = ((x-1)^{2/3})' = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}(x-1)' = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1}}.$$

iii) Είναι

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

iv) Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - x} \cdot \left(\frac{1}{x} - x\right)'$$

$$= \frac{x}{1-x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{-x(1+x^2)}{(1-x^2)x^2}$$

$$= \frac{-(1+x^2)}{x(1-x^2)} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}.$$

v) Είναι $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$.

13. i) Για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$f'(x) = (x^2)'\sqrt{1+x^2} + x^2\left(\sqrt{1+x^3}\right)'$$

$$= 2x\sqrt{1+x^3} + x^2 \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = 2x\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^4}{2\sqrt{1+x^3}},$$

οπότε

$$f'(2) = 2\cdot 2\sqrt{1+8} + \frac{3\cdot 2^4}{2\sqrt{1+8}} = 12 + \frac{48}{6} = 20.$$

ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2 + \frac{2}{3}(2x)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2 = \frac{2}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}(2x)^{-\frac{1}{3}},$$

οπότε

$$f'(4) = \frac{2}{3}8^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = 3x^2\eta\mu^3(\pi x) + x^3 3\eta\mu^2(\pi x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\pi$$

$$= 3x^2[\eta\mu^3(\pi x) + \pi x\eta\mu^2(\pi x)\sigma\upsilon\nu(\pi x)],$$

οπότε

$$f'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{36}\left(\frac{1}{8} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}\pi}{48}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{6+\sqrt{3}\pi}{48}\right)$$

iv) Για κάθε $x \neq 2$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) + x^2 + 2}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2 + 2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(2-x)^2},$$

οπότε

$$f'(3) = \frac{-9+12+2}{1} = 5.$$

14. i) Για $x>0$ έχουμε $f(x)=e^{\ln x \ln x}=e^{\ln^2 x}$, οπότε

$$f'(x)=e^{\ln^2 x}\cdot(\ln^2 x)'$$

$$=e^{\ln^2 x}\cdot\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{\ln x}\cdot 2\frac{1}{x}\ln x$$

$$=2x^{\ln x-1}\cdot\ln x$$

ii) Είναι $f(x)=e^{(5x-3)\ln 2}$, οπότε

$$f'(x)=e^{(5x-3)\ln 2}\cdot((5x-3)\ln 2)'$$

$$=e^{(5x-3)\ln 2}\cdot 5\ln 2=2^{5x-3}\cdot 5\ln 2.$$

iii) Για $x>1$ ισχύει $f(x)=e^{x\ln(\ln x)}$, οπότε

$$f'(x)=e^{x\ln(\ln x)}\cdot(x\ln(\ln x))'$$

$$=e^{x\ln(\ln x)}\cdot\left(\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=(\ln x)^x\cdot\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right).$$

iv) Έχουμε

$$f'(x)=(\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x})'=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x(e^{\sigma\upsilon\nu x})'$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$=e^{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x).$$

15. Είναι

$$f'(x)=(\eta\mu^2 x)'=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu 2x$$

και

$$f''(x)=\sigma\upsilon\nu 2x\cdot 2.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f''(x)+4f(x) &= 2\sigma\upsilon\nu 2x + 4\eta\mu^2 x \\ &= 2(1-2\eta\mu^2 x)+4\eta\mu^2 x \\ &= 2-4\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x \\ &= 2. \end{aligned}$$

2.3 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα κοινό σημείο, αν και μόνο αν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=x_0^2-x_0+1 \Leftrightarrow x_0^3-x_0^2+x_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2+1)=0 \Leftrightarrow x_0=1.$$

Επομένως, το σημείο (1,1) είναι το μόνο κοινό σημείο των C_f και C_g.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \text{ και } g'(x)=2x-1,$$

οπότε

$$f'(1)=-1 \text{ και } g'(1)=1$$

και επομένως ισχύει

$$f'(1)g'(1)=-1.$$

Επομένως οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο σημείο (1,1) είναι κάθετες.

2. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ y=x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2 \\ x^3-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2 \\ (x-1)^2(x+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2 \\ x=1 \text{ ή } x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-2 \\ y=-8 \end{cases}.$$

Επομένως, η ευθεία $y=3x-2$ τέμνει την C_f στα σημεία (1,1) και (–2, –8).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(\mathrm{x})=3x^2, \text{ οπότε } f'(1)=3 \text{ και } f'(-2)=12.$$

Άρα η ευθεία $y = 3x - 2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $(1,1)$.

3. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν $f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f'(x) = 2\alpha x + \beta \text{ και } g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

οπότε

$$f'(1) = 2\alpha + \beta \text{ και } g'(1) = -1.$$

Επομένως

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}.$$

4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι:

$$y - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1, \text{ αφού } f'(0) = 1.$$

Η ευθεία $y = x + 1$ θα εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g, αν και μόνο αν υπάρχει x_0, τέτοιο, ώστε

$$\begin{cases} g(x_0) = x_0 + 1 \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^2 - x_0 = x_0 + 1 \\ -2x_0 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Επομένως, η $y = x + 1$ εφάπτεται στη C_g στο σημείο $(-1,0)$.

5. Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι της μορφής $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma, \quad f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \text{ και } f^{(3)}(x) = 6\alpha.$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f'(-1) = 2 \\ f''(2) = 4 \\ f^{(3)}(1) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 4 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 2 \\ 12\alpha + 2\beta = 4 \\ 6\alpha = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 4 \\ \gamma = -9 \\ \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Επομένως

$$f(x)=x^3-4x^2-9x+4.$$

6. Έστω ότι υπάρχει πολυώνυμο β′ βαθμού $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης. Τότε θα είναι

$$f(0)=1 \text{ και } f'(0)=1 \text{ και } f(1)=2 \text{ και } f'(1)=3.$$

Όμως, $f'(x)=2\alpha x+\beta$. Επομένως, θα ισχύει

$$\gamma=1 \text{ και } \beta=1 \text{ και } \alpha+\beta+\gamma=2 \text{ και } 2\alpha+\beta=3.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο αφού από τις τρεις πρώτες εξισώσεις προκύπτει ότι $\alpha=0$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, που δεν επαληθεύουν την τελευταία.

7. i) Για $x\neq\alpha$ είναι

$$\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{xf(x)-xf(\alpha)+xf(\alpha)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$=\frac{x(f(x)-f(\alpha))}{x-\alpha}+\frac{f(\alpha)(x-\alpha)}{x-\alpha}=x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha).$$

Επειδή η f παραγωγίζεται στο $x_0=\alpha$, υπάρχει το

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha).$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left[x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]+f(\alpha)=\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha).$

ii) Για $x\neq\alpha$ είναι

$$\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{e^x f(x)-e^x f(\alpha)+e^x f(\alpha)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$=e^x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}.$$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$ ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}=h'(\alpha)=e^\alpha.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x f(x)-e^a f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}e^x\,\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(\alpha)\lim_{x\to\alpha}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}$$

$$=e^\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)e^\alpha=e^\alpha(f'(\alpha)+f(\alpha)).$$

8. Τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα των x είναι αυτά για τα οποία ισχύει $f'(x)=0$ με $x\in[0,2\pi]$.

Αλλά $f'(x)=2\text{συν}2x-4\text{ημ}x\cdot\text{συν}x=2\text{συν}2x-2\text{ημ}2x$, οπότε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\text{συν}2x-2\text{ημ}2x=0\Leftrightarrow \text{εφ}2x=1$$

$$\Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}.$$

Επειδή $x\in[0,2\pi]$ έχουμε:

$$0\le\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\le 2\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le\frac{\kappa}{2}\le\frac{15}{8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{15}{4}\Leftrightarrow \kappa=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \text{αφού }\kappa\in\mathbb{Z}.$$

Για τις τιμές αυτές του κ βρίσκουμε ότι:

$$x=\frac{\pi}{8}\ \text{ή}\ x=\frac{5\pi}{8}\ \text{ή}\ x=\frac{9\pi}{8}\ \text{ή}\ x=\frac{13\pi}{8}.$$

9. i) ● Για $x\neq 0$ έχουμε

$$f(x)=|x|^{2/3}=\begin{cases}(-x)^{2/3}, & \text{αν } x<0\\ x^{2/3}, & \text{αν } x\ge 0\end{cases}.$$

Επομένως

— Αν $x<0$, τότε

$$f'(x)=((-x)^{2/3})'=-\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{-x}}.$$

— Αν $x>0$, τότε

$$f'(x)=(x^{2/3})'=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

● Για $x_0 = 0$ είναι

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x},$$

Επομένως

— Όταν $x > 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

— Όταν $x < 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{-x}}{x\cdot\sqrt[3]{-x}} = \frac{\sqrt[3]{(-x)^3}}{x\cdot\sqrt[3]{-x}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{-x}}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt[3]{-x}} = -\infty.$$

Επομένως η $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ δεν παραγωγίζεται στο 0. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ είναι η $x=0$.

ii) Είναι

$$f(x) = |x|^{4/3} = \begin{cases} (-x)^{4/3}, & x<0 \\ x^{4/3}, & x>0 \end{cases}.$$

Επομένως

— Αν $x > 0$, τότε

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$

— Αν $x < 0$, τότε

$$f'(x) = ((-x)^{4/3})' = \frac{-4}{3}(-x)^{1/3} = \frac{-4}{3}\sqrt[3]{-x}.$$

● Στο $x_0 = 0$ έχουμε
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}.$$

Επομένως:

— Αν $x > 0$ είναι
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3 \cdot x}}{x} = \frac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{x}$$

οπότε
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x} = 0.$$

— Αν $x < 0$ είναι
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{(-x^3)\cdot(-x)}}{x} = \frac{-x\cdot\sqrt[3]{-x}}{x} = -\sqrt[3]{-x}$$

οπότε
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}-\sqrt[3]{-x} = 0.$$

Επομένως $f'(0) = 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $O(0,0)$ είναι η $y = 0$.

10. Επειδή η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ είναι
$$g'(x) = f'(x^2+x+1)\cdot(2x+1), \text{ οπότε } g'(0) = f'(1) = 1.$$

Επίσης έχουμε $g(0) = f(0+0+1)-1 = f(1)-1$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι η
$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x-1+f(1), \qquad (1)$$

ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(0, g(0))$ είναι η
$$y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - f(1)+1 = 1\cdot x$$
$$\Leftrightarrow y = x + f(1) - 1. \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι η $y = x + f(1) - 1$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα A, B αντιστοίχως.

11. i) Έχουμε διαδοχικά

$$(f(\eta\mu x))' = (e^x \sigma\upsilon\nu x)'$$

$$f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x(-\eta\mu x)$$

$$f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x).$$

Επομένως

$$f'(\eta\mu 0)\sigma\upsilon\nu 0 = e^0(\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0),$$

οπότε

$$f'(0) = 1.$$

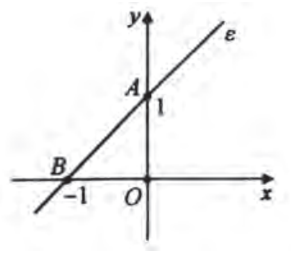
ii) Είναι

$$f(\eta\mu 0) = e^0\sigma\upsilon\nu 0 \;\; \text{οπότε}\; f(0) = 1.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι

$$\varepsilon : y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Η εφαπτομένη ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,1)$ και $B(-1,0)$ και ισχύει $(OA) = (OB) = 1$. Επομένως το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.



2.4 **Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**

1. Επειδή $E(t) = 4\pi r^2(t)$ και $r(t) = 4 - t^2$ έχουμε:

- $E'(t) = 8\pi r(t)\cdot r'(t)$

$$= 8\pi\cdot(4 - t^2)\cdot(-2t) = -16\pi t(4 - t^2).$$

Άρα

$$E'(1) = -16\pi(4 - 1) = -48\pi \;\; \text{cm}^2/\text{s}.$$

- Επειδή

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t),$$

έχουμε

$$V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t) = 4\pi(4-t^2)^2(-2t)$$

$$= -8\pi t(4-t^2)^2.$$

Άρα

$$V'(1) = -8\pi \cdot 1(4-1^2)^2 = -72\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

2. Επειδή

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \text{ έχουμε}$$

$$V'(t) = 4\pi r^2(t) r'(t) \text{ και για } t = t_0$$

$$V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0) r'(t_0).$$

Είναι όμως $V'(t_0) = 100$ cm^3/s και $r(t_0) = 9$ cm οπότε έχουμε

$$100 = 4\pi 9^2 \cdot r'(t_0).$$

Επομένως

$$r'(t_0) = \frac{100}{4\pi \cdot 81} = \frac{25}{81 \cdot \pi} \text{ cm/s}.$$

3. Έχουμε

$$P'(x) = \Pi'(x) - K'(x)$$

$$= 420 - x^2 + 40x - 600$$

$$= -x^2 + 40x - 180.$$

Είναι $P'(x) > 0$ για όλα τα x μεταξύ των ριζών του τριωνύμου $-x^2 + 40x - 180$, δηλαδή $x \in (20 - \sqrt{220}, 20 + \sqrt{220})$.

4. i) Έστω $x(t)$, $y(t)$ οι συναρτήσεις θέσεων των πλοίων Π_1, Π_2 αντιστοίχως. Τότε

$$\upsilon_1 = x'(t) = 15 \text{ και } \upsilon_2 = y'(t) = 20$$

οπότε $x(t) = 15t$ και $y(t) = 20t$,
αφού τα πλοία Π_1, Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από το λιμάνι.

ii) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΛΠ_1Π_2$ έχουμε

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = (15t)^2 + (20t)^2$$

$$= 225t^2 + 400t^2 = 625t^2.$$

Άρα $d(t) = 25t$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης d είναι σταθερός και ισούται με

$$d'(t) = 25 \ \text{Km/h}.$$

5. Έστω $M\left(x(t), \frac{1}{4}x^2(t)\right)$ σημείο της παραβολής, τη χρονική στιγμή t με $t \geq 0$. Τότε:

$$x'(t) = \left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)' \Leftrightarrow x'(t) = \frac{1}{4}2x(t)x'(t)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}x(t) \text{ (αφού } x'(t) > 0 \text{ για κάθε } t \geq 0).$$

Άρα $x(t) = 2$, οπότε $y(t) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. Έτσι το σημείο είναι το $M(2,1)$.

2.4 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω $r = r(t)$ η ακτίνα της σφαίρας, ως συνάρτηση του χρόνου t. Τότε είναι:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t),$$

οπότε

$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2(t) \cdot r'(t) = 4\pi \cdot r^2(t) \cdot r'(t). \qquad (1)$$

Είναι όμως

$$E(t) = 4\pi \cdot r^2(t),$$

οπότε

$$E'(t) = 8\pi \cdot r(t)r'(t) \Leftrightarrow r'(t) = \frac{1}{8\pi \cdot r(t)} \cdot E'(t).$$

Ο τύπος (1) γίνεται

$$V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot \frac{1}{8\pi r(t)} \cdot E'(t) = \frac{1}{2} \cdot r(t) \cdot E'(t).$$

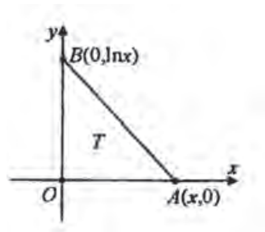
Επομένως

$$V'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 85 \cdot 10 = 425 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

2. Έχουμε:

$$T = T(x) = (OAB) = \frac{1}{2} x \ln x, \text{ αφού } x > 1.$$

Επειδή το x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε



$$T(t) = \frac{1}{2} x(t) \ln x(t), \text{ οπότε}$$

$$T'(t) = \frac{1}{2} x'(t) \ln x(t) + \frac{1}{2} x(t) \frac{1}{x(t)} x'(t)$$

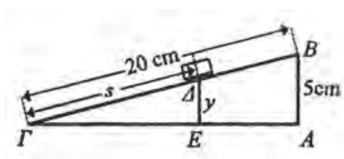
$$= \frac{1}{2} x'(t)(\ln x(t) + 1).$$

Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0) = 5$, έχουμε

$$T'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0)(\ln x(t_0) + 1) =$$

$$= \frac{1}{2} 4(\ln 5 + 1) = 2(\ln 5 + 1) \text{ cm}^2/\text{s}.$$

3. Τα τρίγωνα $ΓΔΕ$ και $ΓΒΑ$ είναι όμοια.
Επομένως



$$\frac{y}{5} = \frac{s}{20} \Leftrightarrow y = \frac{5}{20} s \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} s.$$

Επειδή τα y και s είναι συναρτήσεις του χρόνου t, είναι

$$y(t) = \frac{1}{4} s(t).$$

Επομένως

$$y'(t) = \frac{1}{4} s'(t) = \frac{3}{4} \text{ m/s}.$$

4. Η γωνία θ είναι συνάρτηση του χρόνου t. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΠ$ έχουμε $εφ\theta(t)=\dfrac{h(t)}{100}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε διαδοχικά

$$(εφ\theta(t))'=\left(\frac{h(t)}{100}\right)'$$

$$\frac{1}{συν^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{1}{100}\cdot h'(t)$$

$$\theta'(t)=\frac{1}{100}h'(t)\cdot συν^2\theta(t),$$

οπότε

$$\theta'(t_0)=\frac{1}{100}\cdot h'(t_0)\cdot συν^2\theta(t_0). \qquad (1)$$

Όμως, τη χρονική στιγμή t_0 που το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m ισχύει: $h'(t_0)=50$ και $συν\theta(t_0)=συν45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Επομένως

$$\theta'(t_0)=\frac{1}{100}\cdot 50\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{4}\ \text{rad/min}.$$

5. Από την ομοιότητα των τριγώνων $ΦΟΣ$ και $ΚΠΣ$ έχουμε

$$\frac{1,6}{8}=\frac{s}{x+s}. \qquad (1)$$

Τα x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t και ισχύει, $x'(t)=0,8$ m/s ενώ $s'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του ίσκιου της γυναίκας.

Από την (1) έχουμε:

$$0,2=\frac{s}{x+s}\Leftrightarrow s=0,2(x+s)\Leftrightarrow 0,8s=0,2x\Leftrightarrow s(t)=\frac{1}{4}x(t).$$

Επομένως

$$s'(t)=\frac{1}{4}x'(t)=0,25x'(t)$$

Άρα

$$s'(t)=0,25\cdot 0,8=0,2\ \text{m/s}.$$

6. Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης.
Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha^3\right)$.
Είναι $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)' = -x^2$ οπότε $f'(\alpha) = -\alpha^2$. Επομένως, η εφαπτομένη AM έχει εξίσωση:

$$y + \frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2(x - \alpha).$$

Για $y = 0$, έχουμε

$$\frac{1}{3}\alpha^3 = -\alpha^2 x + \alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^2 x = \frac{2}{3}\alpha^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\alpha.$$

Άρα, το σημείο M έχει τετμημένη $x(t) = \frac{2}{3}\alpha(t)$. Επομένως,

$$x'(t) = \frac{2}{3}\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$$

και τη χρονική στιγμή t_0, που είναι, $\alpha(t_0) = -3$, έχουμε

$$x'(t_0) = -\frac{2}{3}\cdot(-3) = 2\,\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}.$$

7. Τα μεγέθη x, y, θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t και ισχύει:

$$\upsilon_A = y'(t) \text{ και } \upsilon_B = x(t) = 0{,}1 \text{ m/s}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m είναι

$$y(t_0) = 2{,}5 \text{ και } x(t_0) = \sqrt{3^2 - y^2(t_0)} = \sqrt{2{,}75} \text{ m}.$$

i) Έχουμε $x(t) = 3\text{συν}\theta(t)$, οπότε $x'(t) = -3\text{ημ}\theta(t)\cdot\theta'(t)$ και άρα

$$\theta'(t) = -\frac{1}{3\text{ημ}\theta(t)}\cdot x'(t).$$

Επομένως

$$\theta'(t_0) = -\frac{1}{3\text{ημ}\theta(t_0)}\cdot x'(t_0) = -\frac{1}{3\cdot\frac{2{,}5}{3}}\cdot 0{,}1 = -\frac{1}{25} \text{ rad/s}.$$

ii) Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε $x^2(t)+y^2(t)=9,$ οπότε

$$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \Leftrightarrow y'(t)=-\frac{x(t)}{y(t)}\cdot x'(t).$$

Άρα,

$$y'(t_0)=\frac{-x(t_0)}{y(t_0)}\cdot x'(t_0),$$

οπότε

$$y'(t_0)=-\frac{\sqrt{2,75}}{2,5}\cdot\frac{1}{10}=-\frac{\sqrt{2,75}}{25}\ \text{m/sec}.$$

8. Έστω $x=x(t)$ και $y=y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, τη χρονική στιγμή t. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, έχουμε

$$x(t_0)=\frac{1}{2}\ \text{ και }\ y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επίσης έχουμε:

$$y'(t_0)=-3\ \text{μονάδες/sec}.$$

Επειδή το κινητό κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=1$, είναι

$$x^2(t)+y^2(t)=1,$$

οπότε έχουμε διαδοχικά

$$(x^2(t))'+(y^2(t))'=0 \Leftrightarrow 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0$$

$$\Leftrightarrow x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0.$$

Επομένως

$$x'(t_0)=-\frac{y(t_0)}{x(t_0)}\cdot y'(t_0)=-\frac{(-3)\sqrt{3}/2}{1/2}=3\sqrt{3}\ \text{μονάδες/sec}.$$

2.5 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η $f(x)=x^2-2x+1$ είναι

- συνεχής στο [0,2] ως πολυωνυμική,
- παραγωγίσιμη στο (0,2) με $f'(x)=2x-2$ και
- ισχύει $f(0)=f(2)=1$.

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\xi-2=0 \Leftrightarrow \xi=1.$$

ii) Η $f(x)=$ ημ$3x$ είναι:

- συνεχής στο $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων,
- παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$, με $f'(x)=3$συν$3x$ και
- ισχύει $f(0)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$.

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi)=0 &\Leftrightarrow 3\text{συν}3\xi=0 \\ &\Leftrightarrow \text{συν}3\xi=0 \\ &\Leftrightarrow 3\xi=\frac{\pi}{2} \text{ ή } 3\xi=\frac{3\pi}{2}, \text{ αφού } 0<3\xi<2\pi \\ &\Leftrightarrow \xi=\frac{\pi}{6} \text{ ή } \xi=\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

iii) Η $f(x)=1+$ συν$2x$ είναι

- συνεχής στο $[0,\pi]$,
- παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=-2$ημ$2x$ και
- ισχύει $f(0)=f(\pi)=2$.

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -2\eta\mu 2\xi=0$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu 2\xi=0$$
$$\Leftrightarrow 2\xi=\pi,\ \text{αφού } 0<2\xi<2\pi$$
$$\Leftrightarrow \xi=\frac{\pi}{2}.$$

iv) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$, ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης.
Η f, όμως, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $(-1,1)$.
Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

2. i) Η $f(x)=x^2+2x$ είναι
- συνεχής στο $[0,4]$, ως πολυωνυμική
- παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f'(x)=-2x+2$.

Επομένως, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0} \Leftrightarrow 2\xi+2=\frac{24}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2\xi+2=6$$
$$\Leftrightarrow \xi=2$$

ii) Η $f(x)=3\eta\mu 2x$ είναι
- συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων,
- παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=6\sigma\upsilon\nu 2x$.

Επομένως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}\Leftrightarrow 6\sigma\upsilon\nu 2\xi=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\xi=0$$

$$\Leftrightarrow 2\xi=\frac{\pi}{2},\ \text{αφού}\ 2\xi\in(0,\pi)$$

$$\Leftrightarrow \xi=\frac{\pi}{4}.$$

iii) ● Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο $[-3,2]$

— Για $x\in[-3,-1)$ η f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική.
— Για $x\in(-1,2]$ η f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική.
— Στο $x_0=-1$ έχουμε

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(2x+2)=0$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^3-x)=0\ \text{και}\ f(-1)=0,$$

οπότε η f είναι συνεχής στο -1.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $[-3,2]$.

● Εξετάζουμε τώρα την παραγωγισιμότητα της f στο $(-3,2)$.

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,-1)$, με $f'(x)=2$.
— Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, με $f'(x)=3x^2-1$.
— Έχουμε

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x+2}{x+1}=2\ \text{και}$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-x}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x(x-1)=2.$$

Άρα, $f'(-1)=2$.

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,2)$ με

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\in(-3,-1]\\ 3x^2-1, & x\in(-1,2)\end{cases}.$$

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $\xi \in (-3,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{6-(-4)}{2-(-3)} \Leftrightarrow f'(\xi)=2.$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $\xi \in (-3,-1]$, ενώ για $\xi \in (-1,2)$ έχουμε:

$$3\xi^2-1=2 \Leftrightarrow 3\xi^2=3 \Leftrightarrow \xi^2=1 \Leftrightarrow \xi=1.$$

3. ● Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=e^x$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow e^{x_0}=\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}. \qquad (1)$$

Επειδή $\alpha<x_0<\beta$ και η συνάρτηση $y=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $e^\alpha<e^{x_0}<e^\beta$. Άρα, λόγω της (1), είναι

$$e^\alpha<\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}<e^\beta.$$

● Η συνάρτηση $g(x)=\ln x$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=\frac{1}{x}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}. \qquad (1)$$

Επειδή $0<\alpha<x_0<\beta$, είναι $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{x_0}<\frac{1}{\alpha}$, οπότε, λόγω της (1), έχουμε

$$\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}.$$

2.5 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) ● Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [–1,0] ως πολυωνυμική. Είναι

$$f(-1)=1+20-25+1+1=-2 \text{ και } f(0)=1$$

Δηλαδή

$$f(-1)\,f(0)=-2<0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

● Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(0)=1$, $f(1)=1-20-25-1+1=-44$.

Δηλαδή,

$$f(0)\,f(1)=-44<0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

ii) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[x_1,x_2]\subseteq[-1,1]$, με $x_1 \in (-1,0)$ και $x_2 \in (0,1)$, αφού

● είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πολυωνυμική

● είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με

$$f'(x)=4x^3-60x^2-50x-1 \text{ και}$$

● ισχύει $f(x_1)=0=f(x_2)$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)\subseteq(-1,1)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ ή, ισοδύναμα,

$$4\xi^3-60\xi^2-50\xi-1=0.$$

Επομένως, η εξίσωση $4x^3-60x^2-50x-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (–1,1).

2. i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0,1], αφού

● είναι συνεχής στο [0,1] ως γινόμενο συνεχών

● είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=\eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x$ και

● $f(0)=(0-1)\eta\mu 0=0$, $f(1)=0\cdot\eta\mu 1=0$.

Άρα, υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$, δηλαδή η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ii) Η εξίσωση εφ$x = 1-x$ στο $(0,1)$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1-x \Leftrightarrow \eta\mu x=(1-x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$$

και σύμφωνα με το ερώτημα i) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Επομένως, η εξίσωση εφ$x = 1-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Σημ.: Το ii) μπορεί να αποδειχθεί και με το Θ. Bolzano ανεξάρτητα από το i) ερώτημα.

3. Η εξίσωση $f(x)=x$ γράφεται ισοδύναμα $f(x)-x=0$. Θέτουμε $g(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ αφού

- είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών. (Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).
- είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x)=f'(x)-1$ και
- $g(x_1)=0=g(x_2)$.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1,$$

που είναι άτοπο, αφού $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$, ή ισοδύναμα η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

ii) Κατ' αρχάς η εξίσωση $\eta\mu\frac{x}{2}=x$ έχει ρίζα το 0, αφού $\eta\mu\frac{0}{2}=0$.

Έστω $f(x)=\eta\mu\frac{x}{2}$. Τότε

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\neq 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ (αφού } \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\neq 2\text{)}.$$

Άρα σύμφωνα με το i) ερώτημα η εξίσωση $f(x)=x$, δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu\frac{x}{2}=x$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα. Αφού, όμως, έχει ρίζα το 0, η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

4. i) Έχουμε

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \le |1+x^2| \Leftrightarrow 2|x| \le 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \ge 0, \text{ που ισχύει.}$$

ii) ● Για $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα

● Για $\alpha \neq \beta$, η f στο διάστημα με άκρα τα α, β ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) = \frac{\xi}{1+\xi^2}(\beta - \alpha).$$

Επομένως,

$$|f(\beta) - f(\alpha)| = \left|\frac{\xi}{1+\xi^2}\right| |\beta - \alpha| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha|, \text{ λόγω του i).}$$

5. Η f ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,4], οπότε υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4-0} = \frac{f(4)-1}{4}.$$

Αλλά, από υπόθεση έχουμε $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0,4)$, οπότε

$$2 \le \frac{f(4)-1}{4} \le 5 \Leftrightarrow 8 \le f(4) - 1 \le 20 \Leftrightarrow 9 \le f(4) \le 21.$$

6. ● Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [–1,0], αφού είναι συνεχής στο [–1,0] και παραγωγίσιμη στο (–1,0) με $f'(x) \le 1$.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1,0)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0+1} = \frac{f(0) - (-1)}{1} = f(0) + 1. \qquad (1)$$

● Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,1], αφού είναι συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1).

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-f(0)}{1}=1-f(0). \qquad (2)$$

Επειδή $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} f'(\xi_1)\le 1 \\ f'(\xi_2)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)+1\le 1 \\ 1-f(0)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)\le 0 \\ f(0)\ge 0 \end{cases}$$

Άρα $f(0)=0$.

7. Κατ' αρχάς $f(0)=g(0)=1$ και $f(1)=g(1)=2$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινά τα σημεία A και B. Ας υποθέσουμε ότι αυτές έχουν και τρίτο κοινό σημείο Γ και ας ονομάσουμε $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τις τετμημένες των τριών σημείων. Τότε, θα ισχύει:

$$f(\rho_1)=g(\rho_1),\ \ f(\rho_2)=g(\rho_2)\ \text{ και }\ f(\rho_3)=g(\rho_3).$$

Θεωρούμε, τώρα, τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x)-g(x)=2^x+x^2-2x-1.$$

Για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=2^x\ln 2+2x-2$ και ισχύει $\varphi(\rho_1)=\varphi(\rho_2)=\varphi(\rho_3)=0$.

Άρα, υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια, ώστε $\varphi'(\xi_1)=0$ και $\varphi'(\xi_2)=0$. Επειδή, επιπλέον, η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]$, για τη συνάρτηση φ' ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle. Άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi''(\xi)=0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $\varphi''(x)=2^x\ln^2 2+2>0$ για κάθε x.

Άρα, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 1.

2.6 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\varphi'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)$$

$$=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0.$$

Επομένως, $\varphi(x)=c$.

2. i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ είναι 2 και -1, οπότε το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι:

— γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$, στο $(-\infty, -1)$.

— γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$, αφού είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και ισχύει $f'(x) < 0$, στο $(-1, 2)$, και

— γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$, στο $(2, +\infty)$.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι -1 και 1, το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

3. i) — Για κάθε $x<1$ η f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική

— Ομοίως για κάθε $x>1$

— Για $x=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(4-x^2)=3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)=3 \text{ και } f(1)=3,$$

οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}-\{1\}$ με

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & x<1\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

Η $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=0$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− ‖	+
$f(x)$	↗		↘	↗

Δηλαδή η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

ii) Η συνάρτηση f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\in(-\infty,-1]\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\\ x^2-1, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης.
- Για $x\neq \pm 1$ έχουμε

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x\in(-\infty,-1)\\ -2x, & x\in(-1,1)\\ 2x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

Η $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=0$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 0 $\quad$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ ‖	$+$ $\quad$ 0	$-$ ‖	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Δηλαδή η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[0,1]$ και
- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0]$, $[1,+\infty)$.

4. i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$.

Η $f'(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα την $x=1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Δηλαδή η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

ii) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Δηλαδή η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

iii) Η συνάρτηση f γράφεται

$$f(x)=\begin{cases}2\eta\mu x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & \pi<x\le 2\pi\end{cases}.$$

Επομένως έχουμε να μελετήσουμε τη μονοτονία της f στο $[0,\pi]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$
- Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x$

Η f' μηδενίζεται στο $(0,\pi)$ για $x=\dfrac{\pi}{2}$. Το πρόσημο της f' στο $[0,\pi]$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Δηλαδή η f είναι

- γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,
- γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ και
- σταθερή με τιμή μηδέν στο $[\pi,2\pi]$.

5. i) • Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=5x^4+5=5(x^4+1)>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

• Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$g'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+1=\frac{1}{\sqrt{x}}+1>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$.

Επομένως η f, ως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,+\infty)$, δηλαδή το $\mathbb{R}$.

● Έχουμε:

$$g(0) = -3 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+x-3\right) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g, για τον ίδιο λόγο όπως πριν, είναι το διάστημα $[-3,+\infty)$.

iii) Οι εξισώσεις γράφονται $f(x)=0$ και $g(x)=0$ αντιστοίχως και έχουν προφανή ρίζα την $x=1$. Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες, η $x=1$ είναι μοναδική κοινή ρίζα τους.

6. i) Για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{1+x}>0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

ii) Η εξίσωση $e^x=1-\ln(x+1)$ γράφεται ισοδύναμα:

$$e^x-1+\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$$

Προφανώς $f(0)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και ισχύει $f(0)=0$, η τιμή $x=0$ είναι η μόνη ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

2.6 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε, λόγω της υπόθεσης, για κάθε $x\neq x_0$ έχουμε

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\le\left|x-x_0\right|^2 \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\left|x-x_0\right|$$

$$\Leftrightarrow -\left|x-x_0\right|\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\left|x-x_0\right|.$$

Αλλά

$$\lim_{x\to x_0}\left(-\left|x-x_0\right|\right)=\lim_{x\to x_0}\left|x-x_0\right|=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0 \text{ ή } f'(x_0)=0.$$

Άρα $f'(x_0)=0$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η f σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2. i) Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική και ισχύει

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)<0 \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

ii) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, το σύνολο τιμών της είναι το $[f(1),\ f(-1)]=[\alpha-2,\alpha+2]$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+\alpha$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και το σύνολο τιμών της $[\alpha-2,\alpha+2]$ περιέχει το 0, αφού $-2<\alpha<2$. Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Αυτό όμως είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$.

3. Η ταχύτητα του κινητού είναι

$$\upsilon(t)=x'(t)=4t^3-24t^2+36t-16,$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\alpha(t)=x''(t)=12t^2-48t+36=12(t^2-4t+3).$$

i) Η ταχύτητα του κινητού με τη βοήθεια του σχήματος Horner γράφεται $\upsilon(t)=4(t-1)^2(t-4)$ και μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές $t=1$ και $t=4$. Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα της άσκησης αρκεί να μελετήσουμε το πρόσημο της ταχύτητας $\upsilon(t)=x'(t)$ στο διάστημα $[0,5]$.

Οι ρίζες της $x'(t)=0$ είναι 1 και 4, ενώ το πρόσημο της $x'(t)$ φαίνεται στον πίνακα

t	0		1		4		5
$x'(t)$		–	0	–	0	+	

ii) Άρα στο διάστημα (0,4) το κινητό κινείται προς τα αριστερά, ενώ στο διάστημα (4,5) κινείται προς τα δεξιά.

iii) Το πρόσημο της συνάρτησης $\alpha(t)=x''(t)$ φαίνεται στον πίνακα

t	0		1		3		5
$a(t)$		+	0	–	0	+	

Επομένως στα διαστήματα [0,1] και [3,5] η ταχύτητά του αυξάνεται, ενώ στο διάστημα [1,3] μειώνεται.

4. Η συνάρτηση V παραγωγίζεται για $t>0$ με

$$V'(t)=\left(50-\frac{25t^2}{(t+2)^2}\right)'=-\frac{100t}{(t+2)^3}<0$$

Άρα η συνάρτηση V είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, που σημαίνει ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται. Επειδή

$$V(0)=50 \text{ και } \lim_{t\to+\infty}V(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(50-\frac{25t^2}{(t+2)^2}\right)$$

$$=50-\lim_{t\to+\infty}\frac{25t^2}{t^2+4t+2}=50-25=25,$$

το σύνολο τιμών της V είναι το διάστημα $(25,50]$.
Άρα, η τιμή του προϊόντος δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής του τιμής.

5. i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το

$$A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty),$$

είναι συνεχής, ως ρητή, και παραγωγίσιμη στο A με

$$f'(x)=\frac{(x^3-9x)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^3-9x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2-9)(x^2-1)-2x(x^3-9x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2}>0.$$

Η μονοτονία της f φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖ $+$	‖ $+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$	

Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$. Είναι

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3-9x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα του π ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$.

ii) Οι αριθμοί -1 και 1 προφανώς δεν είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0$. Επομένως, θα αναζητήσουμε ρίζες αυτής στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$. Στα διαστήματα αυτά έχουμε

$$x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0 \Leftrightarrow x^3-9x=\alpha x^2-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-9x}{x^2-1}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\alpha.$$

Επειδή η συνάρτηση f σε καθένα των διαστημάτων $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$, έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, από μια σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

6. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3\alpha x^2+6x+1$.
Η f' είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με $\Delta = 36 - 12\alpha = 12(3-\alpha)$.

- Για $\alpha=3$, η f' έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{1}{3}$.

Επειδή η f είναι συνεχής για $x=-\dfrac{1}{3}$ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq-\dfrac{1}{3}$, η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Για $\alpha<3$ η f' έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και άρα αλλάζει πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επομένως, για $\alpha<3$ η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Για $\alpha>3$ η f' δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή $\alpha>0$ θα ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, για $\alpha>3$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ μόνο όταν $\alpha\geq 3$.

7. i) Έχουμε

$$f'(x) = (\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x = x\eta\mu x.$$

Για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, για κάθε x, με $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ θα είναι $f(0) < f(x)$, δηλαδή $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$.

iii) Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x}{x^2} < 0 \text{ (λόγω της ii)},$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ως άθροισμα συνεχών και για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, για κάθε $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ ισχύει $f(0) \le f(x)$. Αλλά $f(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$0 \le 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x \Leftrightarrow 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \ge 3x.$$

2.7 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τα τοπικά ακρότατα θα αναζητηθούν μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$, δηλαδή των 1, 2 και 3. Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘		↘	Τ.Ε.	↗	

Δηλαδή η f,

- στο $x=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και
- στο $x=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

2. α) i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$. Η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$. Το πρόσημο της f', η μονοτονία της f και τα όριά της στο $-\infty$ και $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=3x^2-3$.

Οι ρίζες της $g'(x)=0$ είναι -1 και 1. Το πρόσημο της g', η μονοτονία της g, τα ακρότατα και τα όριά της στο $-\infty$, $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4 Τ.Μ.	↘	0 Τ.Ε.	↗	$+\infty$

Δηλαδή η g παρουσιάζει:

● στο $x = -1$ τοπικό μέγιστο το $g(-1) = 4$ και
● στο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο το $g(1) = 0$.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
Οι ρίζες της είναι 0 και 1. Το πρόσημο της h', η μονοτονία και τα ακρότατα της h καθώς και τα όριά της στο $-\infty$ και $+\infty$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1 Τ.Μ.	$\searrow$	-2 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Δηλαδή η h παρουσιάζει:
● στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο, το $h(0) = -1$ και
● στο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο, στο $h(1) = -2$.

β) i) Επειδή η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty,$$

το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή το $\mathbb{R}$. Επομένως θα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα. Αυτή είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

● Στο $(-\infty, -1]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ και $g(-1) = 4$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty, 4]$. Άρα στο $(-\infty, -1]$ η εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

● Στο $[-1, 1]$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το $[g(1), g(-1)] = [0, 4]$, οπότε στο διάστημα $[-1, 1]$ η εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$.

● Στο $[1, +\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$ και $g(1) = 0$, το σύνολο τιμών της στο διάστημα

αυτό είναι το $[0,+\infty)$. Άρα στο $[1,+\infty)$ η εξίσωση $x^3-3x+2=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$ που βρήκαμε και πριν.
Επομένως, η εξίσωση έχει στο $\mathbb{R}$ δύο άνισες ρίζες.

iii) Αν εργαστούμε για τη συνάρτηση $h(x)=2x^3-3x^2-1$, όπως και για τις συναρτήσεις f και g, βρίσκουμε ότι η εξίσωση $2x^3-3x^2-1=0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\mathbb{R}$ που βρίσκεται στο διάστημα $[1,+\infty)$.

3. i) Για $x<1$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Για $x>1$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Για $x=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} e^{1-x}=1 \text{ και } f(1)=1.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Έχουμε:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<1 \\ -e^{1-x}, & x>1 \end{cases}.$$

Η f' μηδενίζεται στο 0. Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	0 Τ.Ε.	↗	1 Τ.Μ.	↘	

Δηλαδή η f παρουσιάζει
- στο $x=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$ και
- στο $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$.

ii) — Για $x<1$ η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική
— Για $x>1$ η g είναι επίσης συνεχής.
— Για $x=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-2x+3)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+4x+1)=0 \text{ και } g(1)=0.$$

Επομένως η g είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.
Έχουμε:

$$g'(x)=\begin{cases}2x-2, & x<1\\ 2x-4, & x>1\end{cases}.$$

Η g' μηδενίζεται στο 2. Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘			-1 min	↗	

Δηλαδή η g παρουσιάζει στον $x=2$ ελάχιστο το $g(2)=-1$.

4. i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=e^x-1$.
Έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1 min	↗	

Δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x=0$ ελάχιστο το $f(0)=1$.

ii) Για $x>0$ έχουμε $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$.
Επομένως

$$f'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1).$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^x(\ln x+1)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}.$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ min	$\nearrow$

Δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x=\frac{1}{e}$ ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

5. Η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$. Για να παρουσιάζει η f ακρότατα στα $x_1=-1$ και $x_2=1$, πρέπει:

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-2\beta-3=0 \\ 3\alpha+2\beta-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha-6=0 \\ 4\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=0 \end{cases}$$

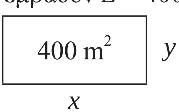
(Προσθέσαμε και αφαιρέσαμε κατά μέλη τις εξισώσεις).

Για τις τιμές αυτές των α, β η f γράφεται $f(x)=x^3-3x+1$ και έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2-3$. Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3 Τ.Μ.	$\searrow$	-1 Τ.Ε.	$\nearrow$

Δηλαδή για $\alpha=1$ και $\beta=0$ η f παρουσιάζει στο $x_1=-1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1)=3$ και στο $x_2=1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-1$.

6. Έστω x, m οι διαστάσεις σε m του ορθογωνίου οικοπέδου με εμβαδόν $E=400$ m^2. Τότε $xy=400$, οπότε $y=\frac{400}{x}$.



Επομένως, η περίμετρος $P=2x+2y$, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο

$$P(x)=2x+2\frac{400}{x}=2\left(x+\frac{400}{x}\right),\ x>0.$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$P'(x)=2\left(1-\frac{400}{x^2}\right)=2\left(\frac{x^2-400}{x^2}\right)$$

οπότε

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-400=0 \Leftrightarrow x=20.$$

Το πρόσημο της P', η μονοτονία και τα ακρότατα της P φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

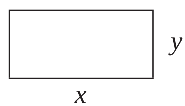
x	0		20		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$\searrow$	80 min	$\nearrow$	

Δηλαδή η P παρουσιάζει στο $x=20$ ελάχιστο το $P(2)=80$.

Επομένως το οικόπεδο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη όταν $x=20$. Από την ισότητα $y=\dfrac{400}{x}$ για $x=20$ έχουμε και $y=20$, που σημαίνει ότι το οικόπεδο είναι τετράγωνο.

7. Έστω x, y οι διαστάσεις σε m του οικοπέδου με περίμετρο 80 m. Τότε είναι $2x+2y=80$, οπότε $y=40-x$.

Το εμβαδόν $E=xy$, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x)=x(40-x)$ με $0<x<40$.



Για κάθε $x\in(0,40)$ είναι $E'(x)=40-2x$ οπότε

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=20.$$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		20		40
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	400 max	$\searrow$	

Δηλαδή, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x=20$.

Από τη σχέση $y=40-x$ για $x=20$ έχουμε $y=20$, οπότε το οικόπεδο είναι τετράγωνο.

8. Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς τη δόση του φαρμάκου είναι $h(x)=T'(x)=2x-\dfrac{3}{4}x^2$.

Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $h'(x)=2-\dfrac{6x}{4}$, οπότε

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{6x}{4}=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Το πρόσημο της h', η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{4}{3}$		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$ max	$\searrow$	

Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς τη δόση x του φαρμάκου γίνεται μέγιστος όταν $x=\frac{4}{3}$ mgr.

9. i) Τα ορθογώνια τρίγωνα BEZ, $ΓZH$, $ΔHΘ$ και $AΘE$ είναι ίσα. Επομένως $ΓZ = x$, οπότε $BZ=2-x$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο EBZ έχουμε:

$$(EZ)^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$$

ii) Το εμβαδόν $E(x)$ του τεγραγώνου $EZHΘ$ δίνεται από την ισότητα

$$E(x)=(EZ)^2=2x^2-4x+4,\quad x\in(0,2).$$

Μελετάμε τη συνάρτηση E ως προς τα ακρότατα.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $E'(x)=4x-4=4(x-1)$, οπότε

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		2
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	2 min	$\nearrow$	

Δηλαδή η E παρουσιάζει στο $x=1$ ελάχιστο το $E(1)=2$. Επομένως το εμβαδόν του $EZHΘ$ γίνεται ελάχιστο όταν $x=1$, δηλαδή όταν τα E, Z, H, $Θ$ είναι μέσα των πλευρών του $ABΓΔ$.

10. Το κέρδος του εργοστασίου είναι:

$$P(x)=E(x)-K(x)=420x-2x^2-\frac{1}{3}x^3+20x^2-600x-1000$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+18x^2-180x-1000,\ \text{με}\ x\in[0,105].$$

Για κάθε $x\in[0,105]$ ισχύει $P'(x)=-x^2+36x-180$, οπότε $P'(x)=0 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=30$.

Το πρόσημο της P', η μονοτονία και τα ακρότατα της P φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		6		30		105
$P'(x)$		–	0	+	0	–	
$P(x)$	–1000 Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	800 Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.

Επομένως το εργοστάσιο παρουσιάζει μέγιστο κέρδος, όταν έχει ημερήσια παραγωγή 30 μονάδες.

2.7 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $f'(x)=2\text{συν}x-1$. Η εξίσωση της $f'(x)=0$ στο διάστημα $[0,\pi]$ έχει ρίζα το $\frac{\pi}{3}$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	3	↗	$\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}$ max	↘	$3-\pi$

Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ και παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο για $x=\frac{\pi}{3}$, το $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}$
- τοπικό ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=3$
- ελάχιστο για $x=\pi$, το $f(\pi)=3-\pi$.

ii) Η εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ γράφεται ισοδύναμα

$$2ημx = x - 3 \Leftrightarrow 2ημx - x + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι

— Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[3, \frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}\right]$, στο οποίο δεν περιέχεται το 0.

— Για $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[3-\pi, \frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}\right]$, στο οποίο περιέχεται το 0. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$ η οποία είναι και η μοναδική, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

2. i) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Μια προφανής ρίζα της f είναι το $x = 1$, η οποία είναι και μοναδική, στο διάστημα $(0, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f(1) = 0$, λόγω της μονοτονίας της f, έχουμε

$$f(x) < 0, \text{ για } x \in (0,1) \text{ και } f(x) > 0, \text{ για } x \in (1, +\infty).$$

ii) Είναι

$$\varphi'(x) = 2\ln x + 2 + 2x - 4 = 2(\ln x + x - 1) = 2f(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Το πρόσημο της φ' (όπως προκύπτει από i)), η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		↘	0 min	↗	

Άρα, η φ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $\varphi(1) = 0$.

iii) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $g(x) = h(x)$. Έχουμε

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x\ln x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x\ln x + x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0.$$

Η τελευταία όπως προκύπτει από το ii) έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$. Άρα οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1,0)$.
Επειδή $g'(x) = \ln x + 1$ και $h'(x) = -x + 2$, είναι $g'(1) = 1$ και $h'(1) = 1$. Άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο A.

3. i) α) Αρκεί να δείξουμε ότι $e^x - x - 1 > 0$, για κάθε x.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $f'(x) = e^x - 1$, οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0 min	↗	

Στο διάστημα $[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, για $x > 0$ ισχύει $f(x) > f(0)$, οπότε $e^x - x - 1 > 0$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = e^x - x - 1 > 0$, για $x \in (0,+\infty)$ ((α) ερώτημα). Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και επομένως για $x > 0$ ισχύει

$g(x) > g(0)$ οπότε $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 > 0$.

ii) α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{συν}x + \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -\text{ημ}x + x$.

Επειδή για $x \neq 0$ είναι $|\text{ημ}x| < |x|$, έχουμε $-|x| < \text{ημ}x < |x|$, οπότε για $x > 0$ ισχύει $\text{ημ}x < x$ και άρα $-\text{ημ}x + x > 0$.
Επομένως,

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0,$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
Επομένως, για $x > 0$ ισχύει $f(x) > f(0) = 0$.
Άρα

$$\text{συν}x + \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{ημ}x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \text{ημ}x + \frac{1}{6}x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $g'(x) = \text{συν}x + \frac{1}{2}x^2 - 1 = f(x)$ (ερώτημα α).

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, στο $[0, +\infty)$, οπότε για $x > 0$ ισχύει $g(x) > g(0)$ ή, ισοδύναμα,

$$\text{ημ}x + \frac{1}{6}x^3 - x > 0.$$

iii) α) Αρκεί να δείξουμε $(1+x)^\nu - 1 - \nu x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$f(x) = (1+x)^\nu - 1 - \nu x, \quad x \geq 0.$$

Έχουμε

$f'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1} - \nu = \nu[(1+x)^{\nu-1} - 1] > 0$, αφού $1 + x > 1$, για $x > 0$.

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού η f είναι και συνεχής στο 0.
Άρα, για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)$ ή, ισοδύναμα, $(1+x)^{\nu}-1-\nu x>0$, αφού $f(0)=(1+0)^{\nu}-1-\nu\cdot 0=0$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2>0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2,\quad x\geq 0.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x)&=\nu(1+x)^{\nu-1}-\nu-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\cdot 2x\\ &=\nu(1+x)^{\nu-1}-\nu-\nu(\nu-1)x\\ &=\nu[(1+x)^{\nu-1}-1-(\nu-1)x]>0, \text{ λόγω της α).}\end{aligned}$$

Επομένως είναι $g'(x)>0$, για $x\in(0,+\infty)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα για $x>0$ ισχύει $g(x)>g(0)$ ή, ισοδύναμα,

$$(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2>0.$$

4. Επειδή η f παραγωγίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$, τα ακρότατα αυτής θα αναζητηθούν μόνο μεταξύ των ριζών της $f'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$6(f(x))^2f'(x)+6f'(x)=6x^2+6\Leftrightarrow f'(x)[(f(x))^2+1]=x^2+1>0.$$

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

5. Έστω α,β οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ με $x\in[\alpha,\beta]$, η οποία παριστάνει την κατακόρυφη απόσταση των C_f και C_g.
Το σημείο ξ είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$. Σ' αυτό η h παραγωγίζεται και έχει μέγιστο. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι:

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=g'(\xi).$$

Άρα στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$, $B(\xi, g(\xi))$ οι εφαπτομένες των C_f και C_g αντιστοίχως είναι παράλληλες.

6. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2+(x-\alpha)^2\cdot 2(x-\beta)(x-\gamma)^2+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 2(x-\gamma).$

Προφανώς

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0. \qquad (1)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, αφού

- είναι συνεχής σ' αυτά ως πολυωνυμική,
- παραγωγίσιμη στα (α,β) και (β,γ) και
- $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0.$

Επομένως, υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Από (1) και (2) προκύπτει ότι η f' έχει πέντε τουλάχιστον ρίζες τις $\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma$. Επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική έκτου βαθμού, η παράγωγός της είναι πέμπτου βαθμού. Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν έχει άλλες, εκτός από τις α, ξ_1, β, ξ_2, γ ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

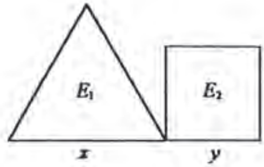
x	$-\infty$		α		ξ_1		β		ξ_2		γ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Άρα η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και $f(\gamma)$ και δύο τοπικά μέγιστα τα $f(\xi_1)$ και $f(\xi_2)$.

7. i) Έχουμε $3x+4y=4$, οπότε

$$y=\frac{4-3x}{4}.$$

Έτσι έχουμε:



$$E(x)=E_1+E_2=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+y^2$$

$$=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{4-3x}{4}\right)^2$$

$$=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{16-24x+9x^2}{16}$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-24x+16\right].$$

ii) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$ ισχύει $E'(x)=\frac{1}{16}\left[2\left(9+4\sqrt{3}\right)x-24\right]$, οπότε

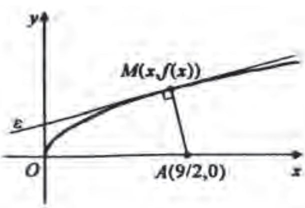
$$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{12}{9+4\sqrt{3}}=\frac{12\left(9-4\sqrt{3}\right)}{81-48}=\frac{4\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}=x_1.$$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		x_1		$\frac{4}{3}$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$	$E(x_1)$	$\nearrow$	

Δηλαδή, το εμβαδόν του σχήματος γίνεται ελάχιστο όταν η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $x=\frac{4}{11}\left(9-4\sqrt{3}\right)\cong 0,75$ m.

8. i) Έστω $M(x,f(x))$ το ζητούμενο σημείο της C_f. Έχουμε



$$(MA)^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(f(x))^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+x.$$

Η απόσταση MA γίνεται ελάχιστη, όταν γίνει ελάχιστο το τετράγωνό της, δηλαδή όταν πάρει την ελάχιστη τιμή της η συνάρτηση

$$g(x)=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+x,\quad x\in[0,+\infty).$$

Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει $g'(x) = 2\left(x - \frac{9}{2}\right) + 1 = 2x - 8$, οπότε

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Το πρόσημο της g', η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

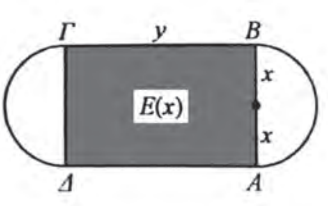
x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{17}{4}$	$\nearrow$	

Δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x = 4$ ελάχιστο το $g(4) = \frac{17}{4}$. Επομένως η ποσότητα $(AM)^2$ και άρα η (AM) γίνεται ελάχιστη όταν $x = 4$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(4,2)$.

ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στο σημείο $M(4,2)$ είναι $\lambda_\varepsilon = f'(4) = \frac{1}{4}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AM είναι:

$$\lambda_{AM} = \frac{2-0}{4-\frac{9}{2}} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4.$$

Επομένως, $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = \frac{1}{4}(-4) = -1$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην AM.



9. Έστω $(AB) = 2x$ και $(B\Gamma) = y$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Τότε η περίμετρος του στίβου θα είναι ίση με $2\pi x + 2y$ και επομένως θα ισχύει

$$2\pi x + 2y = 400 \Leftrightarrow y = 200 - \pi x.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι

$$E(x) = 2x \cdot y = 2x(200 - \pi x) = -2\pi x^2 + 400x.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{200}{\pi}\right)$ είναι $E'(x) = -4\pi x + 400$, οπότε

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{\pi}.$$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{100}{\pi}$		$+\infty$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Δηλαδή η E παρουσιάζει στο $x = \dfrac{100}{\pi}$ μέγιστο το $E\left(\dfrac{100}{\pi}\right) = \dfrac{20.000}{\pi}$.

Επομένως, το ορθογώνιο τμήμα του στίβου γίνεται μέγιστο, όταν οι διαστάσεις του είναι:

$$(AB) = 2 \cdot \frac{100}{\pi} = \frac{200}{\pi} \text{ m και } (B\Gamma) = 200 - \pi \cdot \frac{100}{\pi} = 100 \text{ m}.$$

10. Έστω $x(x > 100)$ ο αριθμός των ατόμων που θα δηλώσουν συμμετοχή. Τότε, το ποσό που θα πληρώσει κάθε άτομο προκύπτει αν από τα 1000 ευρώ αφαιρέσουμε το ποσό της έκπτωσης, το οποίο ανέρχεται σε $(x - 100)$ 5 ευρώ, δηλαδή κάθε άτομο θα πληρώσει:

$$1000 - (x - 100)5 = 1000 - 5x + 500 = 1500 - 5x \text{ ευρώ}.$$

Επομένως, τα έσοδα της εταιρείας από τη συμμετοχή των x ατόμων θα είναι:

$$E(x) = x(1500 - 5x) = -5x^2 + 1500x.$$

Για κάθε $x > 100$ έχουμε $E'(x) = -10x + 1500$, οπότε $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 150$. Το πρόσημο της E' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της E και τα ακρότατα αυτής.

x	100		150		$+\infty$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	112.500 max	$\searrow$	

Δηλαδή, η E παρουσιάζει στο $x_0 = 150$ μέγιστη τιμή την $E(150) = 112.500$. Επομένως, πρέπει να δηλώσουν 150 άτομα συμμετοχή στην κρουαζιέρα για να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

11. Έχουμε $r_1'(t) = 0,05$, οπότε $r_1'(t) = (0,05t)'$ και άρα $r_1(t) = 0,05t + c_1$. Όμως $r_1(0) = 3$, οπότε $r_1(t) = 0,05t + 3$. Ομοίως $r_2(t) = 0,04t + 5$.

i) Το εμβαδόν δακτυλίου θα μηδενιστεί όταν

$$r_1(t) = r_2(t) \Leftrightarrow 3 + 0,05t = 5 + 0,04t \Leftrightarrow 0,01t = 2 \Leftrightarrow t = 200.$$

Άρα, ύστερα από 200 s το εμβαδόν του δακτυλίου θα μηδενιστεί.

ii) Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου, ως συνάρτηση του χρόνου t, είναι

$$\begin{aligned} E(t) &= \pi r_2^2(t) - \pi r_1^2(t) \\ &= \pi(5 + 0,04t)^2 - \pi(3 + 0,05t)^2. \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\pi(5 + 0,04t)\cdot 0,04 - 2\pi(3 + 0,05t)\cdot 0,05 \\ &= 2\pi(0,20 + 0,0016t - 0,15 - 0,0025t) \\ &= 2\pi(0,05 - 0,0009t). \end{aligned}$$

Είναι

$$E'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 55,6 \text{ s}.$$

Το πρόσημο της E', η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον πίνακα.

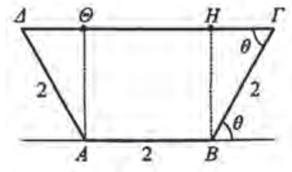
t	0		55,6	
$E'(t)$		+	0	–
$E(t)$		↗	max	↘

Άρα, τη χρονική στιγμή $t \approx 55,6$ s το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου θα μεγιστοποιηθεί.

12. i) Η κάθετη διατομή $ΑΒΓΔ$ είναι σχήματος τραπεζίου. Από το τρίγωνο $ΗΒΓ$ έχουμε

$ΗΒ = 2ημθ$ και $ΗΓ = 2συνθ$.

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, ισχύει



$$\varDelta\Theta = \Gamma H = 2\text{συν}\theta \text{ και } \varDelta\Gamma = 2 + 2\ \text{συν}\theta + 2\text{συν}\theta = 2 + 4\ \text{συν}\theta.$$

Το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\varDelta$ είναι

$$E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot HB = \frac{2+2+4\text{συν}\theta}{2} \cdot 2\text{ημ}\theta$$

$$= (4+4\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta$$

$$= 4\text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta).$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$E(\theta) = 4\text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta),\quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Είναι

$$E'(\theta) = 4\text{συν}\theta(1+\text{συν}\theta) + 4\text{ημ}\theta(-\text{ημ}\theta)$$

$$= 4\text{συν}^2\theta - 4\text{ημ}^2\theta + 4\text{συν}\theta$$

$$= 4\text{συν}^2\theta - 4(1-\text{συν}^2\theta) + 4\text{συν}\theta$$

$$= 8\text{συν}^2\theta + 4\text{συν}\theta - 4$$

$$= 4(2\text{συν}^2\theta + \text{συν}\theta - 1).$$

Έχουμε

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\text{συν}^2\theta + \text{συν}\theta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\theta = \frac{1}{2} \text{ ή } \text{συν}\theta = -1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3},\ \text{επειδή } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Το πρόσημο της E' καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον πίνακα.

θ	0		$\pi/3$		π
$E'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$E(\theta)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Επομένως, όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, που σημαίνει ότι τότε το κανάλι θα μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα νερού.

13. i) Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το K στο M και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να περπατήσει από το M στο Σ. Έχουμε

$$t_1 = \frac{(KM)}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{(M\Sigma)}{\upsilon_2} = \frac{300-x}{5}.$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να διανύσει τη διαδρομή $KM\Sigma$ είναι

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}.$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+100^2}}{3} + \frac{300-x}{5}, \quad x \in (0,300).$$

Είναι

$$T'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5}.$$

Οι ρίζες της $T'(x)=0$ είναι το 75.
Το πρόσημο της T' η μονοτονία και τα ακρότατα της T φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		75		300
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		$\searrow$	$T(75)$ min	$\nearrow$	

Δηλαδή, η συνάρτηση T παρουσιάζει ελάχιστο για $x=75$ ft.
Άρα, όταν $x=75$ft, τότε ο κολυμβητής χρειάζεται το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του.

14. Έστω ρ_1 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_1 και ρ_2 η πυκνότητα του καπνού που εκπέμπει το εργοστάσιο E_2.
Έχουμε

$$\rho_1(x) = k\frac{P}{x^2} \quad \text{και} \quad \rho_2(x) = k\frac{8P}{(12-x)^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.7

Η πυκνότητα του καπνού στη θέση Σ είναι

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \rho_1(x)+\rho_2(x)\\ &= k\frac{P}{x^2}+k\frac{8P}{(12-x)^2}\\ &= kP\left(\frac{1}{x^2}+\frac{8}{(12-x)^2}\right).\end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\rho(x)=kP\left(\frac{1}{x^2}+\frac{8}{(12-x)^2}\right),\quad x\in(0,12)$$

είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= kP\left(-\frac{2x}{x^4}+\frac{16(12-x)}{(12-x)^4}\right)\\ &= kP\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{16}{(12-x)^3}\right).\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\rho'(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^3}+\frac{16}{(12-x)^3}=0\\ &\Leftrightarrow 16x^3-2(12-x)^3=0\\ &\Leftrightarrow (2x)^3-(12-x)^3=0\\ &\Leftrightarrow 2x-(12-x)=0\\ &\Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4.\end{aligned}$$

Το πρόσημο της ρ', η μονοτονία και τα ακρότατα της ρ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		4		12
$\rho'(x)$		$-$	0	$+$	
$\rho(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Δηλαδή, η πυκνότητα ρ γίνεται ελάχιστη, όταν $x=4$.
Άρα, ο εργολάβος για να έχει τη λιγότερη ρύπανση πρέπει να χτίσει το σπίτι του σε απόσταση 4 km από το εργοστάσιο E_1.

2.8 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 \text{ και } f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1),$$

οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (διπλή) ή } x = 1.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$					Σ.Κ.		

Δηλαδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0,1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$.

● Το σημείο 1 είναι θέση σημείου καμπής. Επομένως το σημείο $A(1,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$g'(x) = \frac{6x^4 - 3x^2(3x^2 - 2)}{x^6} = \frac{6 - 3x^2}{x^4}$$

και

$$g''(x) = \frac{-6x^5 - 4x^3(6 - 3x^2)}{x^8} = \frac{6(x^2 - 4)}{x^5},$$

οπότε

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2.$$

Το πρόσημο της g'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$			Σ.Κ.		‖		Σ.Κ.		

Δηλαδή, η g στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στα διαστήματα $[-2,0)$ και $[2, +\infty)$, ενώ προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0,2]$. Επειδή η g'' μηδενίζεται στα σημεία -2, 2 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο τα σημεία $A\left(-2, \frac{-5}{4}\right)$ και

$B\left(2, \frac{5}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_g.

2. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} \text{ και } f''(x) = e^{1-x}(x-2),$$

οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\frac{2}{e}$ Σ.Κ.		

Δηλαδή, η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, 2]$ και προς τα άνω στο $[2, +\infty)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο 2 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$g'(x) = 2x(2\ln x - 5) + 2x = 4x(\ln x - 2)$$

και

$$g''(x) = 4(\ln x - 2) + 4 = 4(\ln x - 1),$$

οπότε

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Το πρόσημο της g'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		e		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g(x)			$-3e^2$ Σ.Κ.		

Δηλαδή, η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(0,e]$ και προς τα άνω στο $[e,+\infty)$. Επειδή η g'' μηδενίζεται στο σημείο e και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(e,-3e^2)$ είναι σημείο καμπής της C_g.

iii) — Για κάθε $x<0$ ισχύει $h'(x)=-6x$.

— Για κάθε $x>0$ ισχύει $h'(x)=-3x^2+6x$

— Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x(3-x))=0.$$

Επομένως, η h παραγωγίζεται στο $x=0$ με $h'(0)=0$. Άρα

$$h'(x)=\begin{cases} -6x, & x<0 \\ -3x^2+6x, & x\ge 0 \end{cases}.$$

Για $x\neq 0$ έχουμε $h''(x)=\begin{cases} -6, & x<0 \\ -6x+6, & x>0 \end{cases}$,

οπότε

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Το πρόσημο της h'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\frown$	1 Σ.Κ.	$\smile$	3 Σ.Κ.	$\frown$	

Δηλαδή, η h στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$ και προς τα άνω στο $[0,1]$.

Επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και $h'(0)=0$, η C_h έχει εφαπτομένη στο σημείο $(0,1)$ και επειδή η h'' εκατέρωθεν του 0 αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(0,1)$ είναι σημείο καμπής της C_h.

Επειδή η h'' μηδενίζεται στο 1 και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $B(1,3)$ είναι σημείο καμπής της C_h.

3. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ και

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(e^{-x^2})' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1), \text{ οπότε}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Δηλαδή, η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

ii) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $g'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$ και

$$g''(x) = -\frac{2\text{συν}x(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^4 x} = \frac{2\text{ημ}x}{\text{συν}^3 x}, \text{ οπότε}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Το πρόσημο της g'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$			Σ.Κ.		

Δηλαδή, η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, ενω στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επειδή η g'' μηδενίζεται στο σημείο 0 και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_g.

iii) Είναι $h(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών.
Έχουμε:

$$h'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0\\ -2x, & x<0\end{cases} \text{ και } h''(x)=\begin{cases} 2, & x>0\\ -2, & x<0\end{cases}.$$

Για $x_0=0$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x}=0.$$

Άρα $h'(0)=0$.
Από το πρόσημο της h'' προκύπτει ότι η h είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, κοίλη στο $(-\infty,0]$ και το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

iv) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

Έχουμε

$$\varphi(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\ge 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}, \qquad \varphi'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\end{cases}$$

και

$$\varphi''(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}, & x>0\\ \dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\end{cases}.$$

Η παράγωγος της φ στο σημείο 0 θα αναζητηθεί με τη βοήθεια του ορισμού.

— Για $x>0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$

— Για $x<0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{\sqrt{-x}}=-\infty.$

Άρα, η φ δεν παραγωγίζεται στο 0. Όμως η C_φ δέχεται εφαπτομένη στο $O(0,\varphi(0))$, την κατακόρυφη $x=0$.
Το πρόσημο της φ'', καθώς τα κοίλα και τα κυρτά της φ φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$-$		$-$
$\varphi(x)$	$\frown$	0	$\frown$

Άρα το σημείο $O(0,0)$ δεν είναι σημείο καμπής της C_φ, αφού εκατέρωθεν του 0 η φ'' δεν αλλάζει πρόσημο.

v) Η συνάρτηση ψ για $x<0$ και για $x>0$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-}\psi(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{-x}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\psi(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0 \text{ και } \psi(0)=0.$$

Άρα η ψ είναι συνεχής και στο 0.
Έχουμε

$$\psi'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases} \quad\text{και}\quad \psi''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\[2mm] -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}.$$

Στο $x_0=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty.$$

Επομένως η ψ δεν παραγωγίζεται στο 0.
Επειδή η ψ είναι συνεχής στο 0, η C_ψ δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $O(0,0)$ την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.
Το πρόσημο της ψ'' φαίνεται στον πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\psi''(x)$	$+$		$-$
$\psi(x)$		0 Σ.Κ.	

Δηλαδή, η ψ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$.
Επειδή εκατέρωθεν του 0 η ψ'' αλλάζει πρόσημο και η C_ψ δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής της C_ψ.

4. • Η f στο $[-1,1]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,1)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Ομοίως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,4]$, γνησίως αύξουσα στο $[4,8]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[8,10]$.

• Η f στο $[-1,0]$ είναι συνεχής και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,0)$. Επομένως η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[-1,0]$. Ομοίως η f στρέφει

— τα κοίλα προς τα κάτω στο $[0,2]$

— τα κοίλα προς τα άνω στο $[2,5]$

— τα κοίλα προς τα κάτω στο $[5,6]$

— τα κοίλα προς τα άνω στο $[6,7]$ και

— τα κοίλα προς τα κάτω στο $[7,10]$.

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα σημεία 1, 4, 6, 8 που είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f και στα οποία μηδενίζεται η f', καθώς και τα σημεία -1, 10 που είναι άκρα του πεδίου ορισμού της f.
Οι αριθμοί 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων, ενώ οι αριθμοί -1, 4, 10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων. Ο αριθμός 6 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού.

● Τέλος, τα σημεία 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής.

5. i) Επειδή η συνάρτηση S είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,t_2]$, το κινητό για $t \in [0, t_2]$ κινείται κατά την αρνητική φορά. Επειδή η S είναι γνησίως αύξουσα στο $[t_2, +\infty)$, το κινητό για $t \geq t_2$ κινείται κατά τη θετική φορά.

ii) Είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του κινητού είναι $\upsilon(t) = S'(t)$ και ότι τις χρονικές στιγμές h' η C παρουσιάζει καμπή.
Από το σχήμα προκύπτει ότι:

— Στο διάστημα $[0,t_1]$ η S στρέφει τα κοίλα κάτω και άρα η $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα στο $[0,t_1]$ μειώνεται.

— Στο διάστημα $[t_1,t_3]$ η S στρέφει τα κοίλα πάνω και άρα η $S'(t) = \upsilon(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό. Δηλαδή η ταχύτητα στο $[t_1,t_3]$ αυξάνεται.

— Ομοίως προκύπτει ότι η ταχύτητα στο $[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

t	0	t_1	t_3	$+\infty$
$\upsilon(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Δηλαδή, η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται στο διάστημα $[t_1,t_3]$ και στα διαστήματα $[0,t_1]$ και $[t_3, +\infty)$ μειώνεται.

2.8 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{και}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}, \quad \text{οπότε}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ x = -\sqrt{3} \ \text{ ή } \ x = \sqrt{3}.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ Σ.Κ.	$\smile$	0 Σ.Κ.	$\frown$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ Σ.Κ.	$\smile$	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα $-\sqrt{3}$, 0 και $\sqrt{3}$ και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ και $\Gamma\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

Επειδή τα σημεία A και Γ έχουν αντίθετες συντεταγμένες θα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων που είναι το σημείο B.

2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x \text{ και } f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2 = 2(e^{x-\alpha} - 1),$$

οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$2-\alpha^2$ Σ.Κ.	$\smile$	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο α και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(\alpha, 2-\alpha^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σημείο καμπής της C_f. Το σημείο αυτό βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$, αφού $2 - \alpha^2 = -\alpha^2 + 2$.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2 \text{ και}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12 = 12(x^2 - \alpha x + 1).$$

Παρατηρούμε ότι η f'' είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο με $\Delta = \alpha^2 - 4 < 0$, αφού $\alpha \in (-2, 2)$. Επομένως, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' όλο το $\mathbb{R}$.

4. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

και

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1),$$

οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Το πρόσημο των f' και f'', τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		↗	2 Τ.Μ.	↘	0 Σ.Κ.	↘	−2 Τ.Ε.	↗	

Δηλαδή, η f παρουσιάζει:

- στο σημείο 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = 2$ και
- στο σημείο 2 τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -2$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο 1 και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο το σημείο $\Gamma(1,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii) Για να δείξουμε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$.

Έχουμε:

$$\lambda_{AB} = \frac{-2-2}{2-0} = -2 \text{ και } \lambda_{A\Gamma} = \frac{0-2}{1-0} = -2.$$

Άρα $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$.

5. Είναι:

$$2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$$

οπότε έχουμε διαδοχικά

$$f(x)f'(x)-f'(x)+x=0$$

$$f'(x)f'(x)+f(x)f''(x)-f''(x)+1=0$$

$$(f'(x))^2+f''(x)(f(x)-1)+1=0.$$

Έστω ότι το σημείο x_0 είναι θέση σημείου καμπής. Τότε ισχύει $f''(x_0)=0$, οπότε

$(f'(x_0))^2+f''(x_0)(f(x_0)-1)+1=0$ ή ισοδύναμα $(f'(x_0))^2+1=0$

που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

2.9 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι

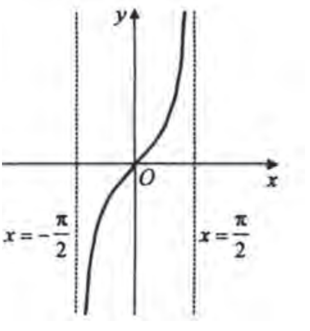
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty \text{ και } \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

οπότε η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

ii) Είναι:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \text{εφ}x$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{1}{\text{συν}x}\right)=-\infty,$$



αφού

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\text{συν}x}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\text{ημ}x=-1.$$

Άρα η $x=-\dfrac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Ομοίως

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\text{εφ}x=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{1}{\text{συν}x}\right)=+\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\text{συν}x}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\text{ημ}x=1.$$

Άρα η $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

iii) Είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1.$$

Επομένως, η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

iv) Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0 \ \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Επομένως, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

2. i) Έχουμε:

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$, οπότε η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1$, οπότε η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

ii) Έχουμε:

- $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\right) = 0,$$

οπότε η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right) = +\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

3. i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες

● Η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-1}=0.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y=x$.
Ομοίως βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες
Είναι:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-2}{x-1}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-2}{x-1}=-\infty,$$

οπότε η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

ii) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

Η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x-2}=2.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y=x+2$.
Ομοίως, η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

● **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Είναι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3}{x-2} = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3}{x-2} = +\infty,$$

οπότε η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

iii) Η f έχει πεδίο ορισμού $A=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

— Η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = -1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Δηλαδή είναι η ευθεία $y=-x-\frac{1}{2}$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

● **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, αφού στο -1 και στο 0 είναι συνεχής.

4. i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)=0$ και

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0}(x+1)\sigma\upsilon\nu x = 1,$$

έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)} = 1.$$

ii) Επειδή $\lim_{x\to0}(1-\sigma\upsilon\nu x^2)=0$, $\lim_{x\to0}x^4=0$ και

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x^2)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x^2\cdot 2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^4}=\frac{1}{2}.$$

iii) Επειδή $\lim_{x\to0}(x-\eta\mu x)=0$, $\lim_{x\to0}(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ και

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=0$$

έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=0.$$

2.9 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+1)=0.$$

Πράγματι έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+1)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=0.$$

Πράγματι έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

ii) Έχουμε

$$x^2+2x+2 > x^2+2x+1 = (x+1)^2.$$

Επομένως:

— Κοντά στο $-\infty$ είναι

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} > \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = -x-1 \ (\text{αφού } x < -1)$$

που σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτη $y = -x-1$

— Κοντά στο $+\infty$ είναι

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} > \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1 \ (\text{αφού } x < -1)$$

που σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτη $y = x+1$.

2. i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

— Επειδή

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\cdot 2^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2^x}\cdot x\right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$

η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

— Η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\cdot 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(2^x)'} = \frac{1}{2^x \ln 2} = 0 \ \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2^x}-0\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(2^x\ln 2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2^x\ln^2 2} = 0.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y=0$.

ii) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

Η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y=0$.

● **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Επειδή

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = -\infty.$$

Η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

3. Αρχικά θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^+}f(x) = f(0).$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^-}(\eta\mu x+\alpha) = \alpha,\quad \lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}e^{\beta x} = 1 \text{ και } f(0)=\alpha.$$

Επομένως πρέπει να είναι $\alpha=1$, δηλαδή η συνάρτηση f θα είναι της μορφής

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1, & x\le 0\\ e^{\beta x}, & x>0\end{cases} \qquad (1)$$

Για $\alpha \neq 1$ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Εξετάζουμε τώρα, για ποιες τιμές του β η συνάρτηση (1) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

— Για $x < 0$ έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \dfrac{\eta\mu x}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{\beta x}-1}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\beta x}-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\beta e^{\beta x}}{1} = \beta.$$

Επομένως, η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$, αν και μόνο αν $\beta = 1$ και $\alpha = 1$.

4. i) — Για $0 < x \neq 1$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

— Για $x = 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1}{-1} = -1 \text{ και } f(1) = -1.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii) Για $0 < x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1} = \frac{x\ln x + 1 - x}{-(x-1)^2},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x+x\ln x}{-(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x+x\ln x)'}{(-(x-1)^2)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1+\ln x+1}{-2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{-2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(-2(x-1))'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

5. i) ● Για $x \neq 1$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση και πηλίκο συνεχών.
Για $x_0 = 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} \quad \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} = 0.$$

Επειδή $f(1) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, η f είναι συνεχής στο 1.

● Είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1}-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} \quad \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{2(x-1)(x^2-2x+2)} = 1.$$

Άρα $f'(0) = 1$.
Επομένως η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 1.

ii) Είναι

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1+0 = 1$$

και $g(1) = 1^2 = 1$.
Άρα η g είναι συνεχής στο 1.

— Για $x < 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2.$$

— Για $x > 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+\dfrac{\ln x}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x(x-1)}\quad\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{x-1+x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x(2x-1)}=1.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1},$$

η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

6. i) — Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{-x})=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=1.$$

— Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}x=0$, και $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\quad\left(\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

ii) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-e^{-x})\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-x}}{x}(x\ln x)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=1\cdot 0=0$$

σύμφωνα με το ερώτημα i).

Επειδή $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-e^{-x})\ln x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$, η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $O(0,0)$ την ευθεία με εξίσωση $x=0$.

2.10 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) • Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

• Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

• Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$, οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-1$.

Το πρόσημο της f' δίνεται από τον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα τοπικά ακρότατα αυτής.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	16 Τ.Μ.	$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	

Εξάλλου για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)=6x-6$, οπότε

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	0 Σ.Κ.	$\smile$	

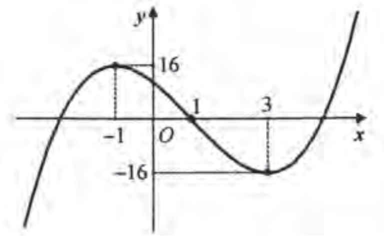
• Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2-9x+11)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x^2-9x+11)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

Η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού η f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

2.10

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	16 Τ.Μ.	↘	0 Σ.Κ.	↘	-16 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



ii) ● Η f ορίζεται στο $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

● Η f είναι συνεχής στο A, ως ρητή.

● Για κάθε $x\in A$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$, οπότε

$$f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in A.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	↘	‖	↘

Για κάθε $x\in A$ ισχύει $f''(x)=-2\dfrac{-2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{4}{(x-1)^3}$.

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	⌢	‖	⌣

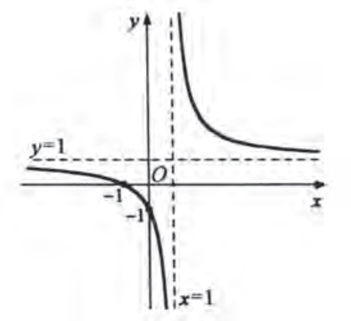
● Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1,$ οπότε η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1,$ οπότε η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$



iii) ● Η f ορίζεται στο $A = \mathbb{R}$.

● Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

● Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1),$ οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1 Τ.Ε.	$\nearrow$	0 Τ.Μ.	$\searrow$	-1 Τ.Ε.	$\nearrow$	

— Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1),$ οπότε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.10

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$-\frac{5}{9}$ Σ.Κ.	$\cap$	$-\frac{5}{9}$ Σ.Κ.	$\cup$	

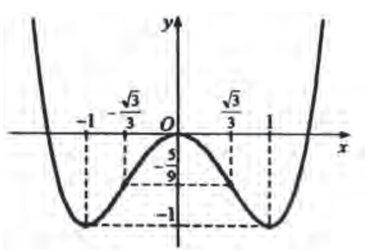
● Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-2x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

Η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$, $+\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τετάρτου βαθμού.

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1 Τ.Ε.	$\nearrow$	$-\frac{5}{9}$ Σ.Κ.	$\nearrow$	0 Τ.Μ.	$\searrow$	$-\frac{5}{9}$ Σ.Κ.	$\searrow$	-1 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$



Σχόλιο

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x),$$

η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.

2. i) ● Η f ορίζεται στο $A=\mathbb{R}^*$.

● Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, ως ρητή.

● Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, οπότε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-2 Τ.Μ.	↘	‖	↘	2 Τ.Ε.	↗	

— Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f''(x)=\dfrac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}$, οπότε

$$f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		⌒	‖	⌣	

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

Η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y=x$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

● **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

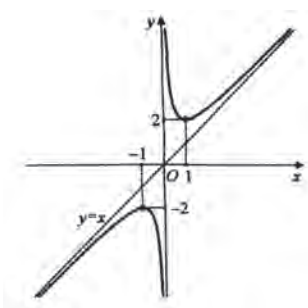
Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty.$$

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2 Τ.Μ.	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



Σχόλιο

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x),$$

η f είναι περιττή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή O.

ii) ● Η f ορίζεται στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

● Η f είναι συνεχής στο A, ως ρητή.

● Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2},$$

οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	↗	‖	↗

Για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x+3)}{(x-1)^4} = \frac{-4}{(x-1)^3},$$

οπότε το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$\smile$	‖	$\frown$

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

Η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-x} = 1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x-1} = 0.$$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $y = x$.
Ομοίως, η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

● **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-1} = +\infty$ και

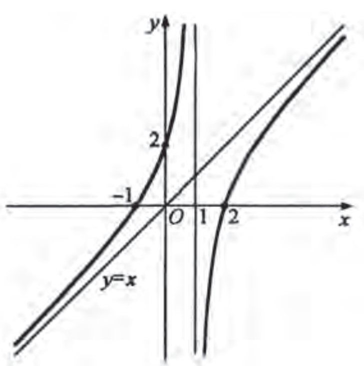
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = -\infty.$$

Άρα, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x-1} = -\infty \text{ και } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$



3. ● Είναι $A = [-\pi, \pi]$

● Η f είναι συνεχής στο A ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

● Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f'(x) = 1 + \text{συν}x$, οπότε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\pi \text{ ή } x=\pi.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα αυτής.

x	$-\pi$		$+\pi$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$		↗	

Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f''(x) = -$ ημx, οπότε

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\pi \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=\pi.$$

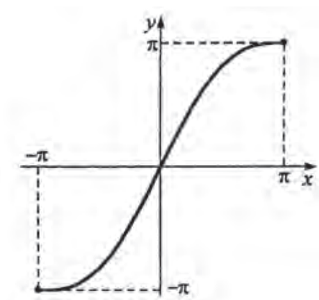
Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω και τα σημεία καμπής.

x	$-\pi$		0		π
$f''(x)$	0	+	0	–	0
$f(x)$			0 Σ.Κ.		

● Είναι $f(-\pi)=-\pi$ και $f(\pi)=\pi$

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	0	+		+	0
$f''(x)$	0	+	0	–	0
$f(x)$	$-\pi$ min		0 Σ.Κ.		π max



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \text{ και } g'(x)=2x-3,$$

οπότε

$$f'(1) = -1 \text{ και } g'(1) = -1.$$

Το σημείο $A(1,1)$ είναι κοινό σημείο των C_f και C_g, αφού $f(1) = 1$ και $g(1) = 1$.

Επειδή ισχύει $f'(1) = g'(1)$, οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στο $(1,1)$ ταυτίζονται.

ii) Για να βρούμε τη σχετική θέση των C_f και C_g βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς

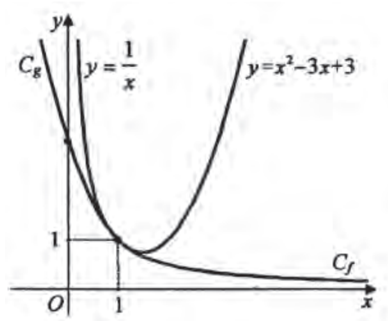
$$\varphi(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^3}{x}.$$

Έχουμε: $\varphi(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$ και $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.

Επομένως:

— η C_f είναι πάνω από την C_g, όταν $x \in (0,1)$ και

— η C_g είναι πάνω από την C_f, όταν $x \in (1,+\infty)$ (σχήμα).



2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως:

— Για $x > 0$ θα είναι:

$$\varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > f(0) - g(0) \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$

αφού $f(0) = g(0)$ και

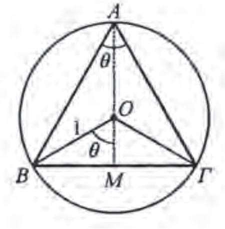
— Για $x < 0$ θα είναι

$$\varphi(x) < \varphi(0) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < f(0) - g(0) \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$

αφού $f(0) = g(0)$.

3. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OBM έχουμε:

$$(BM) = 1 \cdot \eta\mu\theta \text{ και } (OM) = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta.$$



Είναι όμως $(B\Gamma) = 2(BM) = 2\eta\mu\theta$ και

$$(AM) = (OA) + (OM) = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$$

οπότε

$$E = E(\theta) = \frac{1}{2} 2\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta).$$

Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ ισχύει:

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) - \eta\mu^2\theta \\ &= \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta \\ &= \sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} E'(\theta) = 0 &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta = -\sigma\upsilon\nu\theta \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \\ &\Leftrightarrow 2\theta = \pi - \theta, \text{ αφού } \theta \in (0, \pi) \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της E' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα ($E'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ και $E'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$), από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της E και τα ακρότατα αυτής.

θ	0		$\pi/3$		π
$E'(\theta)$		+	0	–	
$E(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ max	↘	

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ και παρουσιάζεται όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4. Γνωρίζουμε ότι το μήκος τόξου θ rad είναι $L = r \cdot \theta$ ενώ το εμβαδόν κυκλικού τομέα θ rad είναι $E = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

Επομένως, η περίμετρος του κυκλικού τομέα είναι:

$$2r + r\theta = 20 \Leftrightarrow \theta = \frac{20-2r}{r},\ 0 < r < 10$$

και το εμβαδόν του είναι:

$$E(r) = \frac{1}{2} r^2 \frac{20-2r}{r} = 10r - r^2,\quad r \in (0,10).$$

Για κάθε $r \in (0,10)$ ισχύει $E'(r) = 10 - 2r$, οπότε $E'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 5$.

Το πρόσημο της $E'(r)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

r	0		5		10
$E'(r)$		$+$	0	$-$	
$E(r)$		$\nearrow$	25 max	$\searrow$	

Δηλαδή η E παρουσιάζει στο $r = 5$ μέγιστο το $E(r) = 25$. Επομένως ο ανθόκηπος έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια, όταν η ακτίνα του κύκλου είναι $r = 5$ m.

5. i) Από τα ορθογώνια τρίγωνα $OA\Gamma$ και $O\Delta B$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(O\Gamma)}{(OA)} = \frac{1}{(OA)} \quad \text{και} \quad \eta\mu\theta = \frac{(O\Delta)}{(OB)} = \frac{1}{(OB)}$$

οπότε

$$(OA) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{και} \quad (OB) = \frac{1}{\eta\mu\theta},\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ii) $(AB) = (OA) + (OB) = \dfrac{1}{\eta\mu\theta} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\theta) = \dfrac{1}{\eta\mu\theta} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ η οποία είναι ορισμένη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και συνεχής στο διάστημα. Επιπλέον, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f'(\theta)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta}+\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta},$$

οπότε

$$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta=0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4},$$

αφού $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα αυτής.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$ min	$\nearrow$	

Δηλαδή, η f στο $\theta=\frac{\pi}{4}$ παρουσιάζει ελάχιστο $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

Επομένως, το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της σκάλας, που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια να στρίψει στη γωνία, είναι $2\sqrt{2}\text{m}\cong 2,8\text{m}$.

6. i) • Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$

• Η f είναι συνεχής στο A.

• Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, οπότε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e.$$

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ max	$\searrow$	

● Για κάθε $x>0$ ισχύει $f''(x)=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$, οπότε

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{3/2}.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της.

x	0		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\dfrac{3}{2e^{3/2}}$ Σ.Κ.		

● **Πλάγιες - οριζόντιες ασύμπτωτες**

Η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0 \text{ και}$$

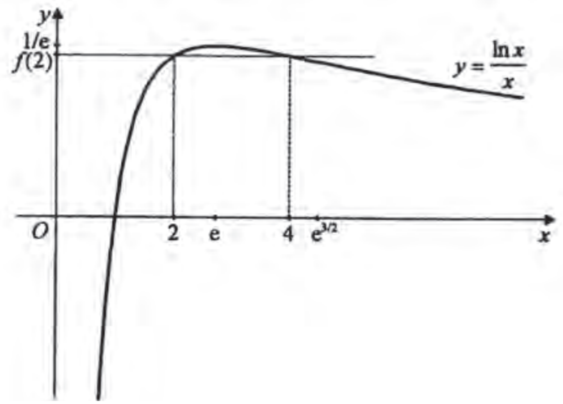
$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Άρα, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επειδή, επιπλέον, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\ln x\right)=-\infty$, η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

● Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	0		e		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\dfrac{1}{e}$ Τ.Μ.		$\dfrac{3}{2e^{3/2}}$ Σ.Κ.		0



ii) Είναι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha} \Leftrightarrow \ln\alpha^{\alpha+1} > \ln(\alpha+1)^{\alpha}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)\ln\alpha > \alpha\ln(\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} > \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) > f(\alpha+1).$$

Η τελευταία ανισότητα (άρα και η πρώτη) είναι αληθής, αφού $e < \alpha < \alpha+1$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

iii) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$2^x = x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 = 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(2) = f(x).$$

Δηλαδή η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει τόσες λύσεις στο $(0,+\infty)$, όσες είναι οι τιμές του $x>0$ για τις οποίες η συνάρτηση f παίρνει την τιμή

$$f(2) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Επειδή $2^2 = 2^2$ και $2^4 = 4^2$, η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει στο $(0,+\infty)$ λύσεις τις $x=2$ και $x=4$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτές είναι μοναδικές. Πράγματι σύμφωνα με το ερώτημα i):

— η f στο $(0,e]$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα την τιμή $f(2)$ θα την πάρει μια φορά, για $x=2$.

— η f στο $[e,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα την τιμή $f(4)$ θα την πάρει μόνο μια φορά.

Επομένως, οι λύσεις της $2^x = x^2$ είναι ακριβώς δύο, οι $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

7. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x$, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.
Επειδή $f(0) = 2$ έχουμε:

$$f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η f στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat ισχύει $f'(0) = 0$.

Είναι όμως $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha + \beta^x \ln\beta$, οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha + \ln\beta = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1.$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει. Θεωρούμε, τώρα, τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x - 1$, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Επειδή $f(0) = \alpha^0 - 0 - 1 = 0$, έχουμε

$$f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, ισχύει $f'(0) = 0$. Είναι όμως:

$$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$$

οπότε

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

8. i) —Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = e^x \text{ και } f''(x) = e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

— Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι:

$$y - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1,$$

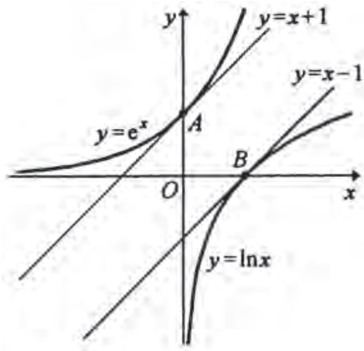
ενώ της C_g στο σημείο $(1,0)$ είναι:

$$y-0=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1.$$

iii) α) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,1)$ βρίσκεται κάτω από την C_f. Άρα ισχύει:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.



β) Επειδή η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(1,0)$ βρίσκεται πάνω από την C_g. Άρα, ισχύει:

$$x-1 \geq \ln x \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=1$.

iv) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$x-1 \leq x+1,$$

οπότε, λόγω του ερωτήματος iii), έχουμε

$$\ln x \leq x-1 < x+1 < e^x, \ x>0.$$

Άρα

$$\ln x < e^x, \text{ για κάθε } x>0.$$

9. i) Η συνάρτηση $f(x)=e^x - \lambda x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-\lambda$. Είναι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\lambda=0 \Leftrightarrow x=\ln\lambda.$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$		$\ln\lambda$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	min	↗	

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=\ln\lambda$ την

$$f(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda=\lambda-\lambda\ln\lambda=\lambda(1-\ln\lambda).$$

ii) Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$(e^x\geq\lambda x,\ x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(e^x-\lambda x\geq 0,\ x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(f(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \min f(x)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1-\ln\lambda)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-\ln\lambda\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\lambda\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda\leq e.$$

Άρα, η μεγαλύτερη τιμή του λ, για την οποία ισχύει $e^x\geq\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι η $\lambda=e$.

iii) Για να εφάπτεται η ευθεία $y=ex$ της γραφικής παράστασης της $g(x)=e^x$, αρκεί να υπάρχει σημείο x_0 τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_g στο $A(x_0,g(x_0))$ να ταυτίζεται με την $y=ex$. Για να ισχύει αυτό, αρκεί

$$\begin{cases}g(x_0)=e\cdot x_0\\ g'(x_0)=e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{x_0}=ex_0\\ e^{x_0}=e\end{cases}\Leftrightarrow x_0=1.$$

Επομένως η $y=ex$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $A(1,e)$.

$$\varepsilon_1: y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0). \qquad (1)$$

10. i) Για $x\neq 0$ είναι

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επειδή $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ έχουμε

$$-|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|.$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}|x|=\lim_{x\to 0}\left(-|x|\right)=0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Επομένως $f'(0)=0$.

Αφού $f(0)=0$ και $f'(0)=0$, η ευθεία $y=0$ είναι εφαπτόμενη της C_f στο $O(0,0)$.

ii) Τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y=0$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

- Για $x\neq 0$ είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow \eta\mu\frac{1}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z}^*\Leftrightarrow x=\frac{1}{\kappa\pi},\ \ \kappa\in\mathbb{Z}^*. \qquad (1)$$

- Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Άρα, τα κοινά σημεία είναι άπειρα το $O(0,0)$ και τα υπόλοιπα έχουν τετμημένες που δίνονται, για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in\mathbb{Z}^*$ από τη σχέση (1). (Είναι προφανές ότι για μεγάλες κατ' απόλυτη τιμή του κ, οι τιμές του x είναι πολύ μικρές και πλησιάζουν το 0).

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$$

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}\eta\mu t-\frac{1}{t}\right)\quad\left(\text{θέσαμε } t=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu t-t}{t^2}\quad\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu t-1}{2t}\quad\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\eta\mu t}{2}=0.$$

● Ομοίως, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0.$$

11. Α. i) Η συνάρτηση ψ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=2\varphi'(x)\varphi''(x)+2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\\&=2\varphi'(x)(\varphi''(x)+\varphi(x))\\&=2\varphi'(x)\cdot 0 \text{ (από υπόθεση)}\\&=0.\end{aligned}$$

Επομένως, η ψ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Επειδή

$$\psi(0)=(\varphi'(0))^2+(\varphi(0))^2=0+0=0,$$

είναι

$$\psi(x)=0,\ \ x\in\mathbb{R}$$

ii) Επειδή $\psi(x)=0$, είναι $(\varphi'(x))^2+(\varphi(x))^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $\varphi'(x)=0$ και $\varphi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\varphi(x)=0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β. Είναι

$$\varphi'(x)=f'(x)-\text{συν}x \text{ και}$$

$$\varphi''(x)=f''(x)+\text{ημ}x.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\varphi''(x)+\varphi(x)&=f''(x)+\text{ημ}x+f(x)-\text{ημ}x\\&=f''(x)+f(x)\\&=0 \text{ (από υπόθεση)}\end{aligned}$$

Επίσης

$$\varphi(0)=f(0)-\text{ημ}0=0$$

και

$$\varphi'(0)=f'(0)-\text{συν}0=1-1=0.$$

Επομένως η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος (Α).
Ομοίως, έχουμε:

$$\psi'(x)=g'(x)+\text{ημ}x$$

και

$$\psi''(x) = g''(x) + \sigma\upsilon\nu x.$$

Άρα,

$$\psi''(x) + \psi(x) = g''(x) + \sigma\upsilon\nu x + g(x) - \sigma\upsilon\nu x$$

$$= g''(x) + g(x) = 0 \ \text{(από υπόθεση)}.$$

Επίσης

$$\psi(0) = g(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - 1 = 0$$

$$\psi'(0) = g'(0) + \eta\mu 0 = 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση y ικανοποιεί τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος A.

ii) Αφού οι συναρτήσεις φ, ψ ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος A, σύμφωνα με το ερώτημα (A), ισχύει $\varphi(x) = 0$ και $\psi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. i) Οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{PM} = (\sigma\upsilon\nu\theta - x, \eta\mu\theta)$ και $\overrightarrow{PN} = (1 - x, \theta)$ είναι συγγραμμικά. Επομένως,

$$\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta - x & \eta\mu\theta \\ 1 - x & \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta(\sigma\upsilon\nu\theta - x) - \eta\mu\theta(1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta = x\theta - x\eta\mu\theta$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta).$$

ii) Έχουμε

$$\lim_{\theta \to 0} x(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} \quad \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta - \theta\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}$$

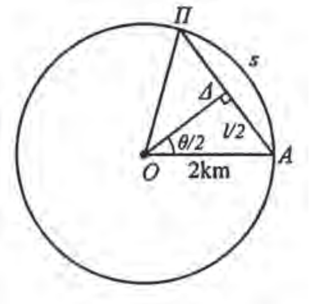
$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\theta\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\eta\mu\theta - \theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \quad \left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+\theta\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$=\frac{-2}{1}=-2.$$

13. Α. i) —Το μήκος s του τόξου $ΑΠ$ είναι



$$s=2\pi\rho\frac{\theta}{2\pi}=\theta\rho=2\theta,\ \text{οπότε}$$

$$\theta=\frac{s}{2}.$$

—Αν $ΟΔ\perp ΑΠ$, από το τρίγωνο $ΟΑΔ$ έχουμε

$$\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{ΑΔ}{2}=\frac{l/2}{2}=\frac{l}{4}$$

οπότε

$$l=4\eta\mu\frac{\theta}{2}.$$

ii) Επειδή ο πεζοπόρος βαδίζει με ταχύτητα $\upsilon=4$ km/h, τη χρονική στιγμή t θα έχει διανύσει διάστημα $s=4t$. Αφού $\theta=\frac{l}{2}$, είναι

$$\theta=\frac{4t}{2}=2t\ \text{και}\ l=4\eta\mu\frac{2t}{2}=4\eta\mu t.$$

Β. Είναι $l'(t)=4\sigma\upsilon\nu t$, οπότε:

α) Όταν $\theta=\frac{2\pi}{3}$, είναι

$$t=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}\ \text{και}\ l'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2\ \text{km/h}.$$

β) Όταν $\theta=\pi$, είναι

$$t=\frac{\pi}{2}\ \text{και}\ l'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0\ \text{km/h}$$

γ) Όταν $\theta=\frac{4\pi}{3}$, είναι

$$t=\frac{2\pi}{3}\ \text{και}\ l'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-2\ \text{km/h}.$$

14. Έστω ότι ο αγρότης θα προσλάβει x εργάτες, και τον επιστάτη και έστω ότι χρειάζονται t ώρες για να μαζευτούν οι ντομάτες.
Αφού κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά ντομάτες την ώρα, σε t ώρες οι x εργάτες θα μαζέψουν όλες τις ντομάτες.

Άρα $$125xt = 12500 \Leftrightarrow xt = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{x}. \qquad (1)$$

Αν K είναι συνολικό κόστος για την εργασία, τότε έχουμε

$$K = 6t \cdot x + 10t + 10(x+1).$$

Έτσι, λόγω της (1), είναι

$$K(x) = 6 \cdot \frac{100}{x} \cdot x + 10 \cdot \frac{100}{x} + 10(x+1)$$

δηλαδή

$$K(x) = 600 + \frac{1000}{x} + 10x + 10.$$

Η συνάρτηση K είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$K'(x) = -\frac{1000}{x^2} + 10 = \frac{10x^2 - 1000}{x^2} = \frac{10(x^2 - 100)}{x^2}.$$

Είναι $K'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x = 10,$ αφού $x > 0$.

Το πρόσημο της K', καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της K φαίνονται στον πίνακα.

x	0		10		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	
$K(x)$		$\searrow$	$K(10)$ min	$\nearrow$	

Άρα, για $x = 10$ η συνάρτηση έχει ελάχιστο, το

$$K(10) = 600 + \frac{1000}{10} + 10 \cdot 11 = 810.$$

Επομένως, ο αγρότης πρέπει να προσλάβει 10 εργάτες. Το μικρότερο δυνατό κόστος είναι 810 ευρώ, ενώ χρειάζονται $t = \frac{100}{x} = 10$ ώρες για να μαζευτούν οι ντομάτες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

i) $\int (x^3 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx = \int x^3 dx + \int \eta\mu x dx + \int \sigma\upsilon\nu x dx$

$$= \frac{x^4}{4} - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$$

ii) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx = \int x dx + \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$$

iii) $\int 3x\sqrt{x} dx = 3\int x^{\frac{3}{2}} dx = 3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

iv) $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx = \int x^2 dx + 2\int x dx + \int 4 dx$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$$

v) $\int \left(e^x - \frac{3}{x} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx = \int e^x dx - 3\int \frac{dx}{x} + \int \sigma\upsilon\nu 2x dx$

$$= \int e^x dx - 3\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int (\eta\mu 2x)' dx$$

$$= e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\eta\mu 2x + c.$$

vi) $\int \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx - \int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx$

$$= \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x + c$$

vii) $\int \frac{x+3}{x+2}dx = \int \frac{x+2+1}{x+2}dx = \int 1dx + \int \frac{dx}{x+2}$

$$= x + \ln|x+2| + c.$$

2. Επειδή $\int f'(x)dx = f(x)+c$, έχουμε διαδοχικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = f(x)+c$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = f(x)+c$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = f(x)+c,$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - c.$$

Επειδή $f(9)=1$, έχουμε $2\sqrt{9}-c=1$, οπότε $c=5$. Επομένως $f(x)=2\sqrt{x}-5$.

3. Επειδή $\int f''(x)dx = f'(x)+c$, έχουμε διαδοχικά:

$$\int 3dx = f'(x)+c,$$

$$f'(x) = 3x - c.$$

Επειδή $f'(1)=6$ έχουμε $3-c=6$, οπότε $c=-3$. Επομένως

$$f'(x) = 3x+3.$$

Επειδή $\int f'(x)dx = f(x)+c$, έχουμε διαδοχικά:

$$\int (3x+3)dx = f(x)+c$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - c.$$

Επειδή $f(0)=4$ έχουμε $\frac{3}{2}\cdot 0 + 3\cdot 0 - c_1 = 4$, οπότε $c_1 = -4$. Επομένως

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4.$$

4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int f''(x)dx = f'(x)+c$$

$$\int (12x^2+2)dx = f'(x)+c$$

$$4x^3+2x = f'(x)+c,$$

$$f'(x) = 4x^3+2x-c.$$

Επειδή $f'(1)=3$, έχουμε $4+2-c=3$, οπότε $c=3$. Επομένως

$$f'(x)=4x^3+2x-3.$$

Επίσης έχουμε διαδοχικά

$$\int f'(x)dx = f(x)+c_1$$

$$\int (4x^3+2x-3)dx = f(x)+c_1$$

$$x^4+x^2-3x = f(x)+c_1,$$

$$f(x) = x^4+x^2-3x-c_1.$$

Επειδή το $A(1,1)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, έχουμε:

$$f(1)=1 \Leftrightarrow 1+1-3-c_1=1 \Leftrightarrow c_1=-2.$$

Επομένως

$$f(x)=x^4+x^2-3x+2.$$

5. Επειδή $N'(t)=\frac{1}{20}e^{\frac{t}{20}}$, έχουμε διαδοχικά

$$\int N'(t)dt = N(t)+c$$

$$\int \frac{1}{20}e^{t/20}dt = N(t)+c$$

$$e^{t/20} = N(t)+c$$

$$N(t) = e^{t/20}-c$$

Επομένως, η αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά, είναι ίση με:

$$N(60)-N(0) = (e^{60/20}-c)-(e^0-c) = e^3-1 \cong 19 \text{ εκατομ.}$$

6. Αν $K(x)$ το κόστος, σε ευρώ, της εβδομαδιαίας παραγωγής x, τότε $K'(x)=x^2+5x$, οπότε έχουμε

$$\int K'(x)dx = K(x)+c$$

ή

$$\int (x^2+5x)dx = K(x)+c,$$

οπότε

$$K(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-c.$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $K(0)=100$, οπότε $-c=100$ και άρα $c=-100$. Επομένως, η συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής είναι:

$$K(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+100.$$

7. Έχουμε διαδοχικά:

$$\int R'(t)dt=R(t)+c$$

$$\int\left(20+10t-\frac{3}{4}t^2\right)dt=R(t)+c,$$

$$R(t)=20t+5t^2-\frac{1}{4}t^3-c.$$

Προφανώς $R(0)=0$, οπότε $c=0$ και άρα $R(t)=20t+5t^2-\frac{1}{4}t^3$.

Επομένως τα βαρέλια που θα αντληθούν στους πρώτους 8 μήνες είναι:

$$R(8)=20\cdot 8+5\cdot 8^2-\frac{1}{4}8^3=160+5\cdot 8^2-2\cdot 8^2=352 \text{ χιλιάδες.}$$

3.1 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή $T'(t)=-k\alpha e^{-kt}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\int T'(t)dt=T(t)+c$$

$$\int -k\alpha e^{-kt}dt=T(t)+c$$

$$\alpha\int (e^{-kt})'dt=T(t)+c,$$

$$T(t)=\alpha e^{-kt}-c.$$

Επειδή $T(0)+\alpha$ και $T(0)=\alpha e^{-k\cdot 0}-c=\alpha-c$, έχουμε

$$T_0+\alpha=\alpha-c \Leftrightarrow c=-T_0.$$

Επομένως

$$T(t)=\alpha e^{-kt}+T_0.$$

2. Έχουμε διαδοχικά

$$\int P'(x)dx = P(x)+c$$

$$\int 5,8e^{-\frac{x}{2000}}dx = P(x)+c$$

$$5,8\cdot(-2000)\int (e^{-\frac{x}{2000}})'dx = P(x)+c$$

$$P(x) = -11.600e^{-\frac{x}{2000}} - c.$$

Το συνολικό κέρδος που οφείλεται στην αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 σε 6.000.000 είναι:

$$P(6000)-P(4000) = -11600e^{-\frac{6000}{2000}} - c + 11600e^{-\frac{4000}{2000}} + c$$

$$= 11600(e^{-2}-e^{-3}) = 11600\left(\frac{e-1}{e^3}\right)$$

$$\cong 11600\cdot 0,086 = 997,6 \text{ χιλιάδες ευρώ} = 997.600 \text{ ευρώ}$$

3. Έστω $P(t)$ το κέρδος της εταιρείας στις πρώτες t ημέρες. Τότε

$$P(t) = E(t) - K(t),$$

οπότε

$$P'(t) = E'(t) - K'(t) = 1000 + 0,3t - 800 + 0,6t = 200 + 0,9t.$$

Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\int P'(t)dt = P(t)+c$$

$$\int (200+0,9t)dt = P(t)+c$$

$$P(t) = 200t + 0,9\frac{t^2}{2} + c_1.$$

Το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την 3^{η} έως την 6^{η} ημέρα είναι:

$$P(6)-P(2) = 200\cdot 6 + 0,9\frac{6^2}{2} + c_1 - 200\cdot 2 - 0,9\frac{2^2}{2} - c_1$$

$$= 1216,2 - 401,8 = 814,4 \text{ ευρώ}.$$

4. i) Από την ισότητα $f''(x) = g''(x)$ έχουμε διαδοχικά

$$f'(x) = g'(x) + c_1$$

$$f(x) = g(x) + c_1x + c_2. \qquad (1)$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = g(0) + 0 + c_2$, οπότε $c_2 = 0$, αφού $f(0) = g(0)$. Επομένως

$$f(x) = g(x) + c_1 x. \qquad (2)$$

Για $x = 1$, από την (2), έχουμε $f(1) = g(1) + c_1$, οπότε $c_1 = 1$, αφού $f(1) = g(1) + 1$. Έτσι από τη (2) προκύπτει

$$f(x) = g(x) + x.$$

ii) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει

$$f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha < 0$$

$$f(\beta) = g(\beta) + \beta = 0 + \beta = \beta > 0.$$

Άρα, $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

3.2 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

i) $\int x^2 e^{-x} dx = -\int x^2 (e^{-x})' dx$

$$= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2\int x (e^{-x})' dx$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c.$$

ii) $\int (3x^2 - 2x + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int (3x^2 - 2x + 1)(e^{2x})' dx$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (6x - 2) e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}\int (6x - 2)(e^{2x})' dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 2x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}(6x - 2)e^{2x} + \frac{1}{4}\int 6e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(6x^2 - 4x + 2 - 6x + 2) + \frac{3}{4}e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(6x^2 - 10x + 7) + c$$

iii) $\int x^3 \ln x dx = \int \left(\frac{x^4}{4} \right)' \ln x dx$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} (\ln x)' dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c$$

iv) $\int 2x^2 \eta\mu 2x dx = \int x^2 (\sigma\upsilon\nu 2x)' dx$

$$= -x^2 \sigma\upsilon\nu 2x + \int 2x \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$= -x^2 \sigma\upsilon\nu 2x + \int x (\eta\mu 2x)' dx$$

$$= -x^2 \sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x - \int \eta\mu 2x dx$$

$$= -x^2 \sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x + \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x + c$$

$$= \left(-x^2 + \frac{1}{2} \right) \sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x + c$$

v) $\int 4x \sigma\upsilon\nu 2x dx = \int 2x \cdot (\eta\mu 2x)' dx$

$$= 2x\eta\mu 2x - \int 2\eta\mu 2x dx$$

$$= 2x\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + c$$

vi) $\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c$$

vii) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\int \left(\frac{1}{x} \right)' \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$

viii) $I = \int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2 \int e^x \eta\mu 2x dx$

$$= e^x \sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x \eta\mu 2x - 4 \int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx.$$

Άρα

$$I = e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - 4I$$

$$5I = e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x)$$

$$I = \frac{1}{5}e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + c.$$

2. i) Θέτουμε $u = 3x$, οπότε $du = 3dx$ και άρα $dx = \frac{1}{3}du$. Επομένως,

$$\int \eta\mu 3x dx = \frac{1}{3}\int \eta\mu u du = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + c$$

ii) Θέτουμε $u = 4x^2 - 16x + 7$, οπότε $du = (8x - 16)dx = 8(x-2)dx$. Επομένως

$$\int (4x^2 - 16x + 7)^3 (x-2)dx = \frac{1}{8}\int u^3 du = \frac{1}{8}\frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{32}(4x^2 - 16x + 7)^4 + c.$$

iii) Θέτουμε $u = x^2 + 6x$, οπότε $du = (2x + 6)dx = 2(x + 3)dx$. Επομένως,

$$\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{2}\int u^{-4}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-3}}{-3} + c$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{u^3} + c = \frac{-1}{6(x^2+6x)^3} + c.$$

iv) Θέτουμε $u = 2 + x^3$, οπότε $du = 3x^2$dx. Επομένως,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}(2+x^3)^{\frac{1}{2}} + c.$$

v) Θέτουμε $u = x + 1$, οπότε $du = dx$ και $x = u - 1$. Επομένως,

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int u^{\frac{3}{2}}du - \int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= 2u^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{5}u - \frac{1}{3}\right) + c$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2) + c.$$

3. i) Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$. Επομένως,

$$\int e^x \eta\mu e^x dx = \int \eta\mu u du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu e^x + c$$

ii) Θέτουμε $u = e^x + 1$, οπότε $du = e^x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln(e^x+1) + c$$

iii) Θέτουμε $u = \ln x$, οπότε $du = \frac{1}{x} dx$. Επομένως,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\ln x} + c$$

iv) Θέτουμε $u = \ln(e^x + 1)$, οπότε $du = \frac{e^x}{e^x+1} dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|\ln(e^x+1)\right| + c$$

$$= \ln(\ln(e^x+1)) + c$$

αφού $\ln(e^x + 1) > \ln 1 = 0$.

v) Θέτουμε $u = \frac{1}{x}$, οπότε $du = -\frac{1}{x^2} dx$. Επομένως,

$$\int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = -\int \eta\mu u du = \sigma\upsilon\nu u + c = \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + c.$$

3.2 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Θέτουμε $u = 1+\sigma\upsilon\nu^2 x$, οπότε $du = -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx$ ή $du = -\eta\mu 2x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln(1+\sigma\upsilon\nu^2 x) + c$$

ii) Θέτουμε $u = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$, οπότε $du = -\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\varepsilon\varphi x dx$. Επομένως,

$$\int \varepsilon\varphi x \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx = -\int u du = -\frac{u^2}{2} + c = -\frac{1}{2}[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]^2 + c$$

iii) Θέτουμε $u = \eta\mu x$, οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$. Επομένως,

$$\int \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\eta\mu x} + c.$$

2. i) Θέτουμε $u = \dfrac{x^3+1}{x^3}$, οπότε $du = \dfrac{3x^2\cdot x^3 - 3x^2(x^3+1)}{x^6}dx = \dfrac{-3}{x^4}dx$. Επομένως,

$$\int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}\,\frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

ii) Θέτουμε $u = \sqrt{x^2+1}$, οπότε $du = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Επομένως,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int du = u + c = \sqrt{x^2+1} + c.$$

iii) Θέτουμε $u = x^2+1$, οπότε $du = 2xdx$, οπότε έχουμε

$$\int x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}\int (u)'\ln u du$$

$$= \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}\int du$$

$$= \frac{1}{2}u\ln u - \frac{1}{2}u + c = \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2+1) + c.$$

3. i) Έχουμε:

$$\int x^2 \ln x^2 dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x^2}(x^2)' dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \frac{2}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x^2}{3} - \frac{2}{9}x^3 + c$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\ln x^2 - \frac{2}{3}\right) + c$$

ii) Έχουμε

$$\int (\ln t)^2 dt = \int (t)'(\ln t)^2 dt = t(\ln t)^2 - \int t 2\ln t(\ln t)' dt$$

$$= t(\ln t)^2 - 2\int \ln t dt = t(\ln t)^2 - 2\int (t)' \ln t dt$$

$$= t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2\int t\frac{1}{t} dt$$

$$= t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + c$$

iii) Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$. Επομένως

$$\int e^{2x} συν e^x dx = \int e^x συν e^x \, e^x dx = \int u συν u du$$

$$= \int u(ημu)' du = uημu - \int ημu du$$

$$= uημu + συνu + c = e^x ημe^x + συνe^x + c.$$

4. i) Έχουμε

$$\int εφx dx = \int \frac{ημx}{συνx} dx = -\int \frac{(συνx)'}{συνx} dx$$

$$= -\ln|συνx| + c$$

και

$$\int \frac{x}{συν^2 x} dx = \int x(εφx)' dx = xεφx - \int εφx dx$$

$$= xεφx + \ln|συνx| + c_1.$$

ii) Θέτουμε $u = ημx$, οπότε $du = συνx dx$. Επομένως,

$$\int \frac{συνx}{ημ^2 x} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{ημx} + c.$$

Επίσης έχουμε

$$\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$$

$$= -\sigma\varphi x - \frac{1}{\eta\mu x} + c.$$

iii) Έχουμε

$$\int \eta\mu^3 x dx = \int \eta\mu^2 x \eta\mu x dx = \int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\eta\mu x dx.$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du = -\,\eta\mu x dx$. Επομένως,

$$\int \eta\mu^3 x dx = -\int (1-u^2)du = \int u^2 du - \int 1 du$$

$$= \frac{u^3}{3} - u + c = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{3} - \sigma\upsilon\nu x + c.$$

Επίσης έχουμε

$$\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx = \int (1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx.$$

Θέτουμε $u = \eta\mu x$, οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$. Επομένως,

$$\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + c = \eta\mu x - \frac{\eta\mu^3 x}{3} + c.$$

5. Έχουμε

i) $$\int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c$$

ii) $$\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c$$

iii) $$\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{1}{4}\int \eta\mu^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 4x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu 4x dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\eta\mu 4x + c.$$

6. Έχουμε

i) $\int ημxσυν2xdx = \frac{1}{2}\int [ημ(-x) + ημ3x]dx$

$$= -\frac{1}{2}\int ημxdx + \frac{1}{2}\int ημ3xdx$$

$$= \frac{1}{2}συνx - \frac{1}{6}συν3x + c$$

ii) $\int συν3x\,συν5xdx = \frac{1}{2}\int (συν2x + συν8x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int συν2xdx + \frac{1}{2}\int συν8xdx$$

$$= \frac{1}{4}ημ2x + \frac{1}{16}ημ8x + c$$

iii) $\int ημ2xημ4xdx = \frac{1}{2}\int (συν2x - συν6x)dx$

$$= \frac{1}{4}ημ2x - \frac{1}{12}ημ6x + c.$$

7. i) Έχουμε:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{(x^2-3x+2)'}{x^2-3x+2}dx = \ln\left|x^2-3x+2\right| + c.$$

ii) Έχουμε:

$$\frac{3x+2}{x^2-3x+2} = \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)},\ x \in \mathbb{R} - \{1,2\}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι ώστε:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1,2\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:

$$(A+B)x - (2A+B) = 3x + 2,\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1,2\} \qquad (1)$$

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = -5 \text{ και } B = 8.$$

Επομένως

$$\int \frac{3x+2}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-5}{x-1}dx + \int \frac{8}{x-2}dx$$

$$= -5\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + c.$$

iii) Από τη διαίρεση $(x^3 - 2x):(x^2 + 3x + 2)$ βρίσκουμε:

$$x^3 - 2x = (x^2 + 3x + 2)(x-3) + 5x + 6$$

οπότε

$$\frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} = x - 3 + \frac{5x+6}{x^2+3x+2} \qquad (1)$$

Εξάλλου έχουμε:

$$\frac{5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε

$$\frac{5x+6}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{-1,-2\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών, έχουμε τελικά

$$(A+B)x + 2A + B = 5x + 6. \qquad (2)$$

Η (2) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1,-2\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B=6 \end{cases} \Leftrightarrow A=1 \text{ και } B=4.$$

Επομένως λόγω και της (1) έχουμε:

$$\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx = \int (x-3)dx + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{4}{x+2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x+1| + 4\ln|x+2| + c.$$

iv) Έχουμε

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε

$$(A+B)x + A - B = 2. \qquad (1)$$

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = 1 \text{ και } B = -1.$$

Επομένως, έχουμε

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c.$$

3.3 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = -4xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int xdx$$

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + c_1$$

$$y = \frac{1}{2x^2 + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

ii) Η εξίσωση γράφεται

$$y\frac{dy}{dx} = x$$

$$ydy = xdx$$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y^2 = x^2 + 2c_1$$

$$y^2 - x^2 = c,$$

$$y = \sqrt{c + x^2}, \text{ αφού } y > 0 \ (c \in \mathbb{R}).$$

iii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{1}{xy}\frac{dy}{dx}=2$$

$$\frac{dy}{y}=2xdx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\int 2xdx$$

$$\ln|y|=x^2+c_1$$

$$|y|=e^{x^2+c_1}$$

$$|y|=e^{c_1}e^{x^2}$$

$$y=\pm e^{c_1}e^{x^2}$$

$$y=ce^{x^2},\ \text{όπου}\ c=\pm e^{c_1}.$$

iv) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-y}\sigma\upsilon\nu x$$

$$e^{y}dy=\sigma\upsilon\nu xdx$$

$$\int e^{y}dy=\int\sigma\upsilon\nu xdx$$

$$e^{y}=\eta\mu x+c$$

$$y=\ln(\eta\mu x+c),\ \ c\in\mathbb{R}.$$

2. i) Μία παράγουσα της $\alpha(x)=2$ είναι η $A(x)=2x$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με e^{2x} και έχουμε διαδοχικά:

$$y'e^{2x}+2e^{2x}y=3e^{2x}$$

$$(ye^{2x})'=3e^{2x}$$

$$\int(ye^{2x})'dx=\int 3e^{2x}dx$$

$$ye^{2x}=\frac{3}{2}e^{2x}+c$$

$$y=\frac{3}{2}+ce^{-2x},\ \ c\in\mathbb{R}.$$

ii) Μία παράγουσα της $\alpha(x)=2$ είναι η $A(x)=2x$. Πολλαπλασιάζουμε με e^{2x} οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{2x}+2ye^{2x}=e^{x}$$

$$(ye^{2x})'=e^{x}$$

$$\int (ye^{2x})'dx=\int e^{x}dx$$

$$ye^{2x}=e^{x}+c$$

$$y=e^{-x}+ce^{-2x},\ \ c\in\mathbb{R}.$$

iii) Μία παράγουσα της $\alpha(x)=1$ είναι η $A(x)=x$. Πολλαπλασιάζουμε με e^{x}, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{x}+ye^{x}=e^{x}\cdot 2x$$

$$(ye^{x})'=2e^{x}x$$

$$\int (ye^{x})'dx=2\int e^{x}\cdot xdx$$

$$ye^{x}+c_1=2xe^{x}-2\int e^{x}dx$$

$$ye^{x}=2xe^{x}-2e^{x}+c$$

$$y=2x-2+ce^{-x},\ \ c\in\mathbb{R}.$$

iv) Μία παράγουσα της $\alpha(x)=2x$ είναι η $A(x)=x^2$. Πολλαπλασιάζουμε e^{x^2}, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{x^2}+2xe^{x^2}y=xe^{x^2}$$

$$(ye^{x^2})'=xe^{x^2}$$

$$ye^{x^2}+c_1=\int xe^{x^2}dx$$

$$ye^{x^2}=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

$$y=\frac{1}{2}+ce^{-x^2},\ \ c\in\mathbb{R}.$$

3. Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{dy}{dx}=2x^2y^2$$

$$\frac{dy}{y^2}=2x^2dx$$

$$\int y^{-2}dy=2\int x^2dx$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{2}{3}x^3+c_1$$

$$-\frac{1}{y}=\frac{2x^3+3c_1}{3}$$

$$y=\frac{-3}{2x^3+c}.$$

Επειδή $y(0)=-3$, έχουμε $\dfrac{-3}{c}=-3$, οπότε $c=1$. Άρα

$$y=\frac{-3}{2x^3+1}.$$

4. Η εξίσωση γράφεται $y'+3y=2$. Μια παράγουσα της $\alpha(x)=3$ είναι η $A(x)=3x$, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{3x}+3ye^{3x}=2e^{3x}$$

$$y'e^{3x}+y(e^{3x})'=2e^{3x}$$

$$(ye^{3x})'=2e^{3x}$$

$$\int(ye^{3x})'dx=2\int e^{3x}dx$$

$$ye^{3x}=\frac{2}{3}e^{3x}+c$$

$$y=\frac{2}{3}+\frac{c}{e^{3x}}.$$

Επειδή $y(0)=\dfrac{2}{3}$ έχουμε $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{c}{e^0}$, οπότε $c=0$. Άρα $y=\dfrac{2}{3}$.

5. i) Μια παράγουσα της $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ είναι η $A(x)=\varepsilon\varphi x$. Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\varepsilon\varphi x}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$y'e^{\varepsilon\varphi x}+e^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}y=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}e^{\varepsilon\varphi x}$$

$$(ye^{\varepsilon\varphi x})'=e^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$ye^{\varepsilon\varphi x}+c_1=\int e^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

$$ye^{\varepsilon\varphi x}+c_1=\int e^{\varepsilon\varphi x}(\varepsilon\varphi x)'dx$$

$$ye^{\varepsilon\varphi x}=e^{\varepsilon\varphi x}+c$$

$$y=1+ce^{-\varepsilon\varphi x}.$$

Επειδή $y(0)=-3$, έχουμε $-3=1+c$, οπότε $c=-4$. Άρα

$$y=1-\frac{4}{e^{\varepsilon\varphi x}}.$$

ii) Επειδή $x>0$, είναι $x+1>0$, οπότε η εξίσωση γράφεται

$$y'+\frac{1}{x+1}y=\frac{1}{x+1}\ln x.$$

Μία παράγουσα της $\alpha(x)=\dfrac{1}{x+1}$ είναι η $A(x)=\ln(x+1)$. Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\ln(x+1)}=x+1$, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'\cdot(x+1)+y=\ln x$$

$$(y(x+1))'=\ln x$$

$$y(x+1)+c_1=\int \ln x dx$$

$$y(x+1)=x\ln x-x+c$$

$$y=\frac{x\ln x-x+c}{x+1}.$$

Επειδή $y(1)=10$, έχουμε $\dfrac{-1+c}{2}=10$, οπότε $c=21$. Επομένως

$$y=\frac{x\ln x-x+21}{x+1}.$$

3.3 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Μία παράγουσα της $\alpha(t)=1$ είναι η $A(t)=t$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με e^t και έχουμε διαδοχικά:

$$I'(t)e^t+I(t)e^t=e^t\eta\mu t$$

$$(I(t)e^t)'=e^t\eta\mu t$$

$$I(t)e^t+c_1=\int e^t\eta\mu t dt \qquad (1)$$

Εξάλλου έχουμε

$$\int e^t\eta\mu t dt=e^t\eta\mu t-\int e^t\sigma\upsilon\nu t dt$$

$$=e^t\eta\mu t-\left[e^t\sigma\upsilon\nu t+\int e^t\eta\mu t dt\right],$$

οπότε

$$2\int e^t\eta\mu t dt=e^t(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+c_1.$$

Άρα

$$\int e^t\eta\mu t dt=\frac{1}{2}e^t(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+c,$$

οπότε από την (1) προκύπτει ότι

$$I(t)e^t=\frac{1}{2}e^t(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+c.$$

Για $t=0$ έχουμε

$$I(0)e^0=\frac{1}{2}e^0(\eta\mu 0-\sigma\upsilon\nu 0)+c$$

$$0=-\frac{1}{2}+c$$

$$c=\frac{1}{2}.$$

Έτσι, τελικά είναι

$$I(t)e^t=\frac{1}{2}e^t(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+\frac{1}{2}$$

$$I(t)=\frac{1}{2}(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+\frac{1}{2}e^{-t}.$$

2. Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$ye^{y^2}\frac{dy}{dx}=e^{2x}$$

$$ye^{y^2}dy=e^{2x}dx$$

Άρα

$$\int ye^{y^2}dy=\int e^{2x}dx$$

$$\frac{1}{2}e^{y^2}=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1$$

$$e^{y^2}=e^{2x}+2c_1$$

$$e^{y^2}=e^{2x}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $y(2)=2$, έχουμε $e^4=e^4+\mathrm{c}$, οπότε $c=0$. Επομένως $e^{y^2}=e^{2x}$, οπότε $y^2=2x$ και άρα $y=\sqrt{2x}$, αφού περνάει από το σημείο $A(2,2)$.

3. Μία παράγουσα $\alpha(x)=-\frac{1}{x}$ είναι η $A(x)=-\ln x$. Πολλαπλασιάζουμε με $e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y'\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}y=x\frac{1}{x}$$

$$\left(y\cdot\frac{1}{x}\right)'=1$$

$$y\cdot\frac{1}{x}=x+c$$

$$y=x^2+cx,\ c\in\mathbb{R}.$$

4. Ισχύει $y'=xy$, $y>0$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dy}{y}=xdx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int xdx$$

$$\ln y=\frac{x^2}{2}+c_{1,}\ y>0$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c_1}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \quad c = e^{c_1} > 0.$$

Εξάλλου ισχύει $y(0) = 1$, οπότε $c = 1$. Άρα

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

5. i) Μία παράγουσα της $\alpha(t) = \alpha$ είναι η $A(t) = \alpha t$, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$y' e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} y = \beta e^{-\lambda t} \cdot e^{\alpha t}$$

$$(y e^{\alpha t})' = \beta e^{(\alpha - \lambda)t}$$

$$y e^{\alpha t} + c_1 = \int \beta e^{(\alpha - \lambda)t} dt$$

$$y e^{\alpha t} = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} e^{(\alpha - \lambda)t} + c$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} e^{-\lambda t} + \frac{c}{e^{\alpha t}}.$$

Άρα

$$y(t) = \frac{\beta}{\alpha - \lambda} \frac{1}{e^{\lambda t}} + \frac{c}{e^{\alpha t}}, \; c \in \mathbb{R}.$$

ii) Επειδή $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ ισχύει $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{e^{\lambda t}} = 0$ και $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{c}{e^{\alpha t}} = 0$, οπότε

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

6. Επειδή $\theta - T > 0$ η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{d\theta}{\theta - T} = -\kappa dt$$

$$\int \frac{d\theta}{\theta - T} = -\kappa t + c_1,$$

$$\ln(\theta - T) = -\kappa t + c_1$$

$$\theta - T = e^{-\kappa t + c_1}$$

$$\theta(t) = T + c e^{-\kappa t}, \; c = e^{c_1}.$$

Εξάλλου

$$\theta(0)=\theta_0 \Leftrightarrow \theta_0 = T + c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=\theta_0 - T.$$

Άρα

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{-\kappa t}.$$

7. i) Έστω $P_1(t)$ ο πληθυσμός της χώρας, αν δεν υπήρχε η μετανάστευση και $P_2(t)$ ο πληθυσμός που έχει μεταναστεύσει μέχρι τη χρονική στιγμή t. Τότε ο πληθυσμός της χώρας είναι

$$P(t) = P_1(t) - P_2(t)$$

οπότε

$$P'(t) = P_1'(t) - P_2'(t). \qquad (1)$$

Είναι όμως

$$P_1'(t) = k\cdot P(t),\ k>0,$$

αφού έχουμε ρυθμό αύξησης του $P_1(t)$ ανάλογο του $P(t)$.

Επίσης είναι $P_2'(t)=m,$ οπότε η (1) γράφεται

$$P'(t) = kP(t) - m,$$

ή ισοδύναμα

$$P' - kP = -m.$$

Μία παράγουσα της $\alpha(t) = -k$ είναι η $A(t) = -kt$. Πολλαπλασιάζουμε με e^{-kt} τα μέλη της εξίσωσης, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$P'e^{-kt} - ke^{-kt}P = -me^{-kt}$$

$$(Pe^{-kt})' = -me^{-kt}$$

$$Pe^{-kt} + c_1 = -m\int e^{-kt}dt$$

$$Pe^{-kt} = \frac{m}{k}e^{-kt} + c$$

$$P(t) = \frac{m}{k} + ce^{kt}.$$

Επειδή $P(0) = P_0$, έχουμε $P_0 = \dfrac{m}{k} + c,$ οπότε $c = P_0 - \dfrac{m}{k}$. Άρα

$$P(t)=\frac{m}{k}+\left(P_0-\frac{m}{k}\right)e^{kt},\ k>0$$

iii) Είναι

$$P'(t)=(kP_0-m)e^{kt}$$

— αν $m<kP_0$ τότε $P'(t)>0$, οπότε ο πληθυσμός αυξάνεται.
— αν $m>kP_0$ τότε $P'(t)<0$, οπότε ο πληθυσμός μειώνεται.
— αν $m=kP_0$ τότε $P'(t)>0$, οπότε ο πληθυσμός είναι σταθερός.

8. i) Ο όγκος του νερού της δεξαμενής τη χρονική στιγμή t είναι

$$V(t)=\pi r^2 y(t)=\pi y(t),$$

όπου $r=1\text{m}$ η ακτίνα του κυλίνδρου, οπότε

$$V'(t)=\pi y'(t).$$

Εξάλλου έχουμε

$$-\alpha\sqrt{2gy}=-\pi\cdot 0{,}1^2\sqrt{20y}=-0{,}02\pi\sqrt{5y}.$$

Έτσι ο νόμος του Torricelli γράφεται

$$\pi y'=-0{,}02\pi\sqrt{5y},$$

ή ισοδύναμα

$$y'=-\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{y} \qquad (1)$$

ii) Προφανώς το $y=0$ αποτελεί λύση της (1). Για $y>0$ η εξίσωση γράφεται

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=-\frac{\sqrt{5}}{50}dt,$$

οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\int y^{-1/2}dy=\frac{-\sqrt{5}}{50}t+c$$

$$2y^{1/2}=\frac{-\sqrt{5}}{50}t+c$$

$$y^{1/2}=\frac{-\sqrt{5}}{100}t+\frac{c}{2}$$

$$y=\left(\frac{-\sqrt{5}}{100}t+\frac{c}{2}\right)^2.$$

Όμως ισχύει $y(0) = 36$ dm, οπότε $36 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, συνεπώς $c = 12$. Άρα

$$y(t) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{100}t + 6\right)^2$$

iii) Η δεξαμενή αδειάζει τελείως, όταν $y(t) = 0$. Έτσι έχουμε:

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{100}t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{600}{\sqrt{5}} = \frac{600}{5}\sqrt{5} = 120\sqrt{5}\ \text{sec}.$$

9. Η $E = 0$ αποτελεί μία προφανή λύση της διαφορικής εξίσωσης.
Για $E > 0$ η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\ln E = -\frac{1}{RC}t + c_1$$

$$E(t) = e^{-\frac{t}{RC} + c_1}$$

$$E(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \quad k = e^{c_1}.$$

Εξάλλου

$$E(t_1) = E_0 \Leftrightarrow E_0 = ke^{-\frac{t_1}{RC}} \Leftrightarrow k = E_0 e^{\frac{t_1}{RC}}.$$

Άρα

$$E(t) = E_0 e^{\frac{t_1 - t}{RC}}.$$

10. i) α) Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των R, L και E, κανόνας του Kirchhoff γράφεται

$$4I' + 12I = 60,$$

ή ισοδύναμα

$$I' + 3I = 15. \tag{1}$$

Μία παράγουσα της $\alpha(t) = 3$ είναι η $A(t) = 3t$. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη (1) με e^{3t}, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$I'e^{3t} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$(Ie^{3t})' = 15e^{3t}$$

$$Ie^{3t}+c_1=5\int 3e^{3t}dt$$

$$Ie^{3t}=5e^{3t}+c.$$

$$I(t)=5+\frac{c}{e^{3t}}.$$

β) Είναι

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(5+\frac{c}{e^{3t}}\right)=5.$$

Από την ισότητα $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=5$ συμπεραίνουμε ότι για «μεγάλες» τιμές του t η ένταση γίνεται σταθερή και η γραφική παράσταση της $y=I(t)$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=5$.

ii) Αν $E=60\eta\mu 3t$ ο κανόνας του Kirchhoff γράφεται διαδοχικά:

$$I'+3I=15\eta\mu 3t$$

$$I'e^{3t}+3e^{3t}I=15e^{3t}\eta\mu 3t$$

$$(Ie^{3t})'=15e^{3t}\eta\mu 3t$$

$$Ie^{3t}+c_1=5\int 3e^{3t}\eta\mu 3t dt. \qquad (2)$$

Θέτουμε $J=\int 3e^{3t}\eta\mu 3t dt$, οπότε

$$\begin{aligned}J&=\int (e^{3t})'\eta\mu 3t dt=e^{3t}\eta\mu 3t-3\int e^{3t}\sigma\upsilon\nu 3t dt\\ &=e^{3t}\eta\mu 3t-\int (e^{3t})'\sigma\upsilon\nu 3t dt\\ &=e^{3t}\eta\mu 3t-\left[e^{3t}\sigma\upsilon\nu 3t+3\int e^{3t}\eta\mu 3t dt\right]\\ &=e^{3t}(\eta\mu 3t-\sigma\upsilon\nu 3t)-3J.\end{aligned}$$

Άρα

$$J=\frac{1}{4}e^{3t}(\eta\mu 3t-\sigma\upsilon\nu 3t)+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}.$$

Λόγω της (2) έχουμε

$$Ie^{3t}=\frac{5}{4}e^{3t}(\eta\mu 3t-\sigma\upsilon\nu 3t)+c$$

Άρα

$$I(t)=\frac{5}{4}(\eta\mu 3t-\sigma\upsilon\nu 3t)+\frac{c}{e^{3t}}.$$

3.4 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

i) $\int_4^3 f(x)dx = -\int_3^4 f(x)dx = -11$

ii) $\int_4^8 f(x)dx = \int_4^1 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -9+13 = 4$

iii) $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^3 f(x)dx = 9 - \int_3^4 f(x)dx = 9-11 = -2$

iv) $\int_3^8 f(x)dx = \int_3^4 f(x)dx + \int_4^1 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx$

$$= 11 - \int_1^4 f(x)dx + 13 = 24 - 9 = 15.$$

2. Έχουμε

$$\int_\varepsilon^1 \ln\frac{1}{t}\,dt = \int_\varepsilon^1 (\ln 1 - \ln t)dt = -\int_\varepsilon^1 \ln t\,dt = \int_1^\varepsilon \ln t\,dt.$$

3. Η ισότητα $\int_1^k \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_k^1 \frac{5}{x^2+1}dx = 3$ γράφεται διαδοχικά:

$$\int_1^k \frac{x^2-4}{x^2+1}dx + \int_1^k \frac{5}{x^2+1}dx = 3$$

$$\int_1^k \frac{x^2-4+5}{x^2+1}dx = 3$$

$$\int_1^k 1dx = 3$$

$$(k-1) = 3$$

$$k = 4.$$

4. Έχουμε

i) $\int_1^3 [2f(x) - 6g(x)]dx = 2\int_1^3 f(x)dx - 6\int_1^3 g(x)dx = 2\cdot 5 - 6\cdot(-2) = 22$

ii) $\int_3^1 [2f(x) - g(x)]dx = 2\int_3^1 f(x)dx - \int_3^1 g(x)dx$

$$= -2\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx$$

$$= -2\cdot 5 - 2 = -12.$$

3.5 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

i) $\int_0^2 (3x^2-2x+1)dx = [x^3-x^2+x]_0^2 = [2^3-2^2+2]-[0^3-0^2+0]=6$

ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx = \int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^e \frac{dx}{x} + \int_1^e x^{-\frac{3}{2}}dx$

$$= [\ln x]_1^e + \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{-1}{2}}\right]_1^e = \ln e - \ln 1 - \left[\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^e$$

$$= 1 - \left[\frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{2}{1}\right] = 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)'dx = [\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \eta\mu\frac{\pi}{2} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 - 2\sigma\upsilon\nu\theta = 1-2=-1$$

iv) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)dx = \int_1^2 x^2dx + \int_1^2 x^{-2}dx + \int_1^2 2dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 + 2(2-1) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + 2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}-1\right) + 2 = \frac{29}{6}.$$

2. Έχουμε

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5}dx + 2\int_2^1 \frac{x}{x^2+5}dx = \int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5}dx - 2\int_1^2 \frac{x}{x^2+5}dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^3+5x}{x^2+5}dx = \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3. Έχουμε:

$$2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)f'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} 2f(x)f'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x))^2]'dx$$

$$= [(f(x))^2]_{\alpha}^{\beta} = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2.$$

4. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (1,1) έχουμε $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Επομένως σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα είναι:

$$\int_0^1 f'(x)dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1.$$

5. i) Θέτουμε $u = \text{συν}x$, οπότε, έχουμε:

$$F'(x) = \left(\int_1^{\text{συν}x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right)'$$

$$= \sqrt{1-\text{συν}^2 x}\cdot(\text{συν}x)' = \sqrt{1-\text{συν}^2 x}\cdot(-\text{ημ}x) = -\text{ημ}x\cdot|\text{ημ}x|.$$

ii) Η $F(x)$ γράφεται $F(x) = -\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\text{συν}\theta}{\theta}d\theta.$

Έχουμε

$$F'(x) = -\frac{\text{συν}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$= -\frac{\text{συν}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\text{συν}\sqrt{x}}{2x}.$$

6. i) Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ii) Αν χρησιμοποιήσουμε το ερώτημα i) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 f'(x)dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(0+\sqrt{1}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

3.5 B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x tg(t)dt\right) = \frac{d}{dx}(x^4 + x^6)$$

$$xg(x) = 4x^3 + 6x^5.$$

Επομένως, για $x = 1$ έχουμε $1\cdot g(1) = 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^5$, οπότε $g(1) = 10$.

2. Η $f(x)$ γράφεται:

$$f(x) = \int_x^0 e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt + \int_0^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt = -\int_0^x e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt + \int_0^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt,$$

οπότε έχουμε:

$$f'(x) = -e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x} + e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi(x+1)} = -e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x} + e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi x + 2\pi)}$$

$$= -e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x} + e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι σταθερή.

3. Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x-2}{e^{x-2}}$$

και τον πίνακα

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$, γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = 0$.

4. Είναι

$$F'(x) = \left(x\int_0^x f(t)dt\right)'$$

$$= \int_0^x f(t)dt + xf(x).$$

5. Έχουμε:

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση F είναι σταθερή.

$$F(x)=c,\ x\in(0,+\infty).$$

Είναι όμως, $F(1)=\int_1^1\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^1\frac{1}{1+t^2}dt=0.$ Επομένως

$$F(x)=0,\ x\in(0,+\infty).$$

6. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}\,dt=\lim_{h\to 0}\frac{\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}\,dt}{h}\quad\left(\text{μορφή }\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}\,dt\right)'}{(h)'}\ \text{(κανόνας De L' Hospital)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sqrt{5+(2+h)^2}$$

$$=\sqrt{9}=3.$$

7. i) Θέτουμε $u=x^2-4$, οπότε $du=2xdx$. Τα νέα όρια ολοκληρώσεως είναι $u_1=4^2-4=12$ και $u_2=6^2-4=32$. Επομένως,

$$\int_4^6\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx=\frac{1}{2}\int_{12}^{32}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{12}^{32}=\sqrt{32}-\sqrt{12}=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

ii) Έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)[\eta\mu x-1]dx.$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x + x$, οπότε $du = -(\eta\mu x - 1)dx$. Τα νέα όρια είναι $u_1 = \sigma\upsilon\nu 0$ $+ 0 = 1$ και $u_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)[\eta\mu x - 1]dx = -\int_1^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu u du$$

$$= [\sigma\upsilon\nu u]_1^{\frac{\pi}{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 1 = -\sigma\upsilon\nu 1.$$

8. i) Έχουμε:

$$\int_0^2 \left(x^2 - |x-1|\right)dx = \int_0^1 (x^2 + x - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - x + 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{3}$$

ii) Η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ οπότε έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} xdx + \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} - [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} - (\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -\frac{\pi^2}{2} + 2.$$

iii) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 και το πρόσημό του φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	–	0	+	

Επομένως έχουμε:

$$\int_0^3 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_2^3$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right] + \left[-\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right] + \left[\frac{27}{3} - \frac{27}{2} + 6 - \frac{8}{3} + 6 - 4\right] = \frac{11}{6}.$$

9. i) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx=2\int_1^{e^2}\left(\sqrt{x}\right)'\ln xdx$$

$$=2\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\sqrt{x}\frac{1}{x}dx$$

$$=2e\ln e^2-2\ln 1-4\int_1^{e^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=4e-4\left[\sqrt{x}\right]_1^{e^2}=4e-4(e-1)=4.$$

ii) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=-\int_0^1 x(e^{-x})'dx=-[xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}-[e^{-x}]_0^1=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}$$

iii) Θέτουμε $u=9+x^2$, οπότε $du=2xdx$, $u_1=9$ και $u_2=10$. Επομένως:

$$\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx=\frac{1}{2}\int_9^{10}\ln udu=\frac{1}{2}\int_9^{10}(u)'\ln udu$$

$$=\left[\frac{u\ln u}{2}\right]_9^{10}-\frac{1}{2}\int_9^{10}du=\frac{10\ln 10}{2}-\frac{9\ln 9}{2}-\frac{1}{2}(10-9)$$

$$=5\ln 10-\frac{9}{2}\ln 9-\frac{1}{2}.$$

iv) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sigma\upsilon\nu 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\eta\mu 2x)'dx$$

$$=\frac{1}{2}[e^x\eta\mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu 2x\cdot e^x dx$$

$$=0+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sigma\upsilon\nu 2x)'dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}e^x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sigma\upsilon\nu 2xdx$$

$$=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\pi-\frac{1}{4}e^{0}\sigma\upsilon\nu 0-\frac{1}{4}I,$$

οπότε

$$\frac{5}{4}I=-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow I=-\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1).$$

10. Έχουμε:

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Επίσης

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu 2x)' dx=-\frac{1}{2}[x\eta\mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\eta\mu\pi-0\right]=\frac{1}{4}[\sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0)=-\frac{1}{4}(-1-1)=\frac{1}{2}.$$

Αν λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{8} \\ I-J=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ βρίσκουμε

$$I=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\ \text{ και }\ J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}.$$

11. Επειδή f'' συνεχής έχουμε:

$$\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=2. \qquad (1)$$

Όμως είναι:

$$\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=[f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)(\eta\mu x)' dx$$

$$= -\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$= -[f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx$$

$$= f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx$$

$$= 1 + f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx$$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + 1 + f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = 2,$$

οπότε $f(0) = 1$.

12. Επειδή οι f'' και g'' είναι συνεχείς έχουμε

$$I = \int_\alpha^\beta (f(x)g''(x) - f''(x)g(x))dx$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x)g''(x)dx - \int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx$$

$$= [f(x)g'(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g'(x)dx - [f'(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g'(x)dx$$

$$= f(\beta)g'(\beta) - f(\alpha)g'(\alpha) - [f'(\beta)g(\beta) - f'(\alpha)g(\alpha)]$$

$$= f(\beta)g'(\beta) - f'(\beta)g(\beta), \text{ (αφού } f(\alpha) = g(\alpha) = 0)$$

$$= f(\beta)g'(\beta) - g'(\beta)g(\beta), \text{ (αφού } f'(\beta) = g'(\beta))$$

$$= g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$

3.6 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

$$0 = \int_0^1 (f(x) - 1)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 1dx = \int_0^1 f(x)dx - 1,$$

οπότε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \overline{f} = 1.$$

2. Έχουμε:

$$0=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-k)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}kdx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-k(\beta-\alpha),$$

οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=k(\beta-\alpha)\Leftrightarrow\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=k\Leftrightarrow\overline{f}=k.$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in[\alpha,\beta]$. Τότε η μέση τιμή $\overline{x}$ του x στο $[\alpha,\beta]$ είναι:

$$\overline{x}=\overline{f}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}xdx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

3.6 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

$$\overline{f}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}x^2dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}\quad\text{και}$$

$$\overline{g}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{-1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha\beta},$$

οπότε

$$\overline{f}\cdot\overline{g}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3\alpha\beta}.$$

Έτσι, έχουμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3\alpha\beta}>1\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>3\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2>0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2>0,$$

που ισχύει. Επομένως είναι $\overline{f}\cdot\overline{g}>1$.

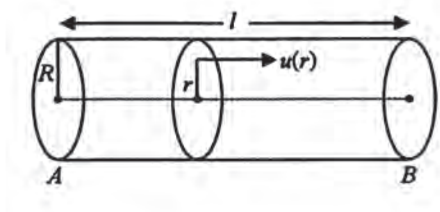
2. α) Έχουμε:

$$\bar{\upsilon}=\frac{1}{R}\int_0^R \upsilon(r)dr=\frac{1}{R}\int_0^R \frac{P}{4n\ell}(R^2-r^2)dr=\frac{P}{4Rn\ell}\int_0^R (R^2-r^2)dr$$

$$=\frac{P}{4Rn\ell}\left[R^2(R-0)-\left[\frac{\sqrt{r^3}}{3}\right]_0^R\right]$$

$$=\frac{P}{4Rn\ell}\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)$$

$$=\frac{P}{4Rn\ell}\frac{2R^3}{3}=\frac{PR^2}{6n\ell}.$$



β) Εξάλλου έχουμε:

$$\upsilon'(r)=\frac{P}{4n\ell}(-2r)=\frac{-\mathrm{Pr}}{2n\ell}<0, \text{ για κάθε } r\in(0,R).$$

Όμως η $\upsilon=\upsilon(r)$ είναι συνεχής στο [0,R], οπότε θα είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,R]. Επομένως η μέγιστη ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma}=\upsilon(0)=\frac{PR^2}{4n\ell}.$$

Προφανώς ισχύει $\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma}>\bar{\upsilon}$.

3. Έχουμε

$$\int_0^1 f(x)dx=f(1). \qquad (1)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx=f(\xi). \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $f(\xi)=f(1)$, οπότε στο διάστημα $[\xi,1]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Επομένως η C_f έχει τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη.

3.7 Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Το τριώνυμο $f(x)=x^2-2x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$, οπότε ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως το εμβαδόν που ζητάμε είναι:

$$E = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{14}{3} \text{ τετρ. μον.}$$

2. i) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $f(x) = \sqrt[3]{x} \geq 0$. Επομένως το εμβαδόν που ζητάμε είναι:

$$E = \int_0^{27} \sqrt[3]{x}dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^{27} = \frac{3}{4}[x^{\frac{4}{3}}]_0^{27} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = \frac{3^5}{4} \text{ τ.μ.}$$

ii) Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$. Επομένως το εμβαδόν που ζητάμε είναι

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = [\varepsilon\varphi x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} - \varepsilon\varphi 0 = \sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

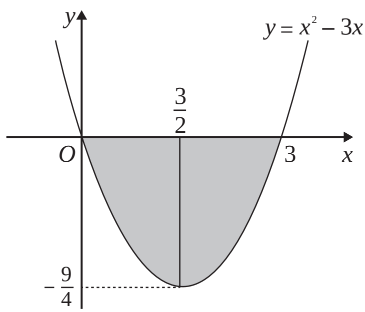
3. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f και του άξονα $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x = 0$, δηλαδή οι αριθμοί 0 και 3.

Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, έχουμε:

$$E = \int_0^3 |f(x)|dx = -\int_0^3 f(x)dx$$

$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$



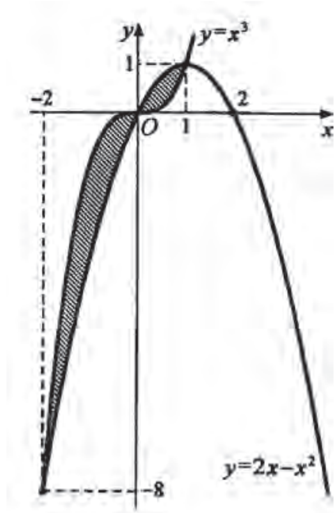
4. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, που γράφεται:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = 2x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

Το πρόσημο της διαφοράς
$f(x)-g(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$
φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



x	$-\infty$ -2 0 1 $+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Επομένως το εμβαδόν που ζητάμε είναι:

$$E=\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|dx$$

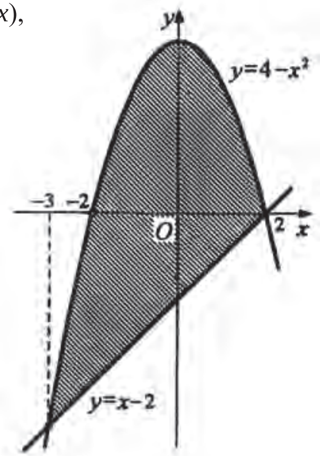
$$=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(2x-x^2-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$=-4+\frac{8}{3}+4+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{10}{3}-\frac{1}{4}=\frac{37}{12}\ \text{τ.μ.}$$

5. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=x-2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, που γράφεται



$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4-x^2=x-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3\ \text{ή}\ x=2.$$

Το πρόσημο της διαφοράς
$f(x)-g(x)=-x^2-x+6$
φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ -3 2 $+\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

Επομένως το εμβαδόν που ζητάμε είναι:

$$E=\int_{-3}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx$$

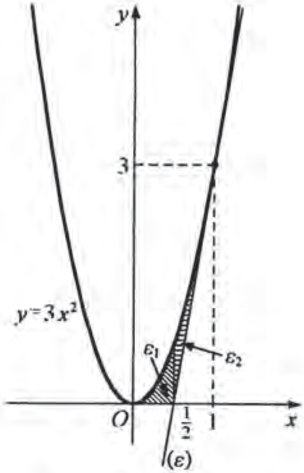
$$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}$$

$$=\left[-\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+12\right]-\left[\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-18\right]=20+\frac{5}{6}=\frac{125}{6}\ \text{τ.μ.}$$

3.7 Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή $f'(x)=6x$ έχουμε $f'(1)=6$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(1,3)$ είναι:

$$\varepsilon: y-3=6(x-1)\Leftrightarrow y=6x-3$$



ii) Η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{1}{2},0\right)$. Επομένως, το εμβαδόν που ζητάμε είναι:

$$E=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\int_0^{\frac{1}{2}}3x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(3x^2-6x+3)dx$$

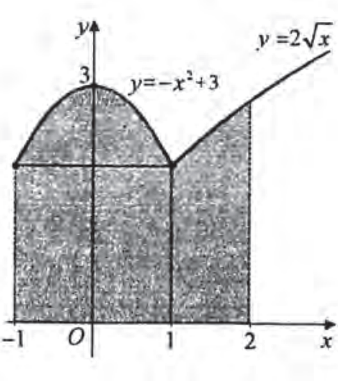
$$=[x^3]_0^{\frac{1}{2}}+[x^3-3x^2+3x]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{8}+1-3+3-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\ \text{τ.μ.}$$

2. Επειδή

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1),$$

η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο σημείο 1, οπότε αυτή είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Είναι φανερό, επιπλέον, ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,2]$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



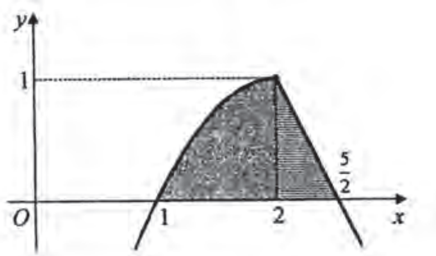
$$E = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(-x^2+3)dx + \int_{1}^{2} 2\sqrt{x}dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}+3-\left(\frac{1}{3}-3\right)+\frac{4}{3}\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{1}\right)$$

$$= 4+\frac{8}{3}\sqrt{2} \text{ τ.μ.}$$

3. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f και του άξονα $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, δηλαδή οι αριθμοί 1 και $\frac{5}{2}$. Στο $\left[1,\frac{5}{2}\right]$ η f είναι και συνεχής και ισχύει $f(x)\geq 0$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



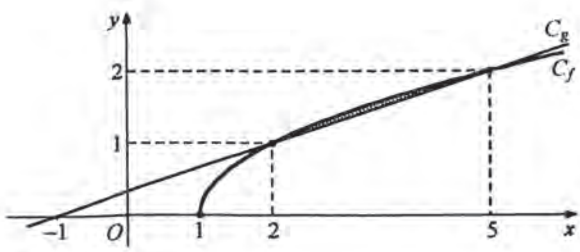
$$E = \int_{1}^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_{1}^{2}(-x^2+4x-3)dx + \int_{2}^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_{1}^{2} + \left[-x^2+5x\right]_{2}^{\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{8}{3}+8-6-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)+\left(-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}\right)-(-4+10)=\frac{11}{12} \text{ τ.μ.}$$

4. Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f και C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, που γράφεται



$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{x+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x-1=\frac{(x+1)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=5.$$

Εξάλλου, για $x\geq 1$ έχουμε:

$$f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow x-1\geq \left(\frac{x+1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+10\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\leq x\leq 5.$$

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

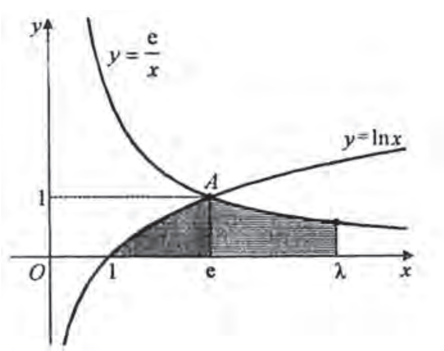
$$E=\int_2^5\left(\sqrt{x-1}-\frac{x+1}{3}\right)dx=\int_2^5\sqrt{x-1}dx-\frac{1}{3}\int_2^5(x+1)dx.$$

Στο 1° ολοκλήρωμα θέτουμε $u=x-1$, οπότε $du=dx$, $u_1=1$, $u_2=4$ και έτσι έχουμε:

$$E=\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^5=\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4-\frac{1}{3}\left[\frac{25}{2}+5-2-2\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{25}{2}+1\right)=\frac{1}{6}\text{ τ.μ.}$$

5. i) Έχουμε $f(e)=1=g(e)$. Άρα το σημείο $A(e,1)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g των συναρτήσεων f και g. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η g γνησίως αύξουσα, οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το A. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν $E(\lambda)$ ισούται με



$$E(\lambda)=\int_1^e \ln x dx+\int_e^{\lambda}\frac{e}{x}dx.$$

Είναι όμως

$$\int_1^e \ln x dx=\int_1^e (x)'\ln x dx$$

$$=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx$$

$$=e\ln e-(e-1)=1.$$

Άρα

$$E(\lambda)=\int_1^e \ln x dx+\int_e^{\lambda}\frac{e}{x}dx=1+e[\ln x]_e^{\lambda}$$

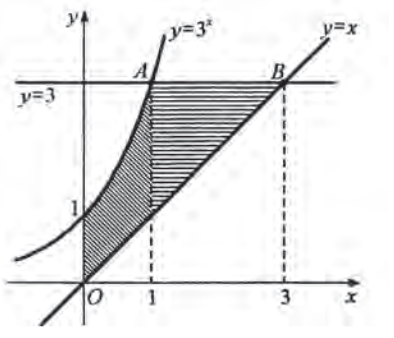
$$=1+e\ln\lambda-e\ln e=1+e(\ln\lambda-1).$$

ii) Επομένως,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}[1+e(\ln\lambda-1)]$$

$$=(1-e)+e\lim_{\lambda\to+\infty}(\ln\lambda)=+\infty.$$

6. Η τετμημένη του A είναι η λύση της εξίσωσης $3^x=3$, που είναι ο αριθμός 1.
Η τετμημένη του B είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=x \\ y=3 \end{cases}$, που είναι ο αριθμός 3.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:



$$\int_0^1(3^x-x)dx+\int_1^3(3-x)dx=\int_0^1 3^x dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$

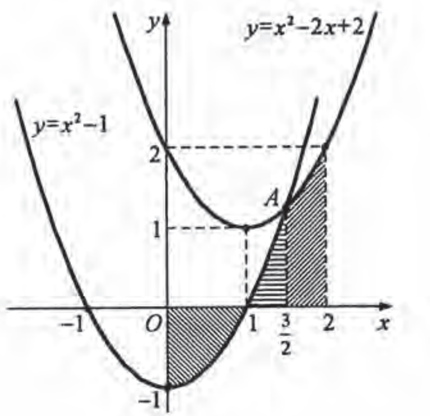
$$=\frac{1}{\ln 3}[3^x]_0^1-\frac{1}{2}+\left[9-\frac{9}{2}-3+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln 3}[3-1]+6-\frac{9}{2}=\frac{2}{\ln 3}+\frac{3}{2}\ \text{τ.μ.}$$

7. Η τετμημένη του σημείου A είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^2-2x+2=x^2-1,$$

που είναι ο αριθμός $x=\frac{3}{2}$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:



$$E=-\int_0^1(x^2-1)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(x^2-1)dx+\int_{\frac{3}{2}}^2(x^2-2x+2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$=-\left[\frac{1}{3}-1\right]+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+1\right]+\left[\frac{8}{3}-4+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{7}{4}\ \text{τ.μ.}$$

8. i) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της C_f στα σημεία O και A αντιστοίχως είναι:

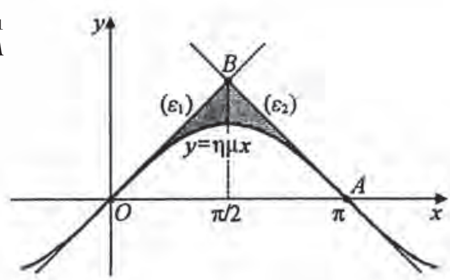
$\varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)(x-0)$

και $\varepsilon_2: y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$

Επειδή $f'(x)=$ συνx έχουμε:

$f'(0)=1$ και $f'(\pi)=-1$,

οπότε



$$\varepsilon_1: y=x \text{ και } \varepsilon_2: y=-x+\pi.$$

ii) Η τετμημένη του σημείου τομής B των ε_1 και ε_2 είναι η ρίζα της εξίσωσης $x=-x+\pi$, δηλαδή ο αριθμός $x=\frac{\pi}{2}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\eta\mu x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x+\pi-\eta\mu x)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{-x^2}{2}+\pi x+\sigma\upsilon\nu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

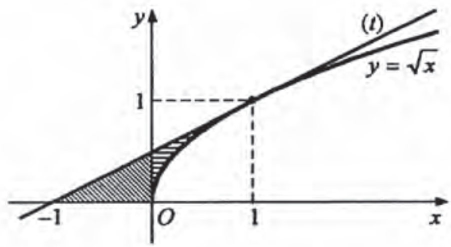
$$=\frac{\pi^2}{8}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu 0-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2+\sigma\upsilon\nu\pi+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

9. α) Έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x\in(0,+\infty),$$

οπότε $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:



$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\ \ \tau.\mu.$$

β) Εξετάζουμε αρχικά αν υπάρχει ευθεία $x=\alpha$ με $\alpha\in[-1,0]$ η οποία χωρίζει το χωρίο (Α) του (α) ερωτήματος σε δύο ισοεμβαδικά χωρία. Δηλαδή αν υπάρχει τιμή του $\alpha\in[-1,0]$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\int_{-1}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow 3\alpha^2+6\alpha+1=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\alpha_1=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ και $\alpha_2=\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$.

Από αυτούς μόνο ο α_1 ανήκει στο διάστημα $[-1,0]$. Επομένως η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση:

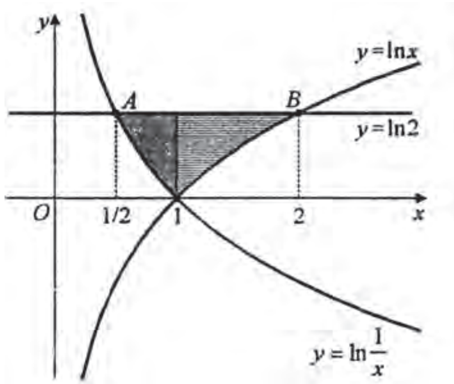
$$x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}.$$

Αν εργαστούμε ανάλογα για $\alpha\in[0,1]$, βρίσκουμε ότι δεν υπάρχει άλλη ευθεία $x=\alpha$ που να χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισοεμβαδικά χωρία. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο.

10. Έχουμε

$$g(x)=\ln 1-\ln x=-\ln x,$$

που σημαίνει ότι η C_g είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
Η τετμημένη του A είναι ρίζα της εξίσωσης $\ln\frac{1}{x}=\ln 2$, που είναι ο αριθμός $x=\frac{1}{2}$. Η τετμημένη του B είναι ρίζα της εξίσωσης $\ln x=\ln 2$, που είναι ο αριθμός $x=2$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\ln 2-\ln\frac{1}{x}\right)dx+\int_{1}^{2}(\ln 2-\ln x)dx$$

$$=\ln 2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x dx+\ln 2(2-1)-\int_{1}^{2}\ln x dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+[x\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}1dx+\ln 2-[x\ln x]_1^2+\int_1^2 1dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+1\ln 1-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln 2-2\ln 2+1\ln 1+2-1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 2+1$$

$$=\frac{1}{2}.$$

11. i) Έχουμε $f(0)=2$ και $f'(x)=2x-3$.

Από τον τύπο $\int f'(x)dx = f(x)+c$ έχουμε διαδοχικά

$$\int (2x-3)dx = f(x)+c$$

$$x^2-3x = f(x)+c$$

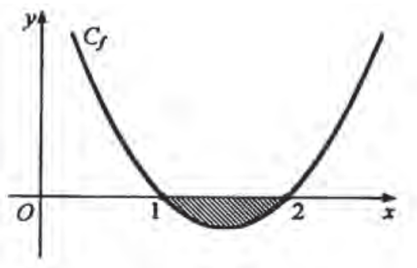
$$f(x)=x^2-3x-c.$$

Είναι όμως,

$$f(0)=2 \Leftrightarrow -c=2 \Leftrightarrow c=-2.$$

Επομένως,

$$f(x)=x^2-3x+2.$$



ii) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+2=0$ δηλαδή $x_1=1$ και $x_2=2$. Επειδή $x^2-3x+2<0$, όταν $x\in(1,2)$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=-\int_1^2 (x^2-3x+2)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\cdot 4+2\cdot 2\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{1}{6}\ \text{τ.μ.}$$

12. i) Η C_f τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Επειδή $f'(x)=(x^2-4x+3)'=2x-4$, έχουμε

$$f'(1)=-2 \text{ και } f'(3)=2.$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(1,0)$ είναι:

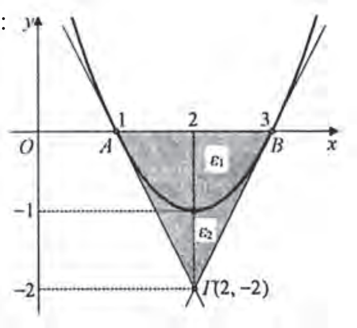
$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-2x+2$$

ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(3,0)$ είναι:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 6$$

ii) Η τετμημένη του σημείου τομής Γ των εφαπτομένων είναι λύση της εξίσωσης $-2x+2 = 2x-6$ δηλαδή ο αριθμός $x=2$. Επομένως το σημείο τομής τους είναι το $\Gamma(2,-2)$.

Λόγω της συμμετρίας του σχήματος έχουμε:



- $\varepsilon_1 = -2\int_1^2 (x^2 - 4x + 3)dx$

$$= -2\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^2$$

$$= -2\left(\frac{8}{3} - 2\cdot 4 + 3\cdot 2 - \frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{4}{3}$$

και

- $\varepsilon_2 = 2\int_1^2 (x^2 - 4x + 3 + 2x - 2)dx = 2\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 = 2\left[\frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 1 - 1\right] = \frac{2}{3}.$$

Άρα $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2.$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Θέτουμε $u = \pi - x$, οπότε $du = -dx$, $u_1 = \pi$, $u_2 = 0$. Έτσι έχουμε:

$$I = \int_0^\pi x f(\eta\mu x)dx = -\int_\pi^0 (\pi - u) f(\eta\mu(\pi - u))du$$

$$= -\int_\pi^0 \pi f(\eta\mu u)du + \int_\pi^0 u f(\eta\mu u)du$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\eta\mu u)du - I.$$

Επομένως $2I = \pi\int_0^\pi f(\eta\mu u)du$, οπότε $I = \dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx.$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i) έχουμε:

$$I_1=\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du=-\eta\mu x dx$. Επομένως:

$$I_1=-\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{du}{4-u^2}=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{du}{u^2-4}.$$

Αναζητούμε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $\dfrac{1}{u^2-4}=\dfrac{\alpha}{u-2}+\dfrac{\beta}{u+2}$ ή, ισοδύναμα, $(\alpha+\beta)u+2(\alpha-\beta)=1$, για κάθε $u\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Η τελευταία ισχύει για κάθε $u\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2(\alpha-\beta)=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}\ \text{και}\ \beta=-\frac{1}{4}.$$

Επομένως

$$I_1=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{\frac{1}{4}}{u-2}du+\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-\frac{1}{4}}{u+2}du$$

$$=\frac{\pi}{8}\Big[\ln|u-2|\Big]_1^{-1}-\frac{\pi}{8}\Big[\ln|u+2|\Big]_1^{-1}$$

$$=\frac{\pi}{8}(\ln 3-\ln 1)-\frac{\pi}{8}(\ln 1-\ln 3)$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 3+\frac{\pi}{8}\ln 3=\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

2. i) Αναζητούμε α,β τέτοια ώστε $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{x+1}$ ή, ισοδύναμα,

$$1=(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta),\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}.$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}\ \text{και}\ \beta=-\frac{1}{2}.$$

Έτσι τελικά έχουμε:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\Big[\ln|x+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 1\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\ln 1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=-\ln\sqrt{3}.$$

ii) Έχουμε:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du=-\eta\mu x dx$, $u_1=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ και $u_2=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$. Επομένως

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{du}{1-u^2}=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2-1}=\ln\sqrt{3}\ \text{(από i)).}$$

3. Για $u\neq -1,-2$ αναζητούμε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιους, ώστε:

$$\frac{1}{(u+1)(u+2)}=\frac{\alpha}{u+1}+\frac{\beta}{u+2}$$

ή, ισοδύναμα,

$1=\alpha(u+2)+\beta(u+1)$, για κάθε $u\neq -1,-2$

$(\alpha+\beta)u+2\alpha+\beta-1=0$, για κάθε $u\neq -1,-2$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $u\in\mathbb{R}-\{-1,-2\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{Bmatrix}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}.$$

Επομένως

$$\int\frac{1}{(u+1)(u+2)}du=\int\frac{du}{u+1}-\int\frac{du}{u+2}$$

$$=\ln|u+1|-\ln|u+2|+c$$

i) Θέτουμε $u = ημx$, οπότε $du = συνx dx$. Επομένως

$$\int \frac{συνx}{(ημx+1)(ημx+2)}dx = \int \frac{du}{(u+1)(u+2)}$$

$$= \ln|u+1| - \ln|u+2| + c$$

$$= \ln|ημx+1| - \ln|ημx+2| + c$$

ii) Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$. Έτσι έχουμε

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx = \int \frac{du}{(u+1)(u+2)} = \ln|e^x+1| - \ln|e^x+2| + c$$

$$= \ln(e^x+1) - \ln(e^x+2) + c.$$

4. i) Έχουμε:

$$I_ν + I_{ν+1} = \int_0^1 \frac{t^{2ν+1}}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t^{2ν+3}}{1+t^2}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2ν+1}(1+t^2)}{1+t^2}dt = \int_0^1 t^{2ν+1}dt$$

$$= \left[\frac{t^{2ν+2}}{2ν+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2ν+2}$$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^2+1)'}{(t^2+1)}dt$

$$= \frac{1}{2}[\ln(t^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Εξάλλου από το ερώτημα i) έχουμε $I_0 + I_1 = \frac{1}{2\cdot 0+2} = \frac{1}{2}$, οπότε

$$I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

Επίσης είναι $I_2 + I_1 = \frac{1}{2\cdot 1+2}$, οπότε

$$I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

5. Θέτουμε $g(x)$ το 1° μέλος και $h(x)$ το 2° μέλος και έχουμε:

- $g'(x)=\left(x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du\right)'$

$$=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$$

και

- $h'(x)=\int_0^x f(t)dt.$

Δηλαδή ισχύει $g'(x)=h'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $g(x)=h(x)+c$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+c,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$\int_0^0 f(u)(0-u)du=\int_0^0\left(\int_0^u f(t)dt\right)du+c\Leftrightarrow 0=0+c\Leftrightarrow c=0$$

οπότε έχουμε:

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

6. i) ● Η συνάρτηση $g(u)=\sqrt{u^2-1}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

Άρα, για να ορίζεται η f πρέπει τα άκρα 1, t να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του A. Άρα πρέπει $t\in[1,+\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[1,+\infty)$. Για να ορίζεται, τώρα, η F πρέπει τα άκρα 1, x να ανήκουν στο διάστημα $[1,+\infty)$ που είναι το πεδίο ορισμού της f. Άρα πρέπει $x\in[1,+\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της F είναι το $[1,+\infty)$.

ii) ● Έχουμε

$$F'(x)=f(x)=\int_1^x\sqrt{u^2-1}du$$

οπότε

$$F''(x)=f'(x)=\sqrt{x^2-1}.$$

Επειδή $F''(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ και $F''(1)=0$, η F' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1,+\infty)$, οπότε:

- η F είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και
- $F'(x) > F'(1) = 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

7. i) $F(x)+G(x) = \int_0^x e^t(\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t)dt = e^x - 1,$ (1)

και

$$F(x)-G(x) = \int_0^x e^t(\sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t)dt$$

$$= \int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu 2t dt = K(x).$$

Όμως, είναι

$$K(x) = [e^t \sigma\upsilon\nu 2t]_0^x + \int_0^x 2e^t \eta\mu 2t dt$$

$$= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2[e^t \eta\mu 2t]_0^x - 4\int_0^x e^t \sigma\upsilon\nu 2t dt$$

$$= e^x \sigma\upsilon\nu 2x - 1 + 2e^x \eta\mu 2x - 4K(x)$$

οπότε

$$5K(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - 1.$$

Άρα

$$K(x) = F(x) - G(x) = \frac{e^x}{5}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - \frac{1}{5}. \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$2F(x) = \frac{e^x}{5}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + e^x - \frac{6}{5}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{10}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + \frac{e^x}{2} - \frac{6}{10}. \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) έχουμε

$$G(x) = e^x - 1 - \frac{e^x}{10}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - \frac{e^x}{2} + \frac{6}{10}$$

$$= \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - \frac{4}{10}$$

ii) Επειδή $F'(t) = e^t \sigma\upsilon\nu^2 t,$ έχουμε

$$I=[F(x)]_{\pi}^{2\pi}=\frac{e^{2\pi}}{10}(\text{συν}4\pi+2\text{ημ}4\pi)+\frac{e^{2\pi}}{2}-\frac{6}{10}-\frac{e^{\pi}}{10}(\text{συν}2\pi+2\text{ημ}2\pi)-\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{6}{10}$$

$$=\frac{e^{2\pi}}{10}+\frac{e^{2\pi}}{2}-\frac{e^{2\pi}}{10}-\frac{e^{\pi}}{2}$$

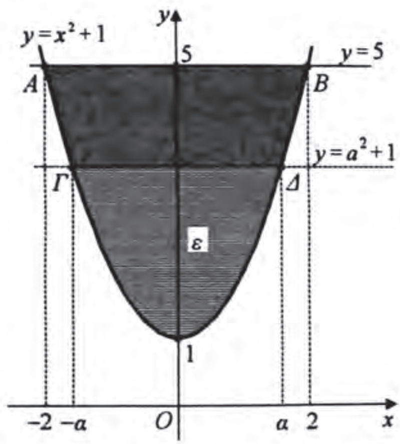
$$=\frac{3}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1).$$

Επειδή $G'(t)=e^{t}\text{ημ}^2 t$, έχουμε

$$J=[G(x)]_{\pi}^{2\pi}=\frac{e^{2\pi}}{2}-\frac{e^{2\pi}}{10}(\text{συν}4\pi+2\text{ημ}4\pi)-\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{e^{\pi}}{10}(\text{συν}2\pi+2\text{ημ}2\pi)$$

$$=\frac{e^{2\pi}}{2}-\frac{e^{2\pi}}{10}-\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{e^{\pi}}{10}=\frac{2}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1).$$

8. Οι τετμημένες των σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+1=5$, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-2$ και $x_2=2$. Οι τετμημένες των Γ και Δ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+1=\alpha^2+1$, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-\alpha$ και $x_2=\alpha$.



Το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από την ευθεία $y=5$ και τη γραφική παράσταση της $y=x^2+1$ είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}(5-x^2-1)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}.$$

Το εμβαδόν ε του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y=\alpha^2+1$ και τη γραφική παράσταση της $y=x^2+1$ είναι:

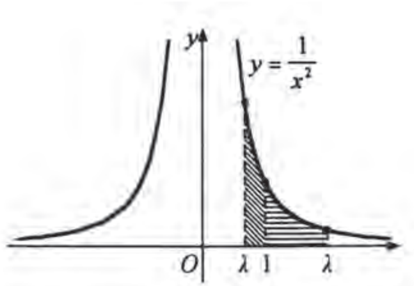
$$\varepsilon=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2+1-x^2-1)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)dx=\alpha^2(\alpha+\alpha)-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$=2\alpha^3-\left(\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^3}{3}\right)=2\alpha^3-\frac{2}{3}\alpha^3=\frac{4}{3}\alpha^3.$$

Το Ω χωρίζεται από την $y=\alpha^2+1$σε δύο ισοεμβαδικά χωρία, αν και μόνο αν

$$\varepsilon=\frac{E}{2}\Leftrightarrow \frac{4}{3}\alpha^3=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\alpha^3=16\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{4}.$$

9. i) Αν $0<\lambda<1$, τότε



$$E(\lambda)=\int_\lambda^1\frac{1}{x^2}dx=\int_\lambda^1 x^{-2}dx$$

$$=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_\lambda^1=\frac{1}{\lambda}-1.$$

Αν $\lambda>1$, τότε

$$E(\lambda)=\int_\lambda^1\frac{1}{x^2}dx=\int_\lambda^1 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_\lambda^1=\frac{1}{\lambda}-1.$$

Αν $\lambda>1$, τότε

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda\frac{1}{x^2}dx=\int_1^\lambda x^{-2}dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^\lambda=1-\frac{1}{\lambda}.$$

ii) Αν $0<\lambda<1$, τότε

$$E(\lambda)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}-1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}.$$

Αν $\lambda>1$, τότε:

$$E(\lambda)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=2$$

iii) Έχουμε:

$$\lim_{\lambda\to 0}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)=+\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=1.$$

10. i) Ισχύει $f(x)-g(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx\geq 0$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

ii) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M\, dx$$

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

iii) Είναι:

$$f'(x) = \frac{x\text{συν}x - \text{ημ}x}{x^2} = \frac{x - \text{εφ}x}{\dfrac{x^2}{\text{συν}^2 x}} < 0$$

αφού $x - \text{εφ}x < 0$ και $\dfrac{x^2}{\text{συν}x} > 0$ για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Για $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ ισχύει $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$, οπότε $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \geq f(x) \geq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι,

$$\frac{3}{\pi} \geq \frac{\text{ημ}x}{x} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \text{ ή ισοδύναμα, } \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\text{ημ}x}{x} \leq \frac{3}{\pi}.$$

β) Σύμφωνα με το ερώτημα i) θα ισχύει

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ημ}x}{x} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\pi} dx$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ημ}x}{x} dx \leq \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ημ}x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

iv) Είναι

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0, \text{ για } x \in (0, +\infty)$$

επειδή η f είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

α) Από την ανισότητα $e^x \geq 1+x$, αν θέσουμε όπου x το $-x^2$, προκύπτει

$$e^{-x^2} \geq 1-x^2. \tag{1}$$

Εξάλλου, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, για $x \in [0,1]$ θα ισχύει

$$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1. \tag{2}$$

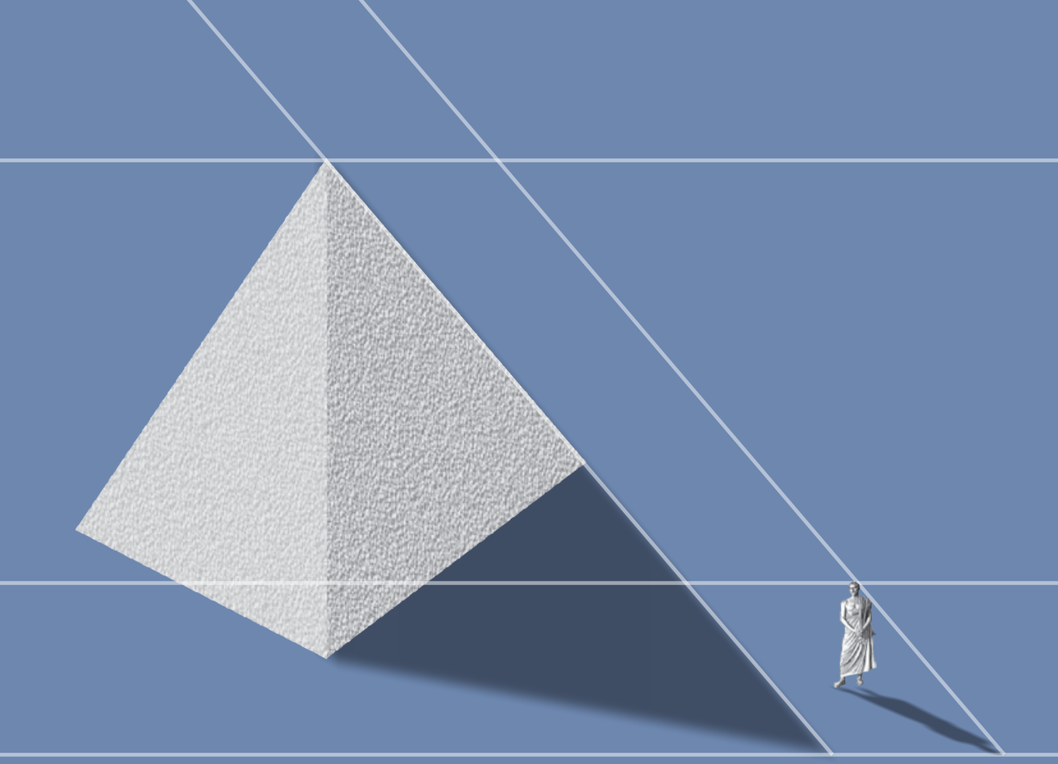
Από (1) και (2) προκύπτει ότι

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1, \text{ για } x \in [0,1].$$

β) Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$\int_0^1 (1-x^2)dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$$

$$\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1.$$



Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0235
ISBN 978-960-06-5176-8

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0235 8