Ψηφιακά Μαθηματικά: Λογισμικά και Τεχνητή Νοημοσύνη

Επιμορφωτική διημερίδα Μαθηματικών

Πρότυπο ΓΕΛ Αγίων Αναργύρων

21 και 22/2/2024

Ψηφιακές μαθησιακές τροχιές στα τετράπλευρα: Θεώρημα Varignon

Δρ. Σταυρούλα Πατσιομίτου

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

ΔΔΕ Γ΄ Αθήνας

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ ΔΙΗΜΕΡΙΔΑΣ	
21-2-2024	
12.00-12.15	**Προσέλευση**
12.15-12.45	**Σταυρούλα Πατσιομίτου** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Γ΄ Αθήνας* **Ψηφιακές μαθησιακές τροχιές στα τετράπλευρα: Θεώρημα Varignon**
12.45-13.15	**Σωτήριος Χασάπης** *Διευθυντής Προτύπου ΓΕΛ Αγίων Αναργύρων* **Διερευνώντας την εγγραψιμότητα σε κύκλο**
13.15-13.45	**Ιωάννης Αναπλιώτης** *Ιδιωτικό Γυμνάσιο «Νέα Παιδεία»* **Όταν τα Μαθηματικά συναντούν την Τεχνητή Νοημοσύνη: Η Ανεκτίμητη Βοήθεια του ChatGPT και των Chatbots 'Fractal Mentor' και 'Calculus Wizard and Math Mentor'.**
13.45-14.00	**Συζήτηση**

Ψηφιακή ή «δυναμική» μαθησιακή τροχιά στα τετράπλευρα –ΦΑΣΕΙΣ

Ένα υποθετικό μαθησιακό μονοπάτι για τα τετράπλευρα είναι μια πορεία ή διαδρομή με στόχο την κατανόηση και μάθηση των τετράπλευρων, η οποία περιλαμβάνει την ανάπτυξη κατασκευαστικών διαδικασιών με χρήση εναλλακτικών *εργαλειακών διαδρομών (Patsiomitou, 2021a,b; Πατσιομίτου, 2022, 2023)* (*δηλαδή, διαφορετικών εναλλακτικών τρόπων χρήσης εργαλείων του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, σε συνδυασμό με τη θεωρητική ερμηνεία της διαδρομής, την εφαρμογή τους στην επίλυση ανοικτών διερευνητικών προβλημάτων και προβλημάτων πραγματικού πλαισίου, μοντελοποιημένων στο λογισμικό*), σχεδιασμένο έτσι ώστε να προκαλέσει εκείνες τις νοητικές διαδικασίες ή ενέργειες που θα βοηθήσουν τους μαθητές να κινηθούν σε ένα ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

(Πατσιομίτου, 2024, σελ. 11)

Παράδειγμα δυναμικού υποθετικού μονοπατιού μπορείτε να βρείτε στον παρακάτω σύνδεσμο

https://globaljournals.org/GJCST_Volume12/8-A-Linking-Visual-Active-Representation.pdf

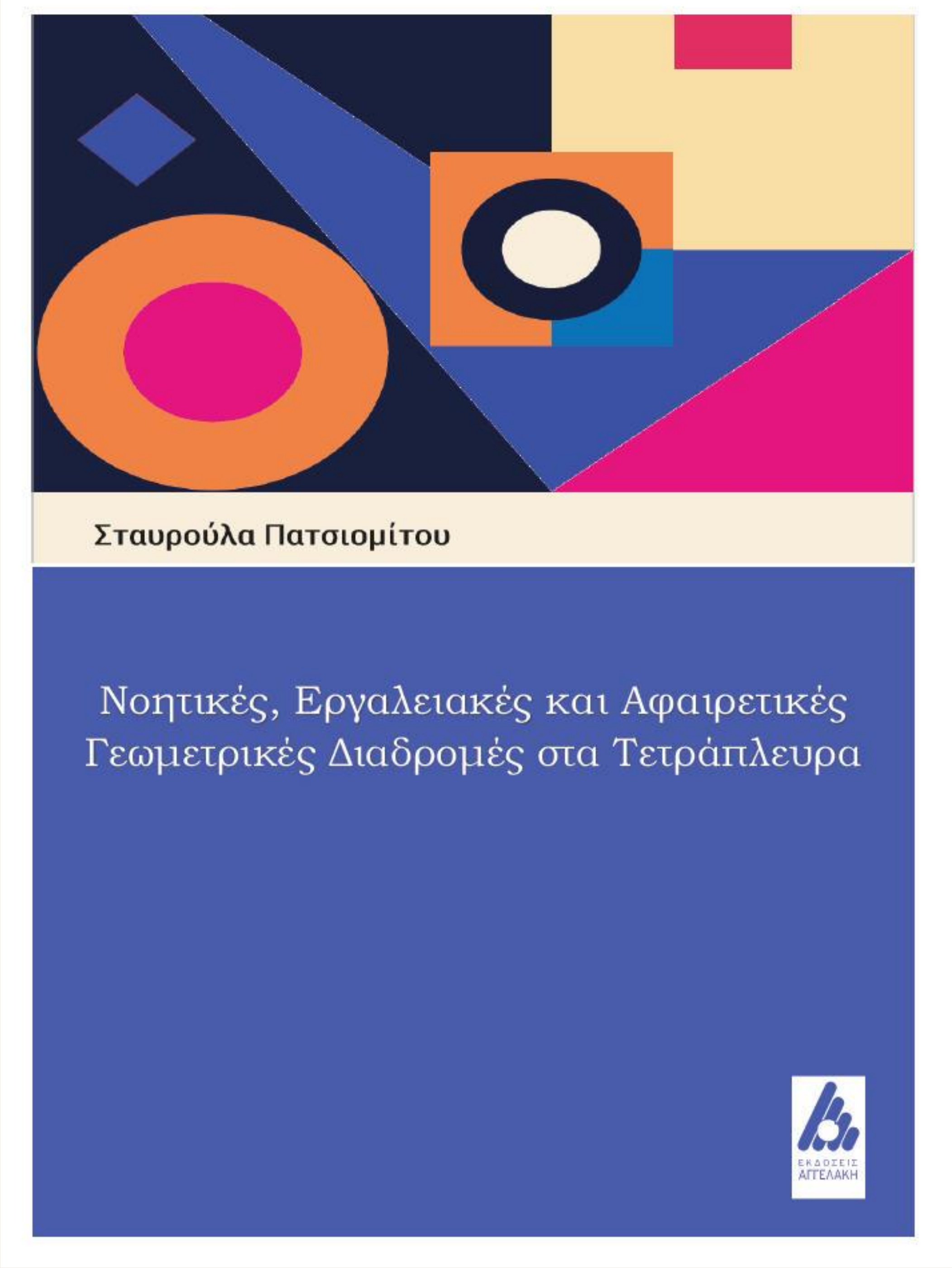
- "A Linking Visual Active Representation DHLP for Student's Cognitive Development" (Patsiomitou, 2012)

Ομοίως, στον παρακάτω σύνδεσμο

http://computerresearch.org/index.php/computer/article/view/41

- "Students Learning Progression through Instrumental Decoding of Mathematical Ideas" (Patsiomitou, 2014)

Νοητικές, Εργαλειακές και Αφαιρετικές
Γεωμετρικές Διαδρομές στα Τετράπλευρα **(Πατσιομίτου, 2024)**
https://www.academia.edu/114452254/



Τετράπλευρα

ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ΄ [20]. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα΄ [21]. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ΄ [22]. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ΄ [23]. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

http://www.physics.ntua.gr/mourmouras/euclid/book1/elements1.html#peri

Συγκεκριμένα, στο Βιβλίο Ι των Στοιχείων αναφέρονται οι έννοιες του τετραγώνου και του ετερομήκους (ορθογώνιο), του ρόμβου, του ρομβοειδούς (παραλληλόγραμμο) και του τραπεζίου.

Πατσιομίτου, 2024

ιεραρχική ταξινόμηση των τετράπλευρων

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε *επίπεδα* και *στρεβλά*, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε *κυρτά* και *μη κυρτά*, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες.

Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):

Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη

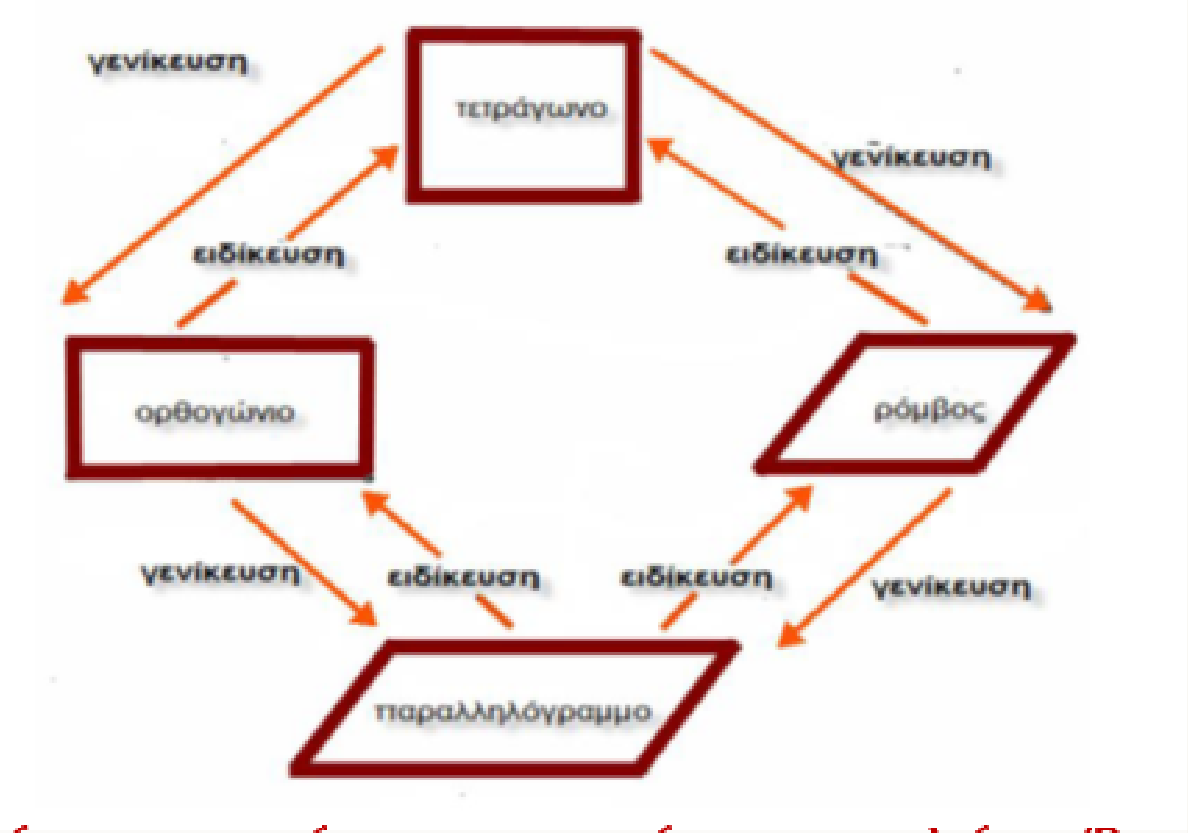
Αργυρόπουλος,Η., Βλάμος,Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης,Σ.,Σιδέρης,Π. (2001). *Ευκλείδεια Γεωμετρία (Α' και Β' Τάξη)*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

http://ebooks.edu.gr/modules/document/file.php/DSGL-A101/Διδακτικό Πακέτο/Βιβλίο Μαθητή/22-0236_Geometria_ A-Lyk_BM.pdf

Πατσιομίτου, 2024

Η ταξινόμηση των σχημάτων –σχέσεις εγκλεισμού

- Πολλοί σύγχρονοι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με **την ιεραρχική ταξινόμηση των τετράπλευρων.** Σύμφωνα με τον De Villiers (1994) ***«ιεραρχική ταξινόμηση εννοιών είναι η ταξινόμηση ενός συνόλου εννοιών με τέτοιο τρόπο ώστε οι πιο ειδικές έννοιες να διαμορφώνουν (/είναι) υποσύνολα των γενικότερων εννοιών»*** (p.11).



Ειδίκευση και γενίκευση στην ιεράρχηση των εννοιών των τετραπλεύρων (De Villiers, 1994, p.13 ο. α στο Πατσιομίτου, 2012)

Μαθησιακή τροχιά για τα τετράπλευρα- ΦΑΣΗ Α

ΦΑΣΗ Α. Κατασκευαστικές διαδικασίες

- Α.1 Κατασκευή παραλληλογράμμου

Πρόβλημα: *Κατασκευή ενός παραλληλογράμμου όταν γνωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο εκτός αυτού στην οθόνη.*

- Α.2 Κατασκευή ορθογωνίου

Πρόβλημα: *Σύρετε μία κορυφή του παραλληλογράμμου, ώστε να γίνει ορθογώνιο. Κατασκευάστε ένα σταθερό ορθογώνιο με χρήση των τεχνικών του λογισμικού.*

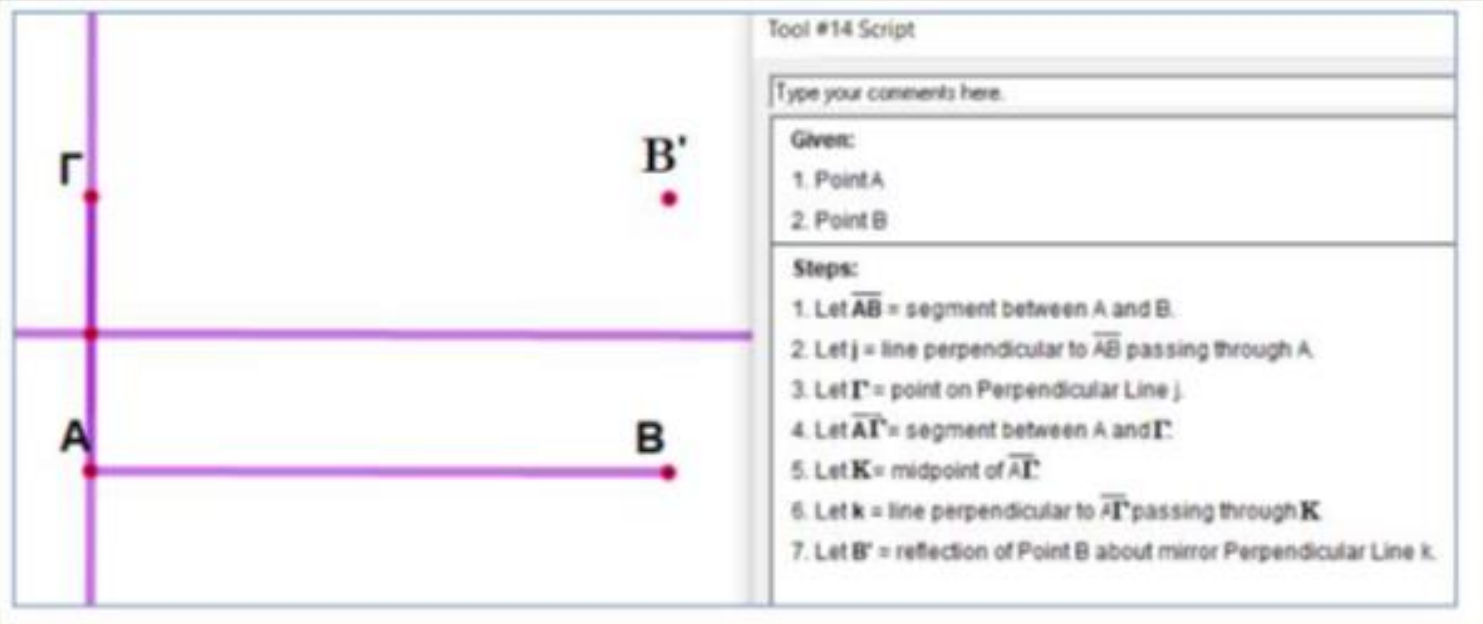
- Α.3. Κατασκευή ρόμβου

Πρόβλημα: *Ενώστε δύο απέναντι κορυφές στο σχήμα του παραλληλόγραμμου που κατασκευάσατε. Σύρετε μία κορυφή, ώστε να σχηματιστεί ένας ρόμβος. Τι παρατηρείτε; Κατασκευάστε ένα σταθερό σχήμα ρόμβου.*

- Α.4. Κατασκευή τετραγώνου

Πρόβλημα: *Κατασκευή ενός τετραγώνου με διαδικασία ελεύθερη.*

Πατσιομίτου, 2012, 2020α, σελ. 171

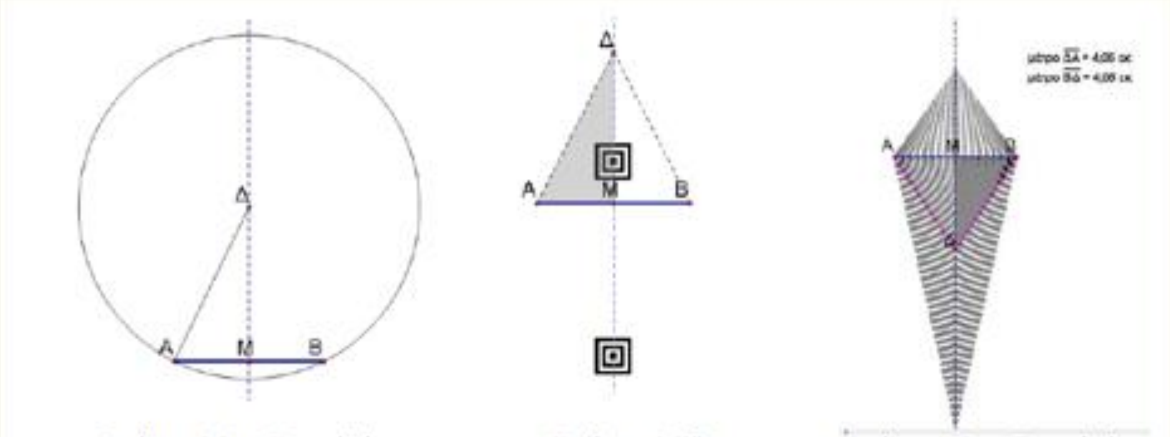


Ενδεικτική κατασκευή ορθογωνίου (Πατσιομίτου, 2024, σελ. 45)

Διερεύνηση ιδιοτήτων μεσοκαθέτου

https://www.academia.edu/3640789/

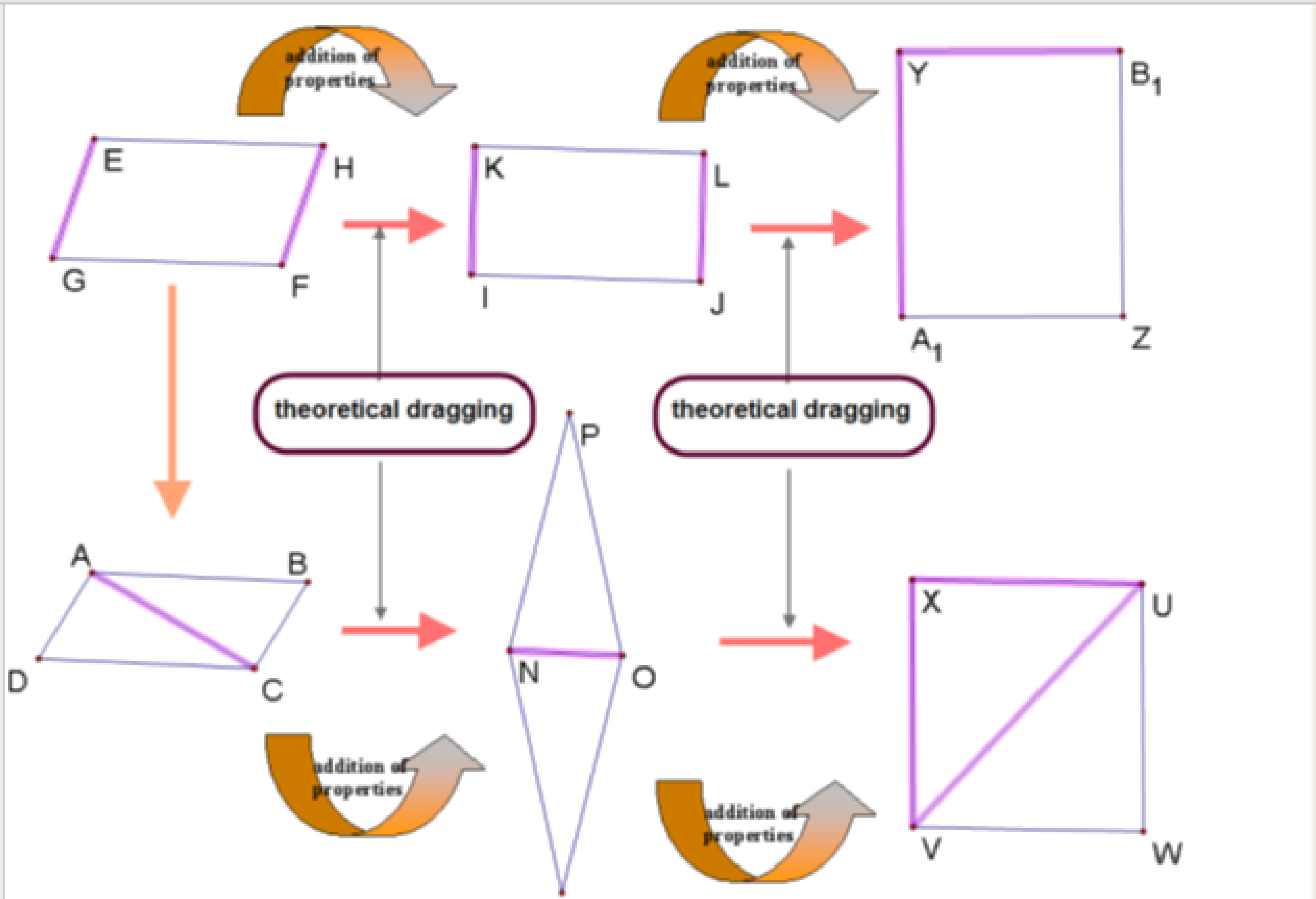
Πατσιομίτου, 2009, 2024, σελ. 49



Σχήμα 23α. Εργαλείο κατασκευής Κύκλου

Σχήμα 23β. Εργαλείο Ανάκλασης τμήματος

Σχήμα 23γ. Εργαλείο προσθήκης κίνησης και ίχνους σημείων



Patsiomitou, 2012, p. 63

Μαθησιακή τροχιά για τα τετράπλευρα-ΦΑΣΗ Β

ΦΑΣΗ Β. Διερεύνηση και κατασκευές μέσω του μενού Μετασχηματισμός

Στάδιο Β1. Το τμήμα αναγνώρισης –οπτικοποίησης της δεύτερης φάσης.

- Ανάκλαση σημείου
- Ανάκλαση ευθύγραμμου τμήματος

Στάδιο Β2-Το τμήμα της αντιληπτικής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης

- Κατασκευή αξόνων συμμετρίας των παραλληλογράμμων

Στάδιο Β3-Το τμήμα της αυστηρής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης.

- Κεντρική συμμετρία με χρήση εργαλείων

Στάδιο Β4. Το τμήμα ιεραρχικής δομικής ανάλυσης της δεύτερης φάσης

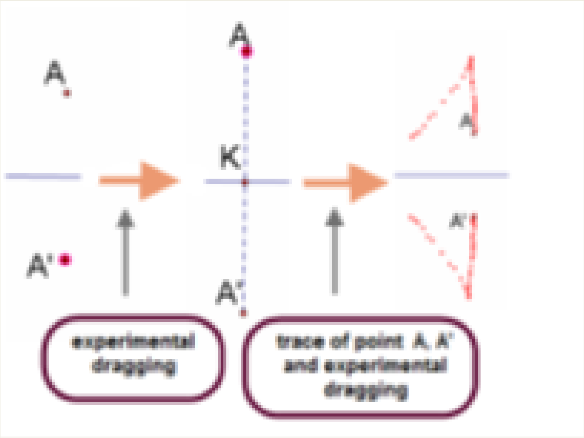
- Κατασκευές με χρήση του μενού Μετασχηματισμός

Πατσιομίτου, 2012, 2020α, σελ. 172

ΦΑΣΗ Β. Διερεύνηση και κατασκευές μέσω του μενού Μετασχηματισμός και των ιδιοτήτων συμμετρίας του σχήματος

Β.Α.1.Ανάκλαση σημείου Α.

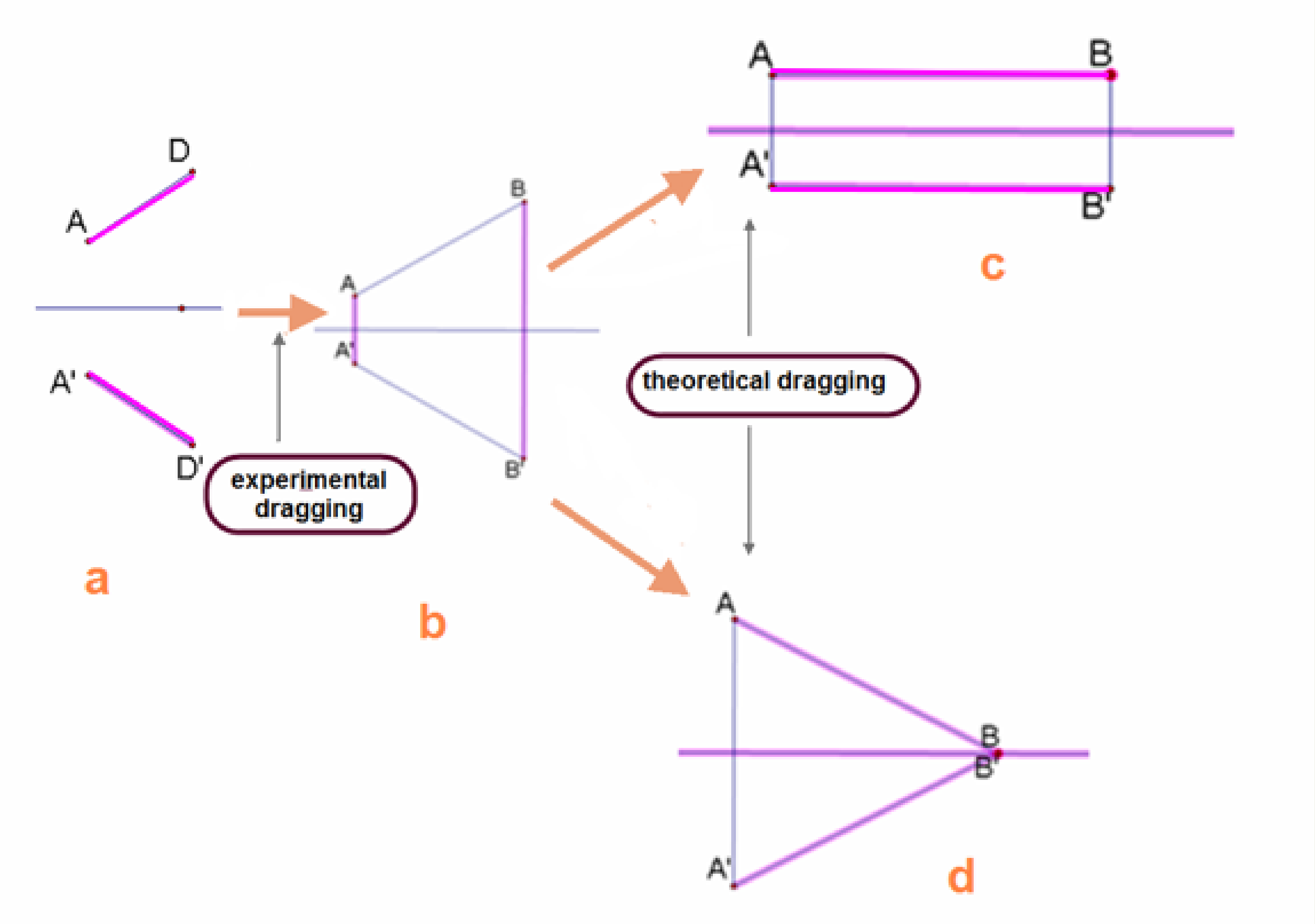
Πρόβλημα: *Φανταστείτε ότι σύρετε το σημείο Α ώστε να πλησιάζει τον άξονα συμμετρίας. Απαντήστε χωρίς να κοιτάξετε το σχήμα: το σημείο Α΄ θα προσεγγίζει το σημείο Α ή θα απομακρύνεται από το Α;*



ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Δύο σημεία που προκύπτουν από ανάκλαση το ένα του άλλου, απέχουν εξίσου από τον άξονα συμμετρίας και η ευθεία που τα συνδέει είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας.

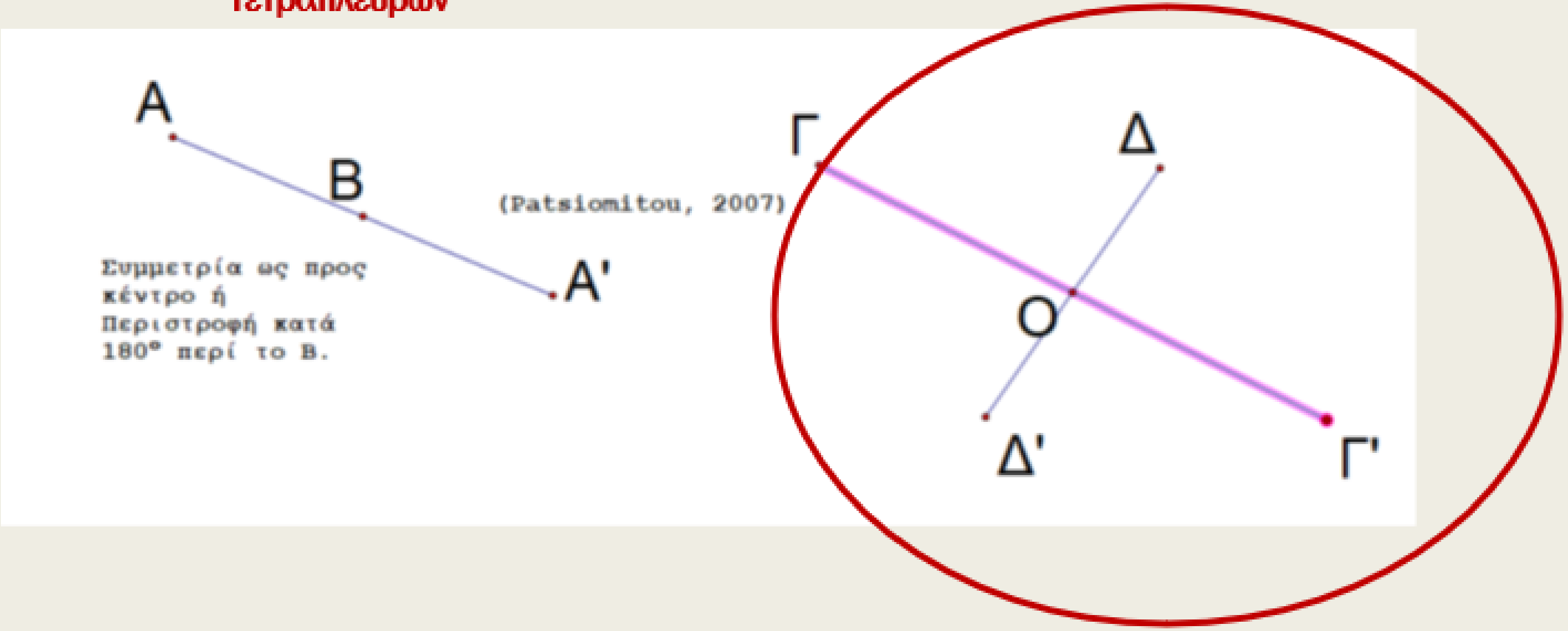
Πατσιομίτου, 2024, σελ. 65



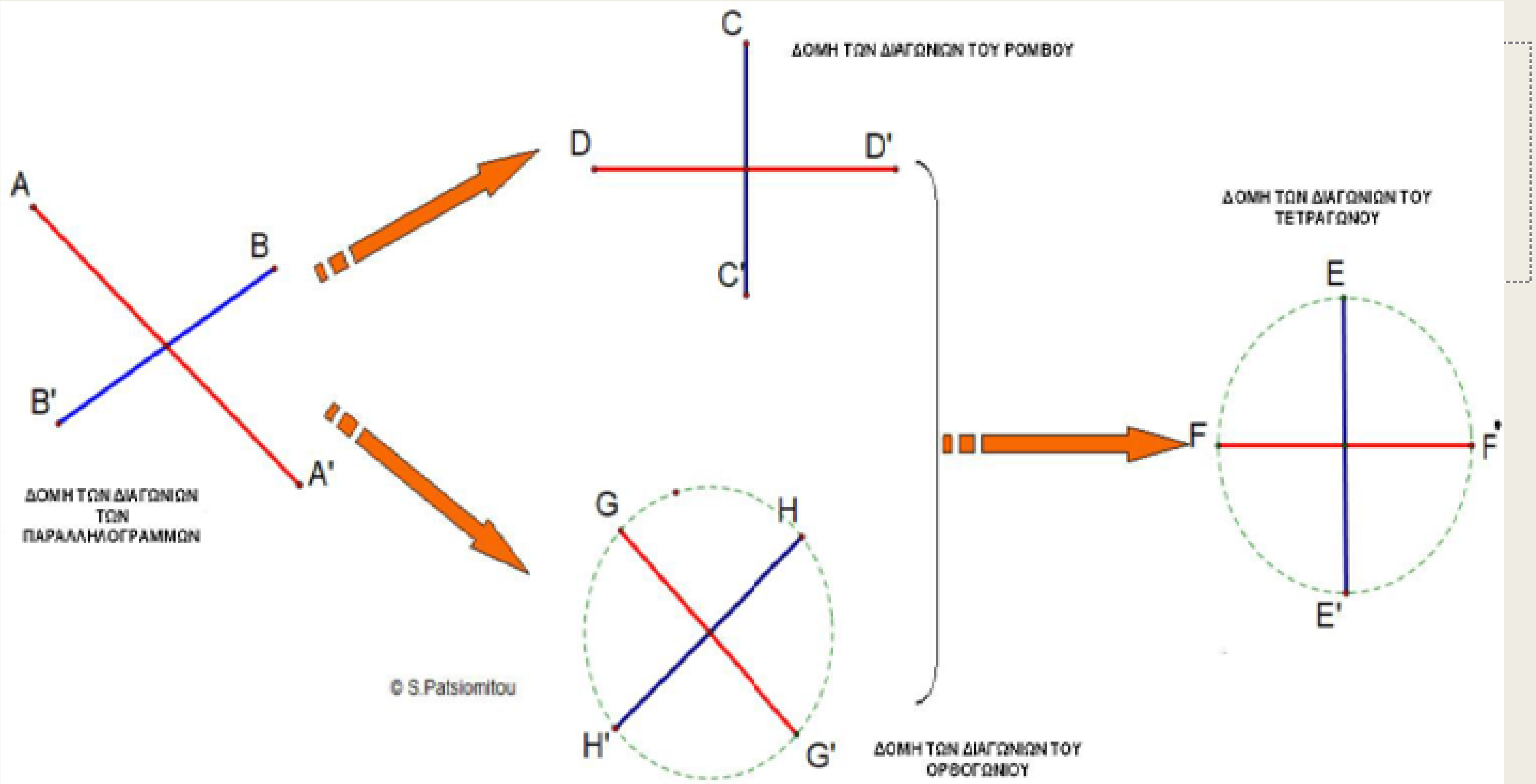
Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (π.χ. ανάκλαση, περιστροφή) σε πρωτογενή αντικείμενα του λογισμικού (π.χ. σημεία, ευθύγραμμα τμήματα) οδηγούν **στην οπτικοποίηση αντικειμένων** που είχαν κατασκευαστεί στην πρώτη φάση της διαδικασίας με αποτέλεσμα να γίνει **αντιληπτή κάποια ιδιότητα συμμετρίας του σχήματ**ος αρχικά στο οπτικό επίπεδο.

Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις της Β Φάσης (Patsiomitou 2012, p.65) тετράπλευρα-ΥΠΟΦΑΣΗ της Β ΦΑΣΗΣ

Δημιουργία εργαλείου για τη χρήση του στις κατασκευές τετραπλεύρων

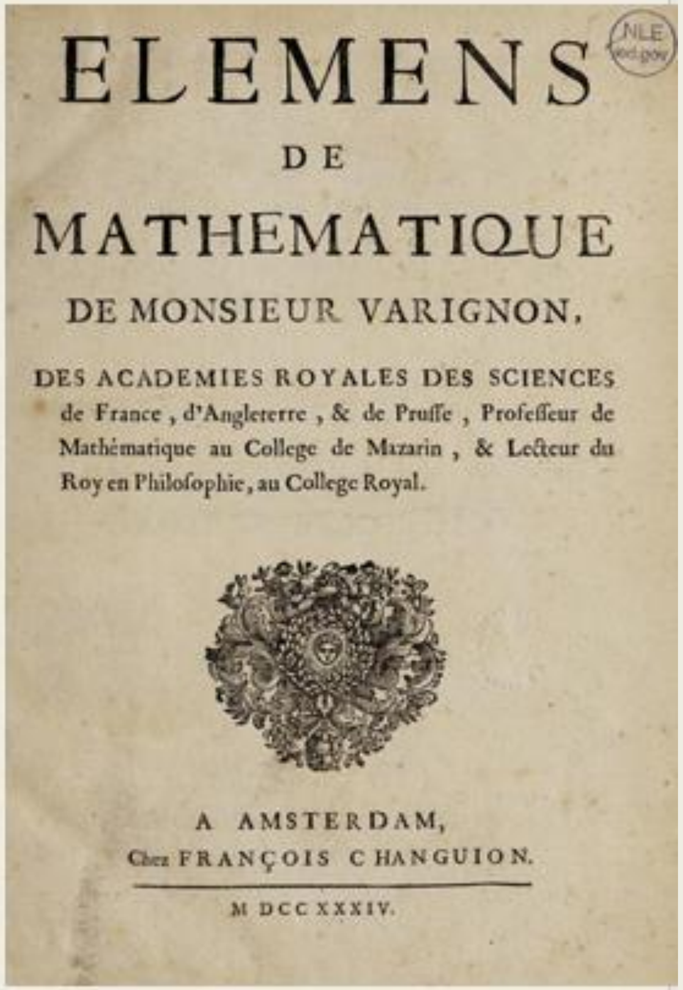


Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις της Β Φάσης-στάδιο Δ. (Patsiomitou 2012, p.70)



(Patsiomitou, 2012, p. 72; Πατσιομίτου, 2022, σελ. 118)

- Pierre Varignon (1654–1722): Γάλλος ακαδημαϊκός της εποχής του Newton και του Leibniz.
- Η απόδειξη του θεωρήματος του Varignon δημοσιεύτηκε το 1731 στο *Elemens de Mathematique*. Δηλαδή, δημοσιεύτηκε εννέα χρόνια μετά το θάνατό του σε ένα εγχειρίδιο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που δημιουργήθηκε από τις σημειώσεις που είχε αφήσει σε συναδέλφους του. Ο τόμος, *Elemens de Mathematique de Monsieur Varignon* (Varignon [1731/ 1972), οργανώνεται σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος που εξηγεί έννοιες της αριθμητικής και της στοιχειώδους άλγεβρας και το μεγαλύτερο δεύτερο μέρος που καλύπτει θέματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Τα δύο τμήματα έχουν χωριστά αριθμημένες σελίδες, με 66 σελίδες αριθμητικής και άλγεβρας και 155 σελίδες που αφορούν τη γεωμετρία επιπέδου και τη στερεομετρία.



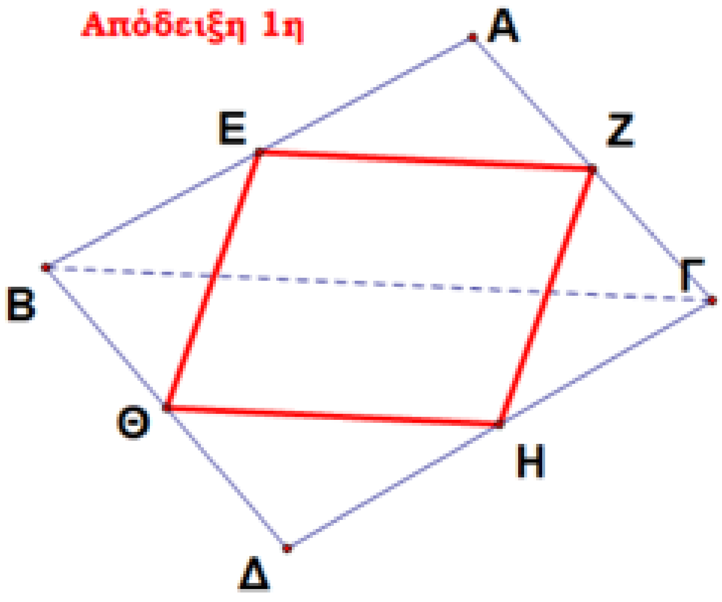
Oliver, Peter N. (2001). «Pierre Varignon and the Parallelogram Theorem». *The Mathematics Teacher* 94 (4): 316–319. doi:10.5951/MT.94.4.0316

Varignon, Pierre (1734). Elemens de mathematique. Amsterdam: Chez Francois Changuion.

ΘΕΩΡΗΜΑ Varignon

Σε κάθε τετράπλευρο Α Β Γ Δ τα μέσα των πλευρών του, δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο. Το παραλληλόγραμμο αυτό ονομάζεται το παραλληλόγραμμο Varignon (Βαρινιόν).

Απόδειξη 1η



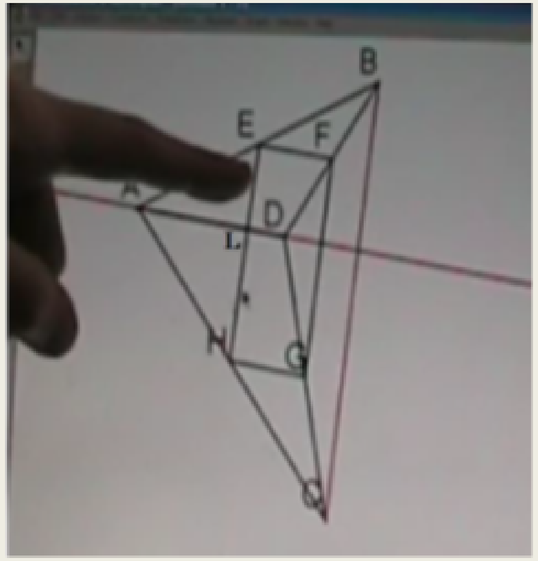
$$\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{Ζ μέσο ΑΓ}\end{array}\right| \Rightarrow ΕΖ \,//=\, \frac{1}{2} ΒΓ$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Θ μέσο ΒΔ}\\ \text{Η μέσο ΓΔ}\end{array}\right| \Rightarrow ΘΗ \,//=\, \frac{1}{2} ΒΓ$$

$$\Rightarrow ΕΖ \,//=\, ΘΗ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο}$$

Πατσιομίτου, 2024, σελ. 84



Απόσπασμα από την έρευνα μου στα μη κυρτά τετράπλευρα (Πατσιομίτου, 2012)

677. R: Γιατί αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο;

678. M13: Γιατί GF//=BC/2, EH//=BC/2 και έτσι GF//=EH

679. R: Αυτό ισχύει και σε παραλληλόγραμμο.

680. M7, M13: Ναι, αλλά αυτές τέμνονται κάθετα (και δείχνουν τη γωνία ALE).

681. M13: Αυτή η γωνία είναι ορθή (δείχνει τη γωνία ALH), έτσι η γωνία είναι ορθή (δείχνει στην ELD).

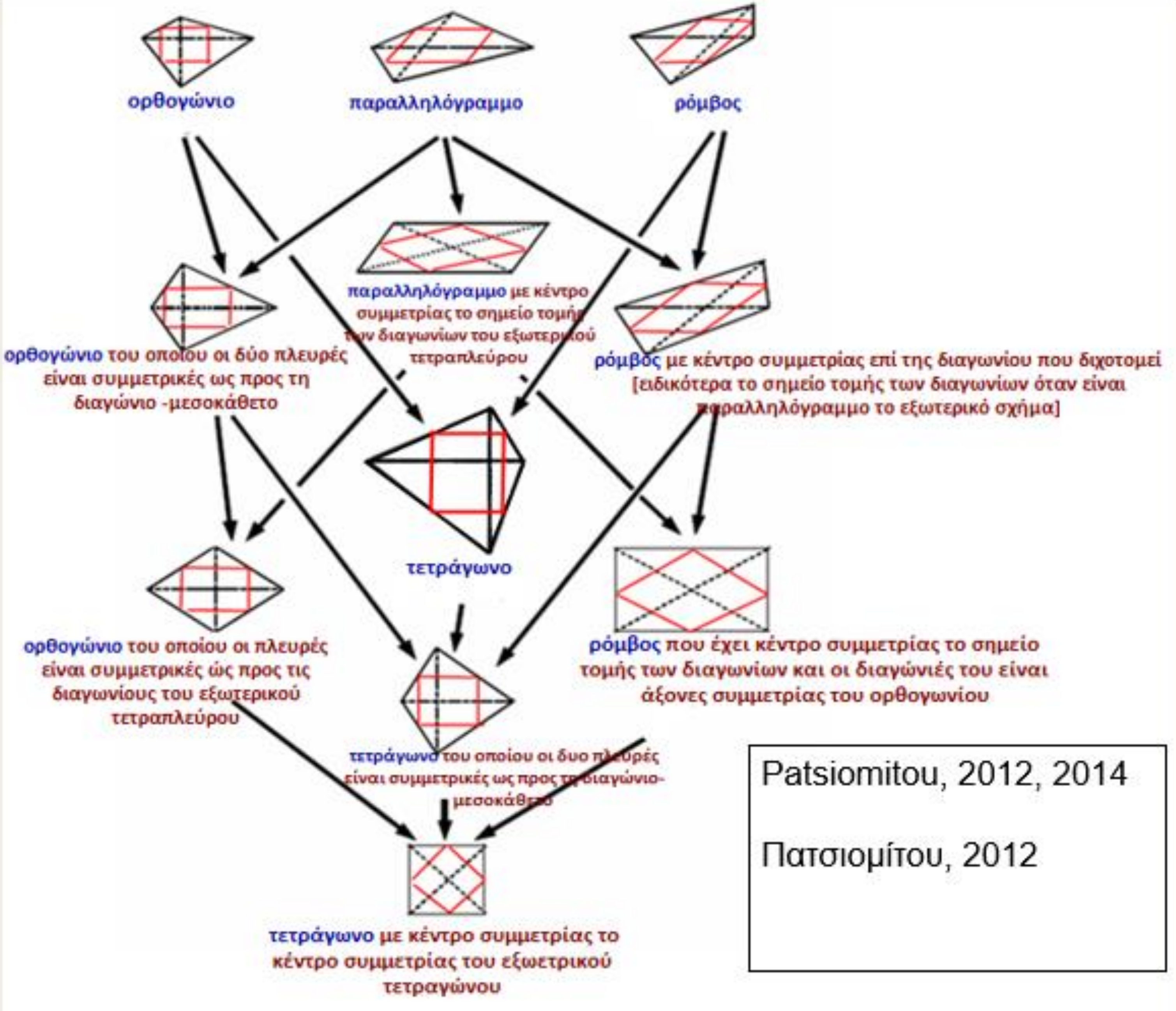
682. R: Γιατί τέμνονται κάθετα; Γιατί είναι η EH κάθετη στην AD;

683. M8: Γιατί στο τρίγωνο ACB, EH//=1/2 CB, άρα EH//CB

Ο M8 υπονοεί το θεώρημα «αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο ευθείες παράλληλες τότε είναι κάθετη και στην άλλη»

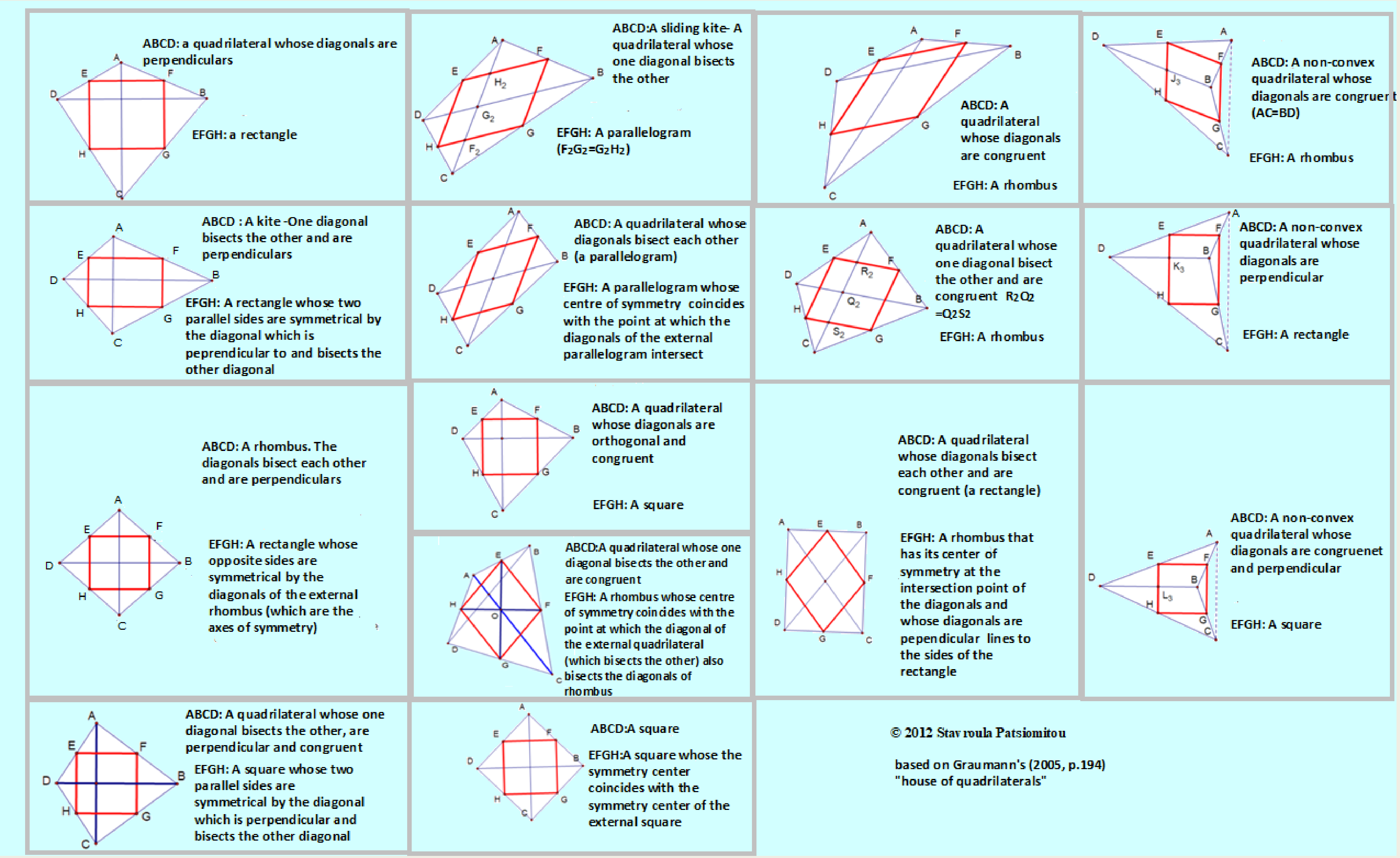
685. M13: Τότε η γωνία H είναι ορθή (LHG) γιατί είναι εντός εναλλάξ.

- Το εσωτερικό παραλληλόγραμμο Varignon είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι δύο διαγώνιες του τετραπλεύρου έχουν ίσο μήκος.
- Το εσωτερικό παραλληλόγραμμο Varignon είναι ορθογώνιο, αν και μόνο αν οι δύο διαγώνιες του τετραπλεύρου είναι κάθετες μεταξύ τους.



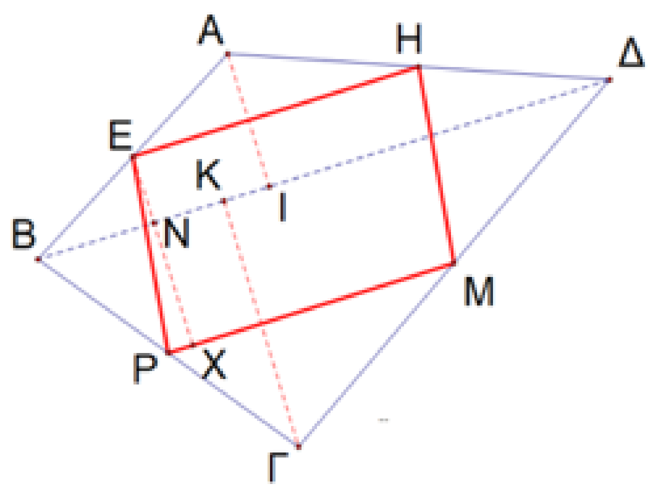
Patsiomitou, 2012, 2014

Πατσιομίτου, 2012



Κατηγοριοποίηση των εσωτερικών παραλληλογράμμων, συμπεριλαμβανομένων των μη κυρτών εξωτερικών τετραπλεύρων (Patsiomitou, 2019, σελ. 186).

Σε κάθε τετράπλευρο το εμβαδόν του παραλληλογράμμου Varignon είναι το μισό του τετραπλεύρου



$$(\text{ΕΗΜΡ}) = \text{ΕΗ}\cdot\text{ΕΧ} = \text{ΕΧ}\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} =$$

$$= (\text{ΕΝ} + \text{ΝΧ})\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} =$$

$$= \text{ΕΝ}\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} + \text{ΝΧ}\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} =$$

$$= \frac{\text{ΑΙ}}{2}\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} + \frac{\text{ΚΓ}}{2}\cdot\frac{\text{ΒΔ}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΔ}) + \frac{1}{2}\cdot(\text{ΒΓΔ}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓΔ})$$

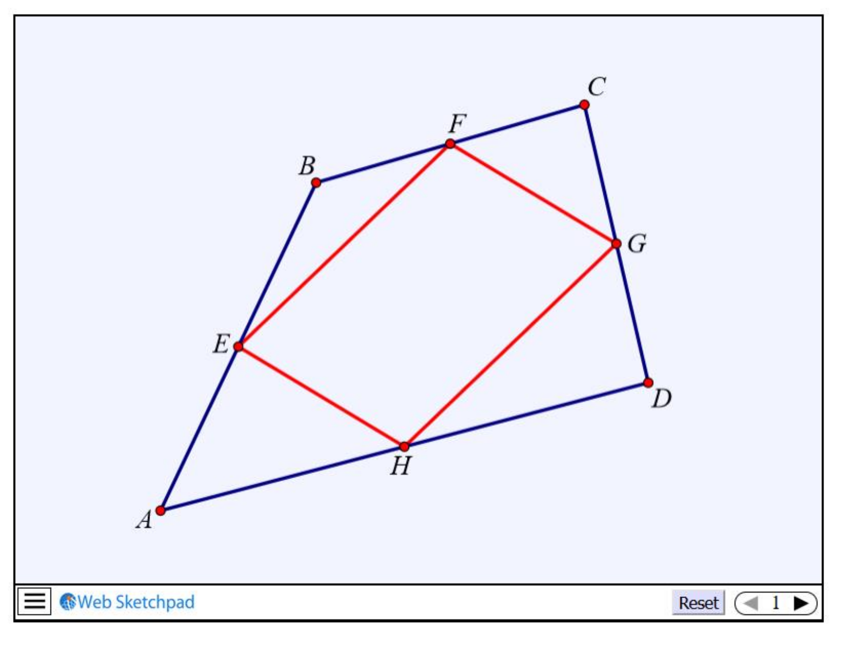
Πατσιομίτου, 2024

Η περίμετρος του παραλληλογράμμου Varignon είναι ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του τετραπλεύρου

WEB SKETCHPAD

Digging Deep Into Varignon's Theorem

- http://www.sineofthetimes.org/digging-deep-into-varignons-theorem/
- May 9, 2017 Daniel Scher
- In the interactive Web Sketchpad model below (and here on its own page), *ABCD* is an arbitrary quadrilateral whose midpoints form quadrilateral *EFGH*. Drag any vertex of *ABCD*. What do you notice about *EFGH*?
- The midpoint quadrilateral theorem, attributed to the French mathematician Pierre Varignon, is relatively new in the canon of geometry theorems, dating to 1731. Mathematics educator Chris Pritchard says the theorem "epitomises simplicity, economy, and elegance….And even today, in an idle moment, I find myself doodling…perhaps still seeking a quadrilateral for which Varignon's theorem doesn't hold."



Σας ευχαριστώ

Βιβλιογραφικές αναφορές

Πατσιομίτου, Σ (2012). *Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης μέσα από τη χρήση αλληλεπιδραστικών τεχνικών και μετασχηματισμών σε υπολογιστικό περιβάλλον: Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις.* **Διδακτορική Διατριβή**. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Δεκέμβριος 2012). (551 σελίδες)

http://phdtheses.ekt.gr/eadd/handle/10442/35816

Patsiomitou, S. (2012). A Linking Visual Active Representation DHLP for student's cognitive development. *Global Journal of Computer Science and Technology*, Vol. 12 Issue 6, March 2012. pp. 53-81. Online ISSN: 0975-4172 & Print ISSN: 0975-4350. Available at: https://globaljournals.org/item/337-a-linking-visual-active-representation-dhlp-for-students-cognitive-development

https://globaljournals.org/GJCST_Volume12/8-A-Linking-Visual-Active-Representation.pdf

Patsiomitou, S. (2019). A Trajectory for the Teaching and Learning of the Didactics of Mathematics [using ICT]: Linking Visual Active Representations. Monograph. Published by Global Journal Incorporated. United States. (September 5, 2019) . ISBN: 978-1-7340132-0-7. http://doi.org/10.34257/SPatTrajICT

https://globaljournals.org/eBooks/A_Trajectory_for_the_Teaching_and_Learning_of_the_Didactics_of_Mathematics_using_ICT.pdf

Πατσιομίτου, Σ. (2024). *Νοητικές, Εργαλειακές και Αφαιρετικές Γεωμετρικές Διαδρομές στα Τετράπλευρα. Ιανουάριος 2024* . Εκδόσεις Αγγελάκη. Αθήνα. ISBN: 978-960-616-370-8

Το βιβλίο διανέμεται δωρεάν ηλεκτρονικά, μέσω διαδικτύου στον ακόλουθο σύνδεσμο https://www.academia.edu/114452254/