



**«Steam: Μαθηματικά και Τέχνη  
στο εκπαιδευτικό  
κοινωνικοπολιτισμικό γίγνεσθαι»**

Επιμορφωτική ημερίδα 10/4/2024  
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Περιστερίου με Λ-Τ

**Εργαλειακές διαδρομές Steam: tessellations, pentominos, rep-tiles  
στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών**

**Δρ. Σταυρούλα Πατσιομίτου  
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών  
ΔΔΕ Γ' Αθήνας**

## Εργαλειακές διαδρομές Steam: tessellations, pentominos, rep-tiles

στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών



# STEAM

# EDUCATION

Science Technology Engineering Arts Mathematics

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΠΤΙΚΗΣ ΗΜΕΡΙΔΑΣ ««Steam: Μαθηματικά και Τέχνη στο εκπαιδευτικό κοινωνικοπολιτισμικό γίγνεσθαι»	
Τετάρτη 10-4-2024, 12:00 – 14:00 μ.μ.	
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Περιστερίου (Λευκωσίας 44-48, , Περιστερί)	
12.00-12.10	<b>Προσέλευση</b> <b>Σοφιάδου Κωνσταντίνα</b> Διευθύντρια Καλλιτεχνικού Γυμνασίου Περιστερίου με Λ.Τ. <b>Τριανταφύλλου Κωνσταντίνος</b> Διευθυντής 4ου Ε.Κ. Περιστερίου <b>Δροσάτος Αναστάσιος</b> Διευθυντής 1ου ΕΠΑΛ Περιστερίου Χαιρετισμοί – Έναρξη Ημερίδας
12.10-12.35	<b>Σταυρούλα Πατσιομίτου</b> Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών, Γ' Αθήνας  Εργαλειακές διαδρομές Steam: tessellations, pentominos, rep-tiles στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών
12.35-13.00	<b>Χαραλαμπία Χάσουλα</b> Σύμβουλος Εκπαίδευσης Καλλιτεχνικών, Γ' Αθήνας - Ανατολικής Αττικής  Γεωμετρικές εφαρμογές και τέχνες
13.00-13.30	<b>Παναγιώτα Αργύρη</b> Υποδιευθύντρια Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής  Μαθηματικά & Ψηφιακή Πολιτιστική Κληρονομιά: Διεπιστημονική Διδακτική Προσέγγιση
13.30-14.00	<b>Ζαχαρούλα Σμυρναίου</b> Αναπληρώτρια Καθηγήτρια στο ΠαιΤΔΕ ΕΚΠΑ-Αντιπρόεδρος του ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»  Ο επιστημονικός γραμματισμός και η Τέχνη στην Εκπαίδευση: Δύο σημειωτικά συστήματα για την προσέγγιση αμφιλεγόμενων και σύγχρονων θεμάτων στην εκπαίδευση
Συζήτηση-Κλείσιμο ημερίδας	

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ



ΕΠΙΣΤΡΩΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Πεντόμινο

Επαναλαμβανόμενα πλακίδια (“rep-tiles”)



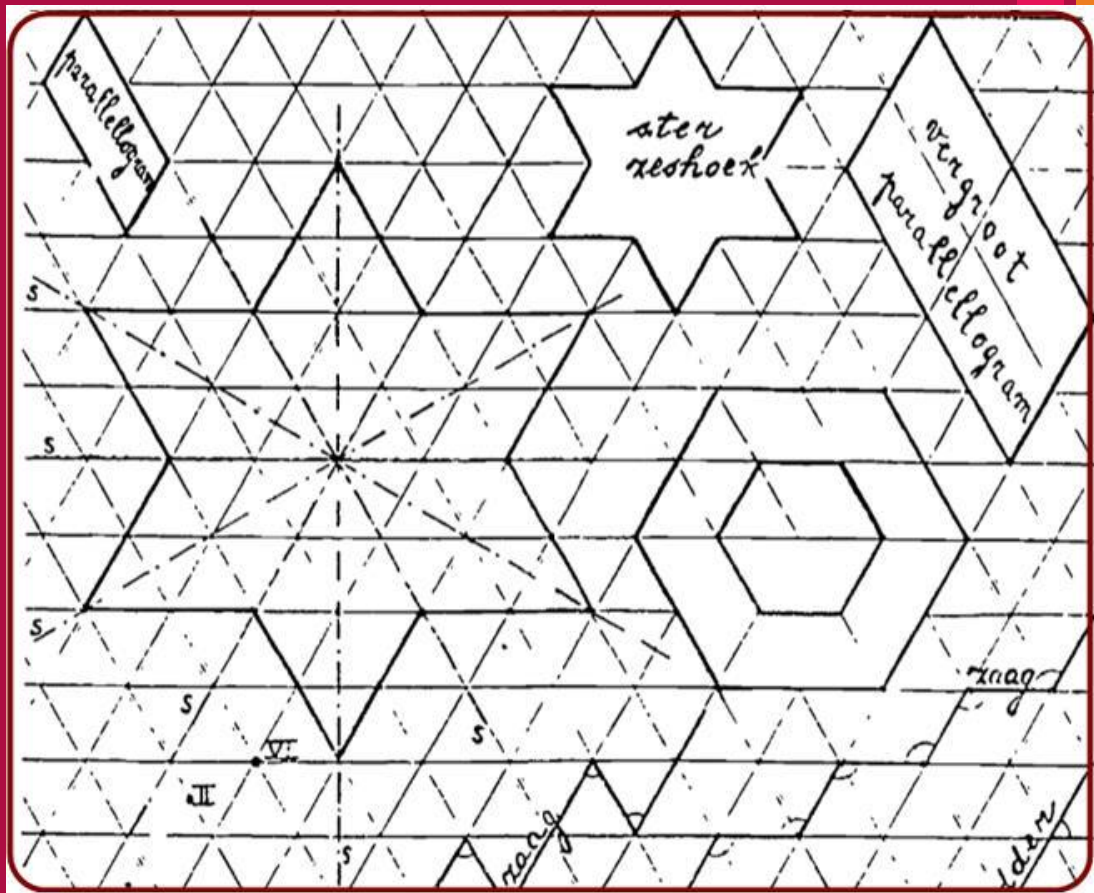
Το τάνγκραμ



Οστομάχιον



# Dina van Hiele



«Η διδασκαλία μου είχε στόχο να βοηθήσει τους μαθητές μου να ανακαλύψουν και να αναπτύξουν την οπτική γεωμετρική δόμηση που θα μπορούσε να τους οδηγήσει στην επέκταση της δόμησης της σκέψης. Αυτή η επέκταση μπορεί να προκύψει μόνο όταν εισάγεται από τον δάσκαλο μέσω ενός κατάλληλου πλαισίου, το οποίο θα οδηγήσει τον μαθητή στη λογική σύνδεση των ιδιοτήτων. Τα παραδείγματα επίστρωσης επιπέδου θεωρήθηκαν από εμένα το πλέον κατάλληλο υλικό για τη διαδικασία αυτή. Dina van Hiele, ό.α. στο Fuys et al, 1984, σελ. 153, Πατσιομίτου, 2022, σελ. 210

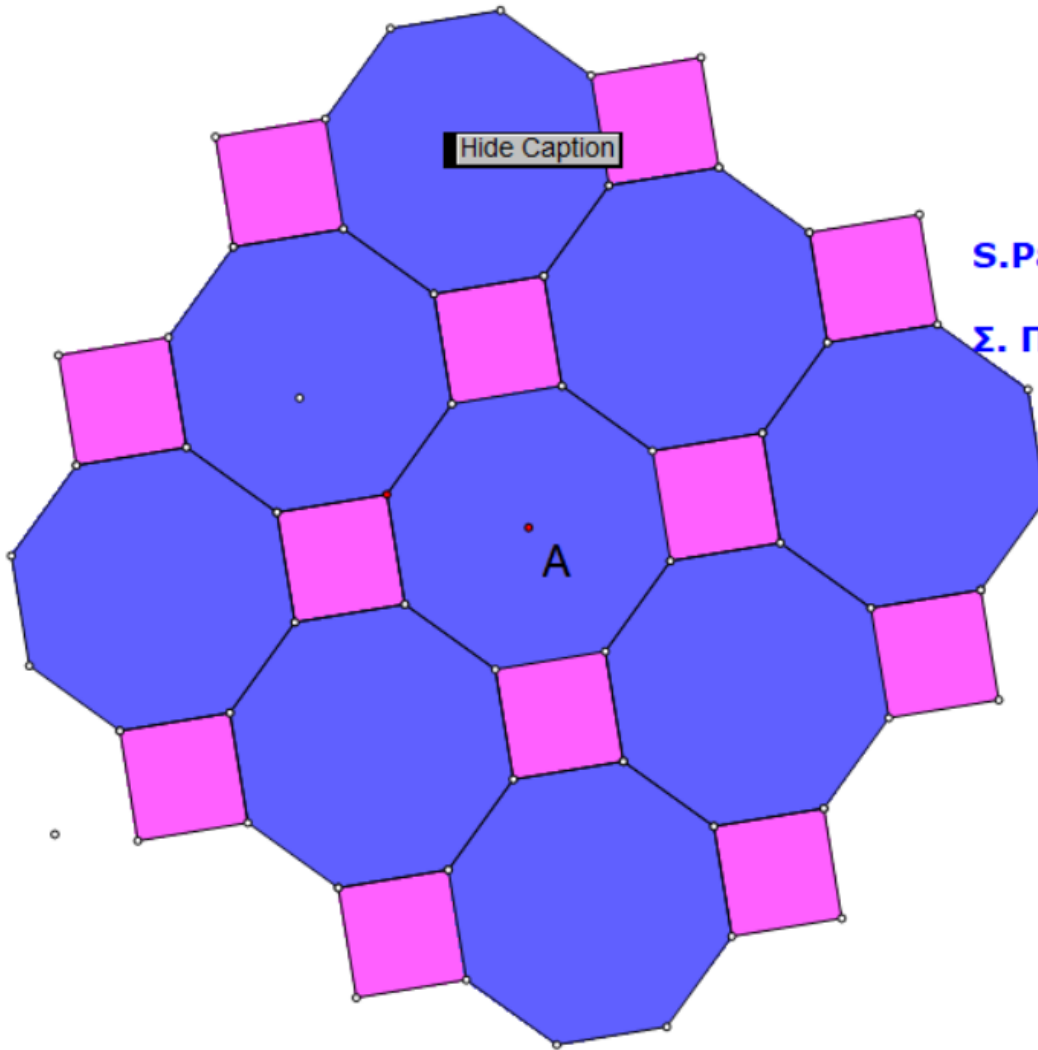
Χαρακτηριστικό παράδειγμα επίστρωσης επιπέδου από τη μελέτη της Dina van Hiele (Fuys et al, 1984, σελ. 147).

Η λέξη tessellation προέρχεται από τη λέξη tessellate η οποία σύμφωνα με τον Steven Schwartzman's στο βιβλίο του The Words of Mathematics (1994, The Mathematical Association of America) προέρχεται από την ελληνική λέξη tesseres. Τα πρώτα πλακίδια που χρησιμοποιούνταν για τις πλακοστρώσεις (κατασκευές μωσαϊκών) ήταν κατασκευασμένα από μικρά τετράγωνα ή κυβικά κομμάτια πέτρας. **Η γεωμετρική σημασία της λέξης tessellation είναι «επικάλυψη του επιπέδου σε σχήματα με τέτοιον τρόπο ώστε να καλύπτουν το επίπεδο, χωρίς να αφήνουν κενά ή να επικαλύπτει το ένα σχήμα το άλλο».**

## TESSELLATIONS

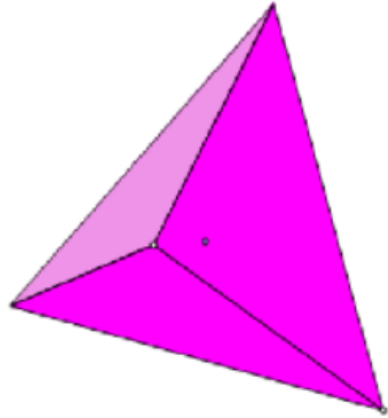



**Οι Πλακοστρώσεις στο Sketchpad v4 ως  
διαισθητικό θεμέλιο για την ανάπτυξη παραγωγικών συλλογισμών**

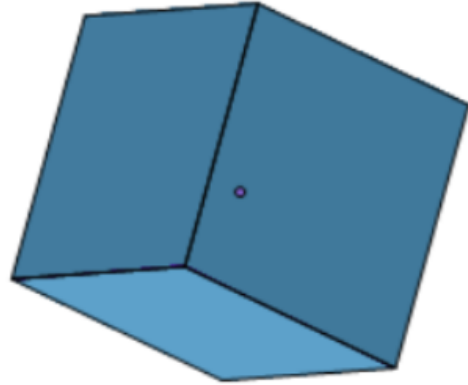


S.Patsiomitou, 2008

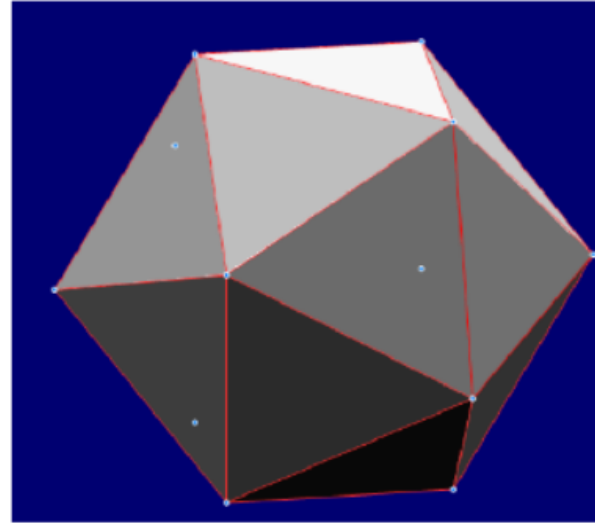
Σ. Πατσιομίτου, 2008



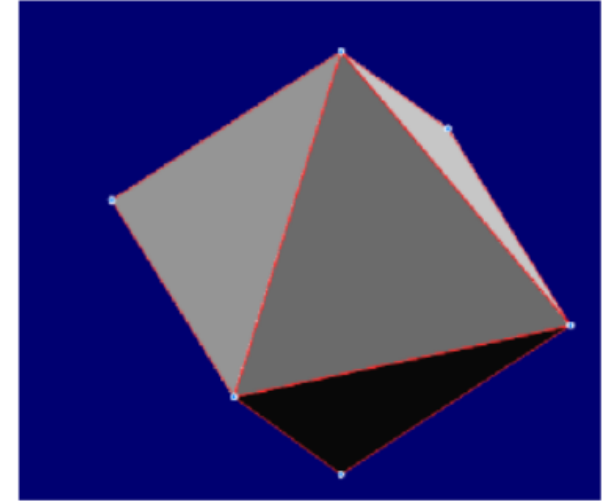
**ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ**



**ΓΗ**



**ΕΙΚΟΣΑΕΔΡΟ**



**ΟΚΤΑΕΔΡΟ**

**ΠΥΡ**

S.Patsiomitou, 2008

**ΥΔΩΡ**

**ΑΗΡ**

Η τέχνη των πλακοστρώσεων έχει αναπτυχθεί από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τα πρότυπα και στο χώρο και στο επίπεδο από την εποχή των Πυθαγορείων, οι οποίοι ανακάλυψαν ότι υπάρχουν **πέντε κανονικά στερεά** δηλαδή το **τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.**

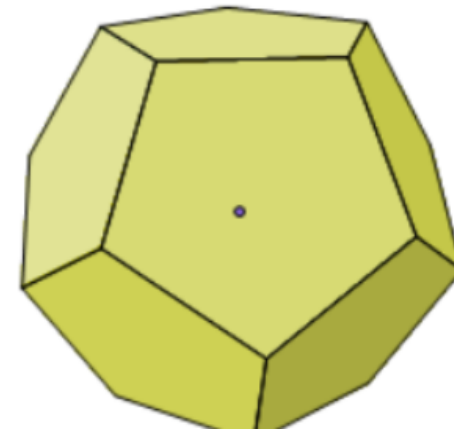
- 1
- 2
- 3
- 4

Συνδεδεμένα με το όνομα του Πλάτωνα (427-348 π.Χ) είναι τα Πλατωνικά στερεά δηλαδή τα κυρτά στερεά, τα οποία χρησιμοποίησε προκειμένου να απεικονίσει τα τέσσερα βασικά στοιχεία του σύμπαντος: τη γη, τη φωτιά, το νερό και τον αέρα.

**"Τα πλατωνικά στερεά δεν είναι άλλα από τα κυρτά στερεά που οριοθετούνται από ίσα κανονικά επίπεδα**

**ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟ**

**ΑΙΘΕΡΑΣ**



# Ενδεικτικές μορφές ψηφιδοποίησης

αρχιτεκτονική



16th century  
Mughal India



σύμβολα θρησκειων (ινδουισμός)  
συμβολίζει το σύμπαν

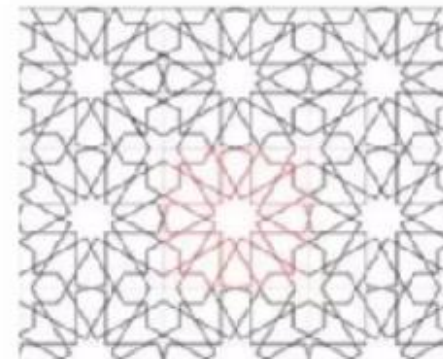
- 1
- 2
- 3
- 4

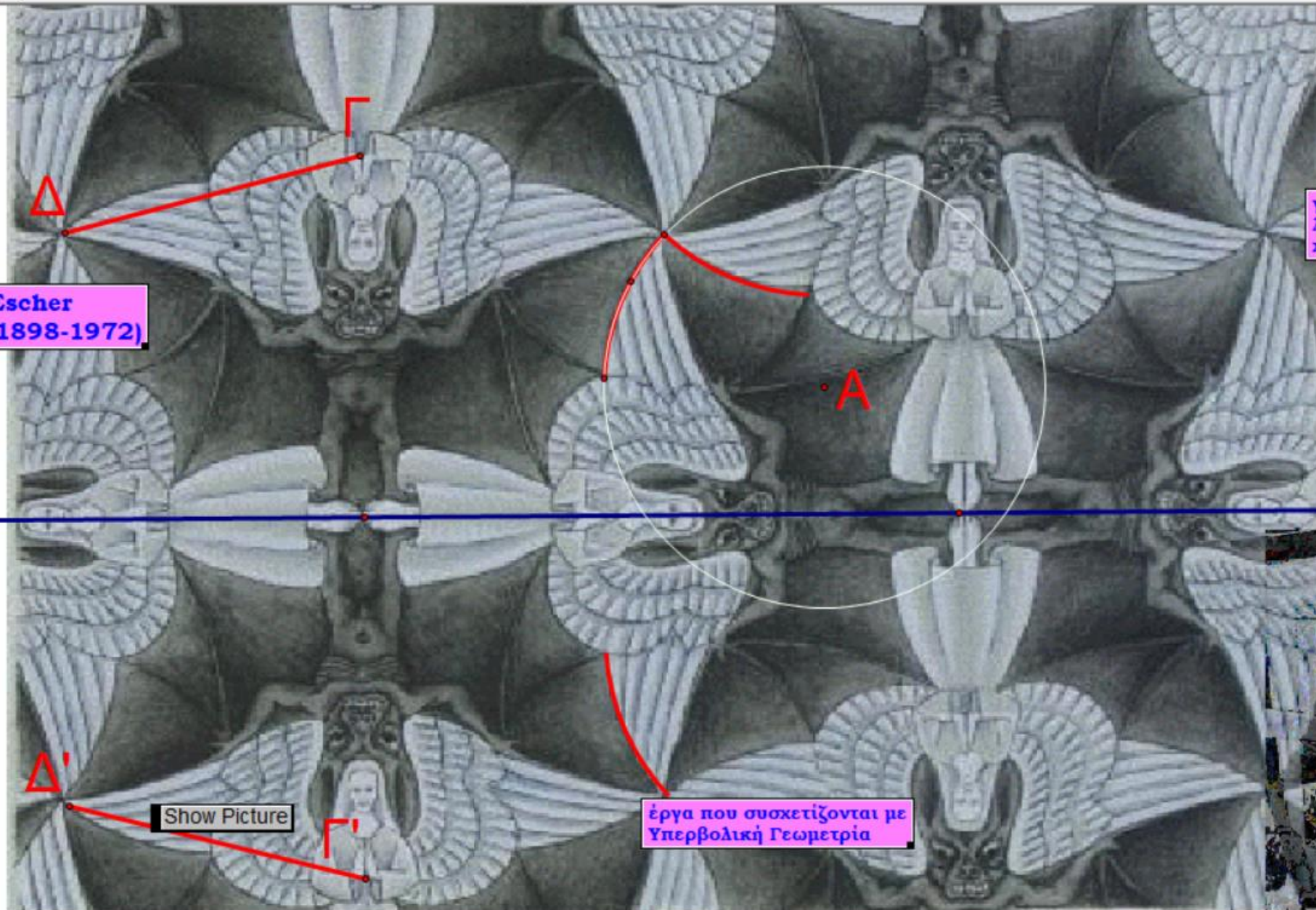


Penrose Tiling



1970 Τα σχέδια Girih





Escher  
(1898-1972)

γεωμετρία και  
λογική του  
χώρου

Show Picture

έργα που συσχετίζονται με  
Υπερβολική Γεωμετρία



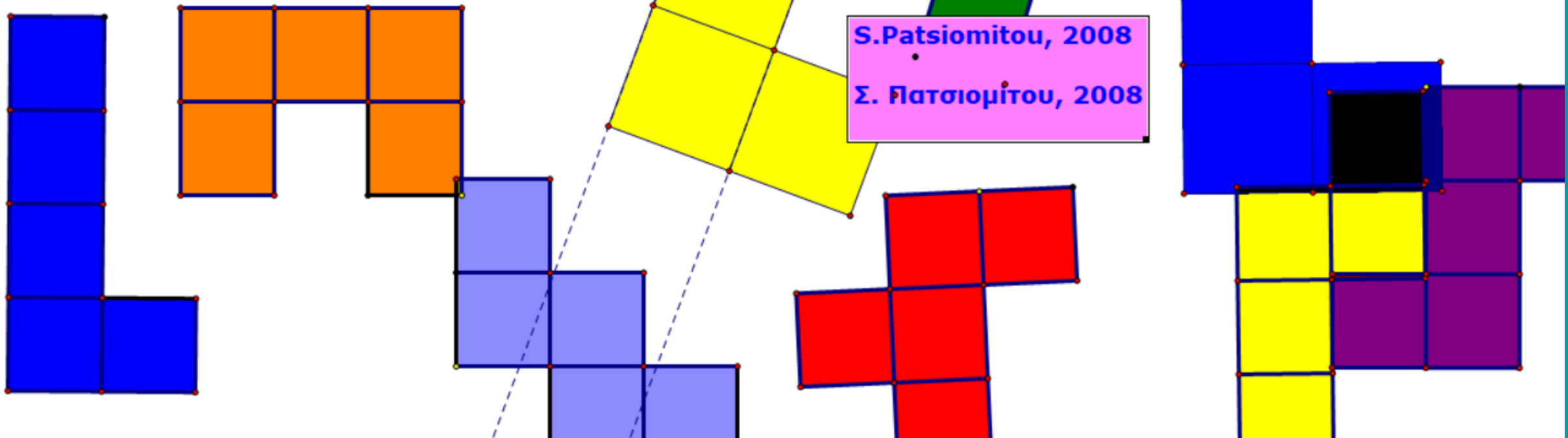


Τα πεντόμιнос είναι ένα σύνολο δώδεκα σχημάτων που έχουν δημιουργηθεί συνδυάζοντας 5 τετράγωνα ή κύβους, με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί κάθε δυνατός συνδυασμός στην τοποθέτησή τους το ένα δίπλα στο άλλο. Οφείλουν το όνομα τους στον **Solomon W. Golomb** που τα ανακάλυψε το 1953. Αν παρατηρήσουμε τα πεντόμιнос θα προσέξουμε ότι τα σχήματα των πεντόμιнос τείνουν να μοιάζουν στα λατινικά γράμματα F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z.

**PENTOMINOS**

S.Patsiomitou, 2008

Σ. Πατσιομίτου, 2008



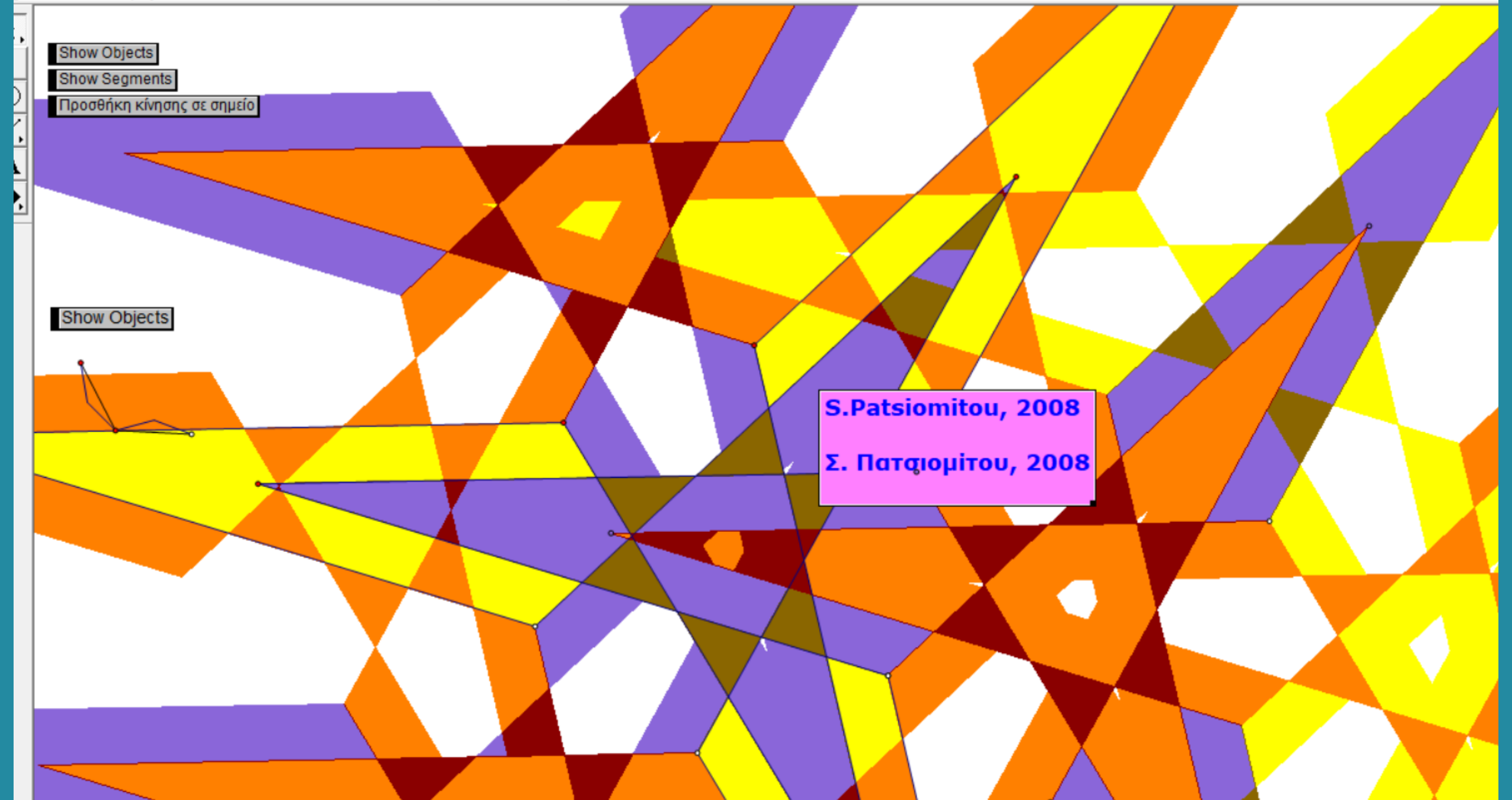
Show Objects

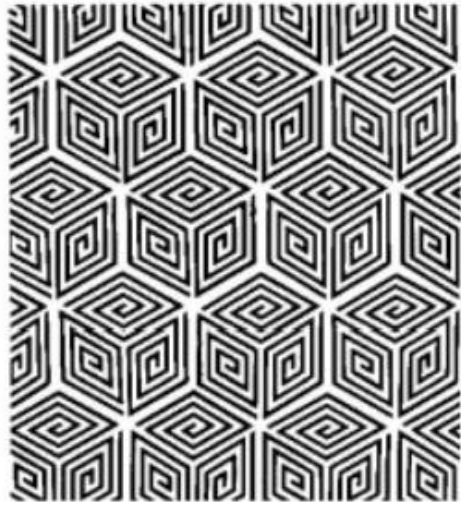
Show Segments

Προσθήκη κίνησης σε σημείο

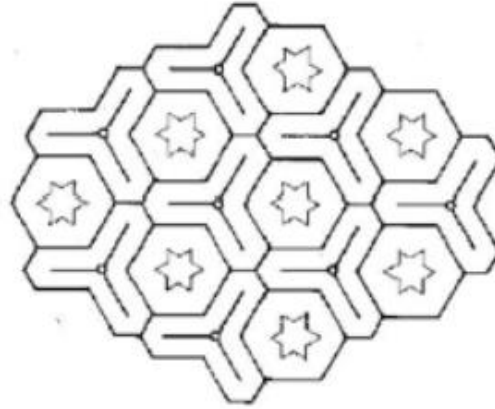
Show Objects

S.Patsiomitou, 2008  
Σ. Πατσιομίτου, 2008

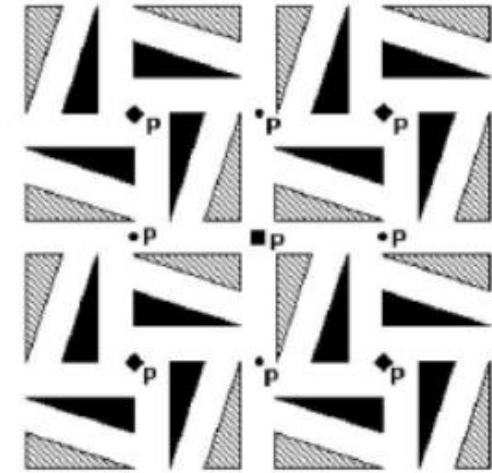




Σχήμα 7-8. Αραβικό σχέδιο  
(Baloglou, 2007/1981 MIT,  
σελ. 176).



Σχήμα 7-9. Περσικό σχέδιο  
(Baloglou, 2007/1981 MIT,  
σελ. 181).



Σχήμα 7-10. Επίστρωση με  
περιστροφές (Baloglou, 2007,  
σελ. 295).

"Κεντρικό θέμα τα επαναλαμβανόμενα συμμετρικά υποσύνολα του επιπέδου, γνωστά και ως επίπεδες κρυσταλλογραφικές ομάδες, [...] Επιτυγχάνεται μέσω της μελέτης των μετασχηματισμών του επιπέδου που διατηρούν αποστάσεις " (Μπαλόγλου, 2007)

# ISOMETRICA

A GEOMETRICAL INTRODUCTION TO  
PLANAR CRYSTALLOGRAPHIC GROUPS

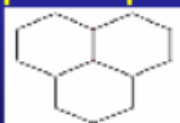
- όταν  $v=3$  τότε  $\kappa=6$  δηλαδή απαιτούνται 6 ισόπλευρα τρίγωνα ( $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ ).



- όταν  $v=4$  τότε  $\kappa=4$  δηλαδή απαιτούνται 4 τετράγωνα



- όταν  $v=6$  τότε  $\kappa=3$  δηλαδή απαιτούνται 3 εξαγωνα



1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο  
L.I.I.L.

S.Patsiomitou, 2008

Σ. Πατσιομίτου, 2008

Ο τύπος του Euler που ισχύει για πολύεδρα (και μη κανονικά) είναι ο εξής :

$$F - E + V = 2 \quad (\text{ή } E - A + K = 2)$$

όπου  $F$  είναι ο αριθμός των εδρών (faces)

$E$  είναι ο αριθμός των ακμών (edges)

$$\omega = \frac{360^\circ}{v} \quad \text{ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ } v\text{-γωνου}$$

$$\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} =$$

$$= 180^\circ \left(1 - \frac{2}{v}\right) = 180^\circ \frac{v-2}{v} \quad \text{ΓΩΝΙΑ } v\text{-γωνου}$$

$$\kappa \cdot \varphi = 360^\circ$$

$\kappa$  ο αριθμός των  
 $v$ -γωνων που  
απαιτούνται

$$\kappa \cdot 180^\circ \frac{v-2}{v} = 360^\circ$$

$$\kappa \cdot \frac{v-2}{v} = 2$$

$$\kappa v - 2\kappa = 2v$$

$$\kappa (v-2) = 2v$$

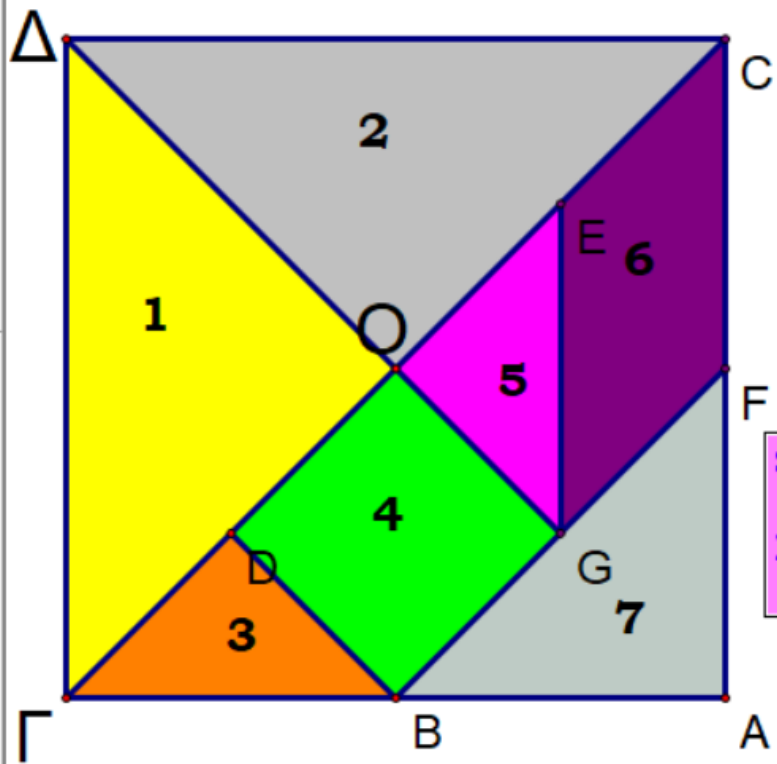
$$\kappa = \frac{2v}{v-2}$$

Κάθε κανονικό πολύ  
είναι ένα κανονικό  $\kappa$   
Σε κάθε κορυφή ένα  
 $\kappa$  εδρών ενώνονται.

αρα ο τύπος γίνεται

$$F - E + V = 2$$

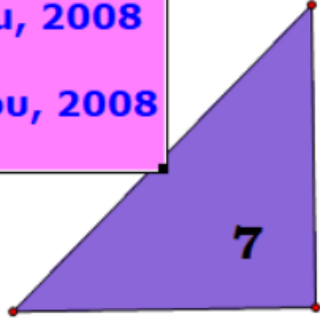
$$v - \frac{v\kappa}{2} + \frac{v\kappa}{\kappa} = 2$$



S.Patsiomitou, 2008  
 Σ. Πατσιομίτου, 2008



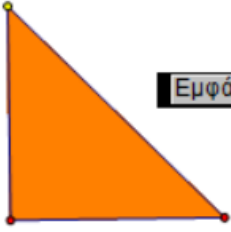
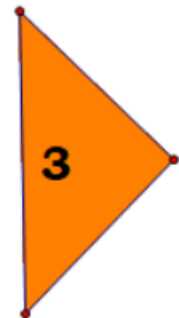
Εμφάνιση αντικειμένων διαδρομής-7



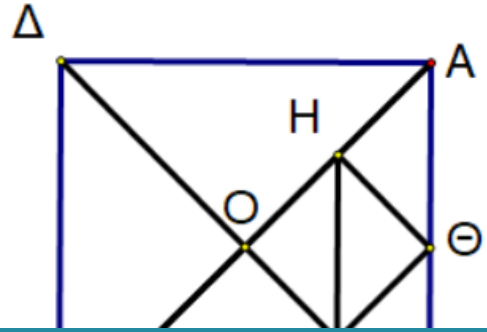
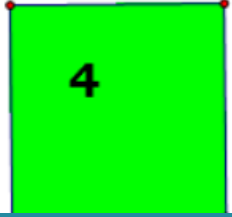
Εμφάνιση αντικειμένων



Εμφάνιση αντικειμένων

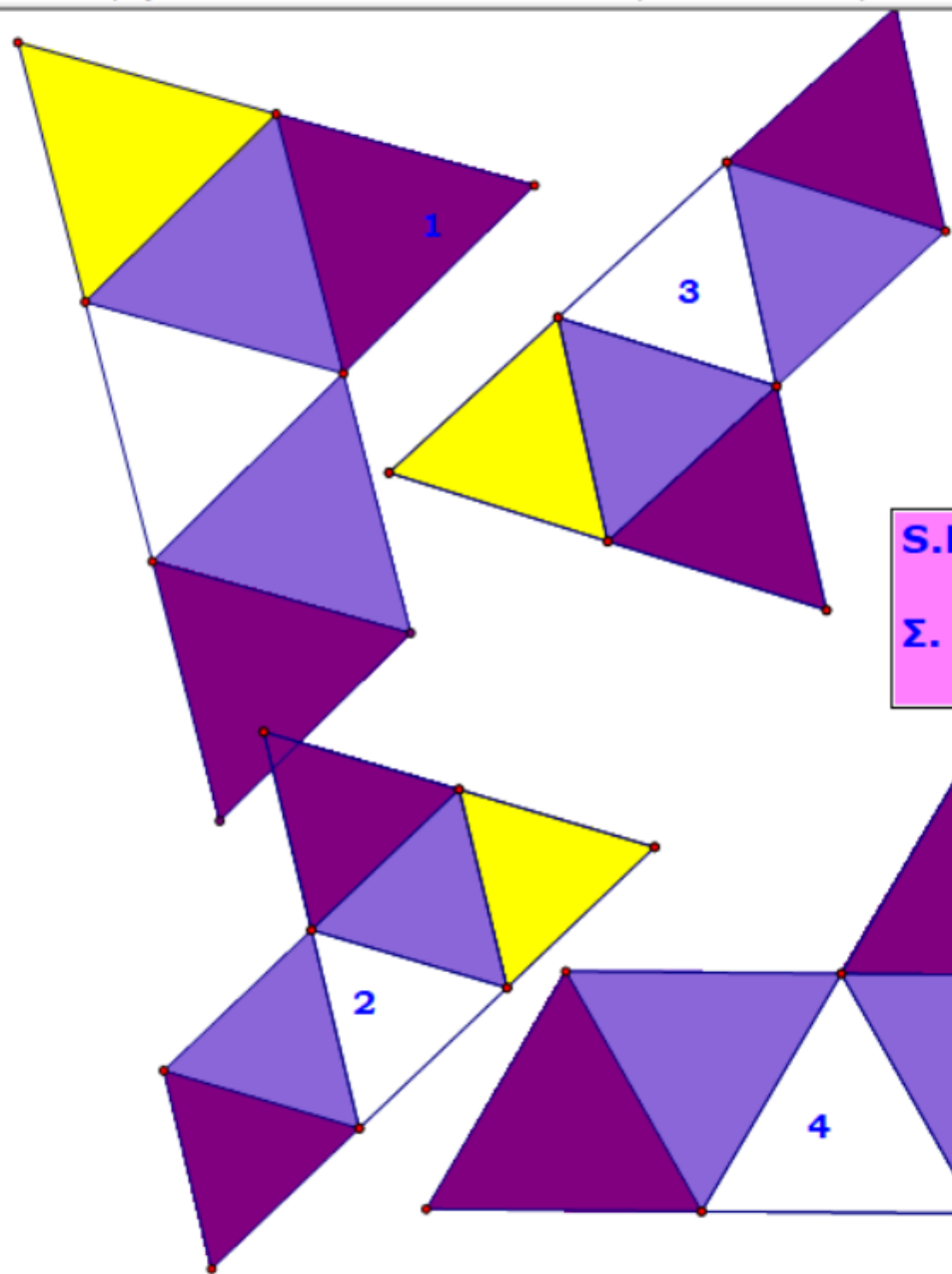


Εμφάνιση αντικειμένων διαδρομής



ή

Το τανγκράμ (Tangram) παιχνίδι, ένας τύπος, αποτελείται από επτά σχήματα, τα οποία όταν τοποθετηθούν μπορούν να δημιουργήσουν διάφορα σχήματα. Ο στόχος είναι να δημιουργηθεί ένα σχήμα με τα επτά κομμάτια, χωρίς κανένα να μην καλύπτεται. Η λέξη τανγκράμ είναι προέλευσης και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1848 από τον Thomas Hill στο Πανεπιστήμιο του Ηνωμένου Βασιλείου του Geometrical Youth.



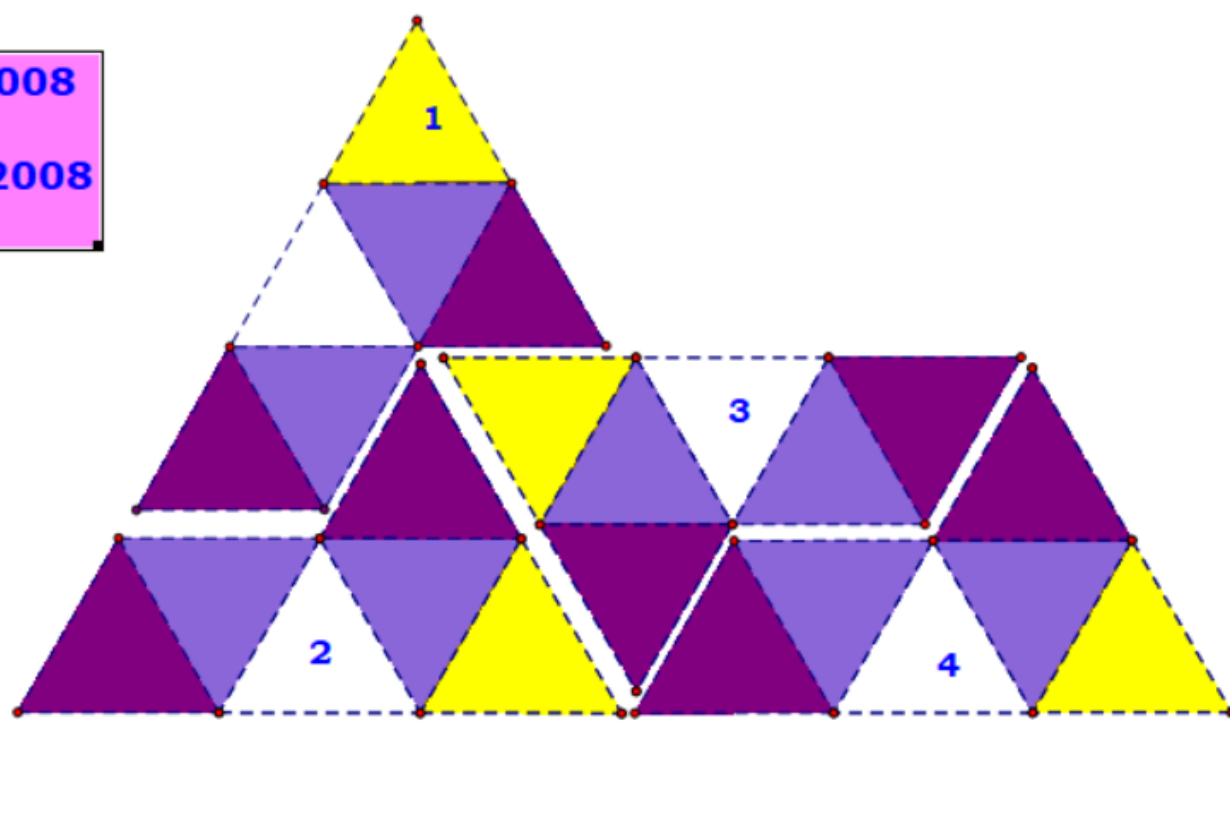
Ο Golomb (1964) σύμφωνα με το NCTM προτείνει ένα διαφορετικό τύπο tiles τα οποία μπορούν να καλύψουν το επίπεδο, τα rep tiles (replicating tiles).

Ένα rep tile είναι ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα αντίγραφα μπορούν να ταιριάξουν μαζί ώστε να σχηματίσουν ένα μεγαλύτερο όμοιο σχήμα.

Δηλαδή μέσω των κατασκευών rep tiles μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της ομοιότητας (και σε πιο προχωρημένο επίπεδο της αυτοομοιότητας).

S.Patsiomitou, 2008

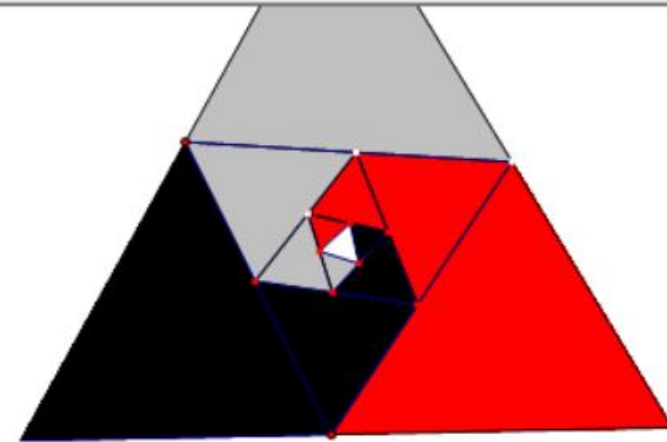
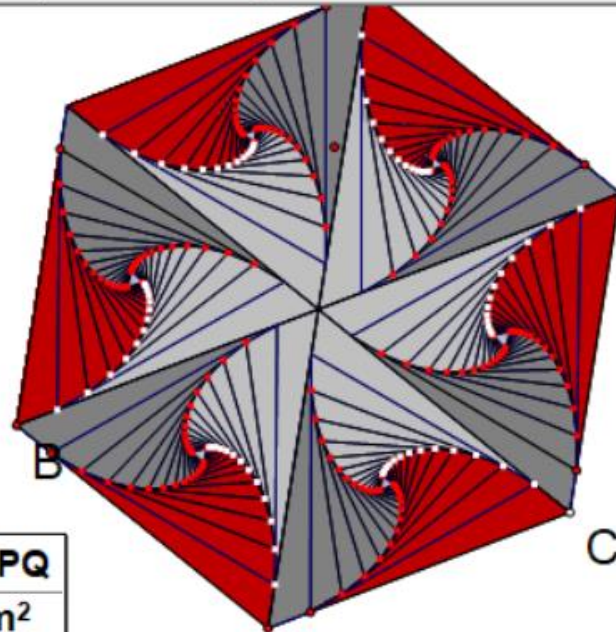
Σ. Πατσιομίτου, 2008





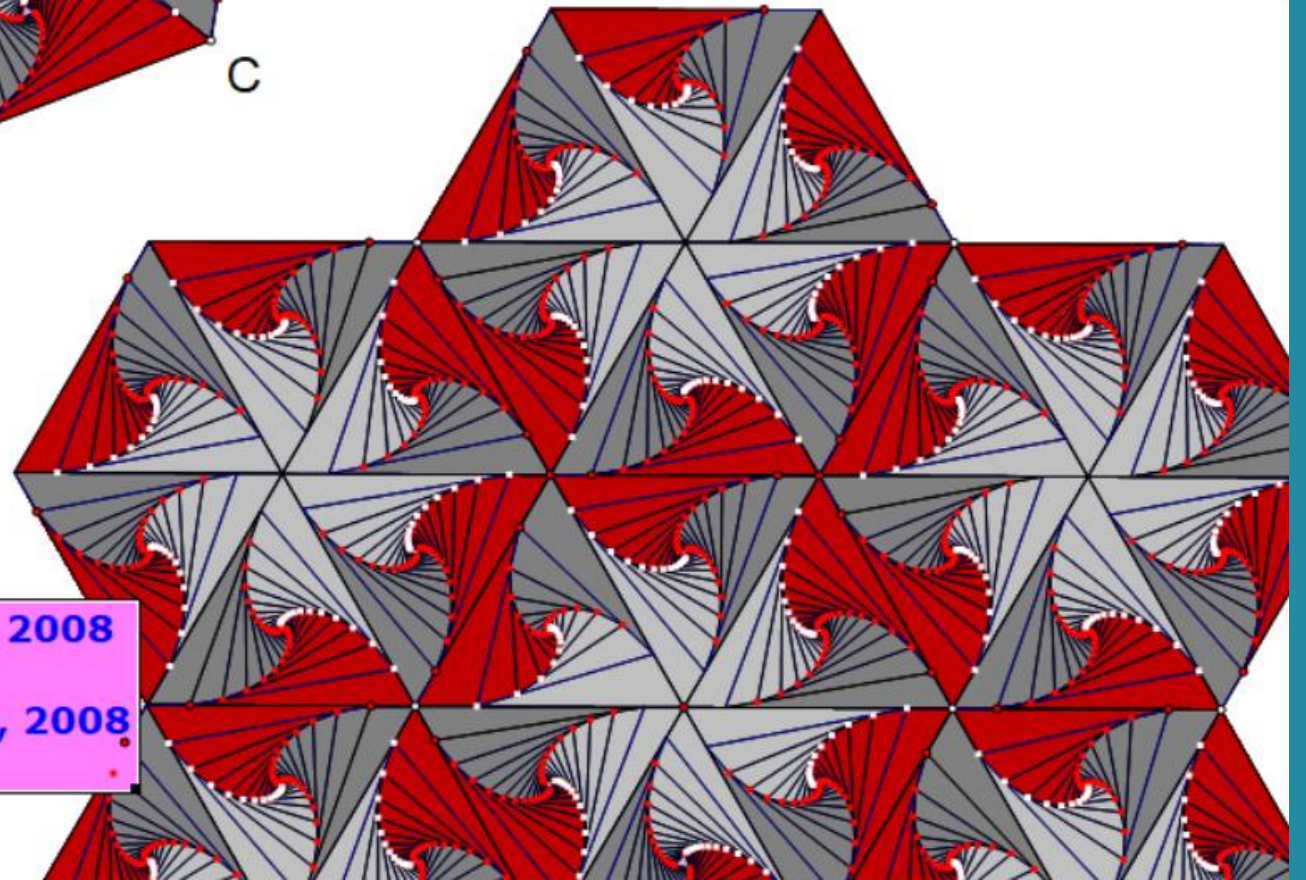
Προσθήκη κίνησης σε σημείο  
 Προσθήκη κίνησης σε σημεία

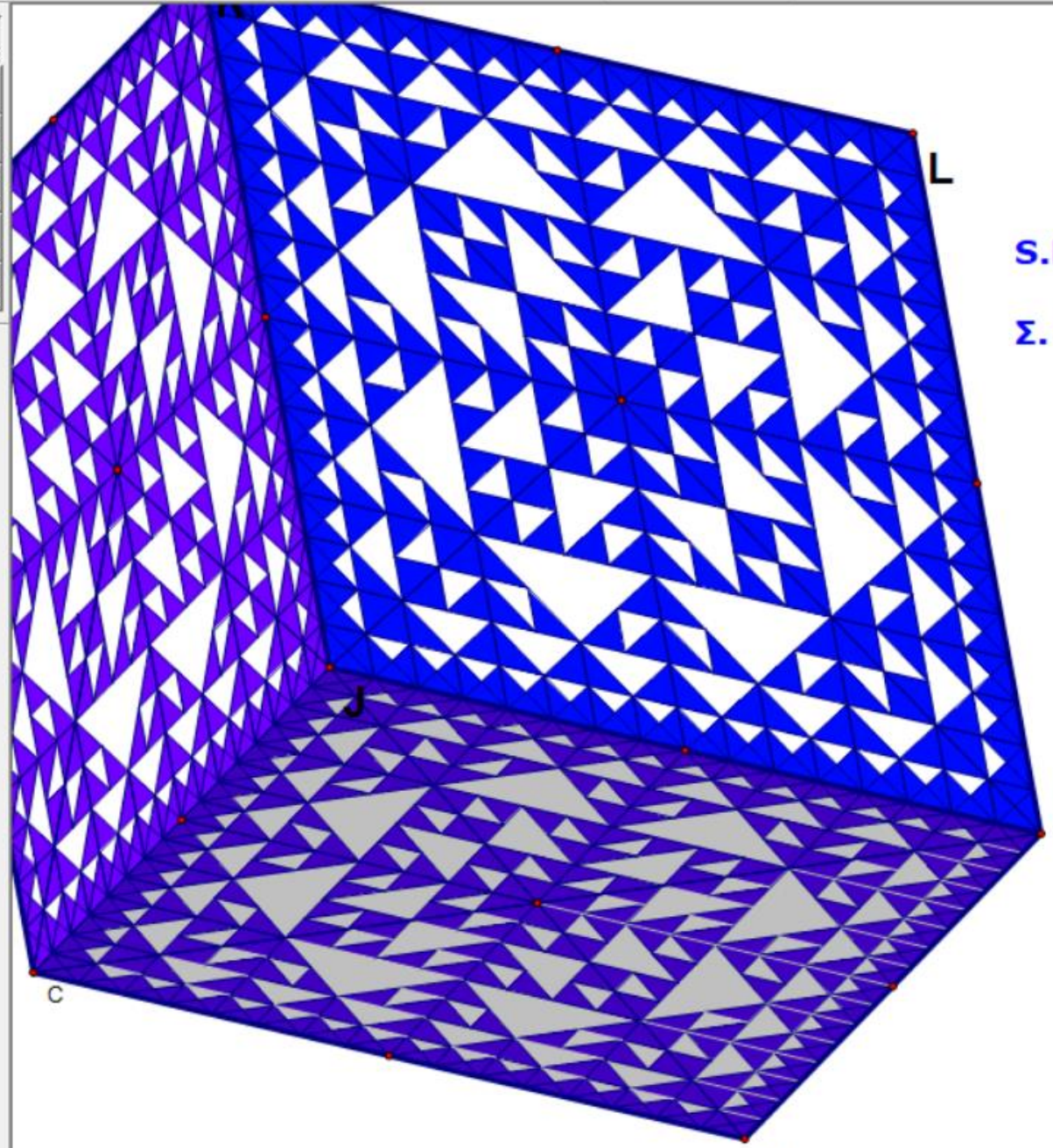
n	Perimeter $\Delta CPQ$	Area $\Delta CPQ$
0	14,66 cm	10,18 cm <sup>2</sup>
1	7,42 cm	2,60 cm <sup>2</sup>
2	3,75 cm	0,67 cm <sup>2</sup>
3	1,90 cm	0,17 cm <sup>2</sup>



n	Perimeter $\Delta CPQ$	Area $\Delta CPQ$
0	14,66 cm	10,18 cm <sup>2</sup>
1	7,42 cm	2,60 cm <sup>2</sup>
2	3,75 cm	0,67 cm <sup>2</sup>
3	1,90 cm	0,17 cm <sup>2</sup>
4	0,96 cm	0,04 cm <sup>2</sup>
5	0,49 cm	0,01 cm <sup>2</sup>
6	0,25 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
7	0,12 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
8	0,06 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
9	0,03 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
10	0,02 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
11	0,01 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
12	0,00 cm	0,00 cm <sup>2</sup>
13	0,00 cm	0,00 cm <sup>2</sup>

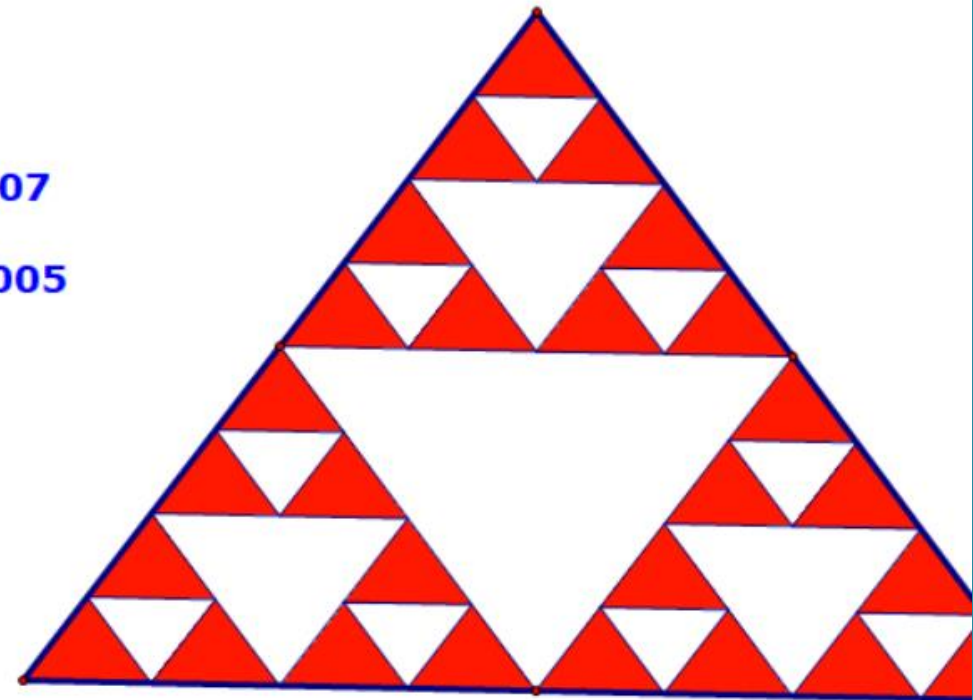
S.Patsiomitou, 2008  
 Σ. Πατσιομίτου, 2008





S.Patsiomitou, 2007

Σ. Πατσιομίτου, 2005



Επανάληψη	Πλευρά	Αριθμός μαύρων τριγώνων	Περίμετρος	Εμβαδόν
0	$a = (1/2)^0 a$	0	$\Pi$	$E$
1	$a/2 = (1/2)^1 a$	$3 = 3^1$	$\Pi/2$	$E/4$
2	$a/4 = (1/2)^2 a$	$3^2$	$\Pi/4$	$E/16$
3	....	...	...	...
4				



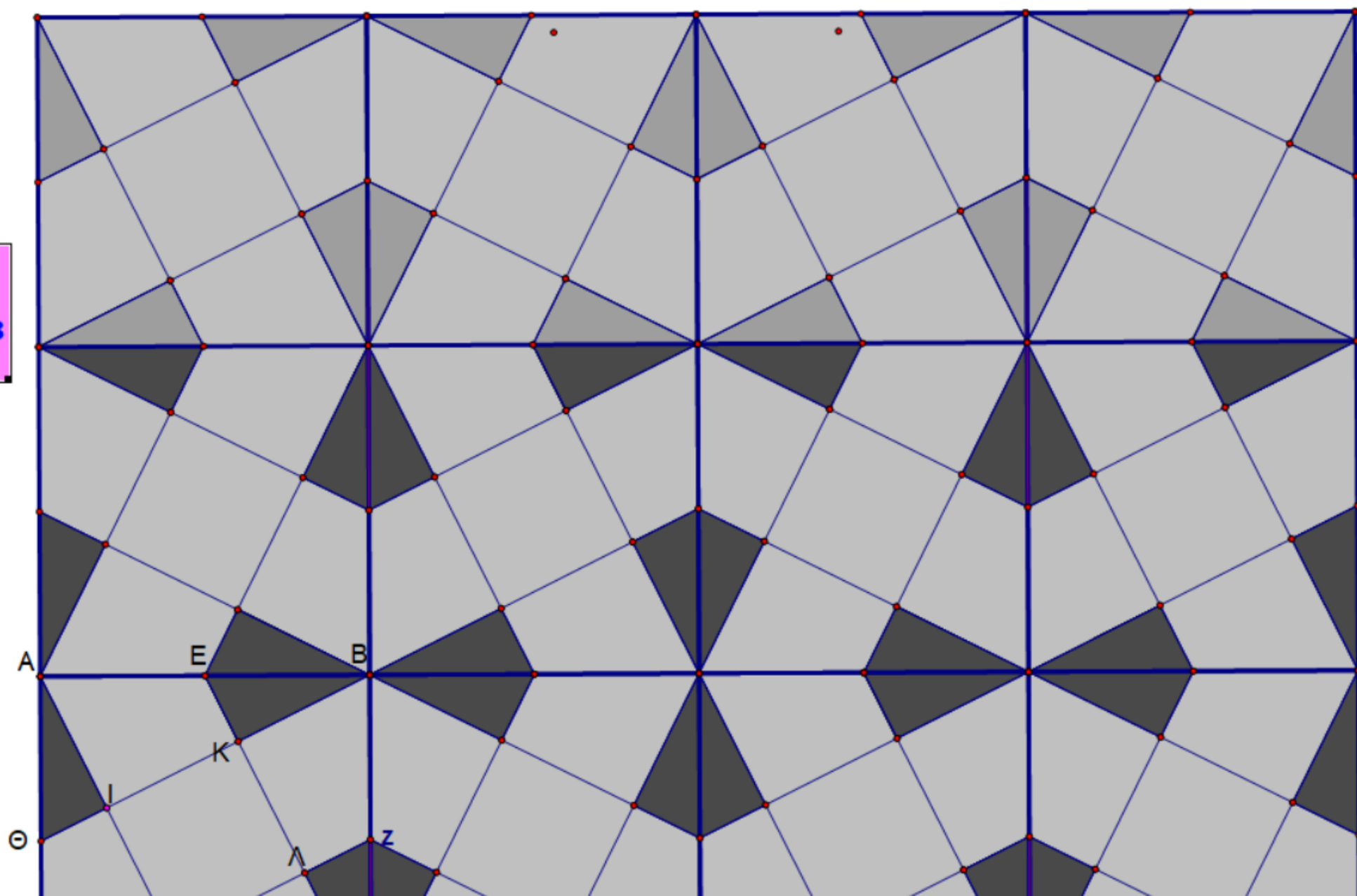
Επιστρώσεις  
επιπέδου με  
animation

S.Patsiomitou, 2008

Σ. Πατσιομίτου, 2008

1

2



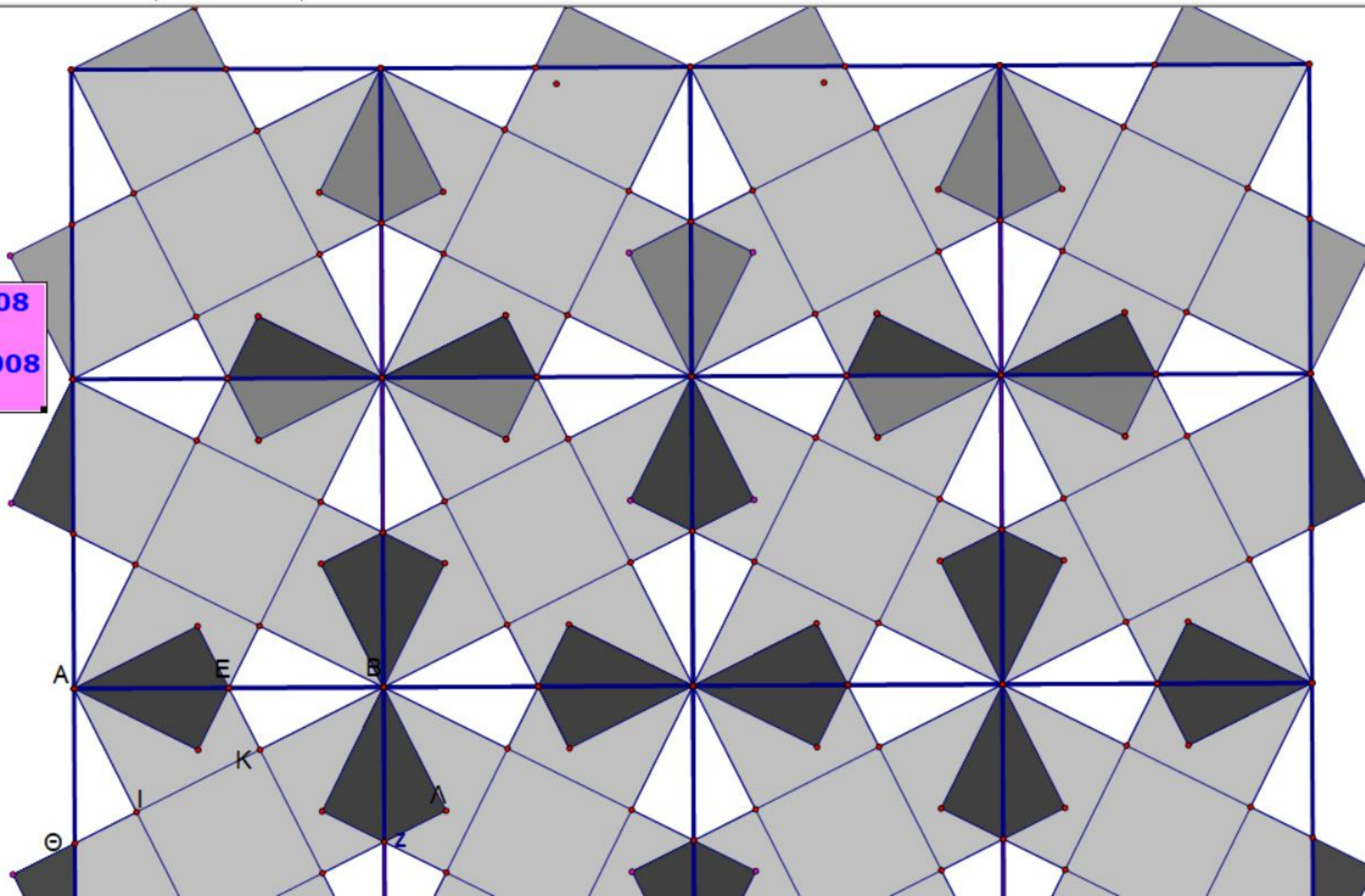
Επιστρώσεις  
επιπέδου με  
animation

S.Patsiomitou, 2008

Σ. Πατσιομίτου, 2008

1

2



# ΟΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

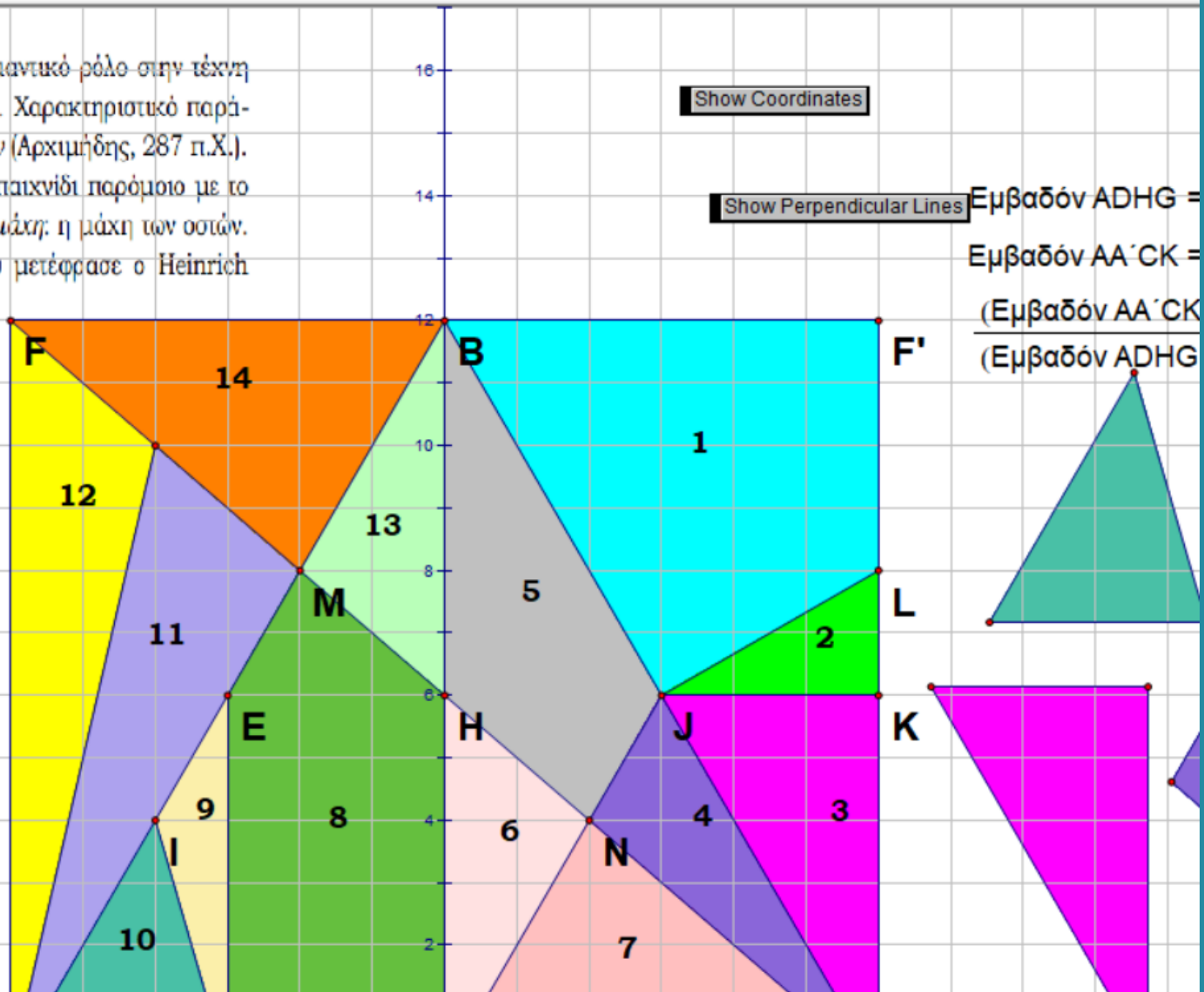
Geometer's Sketchpad - [ΠΑΤΣΙΟΜΙΤΟΥ - 35]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

Από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα τα μαθηματικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην τέχνη της πλακόστρωσης όπως και στις διάφορες μορφές τέχνης (Φίλη, 2000). Χαρακτηριστικό παράδειγμα επίστρωσης επιπέδου με γεωμετρικά σχήματα είναι το *Οστούμαχιο* (Αρχιμήδης, 287 π.Χ.).

Σύμφωνα με τη Βικιπαίδεια<sup>1</sup>, το *Οστούμαχιο* ήταν ένα μαθηματικό παιχνίδι παρόμοιο με το σημερινό τάνγκραμ και ερμηνεύεται ως σύνθεση των λέξεων *οστούν* και *μάχη*: η μάχη των οστών. Η περιγραφή του προβλήματος αναφέρεται στο αραβικό κείμενο που μετέφρασε ο Heinrich Suter στα Γερμανικά (Heiberg, 1881):

©S.Patsiomitou



## Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Πατσιομίτου, Σ. (2007)** Το τρίγωνο του Sierpinski, Η σπείρα Baravelle και το Πυθαγόρειο δέντρο. Το Geometer's Sketchpad v4 στην διαδικασία κατασκευής Fractals με στόχο την κατασκευή εννοιών. Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου ΤΠΕ με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σσ.28-37, Σύρος, 4-6 Μαΐου 2007
- **Πατσιομίτου, Σ. (2008)** Η κατασκευή της σπείρας Baravelle ως εργαλείο διαισθητικής κατανόησης αύξουσας και φθίνουσας ακολουθίας εμβαδών. Πρακτικά 1<sup>ου</sup> Πανελληνίου Εκπαιδευτικού Συνεδρίου Ημαθίας, «Ψηφιακό Υλικό για την υποστήριξη του παιδαγωγικού έργου των εκπαιδευτικών», σσ.316-324, Νάουσα, 9 - 11, Μαΐου 2008
- **Πατσιομίτου, Σ. (2009)** Οι Πλακοστρώσεις στο Sketchpad v4 ως διαισθητικό θεμέλιο για την ανάπτυξη παραγωγικών συλλογισμών Πρακτικά 1<sup>ου</sup> Εκπαιδευτικού Συνεδρίου ΕΤΠΕ με τίτλο «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική διαδικασία», σσ. 154-160. Βόλος, 24-26 Απριλίου. <https://www.etpe.gr/wp-content/uploads/pdfs/etpe1442.pdf>
- **Πατσιομίτου, Σ. (2009)** Επικαλύψεις επιπέδου μέσω του Geometer's Sketchpad v4 στο Πρόγραμμα Σπουδών: Tessellations, Πεντόμιнос, Αλγεβρικές Δομικές μονάδες, Rep-Tiles, Tangram. Πρακτικά 5<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου ΤΠΕ, με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σσ. 601-609. Σύρος 8, 9, 10 Μαΐου 2009
- **M2.1 Πατσιομίτου, Σ. (2009/2010) Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad v4.** Εκδόσεις Κλειδάριθμος. Τόμος Α . ISBN:978-960-461-308-3(263 σελίδες)
- **M2.2 Πατσιομίτου, Σ. (2009/2010) Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad v4.** Εκδόσεις Κλειδάριθμος. Τόμος Β. ISBN:978-960-461-309-0 (254 σελίδες)
- **Πατσιομίτου, Σ. (2020B).** Διδακτική, Διδασκαλία και Αξιολόγηση των Μαθηματικών: Μαθησιακά Μονοπάτια και Πρόγραμμα Σπουδών. Εκδόσεις «Ανατολικός».Αθήνα. ISBN: 978-618-5136-49-9 (215 σελίδες). Το βιβλίο διανέμεται δωρεάν ηλεκτρονικά, μέσω διαδικτύου στον ακόλουθο σύνδεσμο <https://www.academia.edu/43702210/>
- Πατσιομίτου, Σ. (2022). Εννοιολογικές και εργαλειακές διαδρομές με συνδεδεμένες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις στο Geometer's Sketchpad. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-645-302-1.
- αναρτημένο στο Σύστημα "Εύδοξος" <https://service.eudoxus.gr/search/#a/id:112691124/0>