Τα ψηφιακά εργαλεία στην ερμηνεία δυναμικών αναπαραστάσεων και στη μέθοδο επίλυσης προβλήματος

Επιμορφωτική ημερίδα Μαθηματικών
14-3-2024

Η προσέγγιση του αριθμού π μέσω των δυναμικών ενεργών παραμετρικών ν-γώνων ή των ολοκληρωμάτων Riemann

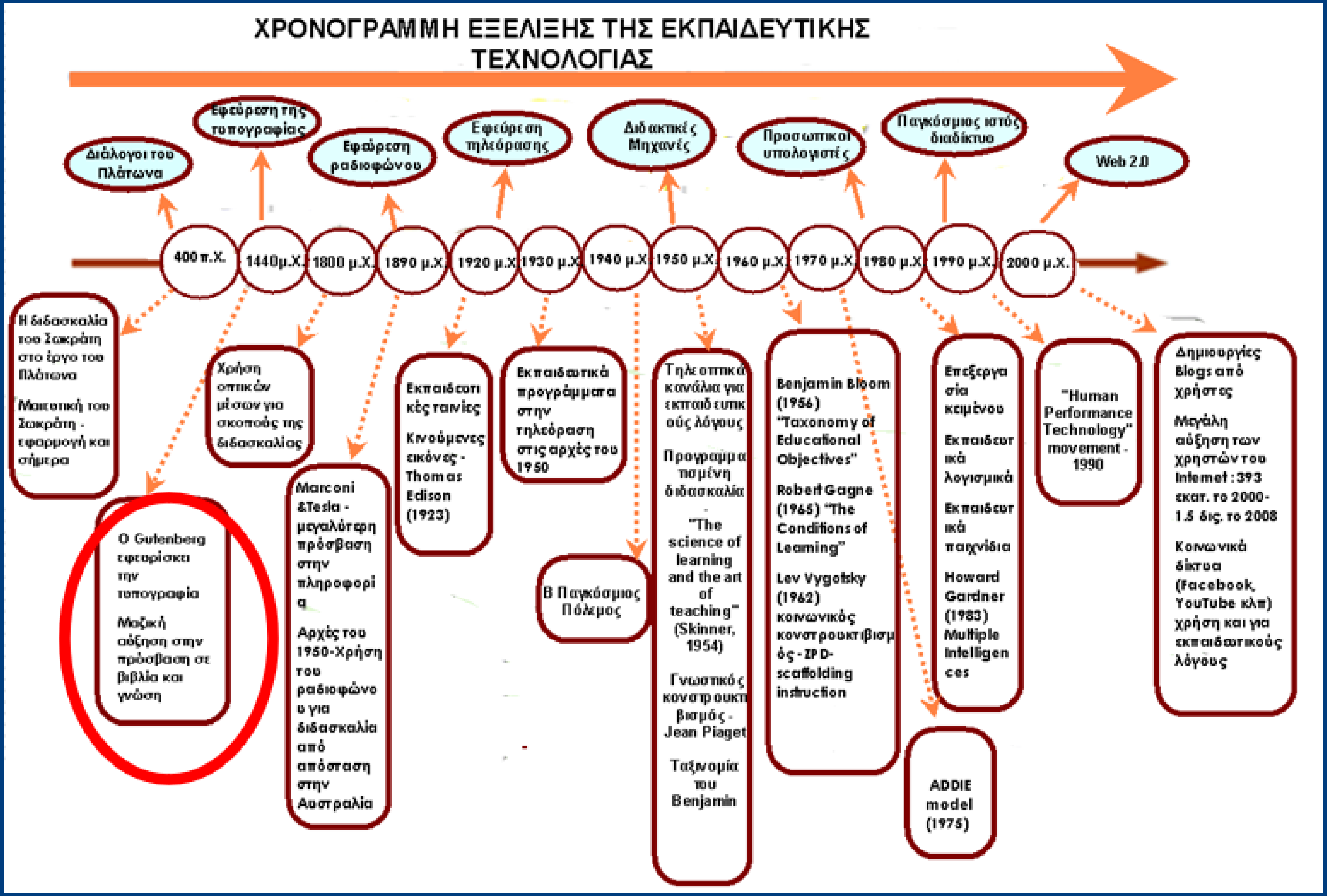
Δρ. Σταυρούλα Πατσιομίτου
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών
ΔΔΕ Γ΄ Αθήνας

ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΆ ΕΡΓΑΛΕΊΑ ΣΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΊΑ ΔΥΝΑΜΙΚΏΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΆΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΤΗ ΜΈΘΟΔΟ ΕΠΊΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΉΜΑΤΟΣ

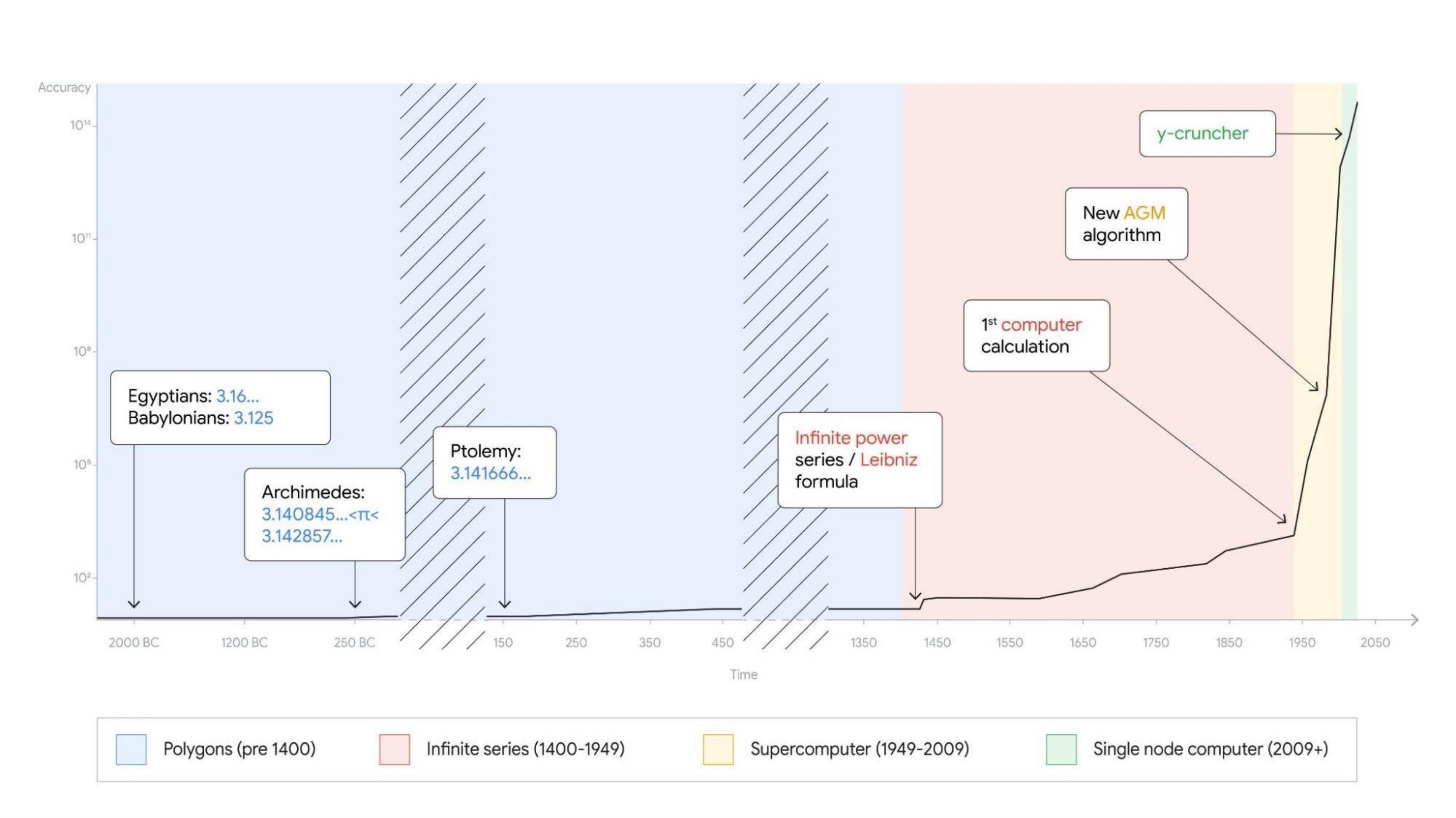
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ ΗΜΕΡΙΔΑΣ
«Τα ψηφιακά εργαλεία στην ερμηνεία δυναμικών αναπαραστάσεων και στη μέθοδο επίλυσης προβλήματος»
Πέμπτη 14-3-2024, 12:00 - 14:00 μ.μ.

6° Γυμνάσιο Περιστερίου (Πλουτάρχου 31, Περιστέρι)

12.00-12.15	Προσέλευση
	Παπαδοπούλου Ευτυχία *Διευθύντρια 6ου Γυμνασίου Περιστερίου* Χαιρετισμοί - Έναρξη Ημερίδας
12.15-12.45	**Ιωάννης Σταμπόλας** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών, Δυτικής Αττικής & 1ης και 2ης ομάδας Σχ. Μονάδων Β΄ Αθήνας* Η αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία με τη μέθοδο επίλυσης προβλήματος
12.45-13.15	**Κωνσταντίνος Γιατράς** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών, Γ΄ Αθήνας* Προσέγγιση του νόμου των συνημίτονων από τις συμμεταβολές πλευρών - γωνιών με αξιοποίηση του λογισμικού geogebra
13.15-13.50	**Σταυρούλα Πατσιομίτου** *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών, Γ΄ Αθήνας* Η προσέγγιση του αριθμού π μέσω των δυναμικών ενεργών παραμετρικών ν-γώνων ή των ολοκληρωμάτων Riemann
13.50-14.00	**Συζήτηση-Κλείσιμο ημερίδας**



Πατσιομίτου Σταυρούλα , 2006, 2018, 2020



https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα στην

διερεύνηση θεμάτων μέσω των υπολογιστών

είναι ότι παρέχουν τη δυνατότητα οπτικοποίησης

που μπορεί να συμβάλλει στην

ανάπτυξη της διαίσθησης και της κατανόησης, καθώς

παρέχουν μια μοναδική ευκαιρία πειραματισμού.

Πατσιομίτου Σταυρούλα , 2006, 2018, 2020

Με τον πειραματισμό επισημαίνονται οι μη παραγωγικοί μέθοδοι όπως ο διαισθητικός ή εμπειρικός (De Villier,2003).

Οι πιο σημαντικές λειτουργίες του πειραματισμού σύμφωνα με τον De Villier μπορούν να διακριθούν αν και είναι συνδεδεμένες έννοιες ως ακολούθως:

Εικασία (conjecturing) (επαγωγικό pattern(κανόνα), γενίκευση κ.α)

επαλήθευση (verification -βεβαιότητας για την αλήθεια ή ισχύ μιας δήλωσης ή εικασίας)

σφαιρική διάψευση (global refutation)(ανακατασκευή μια ψευδούς δήλωσης)

ευρετική διάψευση (Heuristic refutation)(αναδιατύπωση μια αληθούς δήλωσης μέσω παραδειγμάτων εξαιρέσεων του κανόνα)

κατανόηση (understanding) (νόημα μιας πρότασης, έννοιας ή ορισμού, ανακάλυψη μιας απόδειξης).

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

Πόσο δύσκολη είναι η διαδικασία κατασκευής και κατανόησης του π ;

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

$$\pi = \frac{E}{\rho^2} = \frac{\Gamma}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

$$\chi = 2\kappa\pi + \theta$$

χ	0	π/2	π	3π/2	2π
ημχ	0	1	0	-1	0

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

ΘΕΩΡΙΑ APOS
(ACTION – PROCESS – OBJECT – SCHEMA)

“Για τον Dubinsky (1991) τα γνωστικά σχήματα είναι δομικές οργανώσεις ενεργειών, διαδικασιών και αντικειμένων. Οι Dubinsky (1991), Asiala et al. (1996) εισήγαγαν την θεωρία Action-Process-Object-Schema (APOS theory) [Action (δράση), Process (διαδικασία), Object (αντικείμενο), Schema (σχήμα)], μία κονστρουκτιβιστική θεωρία, βασισμένη πάνω στη θεωρία του Piaget. Οι ερευνητές αυτοί «βλέπουν» την έννοια του σχήματος από την οπτική γωνία της θεωρίας APOS: αν εφαρμόσουμε σε αντικείμενα επαναλαμβανόμενες ενέργειες, αυτές εσωτερικεύονται ως διαδικασίες, οι οποίες στη συνέχεια ενθυλακώνονται (encapsulated) ως νοητικά αντικείμενα, τα οποία στη συνέχεια δημιουργούν γνωστικές δομές ή σχήματα. Για να κατασκευάσει το υποκείμενο ένα «αντικείμενο» πρέπει να αναστοχαστεί πάνω στις δράσεις του” (Πατσιομίτου, 2020, σελ. 278).

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

μετρο και μικρότερο από το τριπλάσιο της διαμέτρου.

Επομένως ο λόγος $\frac{Γ}{δ} = π$ είναι κάτι περισσότερο από 3.

Με τη βοήθεια των κανονικών πολυγώνων, θα υπολογίσουμε τον αριθμό π με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Σε έναν κύκλο (Ο, ρ) εγγράφουμε ένα κανονικό πολύγωνο, π.χ. ένα κανονικό πεντάγωνο. Αν τώρα κατασκευάσουμε κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα στον κύκλο (Ο, ρ) αυξάνοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών, παρατηρούμε ότι τα πολύγωνα αυτά μοιάζουν ολοένα και περισσότερο με τον κύκλο (Ο, ρ), δηλαδή η περίμετρος των πολυγώνων προσεγγίζει το μήκος του κύκλου.

Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{T}{δ}$ της περιμέτρου Τ των πολυγώνων αυτών προς τη διάμετρο δ του κύκλου (Ο, ρ), καθώς το πλήθος των πλευρών τους αυξάνει, προσεγγίζει το λόγο $\frac{Γ}{δ}$ του μήκους Γ του κύκλου αυτού προς τη διάμετρο του δ, δηλαδή τον αριθμό π.

Γνωρίζουμε (§ 8.4) ότι ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου δ έχει:

- κεντρική γωνία $ω = \frac{360°}{ν}$
- και περίμετρο $T = νδ\,ημ\,\frac{ω}{2}$

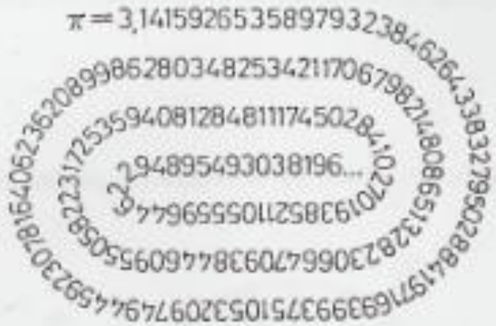
κανονικό	5-γωνο	6-γωνο	10-γωνο	20-γωνο	[illegible]-γωνο
ω	72°	60°	36°	18°	6°
$ημ\,\frac{ω}{2}$	0,587785	0,5	0,309016	0,156434	0,052335
Τ	2,938δ	3δ	3,090δ	3,128δ	3,140δ
$π \simeq \frac{T}{δ}$	2,938	3	3,090	3,128	3,140

(Το $ημ\,\frac{ω}{2}$ για περισσότερη ακρίβεια υπολογίστηκε με 6 δεκαδικά ψηφία σε επιστημονικό υπολογιστή τσέπης).

Έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός.

Δηλαδή ο π δεν είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός αριθμός.

Τα πρώτα 200 ψηφία του π είναι



Στη συνέχεια για τις εφαρμογές και τις ασκήσεις θα αντικαθιστούμε τον π με τη ρητή του προσέγγιση 3,14.

Επειδή είναι $Γ = πδ$ και $δ = 2ρ$, έχουμε $Γ = π \cdot 2ρ$.

Ώστε

$$\boxed{Γ = 2πρ}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ			
Θεματικό Πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
Ολοκλήρωση.		Αν.Ο.12.Π.1. Εισάγουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος συνδέοντάς το με το εμβαδόν επίπεδου χωρίου.	• Αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας για τη σύνδεση του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν επίπεδου χωρίου. • Ερμηνεία των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος μέσω της σύνδεσης του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν επίπεδου χωρίου, όπου είναι δυνατόν. • Μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μέσω μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων και φαινομένων, π.χ. το $\int_a^x v(t)dt$ παριστάνει το διάστημα που διανύει ένα κινητό σώμα.
		Αν.Ο.12.Π.2. Μελετούν [illegible] τις ιδιότητες του ολοκληρώματος (γραμμικότητα, εναλλαγή ορίων ολοκλήρωσης, σχέση Chasles).	
		Αν.Ο.12.Π.3. Συνδέουν το πρόσημο συνάρτησης με το πρόσημο του ολοκληρώματος.	
		Αν.Ο.12.Π.4. Χρησιμοποιούν την παράγουσα συνάρτησης και το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.	

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ			
Θεματικό Πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
		ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
ΜΕΤΡΗΣΗ	Μήκος, μέτρο γωνιών.	Μ.Μ.11.1. Προσεγγίζουν το μήκος κύκλου με τις περιμέτρους των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε αυτόν κανονικών πολυγώνων.	• Υπολογισμός περιμέτρων ευθύγραμμων σχημάτων.
		Μ.Μ.11.2. Υπολογίζουν το μήκος τόξου μ μοιρών σε σχέση με την ακτίνα του κύκλου του.	

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ			
Θεματικό Πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση:	
			και μια κολλητική ταινία.
ΜΕΤΡΗΣΗ	Μήκος.	Μ.Μ.8.1. Να υπολογίζουν τα μήκη των τόξων ως μέρη του μήκους του κύκλου τους.	• Διερεύνηση της σχέσης μήκους L κύκλου με τον σταθερό λόγο $\frac{L}{\delta}$ αξιοποι[illegible] [illegible]πτικά [illegible]ακά ή ψηφιακά εργαλεία. • Εκτίμηση του αριθμού π αξιοποιώντας ψηφιακά εργαλεία. Για παράδειγμα, αιτιολόγηση ότι $\pi > 3$
		Μ.Μ.8.2. Να χρησιμοποιούν τον τύπο για το μήκος κύκλου στην επίλυση προβλημάτων.	

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Όπως είναι αντιληπτό από τις Βαβυλωνιακές πλάκες (YBC 7302), οι Βαβυλώνιοι θεωρούσαν ότι το εμβαδόν του κύκλου μπορεί να υπολογιστεί ως το 1/12 του τετραγώνου της περιφέρειας του κύκλου.

Οι Αιγύπτιοι αναφέρουν μία ακόμα προσέγγιση περί το 1800 π.Χ., όπου το εμβαδόν του κύκλου υπολογίζεται ως το 64/81 $δ^2$, όπου δ είναι η διάμετρος του κύκλου.

Στην αρχαία Ελλάδα, ο Αντιφών (480-411π.Χ.) ανακάλυψε την ιδέα του τετραγωνισμού του κύκλου με την εγγραφή κανονικών πολυγώνων». (Πατσιομίτου, 2020)

YBC 7302:

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

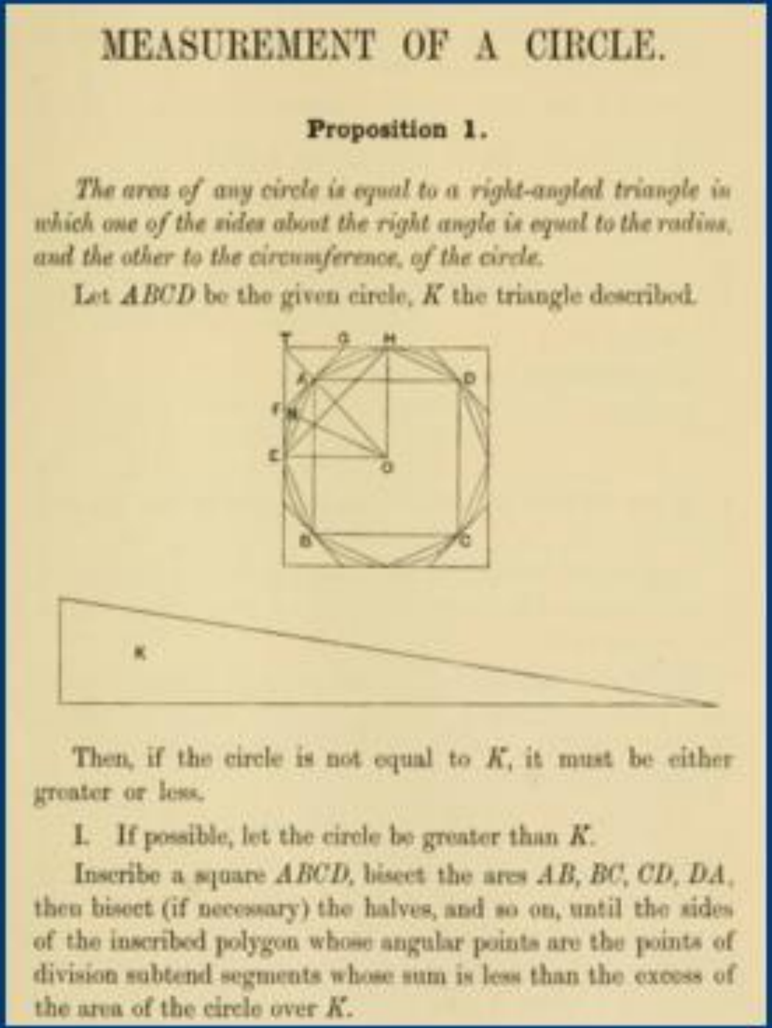
- Περί το 1650 π.Χ.: Στον Αιγυπτιακό Πάπυρο του Rhind αναφέρεται ότι η τιμή του π είναι περίπου ίση με 3.16.

https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

Πολλά προβλήματα -246 στο σύνολο τους- πραγματικού πλαισίου περιλαμβάνονται στο πρακτικό εγχειρίδιο «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (Nine chapters on the mathematical art) (Κίνα, 179 μ.Χ.).

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020



MEASUREMENT OF A CIRCLE.

Proposition 1.

The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.

Let $ABCD$ be the given circle, K the triangle described.

Then, if the circle is not equal to K, it must be either greater or less.

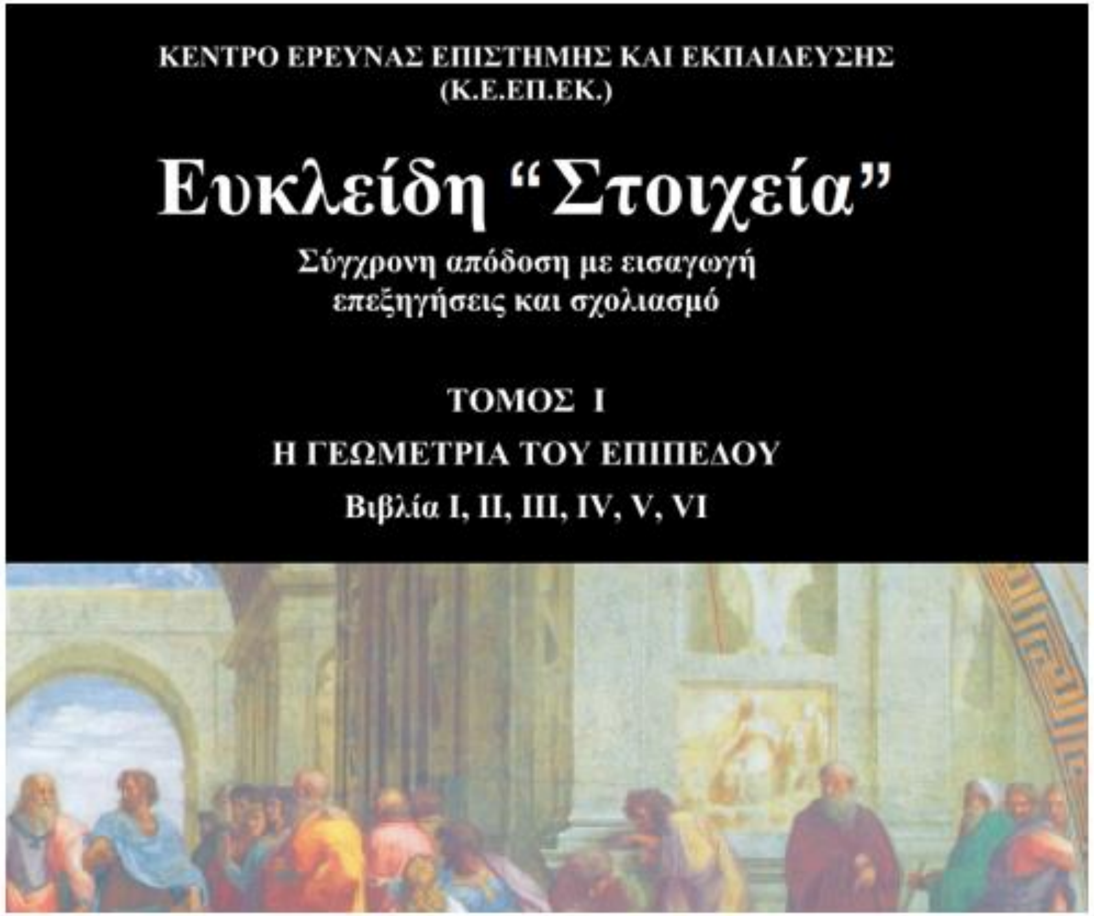
I. If possible, let the circle be greater than K.

Inscribe a square $ABCD$, bisect the arcs AB, BC, CD, DA, then bisect (if necessary) the halves, and so on, until the sides of the inscribed polygon whose angular points are the points of division subtend segments whose sum is less than the excess of the area of the circle over K.

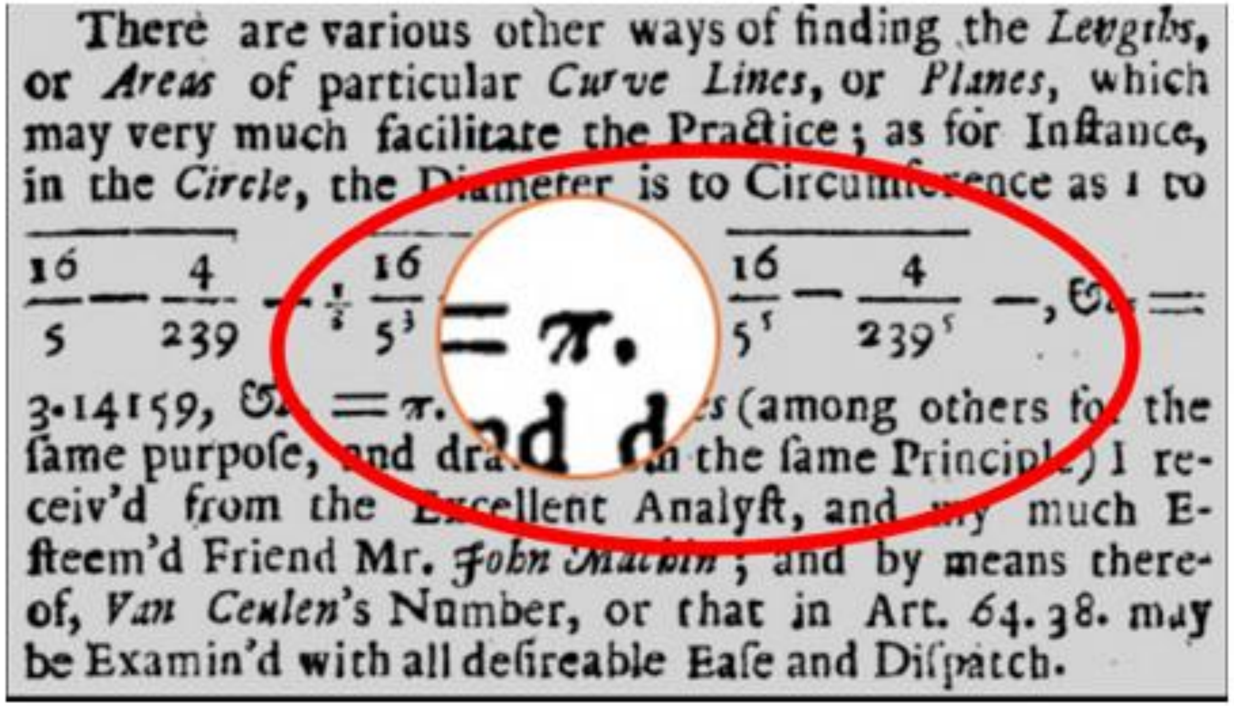
The Death of Archimedes (1815) by Thomas Degeorge

Internet Archive at The works of Archimedes : Archimedes : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive

Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με τη μέθοδο της εξάντλησης έκανε τον πρώτο θεωρητικό υπολογισμό του αριθμού π. Επινόησε τη μέθοδο και παρατήρησε με προσεγγιστικές διαδικασίες ότι το π περιέχεται σε ένα διάστημα: 223/71 < π < 22/7.[40]



https://commonmaths.weebly.com/uploads/8/4/0/9/8409495/tomos-1.pdf



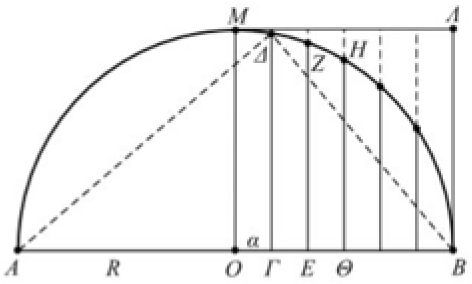
There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3}}$ [illegible] $= \pi.$ [illegible] $\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -$, &c. = 3.14159, &c. $= \pi$. [illegible] (among others for the same purpose, and dra[illegible] the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desireable Ease and Dispatch.

William Jones, 1706

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση έφερε μεταξύ άλλων και τις προσπάθειες για προσέγγιση του αριθμού π μέσα από διαδικασίες […] Μία από αυτές ήταν του Wallis (1616-1703) (Μίγμα άλγεβρας - γεωμετρίας και απειροστικού λογισμού)

Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R, χώρισε την ακτίνα του ΟΒ σε ίσα τμήματα μήκους α και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα). Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο ΑΒ. Π.χ., για την κάθετη ΓΔ, που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, ισχύει



http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2732/Mathimatika_Teuxos-B_G-Lykeiou-ThSp_html-apli/indexB3_history.html

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)\cdots = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}.$$

J. Wallis, "Arithmetica infinitorum" , Oxford (1656)

https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Wallis_formula

Συνοπτικά: ο πειραματισμός στο περιβάλλον του λογισμικού άρχισε, όταν διαπίστωσα ότι οι μαθητές δεν μπορούσαν να προχωρήσουν στην κατασκευή ενός 48-γωνου σε στατικά μέσα. Δεν ήταν ανέφικτο, όμως έπρεπε να κάνουν ένα πολύ μεγαλύτερο σχήμα κύκλου, προκειμένου να εγγράψουν το κανονικό πολύγωνο στο εσωτερικό του. Μία αναλυτική περιγραφή της διεξαγωγής του μαθήματος και του τρόπου που κέρδισα το ενδιαφέρον των μαθητών περιέχεται στο άρθρο «A dynamic active learning trajectory for the construction of number pi (π): transforming mathematics education» (Patsiomitou, 2018a) απόσπασμα του οποίου παρατίθεται στο σχήμα 4.5. Αυτό που επιδιώκουμε είναι οι μαθητές μας να συνδέσουν την Ιστορία των Μαθηματικών με την τεχνολογία, να αναπτύξουν την απαιτούμενη διαίσθηση για σημαντικές έννοιες των μαθηματικών, τις οποίες θα διδαχθούν σε μεγαλύτερες τάξεις, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, να μάθουν να κατασκευάζουν τις έννοιες με σύγχρονες μεθόδους μέσα από πειραματικές διαδικασίες, να γίνουν μικροί ερευνητές στον χώρο των μαθηματικών. Έτσι θα τους βοηθήσουμε να ανακαλύπτουν γεγονότα και μεθόδους (Cooney,1999) να κατανοήσουν πώς τα μαθηματικά είναι ένα ανοικτό πεδίο διερεύνησης, ένα *ζωντανό αντικείμενο*.

Αυτό που επιδιώκουμε είναι οι μαθητές μας να μάθουν να κατασκευάζουν τις έννοιες με σύγχρονες μεθόδους μέσα από πειραματικές διαδικασίες,

να συνδέσουν την ιστορία των Μαθηματικών με την τεχνολογία, να αναπτύξουν διαίσθηση για σημαντικές έννοιες των μαθηματικών τις οποίες θα διδαχθούν σε μεγαλύτερες τάξεις σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, να γίνουν μικροί ερευνητές στον χώρο των μαθηματικών.

Έτσι θα τους βοηθήσουμε να ανακαλύπτουν γεγονότα και μεθόδους να κατανοήσουν πως τα μαθηματικά είναι ένα ανοικτό πεδίο διερεύνησης , ένα ζωντανό αντικείμενο.

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

«Η απομνημόνευση δεν οδηγεί σε γνωστικές

δομές και το αποτέλεσμα είναι να καταπιέζεται η

επιθυμία των μαθητών να μαθαίνουν καθώς

μεγαλώνουν. Έτσι ο μαθητής(-τρια) παύει να έχει

*ενδιαφέρον για τα μαθηματικά»***(Dubinsky,1991 p.120).**

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

“*αναπαράσταση είναι η αντιστοίχιση ή η μοντελοποίηση του αντικειμένου (ή της οντότητας) που αναπαρίσταται με την οντότητα που προκύπτει ως αναπαράσταση, ένα κατασκεύασμα (υλικό ή νοητικό), ένας δομικά ισοδύναμος μετασχηματισμός στοιχείων ή διαδικασιών πραγματικών ή νοητικών, ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών, του χειρισμού των εννοιών, των συμβολικών εργαλείων και των γνωστικών σχημάτων που αναπτύσσονται από το υποκείμενο*” (Patsiomitou, 2019, p.42; Πατσιομίτου, 2020, σελ. 100).

Τι είναι όμως **«ενεργή αναπαράσταση»;** Τι ρόλο παίζει στην κατανόηση και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών;

«*The term active representation is considered in mindful processing of information in which students individually or in collaboration manipulate and interact with the objects and tools in the dynamic environment and construct their knowledge by reflecting on what they have created*» (Patsiomitou, 2018, p.228)

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

1Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

$$\frac{\text{(circumference)}}{\text{(diameter)}} = 3{,}14159$$

n = 888,00

$$\frac{\text{(circle's area)}}{\text{(radius)}^2} = 3{,}14159$$

$$\frac{\text{(polygon's perimeter)}}{\text{(diameter)}} = 3{,}14159$$

author:St.Patsiomitou, Greece, 2006

angle < AOB = 0,41°

radius = 216,88 cm

diameter = 433,76 cm

circumference = 1362,71 cm

circle's area = 147774,27 cm²

AB = 1,5[illegible] cm

polygon's perimeter = 1362,71 cm

n	angle < AOB	radius	diameter	circumference	AB	polygon's perimeter	circle's area	$\frac{\text{(circumference)}}{\text{(diameter)}}$	$\frac{\text{(polygon's perimeter)}}{\text{(diameter)}}$	$\frac{\text{(circle's area)}}{\text{(radius)}^2}$
5,00	72,00°	1,31 cm	2,61 cm	8,20 cm	1,53 cm	7,67 cm	5,35 cm²	3,14159	2,93893	3,[illegible]4159
6,00	60,00°	1,53 cm	3,07 cm	9,64 cm	1,53 cm	9,21 cm	7,40 cm²	3,14159	3,00000	3,[illegible]159
16,00	22,50°	3,93 cm	7,87 cm	24,71 cm	1,53 cm	24,55 cm	48,60 cm²	3,14159	3,12145	3,[illegible]159
17,00	21,18°	4,18 cm	8,35 cm	26,24 cm	1,53 cm	26,09 cm	54,78 cm²	3,14159	3,12374	3,[illegible]159
18,00	20,00°	4,42 cm	8,84 cm	27,76 cm	1,53 cm	27,62 cm	61,34 cm²	3,14159	3,12567	3,[illegible]159
19,00	18,95°	4,66 cm	9,32 cm	29,29 cm	1,53 cm	29,16 cm	68,27 cm²	3,14159	3,12730	3,[illegible]159
20,00	18,00°	4,90 cm	9,81 cm	30,82 cm	1,53 cm	30,69 cm	75,58 cm²	3,14159	3,12869	3,[illegible]4159
75,00	4,80°	18,32 cm	36,65 cm	115,13 cm	1,53 cm	115,09 cm	1054,75 cm²	3,14159	3,14067	3[illegible]4159
76,00	4,74°	18,57 cm	37,13 cm	116,66 cm	1,53 cm	116,63 cm	1083,04 cm²	3,14159	3,14070	[illegible]4159
77,00	4,68°	18,81 cm	37,62 cm	118,20 cm	1,53 cm	118,16 cm	1111,72 cm²	3,14159	3,14072	[illegible],14159
888,00	0,41°	216,88 cm	433,76 cm	1362,71 cm	1,53 cm	1362,71 cm	147774,27 cm²	3,14159	3,14159	[illegible],14159

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ :

- Οι μαθητές οδηγούνται να παρατηρήσουν με την πινακοποίηση των τιμών ότι όσο αυξάνει το πλήθος των πλευρών(αλλαγές του ν) η περίμετρος του πολυγώνου τείνει να γίνει ίση με την περιφέρεια του κύκλου και οι λόγοι τείνουν στον αριθμό 3,14. Επομένως οδηγούνται να γενικεύσουν την διαδικασία και να κατανοήσουν ότι

$$\frac{\text{περίμετρος πολυγώνου}}{\text{διάμετρος κύκλου}} \rightarrow \frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος κύκλου}}$$

- Ακόμα μέσω του λογισμικού να αποκτήσουν ενδιαφέρον για τα σχετικά κείμενα του XII βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη ή το 96-γωνο του Αρχιμήδη.

2Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατασκευάζουμε συνάρτηση f(x) με συντελεστές παραμετρικούς που έχουμε τη δυνατότητα τόσο του άμεσου χειρισμού τους στην οθόνη(με animation) όσο και δυναμικής σύνδεσης με την γραφική παράσταση.

Αυτό συνεπάγεται ότι η μεταβολή των παραμέτρων μας επιφέρει και ανάλογη μεταβολή στην γραφική παράσταση της συνάρτησης αλλά και η κατάργηση κάποιου από αυτούς δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

ΣΤΟΧΟΣ ΜΑΣ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ

.

Τα ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής :

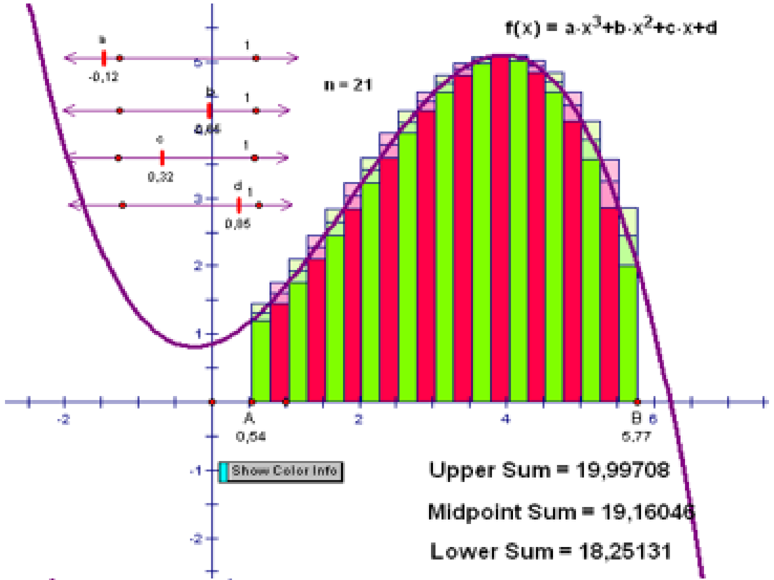
- μπορούμε να κατασκευάσουμε στο λογισμικό την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος έτσι ώστε να προκύπτει σαν αποτέλεσμα μια οριακής διαδικασίας ;
- μπορεί να προσεγγίσει το αποτέλεσμα της δυναμικής διαδικασίας στο αποτέλεσμα που έχουμε ήδη καταλήξει με την φορμαλιστική διαδικασία ;
- πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές την προσέγγιση του αριθμού π ;.
- Σαν εφαρμογή της διαδικασίας θέτουμε την κατασκευή του αριθμού π μέσα από συγκεκριμένη συνάρτηση.

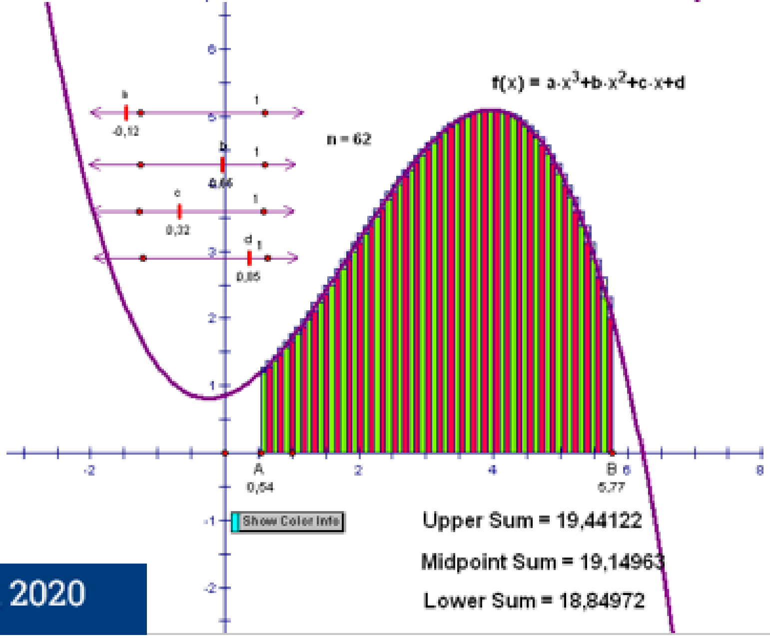

RiemannSums.gsp

Συζήτηση με μαθήτρια της Β΄ Γυμνασίου
Στην ερώτηση «**Τι παρατηρούμε όταν αυξάνουμε το n**» η μαθήτρια πειραματίστηκε με τις διαφορετικές τιμές του n και απάντησε

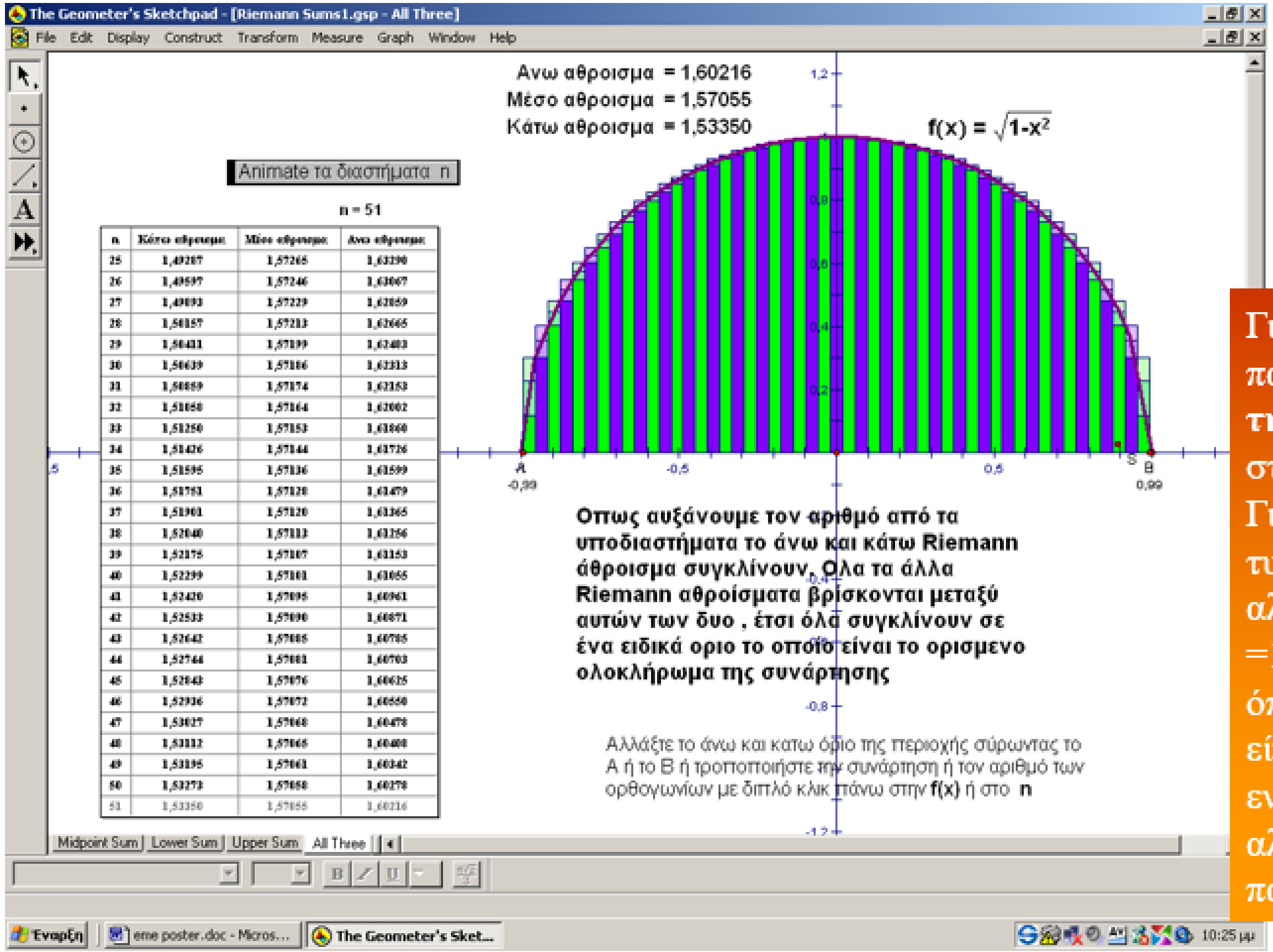
Λ.4 Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το n τόσο αυξάνεται η ποσότητα των στηλών και μικραίνει το πλάτος της κάθε μιας στήλης ξεχωριστά .Οι στήλες ξεκινούν από το A και πηγαίνουν στο B. Ακόμα ότι όταν οι στήλες μικραίνουν πολύ εφάπτονται με την γραμμή της συνάρτησης.

Στην συνέχεια παρατήρησε ότι οι θέσεις της συνάρτησης **έχουν σχέση με το όνομα** που χρησιμοποιεί το λογισμικό για τα αθροίσματα Riemann στις διαφορετικές τιμές και σημειώνει :
Λ.6 Στο κάτω άθροισμα η συνάρτηση είναι στην αριστερή γωνία του ορθογωνίου. Στο άνω η συνάρτηση είναι στην δεξιά γωνία του ορθογωνίου .Στο ενδιάμεσο είναι στο μέσο





Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020



Riemann Sums2.gsp

Για τη συνάρτηση f(x)=η μαθήτρια παρατήρησε **ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ένα ημικύκλιο** στο διάστημα [-1,1].

Για τα αθροίσματα παρατήρησε ότι για τυχαία περίπτωση συνάρτησης είναι με αλλαγές και δοκιμές ότι π.χ. Ms =1,57001, Ls =1,56658, Us =1,57125 όπου Ls είναι το κάτω άθροισμα, Us είναι το άνω άθροισμα και Ms άθροισμα ενδιαμέσων τιμών και ότι παρά τις αλλαγές του n αν τα διατάξουμε έχουμε πάντα **Ls < Ms <Us.**

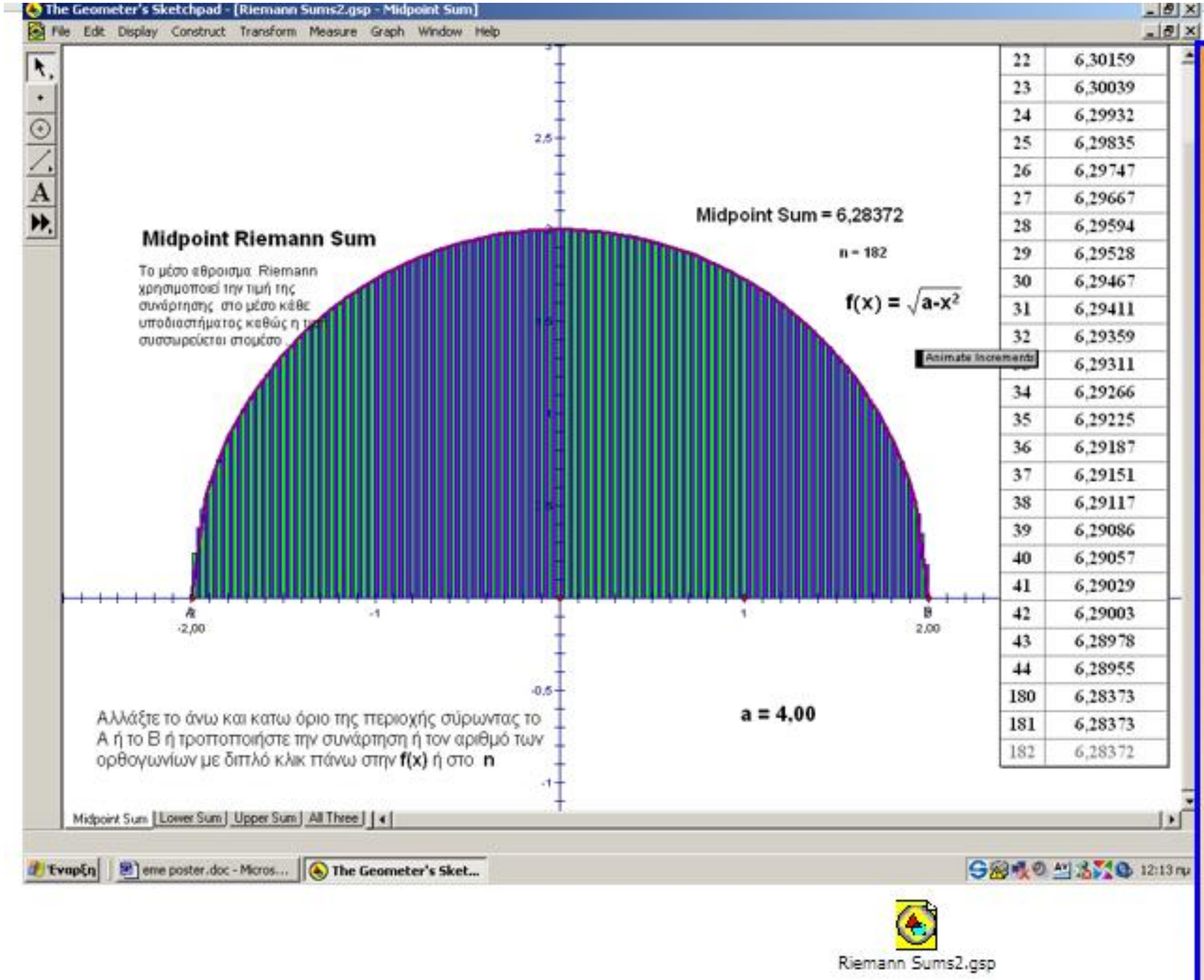
Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

Στην συνέχεια καθοδηγήθηκε να υπολογίσει το εμβαδόν του ημικυκλίου και αφού διαπίστωσε ότι είναι 1,57 περίπου (το έβαλε σε κύκλο).

Λ.9 Όσο αυξάνει το n τόσο οι τιμές αλλάζουν. Και μάλιστα στο **κάτω άθροισμα οι τιμές αυξάνονται , στο άνω άθροισμα οι τιμές ελαττώνονται** όπως και στο μέσο. Αλλά όλες **τείνουν να γίνουν 1,57 περίπου που είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου που βρήκαμε**

Λ.10 Οι τιμές επομένως συμπίπτουν (εννοεί του αθροίσματος Riemann από το λογισμικό και των δικών της υπολογισμών). Νομίζω είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου

n	Ανω αθροισμα	Μέσο αθροισμα	Κάτω αθροισμα
51	1,60216	1,57055	1,53350
52	1,60156	1,57052	1,53422
53	1,60099	1,57049	1,53492
54	1,60044	1,57047	1,53558
55	1,59991	1,57044	1,53624
56	1,59939	1,57042	1,53685
57	1,59889	1,57039	1,53746
58	1,59841	1,57037	1,53803
59	1,59795	1,57035	1,53859
60	1,59750	1,57033	1,53913
87	1,58913	1,57001	1,54888



Στη συνέχεια αλλάξαμε τον τύπο στην συνάρτηση θέτοντας f(x)= όπου α παράμετρος. Για α=4 οι πινακοποιημένες μετρήσεις τείνουν στον αριθμό 6,28. Η μαθήτρια συνεχίζει βγάζοντας συμπεράσματα :

Λ.16 Πρέπει να είναι το εμβαδόν. Είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου .Και **αφού η ακτίνα είναι σταθερή και το εμβαδόν μεταβάλλεται αλλά τείνει σε έναν αριθμό μπορούμε να καταλάβουμε γιατί το π τείνει σε έναν αριθμό,** τον αριθμό 3,14 που ξέρουμε ήδη .

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

Παρατηρήσεις από την μέθοδο:

- Η μαθήτρια αποτελεί μεμονωμένο παράδειγμα (περιπτωσιολογική μελέτη), επομένως δεν θα μπορούσαν να γενικευτούν τα συμπεράσματα επί της μεθόδου.
- Μπορούμε όμως να έχουμε αρχικές παρατηρήσεις επί της μεθόδου. Η μαθήτρια αφού απέκτησε μια αρχική εμπειρία με τον τρόπο λειτουργίας των ολοκληρωμάτων, οδηγήθηκε σε συμπεράσματα σχετικά με την διάταξη των αθροισμάτων Riemann στα ολοκληρώματα.
- **Οι μετρήσεις δεν θα επιβεβαίωναν την αρχική της διαίσθηση αν ήταν μεμονωμένες**. Η εμφάνιση όλου του πίνακα των διαδοχικών τιμών, **η διαγραφή και εύκολη επανάληψη της διαδικασίας για διαφορετική παράμετρο** την οδήγησε σε παρατηρήσεις όπου μπορούσε να διαπιστώσει ότι αυτό επαναλαμβανόταν για τυχαίες θέσεις τιμών των διαμερίσεων αλλά και για συνεχόμενες τις οποίες είχε την δυνατότητα να πινακοποιήσει.
- **Το πιο σημαντικό είναι ότι μέσα από την ερευνητική διαδικασία η μαθήτρια απέκτησε μια ισχυρή διαίσθηση για την έννοια του ολοκληρώματος. Στην ερώτηση «Τι νομίζεις ότι είναι ολοκλήρωμα. Δώσε έναν δικό σου ορισμό» η μαθήτρια απάντησε «αφού έχουμε δυο διαστάσεις και έχουμε το εμβαδόν, αν είχαμε τρεις διαστάσεις δεν θα είχαμε όγκο ; »**

Ο Kaput (1992) έχει αναλύσει τη θέση και τη σημασία της τεχνολογίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών θέτοντας την ερώτηση:

" Ποια είναι τα νέα πράγματα που μπορούμε να κάνουμε με την τεχνολογία που δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε πριν ή δεν είναι πρακτικό να κάνουμε; ……..του Pea σχετικά

Ο Kaput εξηγεί ότι έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να κάνουμε προσιτές στους μαθητές του Γυμνασίου μερικές από τις σημαντικές έννοιες του λογισμού και ισχυρίζεται ότι αυτό μπορεί να γίνει ακόμα και χωρίς την εισαγωγή της άλγεβρας(1992).

Τα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας μπορούν (και πρέπει) εντελώς να μετασχηματίσουν τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών. Η δυναμική γεωμετρία μετατρέπει τα μαθηματικά σε εργαστηριακή επιστήμη. Σαν εργαστηριακή επιστήμη, τα μαθηματικά γίνονται μια έρευνα για τα ενδιαφέροντα φαινόμενα, και ο ρόλος του σπουδαστή των μαθηματικών γίνεται αυτός του επιστήμονα: παρατήρηση, καταγραφή, χειρισμός, πρόβλεψη, υπόθεση και δοκιμή, και ανάπτυξη της θεωρίας ως εξηγήσεις για τα φαινόμενα

Πατσιομίτου Σταυρούλα, 2006, 2018, 2020

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **Πατσιομίτου, Σ. (2006):** Πειραματισμός στο περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Η προσέγγιση του αριθμού π μέσω των παραμετρικών πολυγώνων ή των ολοκληρωμάτων Riemann. *23ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΜΕ*, σσ.502-514, *Πάτρα, 24-26 Νοεμβρίου 2006*

- **Πατσιομίτου, Σ. (2007)** Εμβαδόν κύκλου: Διαθεματική διδακτική προσέγγιση με χρήση του Geometer's Sketchpad v4 και της Ιστορίας των Μαθηματικών. Επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΤΠΕ, με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σσ.59-68, Σύρος, 4-6 Μαΐου 2007

- **Πατσιομίτου, Σ. (2020γ).** Διδακτική και Διδασκαλία των Μαθηματικών: Από τη θεωρία στην πράξη με χρήση λογισμικών. Μονογραφία. Εκδόσεις Αγγελάκη. Αθήνα. ISBN: 978-960-616-155-1 (325 σελίδες). Το βιβλίο διανέμεται δωρεάν ηλεκτρονικά, μέσω διαδικτύου στον ακόλουθο σύνδεσμο https://www.academia.edu/43795275/

. **Patsiomitou, S. (2018a).** A dynamic active learning trajectory for the construction of number pi (π): transforming mathematics education. *International Journal of Education and Research. 6 (8) pp. 225-248.* Online ISSN: 2411-5681. http://www.ijern.com/journal/2018/August-2018/18.pdf

- **Patsiomitou, S. (2019).** A Trajectory for the Teaching and Learning of the Didactics of Mathematics [using ICT]: Linking Visual Active Representations. Monograph. Published by Global Journal Incorporated. United States. (September 5, 2019) . ISBN: 978-1-7340132-0-7. http://doi.org/10.34257/SPatTrajICT. https://globaljournals.org/eBooks/A_Trajectory_for_the_Teaching_and_Learning_of_the_Didactics_of_Mathematics_using_ICT.pdf (256 σελίδες) (ανοικτής πρόσβασης στο διαδίκτυο)