Επιμορφωτική ημερίδα

«Μοντελοποίηση μαθηματικών εννοιών -Ανεστραμμένη μάθηση-Αυτοαποτελεσματικότητα ομάδων-Πρόγραμμα Erasmus»

11:00 π.μ. Πέμπτη, 22 Ιουνίου 2023

2ο Γυμνάσιο Περιστερίου

Μοντελοποίηση και δυναμική μοντελοποίηση με χρήση DGS: αλγεβρικές ταυτότητες

Σταυρούλα Πατσιομίτου
Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών με χρήση ΤΠΕ
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών (ΠΕ03)
Δ.Δ.Ε. Γ' Αθήνας

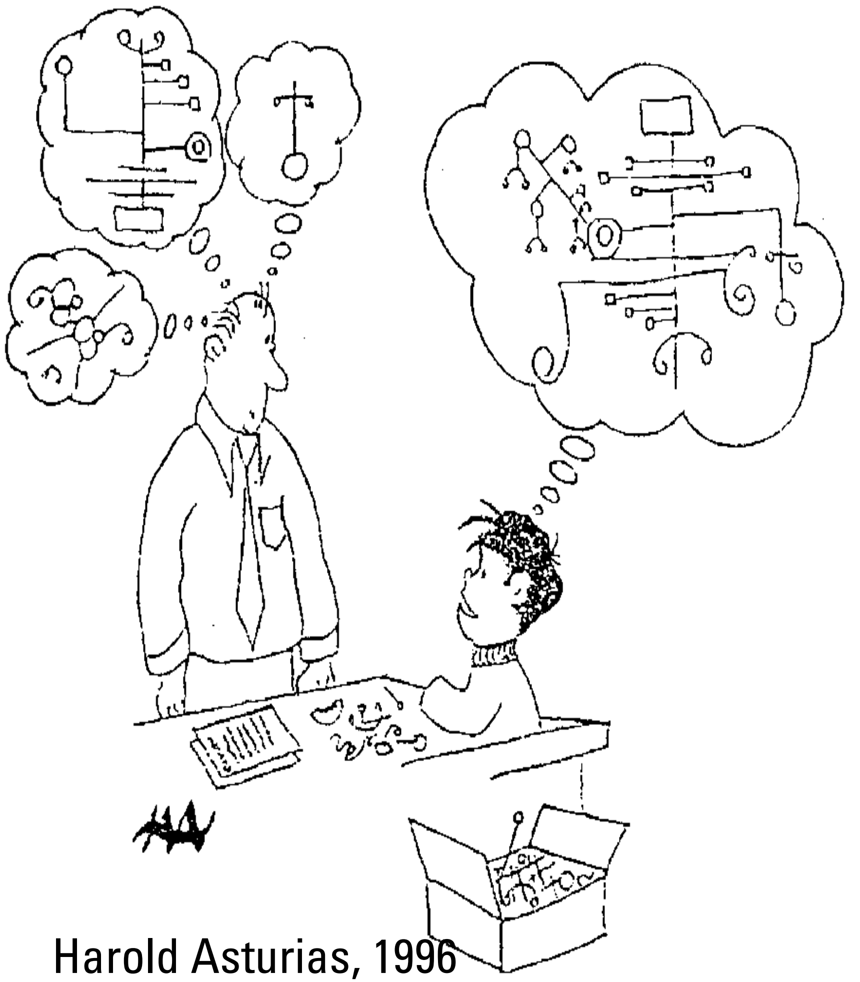
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ ΗΜΕΡΙΔΑΣ	
10.45-11.00	Προσέλευση
11.00-11.15	Δελασούδα Αντωνία Διευθύντρια 2ου Γυμνασίου Περιστερίου (επιλεγείσα. Διευθύντρια 1ου Γυμνασίου Πετρούπολης) Χαιρετισμοί
11. 15 -11.45	Πατσιομίτου Σταυρούλα Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Γ΄ Αθήνας Μοντελοποίηση και δυναμική μοντελοποίηση με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας: αλγεβρικές ταυτότητες
11.45-12.00	Γιαννούλη Μαρία Εκπαιδευτικός κλάδου ΠΕ03-Ενδοσχολική συντονίστρια Παρουσίαση πρακτικής εφαρμογής των μοντέλων αλγεβρικής ταυτότητας στην τάξη
12.00 – 12.20	Μαστοράκη Μαρία Εκπαιδευτικός κλάδου ΠΕ04.1-Μέντορας - επιλεγείσα Διευθύντρια 14ου Γυμνασίου Περιστερίου Ανεστραμμένη μάθηση και ανεστραμμένη τάξη: αποτελέσματα ερευνητικής διαδικασίας
12.20-12.40	Κατσά Μαρία Υποδιευθύντρια 2ου Λυκείου Περιστερίου - επιλεγείσα Διευθύντρια 16ου Γυμνασίου Περιστερίου Αυτοαποτελεσματικότητα μέσα από ομάδες εργασιών και μαθηματικές έννοιες
12.40-13.00	Τσούλου Αλεξάνδρα Υποδιευθύντρια 3ου Γυμνασίου Περιστερίου - επιλεγείσα Διευθύντρια 2ου Γυμνασίου Περιστερίου Το πρόγραμμα Erasmus: διαθεματική διάχυση μαθηματικών εννοιών
13.00-13.30	Κασιμάτη Κατερίνα Καθηγήτρια Παιδαγωγικού Τμήματος ΑΣΠΑΙΤΕ Η καλλιέργεια δεξιοτήτων ως κινητήριος δύναμη για τον μετασχηματισμό του σχολείου στον 21ο αιώνα
13.30-13.40	Συζήτηση

- **Πρόλογος**

- Για πολλά παιδιά, τα μαθηματικά είναι ένα δύσκολο γνωστικό αντικείμενο που κύριος στόχος του είναι η ανάπτυξη ικανότητας αφαιρετικών διαδικασιών σκέψης.
- Ποιος ο σκοπός της παρουσίασης;

Αρχικά πρέπει να απαντήσουμε ερωτήματα :

- Πως μπορεί το υλικό αυτό να λειτουργήσει ως εργαλείο για την κατανόηση των εννοιών;
- Υπάρχουν εμπόδια στην κατανόηση μίας έννοιας και ποιας μορφής είναι;



Harold Asturias, 1996

ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- ***Ποια είναι εκείνα τα γνωστικά αναπαραστατικά συστήματα που μπορούν να δώσουν στους μαθητές τη δυνατότητα πρόσβασης στα μαθηματικά αντικείμενα και ταυτόχρονα να τους δώσουν τη δυνατότητα να τα μετασχηματίσουν με πολλαπλούς τρόπους; (Duval, 1995)***

ΜΟΡΦΕΣ ΕΜΠΟΔΙΩΝ

Ο προσδιορισμός από πολλούς ερευνητές διαφορετικών δυσκολιών εντοπίζεται σε εμπόδια (π.χ. Grugnetti & Rizza, 2002)

- **επιστημολογική φύσης** τα οποία οφείλονται σε εσωτερικές αιτίες των μαθηματικών (Brousseau, 1997; Sierpinska 1985)
- **διδακτικής φύσης**, λόγω των μεθόδων διδασκαλίας που δεν είναι πάντα αποτελεσματικές (Artigue 1998; Brousseau,1998)
- **γνωστικής φύσης** λόγω των διαδικασιών αφαίρεσης που εμπλέκονται (Cornu, 1991; Dubinsky, 1991; Sfard, 1992; Tall & Vinner, 1981; Tall, 1996) και
- **μεταγνωστικής φύσης** που οφείλονται στην γενικότερη αντιμετώπιση της προσέγγισης των μαθητών στα μαθηματικά (Zan, 2001, 2002).

Σύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων

Παράδειγμα

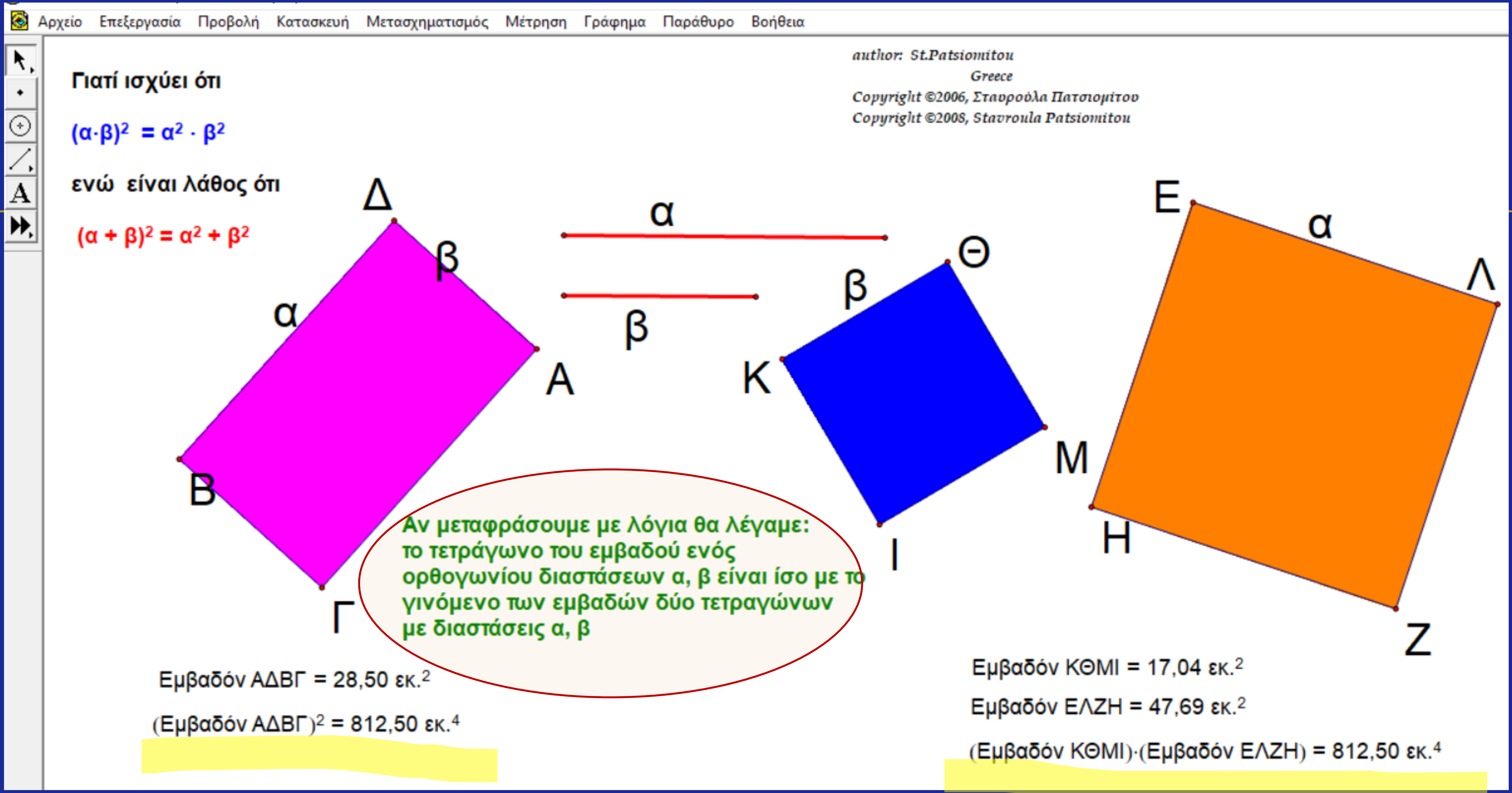
- Ένα σοβαρό εννοιολογικό και διδακτικό εμπόδιο αφορά την κατανόηση της αλγεβρικής ταυτότητας

Γιατί ισχύει ότι

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$$

ενώ είναι λάθος ότι

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$



Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Κατασκευή Μετασχηματισμός Μέτρηση Γράφημα Παράθυρο Βοήθεια
author: St.Patsiomitou
Greece
Copyright ©2006, Σταυρούλα Πατσιομίτου
Copyright ©2008, Stavroula Patsiomitou
Γιατί ισχύει ότι
$(\alpha\cdot\beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$
ενώ είναι λάθος ότι
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$
Δ
β
α
Α
Β
Γ
α
β
Θ
β
Κ
Μ
Ι
Ε
α
Λ
Η
Ζ
Αν μεταφράσουμε με λόγια θα λέγαμε: το τετράγωνο του εμβαδού ενός ορθογωνίου διαστάσεων α, β είναι ίσο με το γινόμενο των εμβαδών δύο τετραγώνων με διαστάσεις α, β
Εμβαδόν ΑΔΒΓ = 28,50 εκ.^{2}
(Εμβαδόν ΑΔΒΓ)^2 = 812,50 εκ.^{4}
Εμβαδόν ΚΘΜΙ = 17,04 εκ.^{2}
Εμβαδόν ΕΛΖΗ = 47,69 εκ.^{2}
(Εμβαδόν ΚΘΜΙ)·(Εμβαδόν ΕΛΖΗ) = 812,50 εκ.^{4}

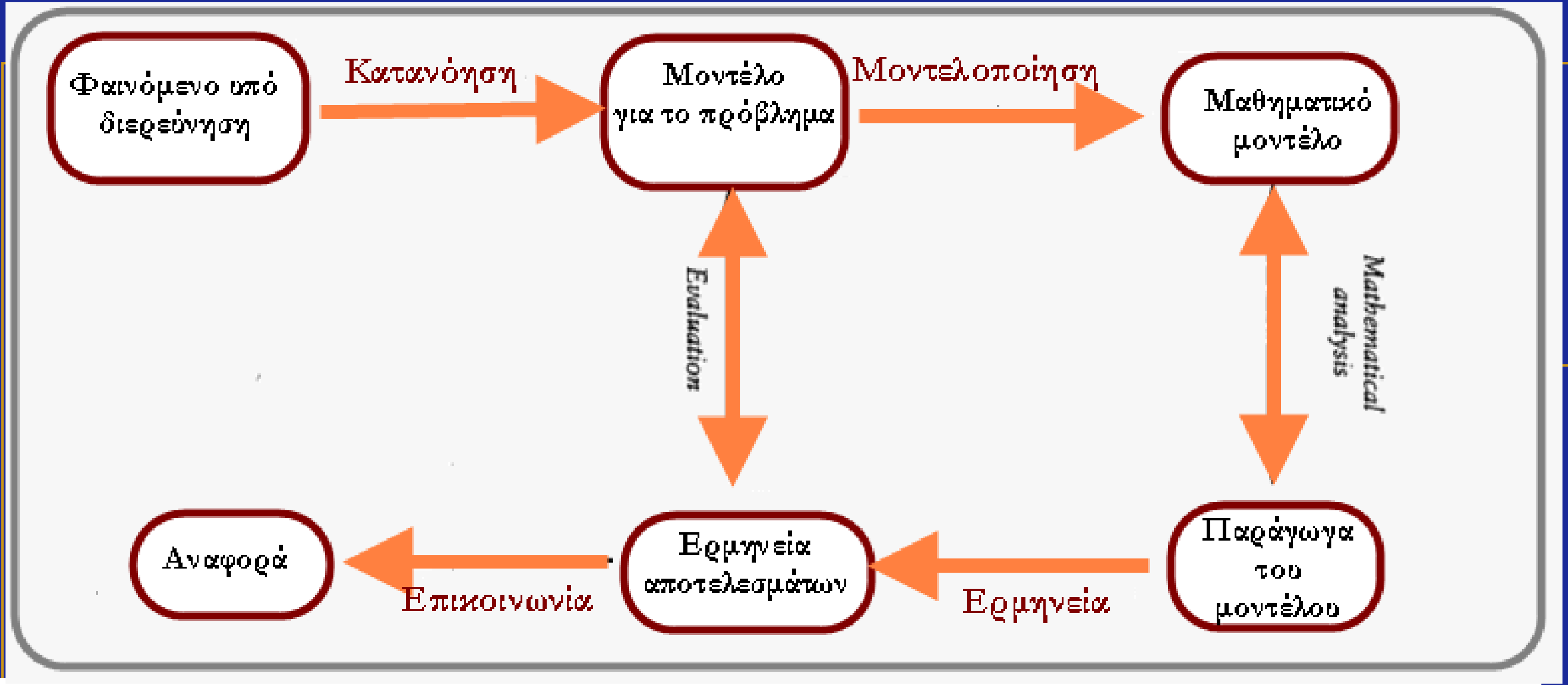
Μοντέλο και μοντελοποίηση

Μοντέλο: μία αναπαράσταση κάποιου αντικειμένου, που αποτελεί ή μεταφράζει ή περιγράφει μία αναλογία με στόχο να οπτικοποιήσουμε μία έννοια που δεν μπορεί ενδεχομένως να παρατηρηθεί.

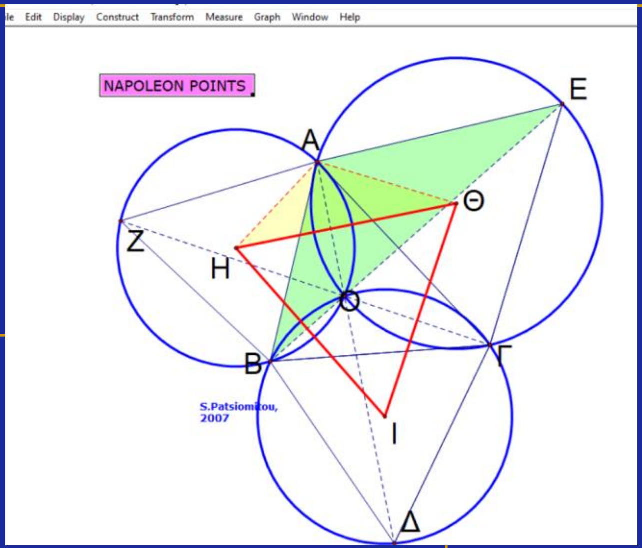
Η **διαδικασία μοντελοποίησης** είναι μία γνωστική δραστηριότητα. Στόχος είναι να περιγράψουμε πώς κάποια μαθηματικά αντικείμενα συμπεριφέρονται.

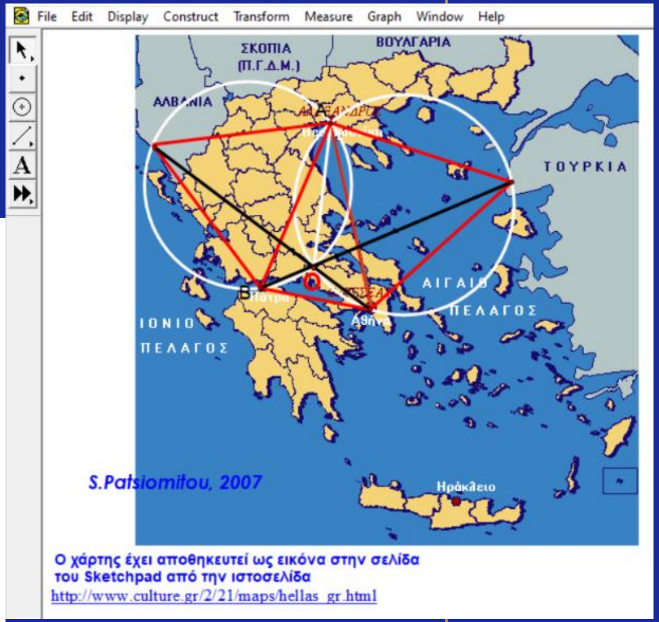
Η Presmeg θέτει μεταξύ άλλων, τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα τα οποία είναι ιδιαίτερης σημασίας για την έρευνα περί και για την οπτικοποίηση στη διδακτική των μαθηματικών εννοιών (Presmeg, 2006, p.30):

- ***Πώς μπορούν οι δάσκαλοι να βοηθήσουν τους μαθητές τους να κάνουν συνδέσεις μεταξύ οπτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων;***
- ***Πώς μπορεί η οπτικοποίηση να αναπτύξει την αφαιρετική ικανότητα των μαθητών και τη δυνατότητα γενίκευσης;***
- ***Πώς μπορεί η οπτικοποίηση να αυξήσει τη μάθηση και κατασκευή μαθηματικών εννοιών με ευχαρίστηση;***
- ***Πώς η υπολογιστική τεχνολογία μπορεί να αλλάξει τη δυναμική της μάθησης των μαθηματικών εννοιών κ.λπ.***



Μοντελοποίηση πραγματικού προβλήματος (De Corte, Verschaffel & Greer, 2000, p.71)





- **Μοντελοποίηση πραγματικού προβλήματος** –

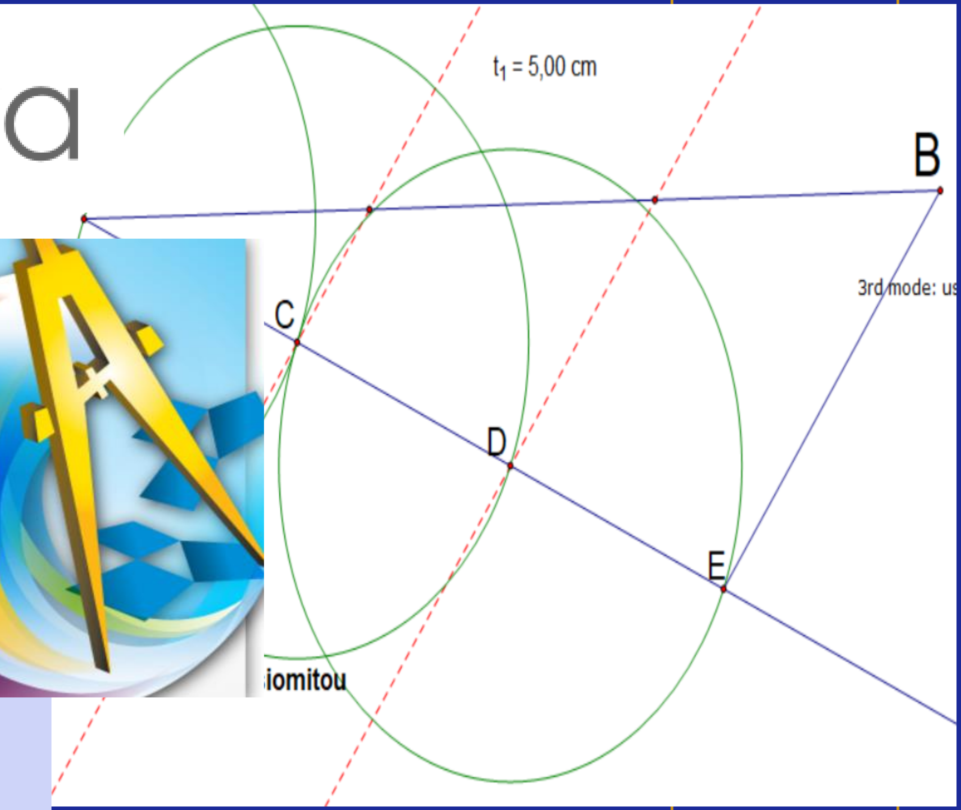
η εύρεση ενός μαθηματικού μοντέλου είναι η μετάφραση ενός πραγματικού προβλήματος σε ένα μαθηματικό, η λύση του μαθηματικού προβλήματος, και στη συνέχεια επιστροφή στο πραγματικό για να ερμηνεύσουμε τα μαθηματικά συμπεράσματα

Η μοντελοποίηση είναι μία βασική έννοια του μαθηματικού εγγραμματισμού (OECD, 1999).

- Όλες οι ενέργειες που απαιτούνται για την επίλυση ενός μαθηματικού έργου /προβλήματος /δραστηριότητας αφορούν τη διαδικασία μοντελοποίησης.
- Στην παρουσίαση θα εξετάσουμε τη ιδέα της μοντελοποίησης **(α)** με χρήση χειραπτικών υλικών και **(β)** μέσα από το πλαίσιο της δυναμικής γεωμετρίας εξετάζοντας τις δυνατότητες και προοπτικές που ανοίγονται μέσα από το μέσο.

Από την *Ευκλείδεια Γεωμετρία* στη *«Δυναμική» Ευκλείδεια Γεωμετρία*

300 π.Χ.

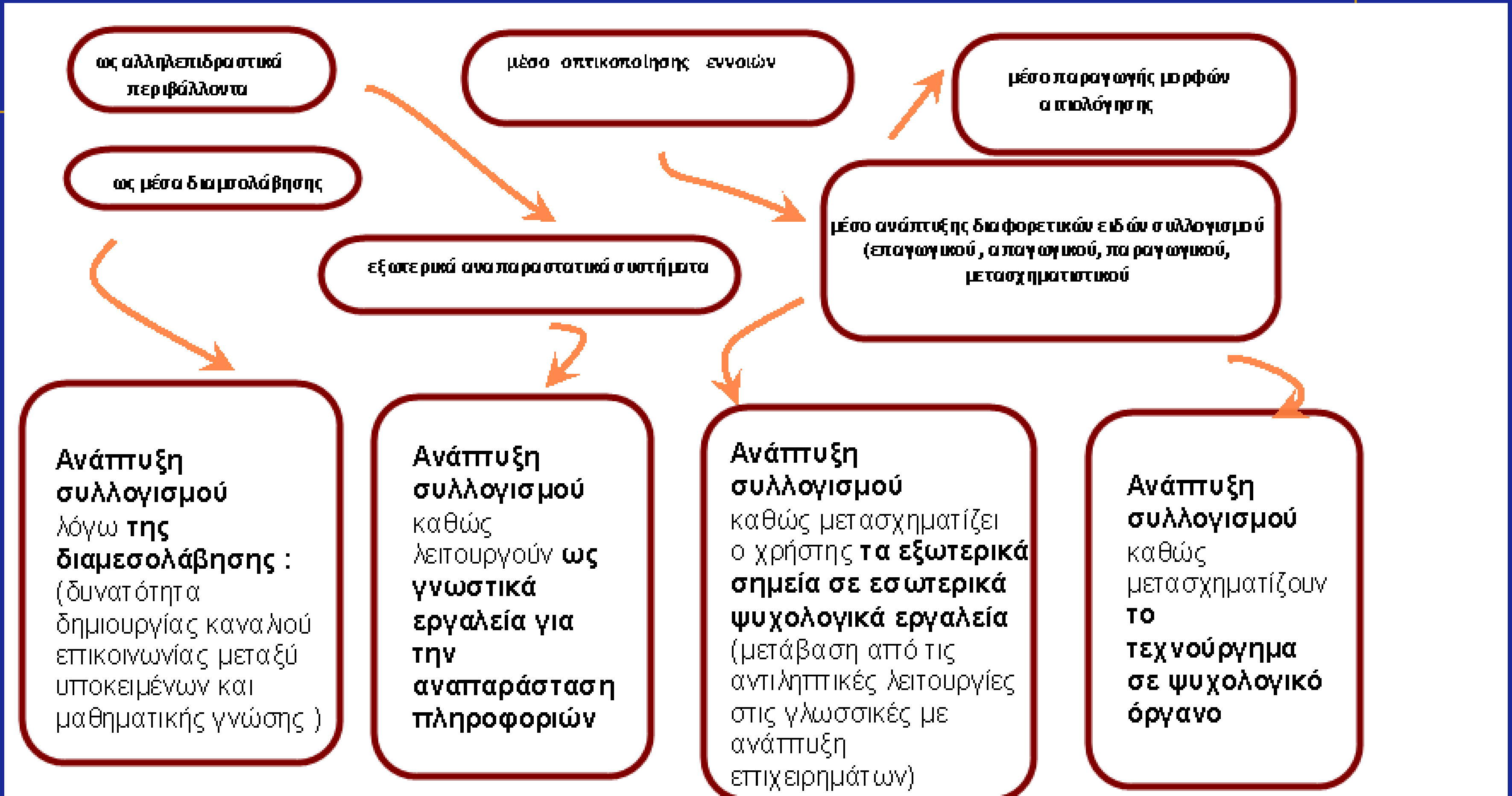


1988

2023

Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

- **Δύο διαστάσεων**
- Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991/2001),
- Cabri II (Laborde, Baulac, & Bellemain, 1988),
- Geogebra (Hohenwarter, 2001, 2002),
- Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999)
- Euclidraw (Pamfilos, 2004) etc.
- **Τριών διαστάσεων ,**
- Cabri 3D (Laborde, 2004)
- Geogebra (Hohenwarter, 2001, 2002)



Πατσιομίτου, 2012

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Ενεργή αναπαράσταση (active representation)

«*The term active representation is considered in mindful processing of information in which students individually or in collaboration manipulate and interact with the objects and tools in the dynamic environment and construct their knowledge by reflecting on what they have created*» (Patsiomitou, 2018, p.228)

Μία αναπαράσταση μπορεί να ***είναι ενεργή*** σε ένα δυναμικό περιβάλλον όταν ένας μαθητής δρα επάνω σ΄ αυτή και αποφασίζει τα βήματα και τις τεχνικές που θα χρησιμοποιήσει, προσπαθώντας να λύσει ένα πρόβλημα. Η αναπαράσταση λόγων των δράσεων αυτών συνεχώς μετασχηματίζεται σε μία νέα μορφή που όμως έχει τα ίδια δομικά στοιχεία με τη προηγούμενη μορφή.

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΣΤΗ ΣΚΕΨΗ

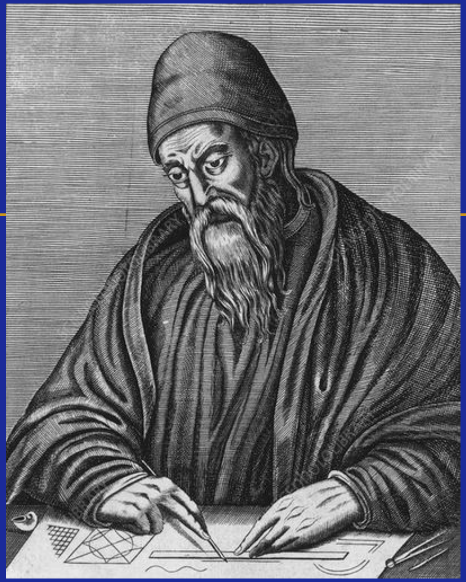
Επίδραση λόγω της διαμόρφωσης διαδοχικών σελίδων (ζωντανό βιβλίο) ("alive book")(Patsiomitou, 2005, p. 63, in Greek; Patsiomitou, 2014).

Επίδραση λόγω της χρήση μετασχηματισμών (τροποποίηση μεγέθους, δυναμικοί μετασχηματισμοί) (Duval, 1995a,b, 1999).

Δυνατότητα συρσίματος (θεωρητικό και πειραματικό τρόπο)

Κατασκευές με χρήση custom tools (e.g., Patsiomitou, 2005, 2008d, 2014, 2019c).

Δυναμικές κατασκευές.



- Η γεωμετρική αναπαράσταση ταυτοτήτων δεν είναι μια σύγχρονη μέθοδος κατανόησης των σχετικών αλγεβρικών εννοιών αλλά ο τρόπος ή η διαδικασία με την οποία αυτές εξελίχθηκαν.
- Όπως αναφέρει ο Ε. Σταμάτης … «*Το ΙΙ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη ….περιέχει την εφαρμογή της γεωμετρίας στην Άλγεβρα και αποδίδεται κατά το μέγιστο στους Πυθαγορείους .*

Τα πρώτα 10 θεωρήματα αφορούν εις αλγεβρικάς ταυτότητας ,
τας οποίας δυνάμεθα να παραστήσωμεν
ως ακολούθως αν δια των γραμμάτων α,β,γ
,…νοήσωμεν τμήματα ευθειών γραμμών »

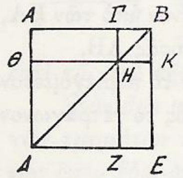
1. $\alpha(\beta+\gamma+\delta)=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$
2. ἐὰν $\beta+\gamma=\alpha$, τότε $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha^2$
3. $(\alpha+\beta)\alpha=\alpha^2+\alpha\beta$
4. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$
5. $\alpha\beta+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
6. $(2\alpha+\beta)\beta+\alpha^2=(\alpha+\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta)^2+\alpha^2=2(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2$
8. $4(\alpha+\beta)\alpha+\beta^2=[(\alpha+\beta)+\alpha]^2$
9. $\alpha^2+\beta^2=2\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^2\right]$
10. $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$.

Τα πρώτα 10 θεωρήματα αφορούν εις αλγεβρικάς ταυτότητας , τας οποίας δυνάμεθα να παραστήσωμεν ως ακολούθως αν δια των γραμμάτων α,β,γ ,…νοήσωμεν τμήματα ευθειών γραμμών »

δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ’ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν



ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση· ἀλλ’ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστιν· καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΚΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ,

Furinghetti και **Paola (2003, p.398)**

αναφέρονται **στο πνεύμα των Ελλήνων γεωμετρών στην προ~Ευκλείδεια περίοδο**

Η ελληνική Γεωμετρία αναπτύχθηκε αρχικά με έναν εμπειρικό τρόπο, μέσω μιας φάσης δοκιμών και λαθών, με τη διατύπωση υποθέσεων, την πραγματοποίηση νοητικών πειραμάτων ελέγχου και αποδεικτικών πειραμάτων, χωρίς κανένα σίγουρο αξιωματικό σύστημα.

Διδακτικοί και μαθησιακοί στόχοι

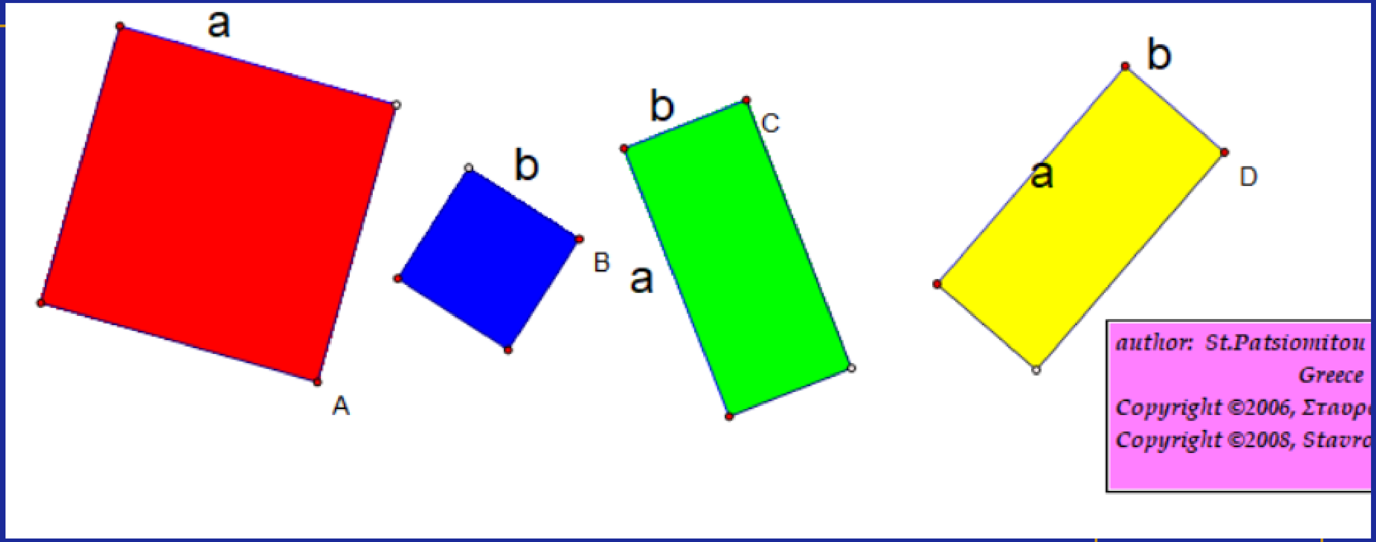
Διδακτικοί στόχοι:

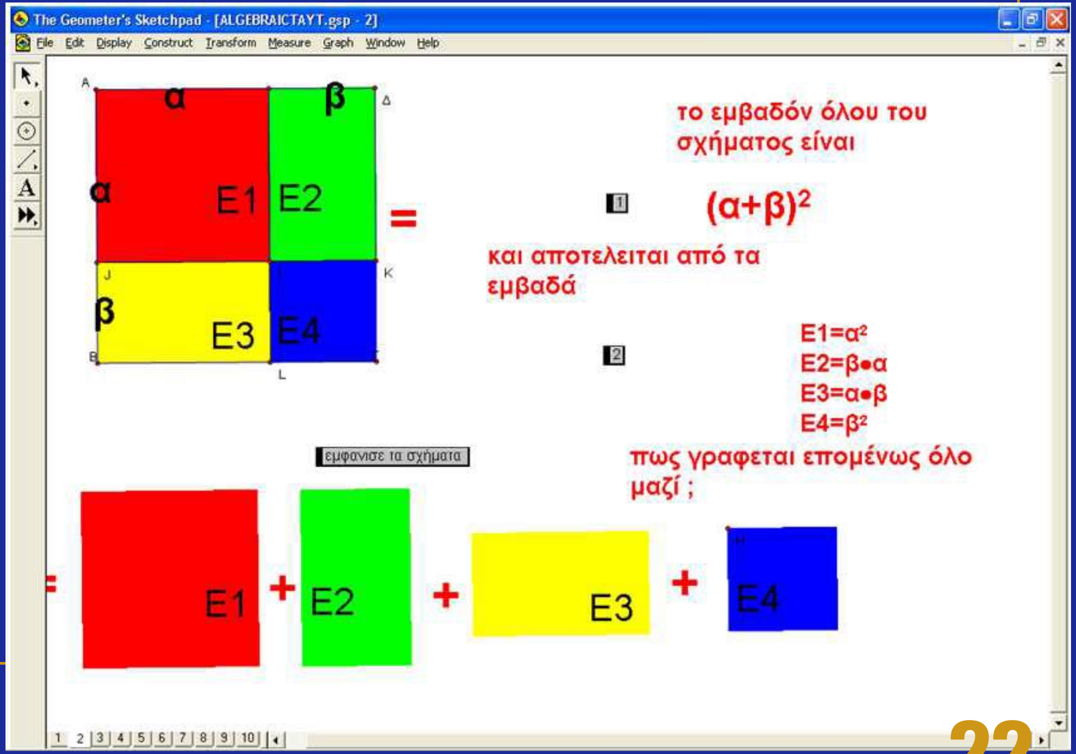
Οι στόχοι της διδασκαλίας με την προαναφερόμενη διδακτική προσέγγιση καθορίστηκαν ως ακολούθως: Μέσα από τις διαφορετικές σελίδες του λογισμικού οι μαθητές

- θα διερευνήσουν την ισότητα των δυο μελών στην ταυτότητα, ως αποτέλεσμα του αθροίσματος των εμβαδών των σχημάτων
- θα υπερβούν σημαντικά διδακτικά –επιστημολογικά εμπόδια τα οποία εκδηλώνονται ως λάθη που συνήθως παρατηρούνται κατά την εισαγωγή των εννοιών μέσω φορμαλιστικών διαδικασιών: για παράδειγμα ότι $(α+β)^2 = α^2+β^2$
- θα τους δοθεί η δυνατότητα να σχηματίσουν γεωμετρικά την αλγεβρική ταυτότητα και να συνδέσουν την άλγεβρα με την γεωμετρία. Έτσι, θα κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά έχουν νόημα στον πραγματικό κόσμο.
- θα παίξουν και οδηγηθούν μέσα από το παιχνίδι, στην κατανόηση των εννοιών .

- Σύνδεση γνωστικών πεδίων
- Ανασχηματισμός ψηφιακών τεχνουργημάτων
- Μοντελοποίηση της ταυτότητας
- Σύνδεση εννοιολ. και διαδικαστικής γνώσης
- Μετάφραση μεταξύ αναπαραστάσεων
- Η κατανόηση των εννοιών θα επιτευχθεί σε αλληλεπίδραση

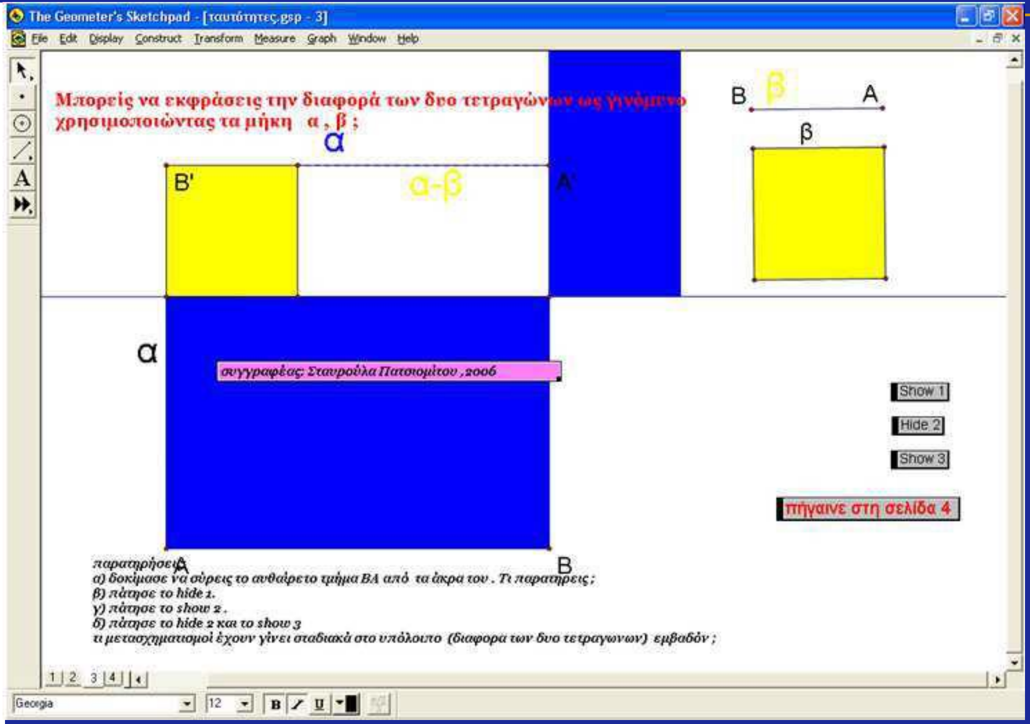
Τα σχήματα των τετραγώνων και ορθογωνίων παρέχονται σε τυχαία θέση στην οθόνη και οι μαθητές θα ανακαλύψουν μέσω του συρσίματος το σωστό προσανατολισμό τους, ώστε να κατασκευάσουν την μορφή της ταυτότητας. δυνατότητα αλλαγής του προσανατολισμού τους, όταν σύρονται από σημείο -κορυφή του κάθε σχήματος.

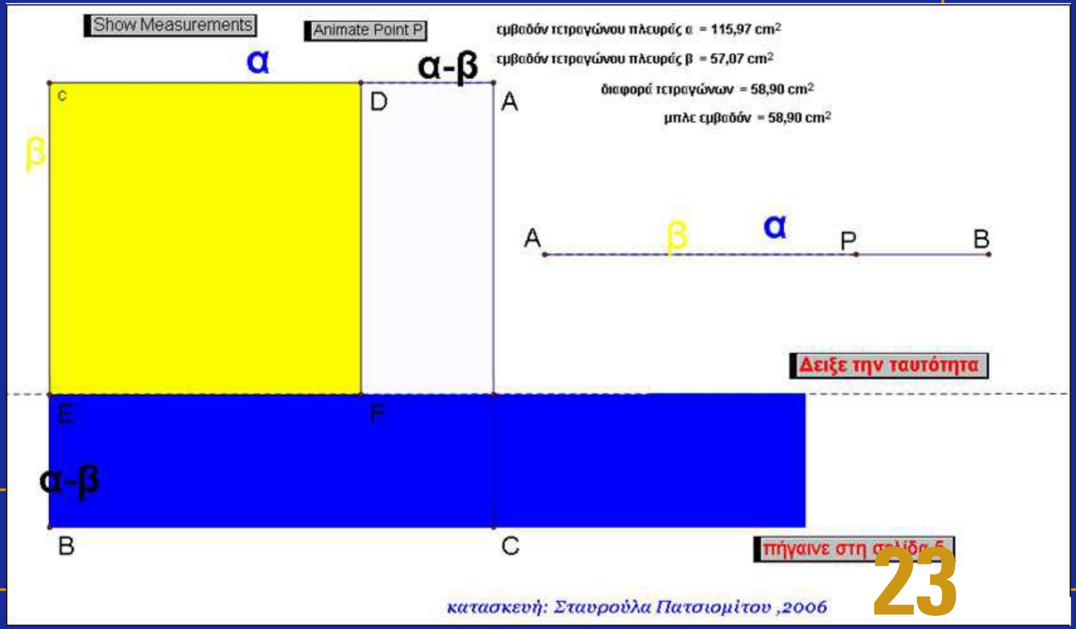




- Η τοποθέτηση του τετραγώνου με πλευρά β επί του τετραγώνου με πλευρά α (β<α), οδηγεί τους μαθητές στην οπτική αντίληψη της διαφοράς των δυο τετραγώνων. Στη συνέχεια οι μαθητές θα υπολογίσουν το εμβαδόν του σχήματος που υπολείπεται με διαχωρισμό των εμβαδών των δυο ορθογωνίων που σχηματίζονται.

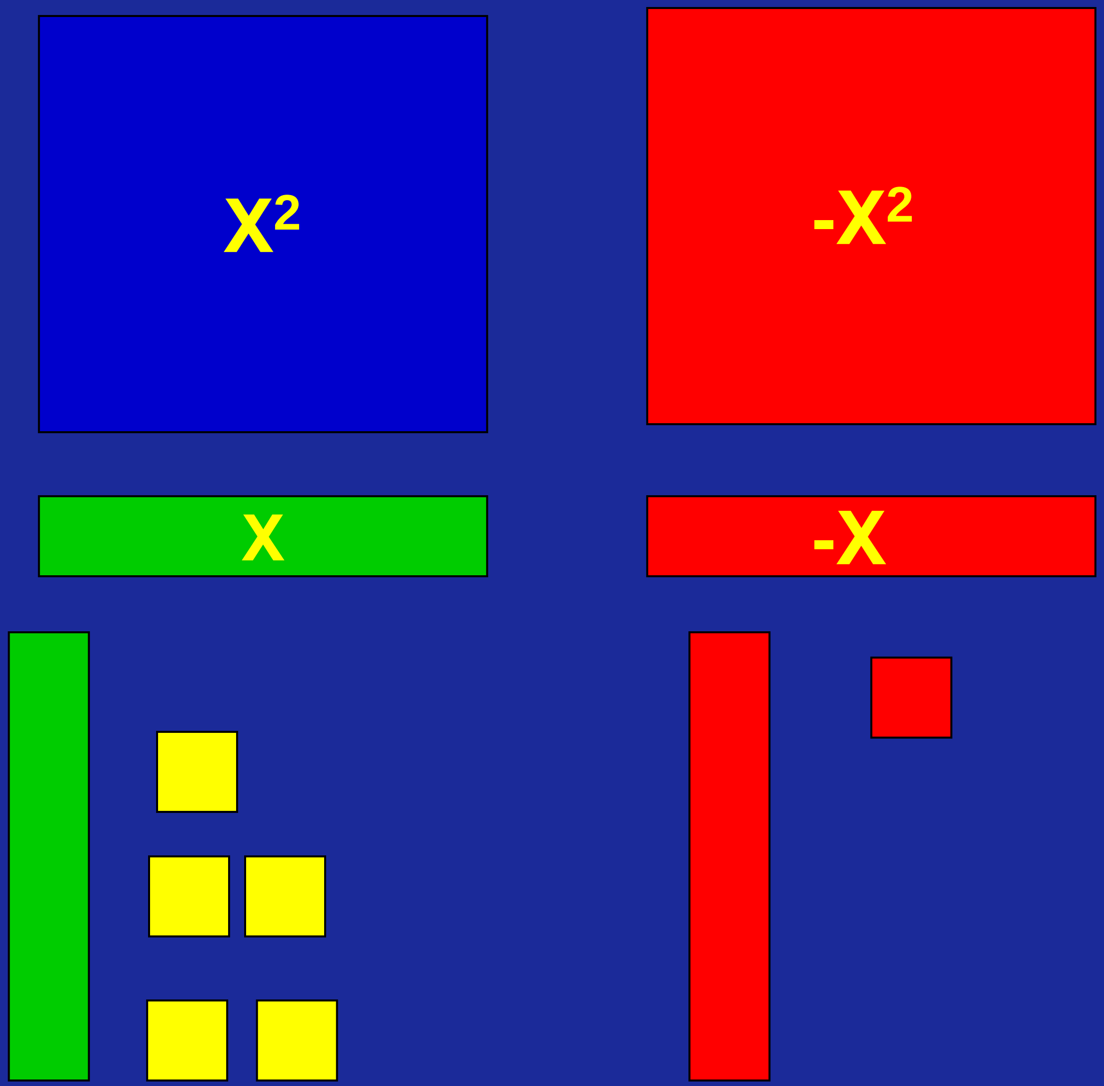
- Η απόκρυψη του ορθογωνίου με διαστάσεις α-β, β και η εμφάνιση του με περιστροφή σε κατακόρυφη θέση, και στη θέση από ανάκλαση του κατακόρυφου ορθογωνίου, καθοδηγεί τους μαθητές να μετασχηματίσουν οπτικά το εμβαδόν του υπολοίπου σχήματος και να οδηγηθούν στην οπτική αποδεικτική διαδικασία.





- Υπάρχουν συγκεκριμένα υλικά που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση ή αναπαράσταση μαθηματικών διαδικασιών ή μαθηματικών εννοιών.

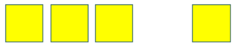
- **Με τον τρόπο αυτό γίνονται πιο συγκεκριμένες οι αφηρημένες έννοιες και διαδικασίες. Έτσι μοντελοποιούνται οι μαθηματικές ιδέες.**

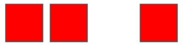


Χειραπτικά υλικά / αλγεβρικές δομικές μονάδες **(algebra tiles)**

- +1 και -1.

Πρόσθεση ακεραίων

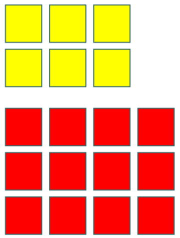
(+3) + (+1) = 

(-2) + (-1) = 

Πολλαπλασιασμός ακεραίων

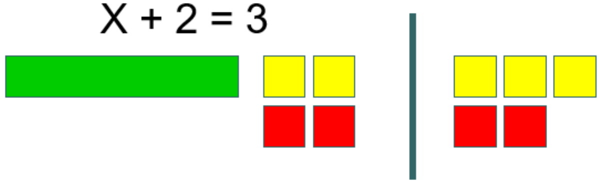
(+2)(+3) =

(+3)(-4) =

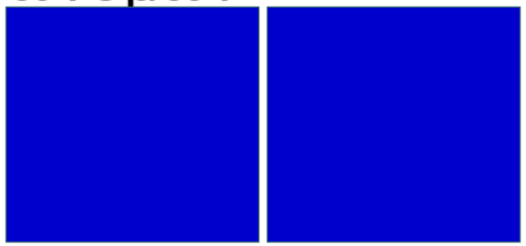


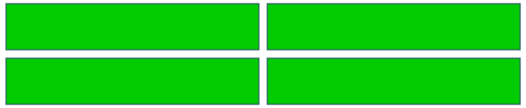
Επίλυση εξισώσεων

X + 2 = 3



Μοντελοποίηση πολυωνύμων

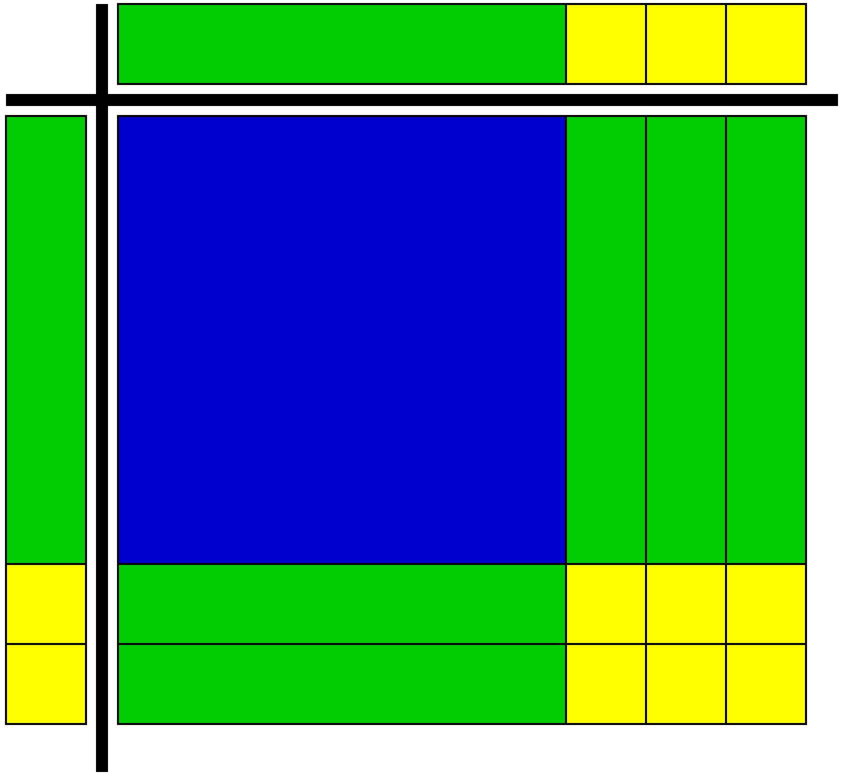
$2x^2$ 

$4xy$ 

$3y^2$ 

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

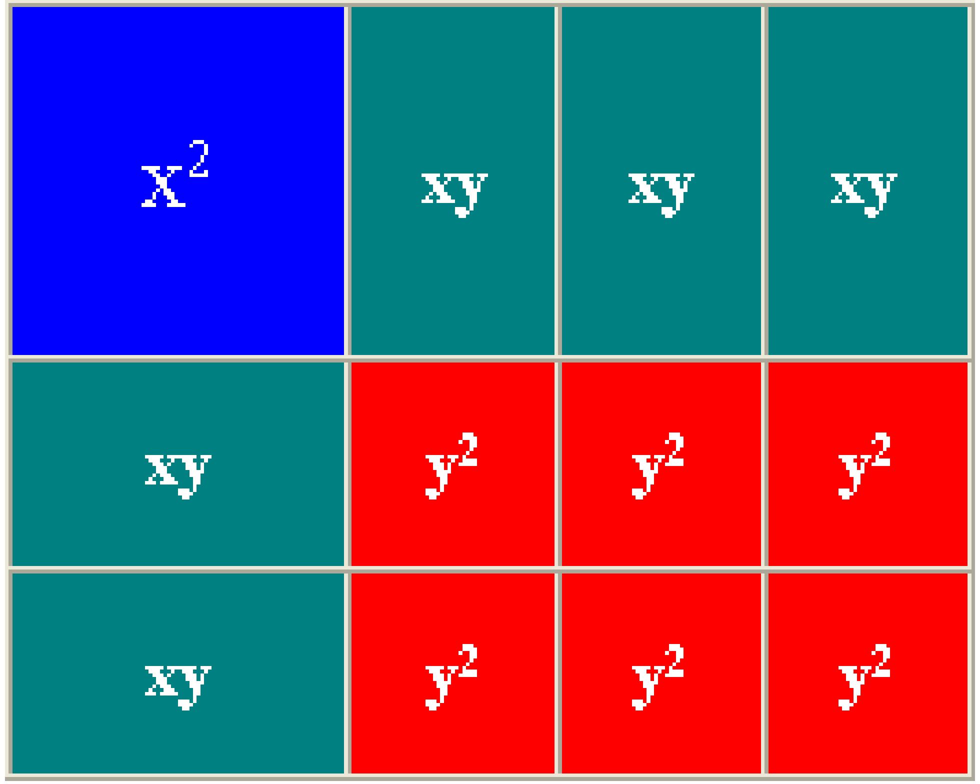
$(x + 2)(x + 3)$



Για παράδειγμα

- Γράψτε μια αλγεβρική έκφραση για το μήκος του ορθογωνίου.
- Γράψτε μια αλγεβρική έκφραση για το πλάτος του ορθογωνίου.
- Γράψτε μια αλγεβρική έκφραση για το εμβαδόν του ορθογωνίου χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες δύο απαντήσεις. Απλοποιήστε αυτήν την έκφραση.

- ΠΡΟΒΛΗΜΑ



ΠΟΙΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΣΤΟΧΟΣ;

Μπορεί ο δάσκαλος να χρησιμοποιήσει συνδέσεις στη διδασκαλία του ?

Οι **Haapasalo & Kadijevich (2000)**

« *Όταν εστιάσουμε στην διαδικασία της μάθησης είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η διαδικαστική (procedural) γνώση και η εννοιολογική (conceptual) γνώση αφορούν η μια την άλλη.*

Ο ρόλος του υπολογιστή για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι ουσιαστικός, δεδομένου ότι οι υπολογιστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αλλάξουν τη διδασκαλία των μαθηματικών

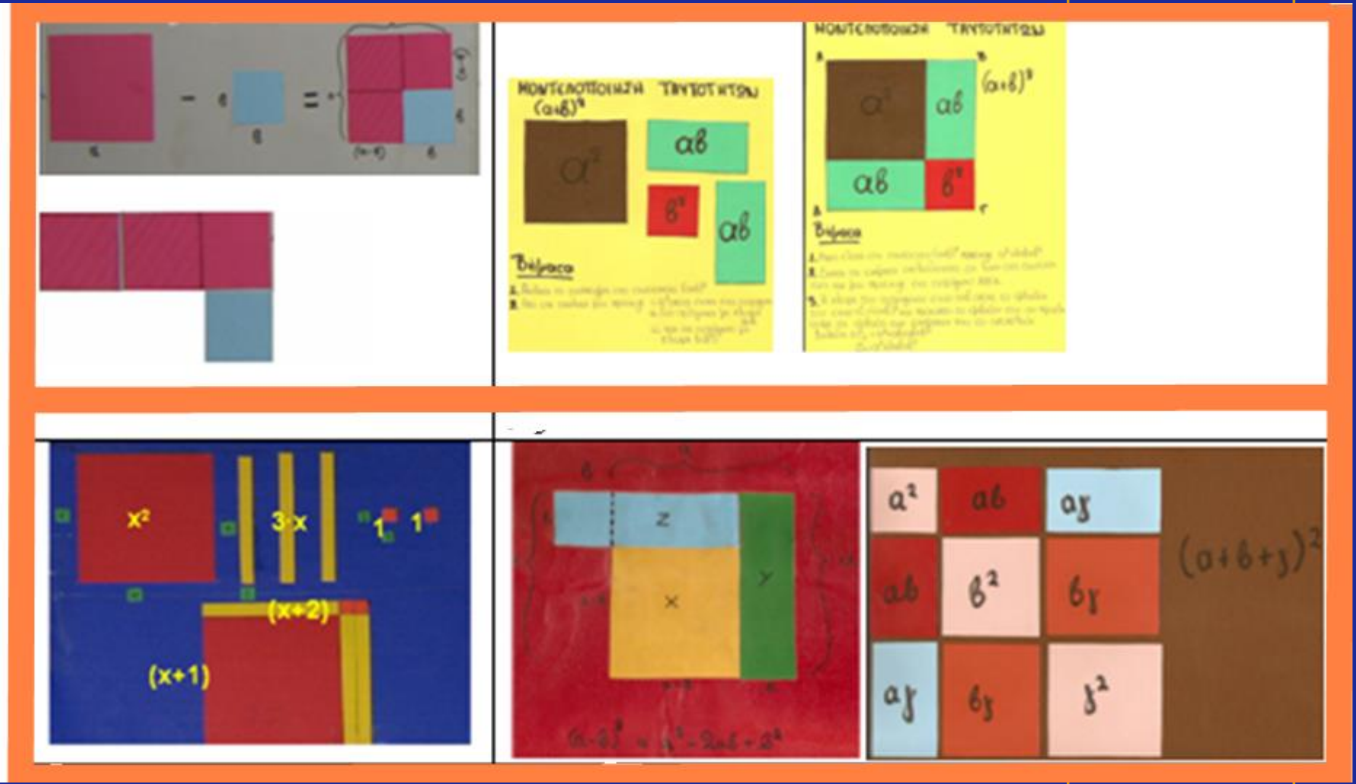
Επιπλέον, η διαδικαστική γνώση απαιτεί συχνά αυτοματοποιημένα και ασυναίσθητα βήματα, ενώ η εννοιολογική απαιτεί χαρακτηριστικά συνειδητή σκέψη.

Δημιουργικές εργασίες

Λειτουργούν ως μία διαδικασία εποικοδόμησης μίας συμπεριφοράς στα μαθηματικά, ***αποτέλεσμα κάποιου μοντέλου-τετραδίου/εργασίας, το οποίο λειτούργησε ως πρότυπο και επηρέασε την κοινωνικογνωστική μάθηση (Bandura, 1977) του μαθητή/-τριας, ώστε να οδηγηθεί στην αυτοαποτελεσματικότητα* (Πατσιομίτου, 1998, 2012, 2021)**.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioral change. Psychological review, 84(2), 191.

Πατσιομίτου, Σ. (2012) Διδακτικές Προτάσεις: Τα Μαθηματικά στον Πραγματικό Κόσμο. Αυτό έκδοση. ISBN 978-960-93-4456. https://www.academia.edu/3517291/_



Μοντελοποίηση ταυτοτήτων σε χαρτόνι από μαθητές (Πατσιομίτου, 2006; Patsiomitou, 2008, 2009)

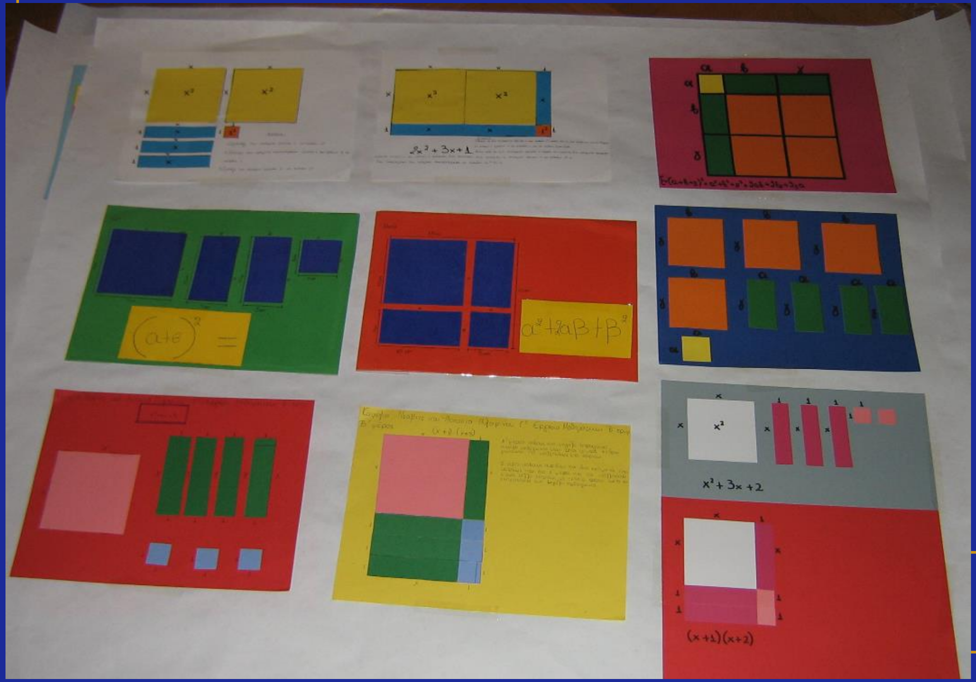
- Οι εργασίες αξιοποιούν τη βιωματικότητα και τη δημιουργική σκέψη και δράση και προσφέρονται ως εναλλακτική μορφή αξιολόγησης, αφού οι μαθητές για να τις κατασκευάσουν πρέπει να αναπτύξουν την

- Οπτικοχωρική ικανότητα αναγνώρισης των στοιχείων του διαγράμματος και ικανότητα κατασκευής μοντέλου (μοντελοποίησης του προβλήματος στο επίπεδο)·
- Αναπαραστασιακή ικανότητα, δηλαδή ικανότητα μετατροπής μεταξύ διαφορετικών 'συστημάτων αναπαράστασης' (από εικονικό σε συμβολικό ή λεκτικό και αντίστροφα).

- Άλλες εργασίες στοχεύουν στην κατανόηση της εμπειρικής (οπτικής απόδειξης) θεωρημάτων, τα οποία οι μαθητές του Γυμνασίου δεν έχουν την ικανότητα να κατανοήσουν, όταν τους εισάγονται θεωρητικά.

- Ο Brousseau (1997) γράφει: «Ένα εμπόδιο εκδηλώνεται από τα λάθη, αλλά τα λάθη αυτά δεν είναι τυχαία […] Η υπέρβαση αυτών είναι μέρος της σχεδίασης της διδασκαλίας και τα λάθη δείχνουν το δρόμο ή τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει ο εκπαιδευτικός. Επομένως, ένας σημαντικός ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργεί, να εφευρίσκει και να ανακαλύπτει καταστάσεις που οδηγούν σε γνωστικές συγκρούσεις».

- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland & V. Warfielf, Eds & Transl.). Mathematics Education Library (vol.19), p.86-87. Kluwer Academic Publishers.



- Στάδια ανεστραμμένης τάξης (Estes, Ingram, & Liu, 2014) (Προσαρμογή της εικόνας για την παρούσα εργασία) (ιστοσελίδα)

  - https://www.hetl.org/a-review-of-flipped-classroom-research-practice-and-technologies/

Bergmann, J. & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. Washington, DC: ISTE; & Alexandria, VA: ASCD.

Estes. M. D., Ingram, R., & Liu, J. C. (2014). A review of flipped classroom research, practice, and technologies. *International HETL Review*, Volume 4, Article 7, URL: https://www.hetl.org/feature-articles/a-review-of-flipped-classroom-research-practice-and-technologies

οἱ φάσκοντες οὐδὲν λέγειν τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας περὶ καλοῦ ἢ ἀγαθοῦ ψεύδονται.
τοῦ δὲ καλοῦ μέγιστα εἴδη τάξις καὶ
συμμετρια και το ωρισμενον, α μαλιστα δεικνύουσιν αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι. καὶ ἐπεί
γε πολλῶν αἴτια φαίνεται ταῦτα (λέγω δ' οἷον ἡ τάξις καὶ τὸ ὡρισμένον).

Αριστοτέλους Μεταφυσικά 1078 α 30

Μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει κάνω μαθηματικά

Σταυρούλα Πατσιομίτου

Συνδέονται τα Μαθηματικά με την Αισθητική, με την Τέχνη, με την Τεχνολογία. Πόσο σημαντικό είναι να γνωρίζουμε την Ιστορία τους; Τα μαθηματικά έχουν σχέση με την πραγματικότητα ή είναι μόνο ένα σύνολο κανόνων και τύπων;

Όπως διαβάζουμε στο αρχαίο κείμενο ο μεγάλος φιλόσοφος Αριστοτέλης έλεγε : *αυτοί που ισχυρίζονται ότι οι μαθηματικές επιστήμες δεν αναφέρουν τίποτα για το καλό ή το ωραίο κάνουν λάθος...* ***Του καλού τα είδη (οι κατηγορίες) είναι η τάξη και η συμμετρία και το ορισμένον (συγκεκριμένο) Αυτά κυρίως οι μαθηματικές επιστήμες φανερώνουν και αυτά φαίνεται να είναι τα κύρια αίτια για πολλά.***

Σαν απάντηση στα ερωτήματα που θέσαμε στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε κάποιες εργασίες μαθητών της Β΄ και Γ΄ τάξης του ***2ου Γυμνασίου Ν. Φιλαδέλφειας.*** *Οι εργασίες έγιναν στην διάρκεια της περυσινής σχολικής χρονιάς και στο τέλος διοργανώθηκε και μια έκθεση. Η πρώτη εργασία είχε καθοριστεί για τις διακοπές των Χριστουγέννων. Οι εργασίες της Γ΄ Γυμνασίου περιελάμβαναν τις κατασκευές των γεωμετρικών αναπαραστάσεων των ταυτοτήτων και παραγοντοποιημένων μορφών τριωνύμων αλλά και την περιγραφή της διαδικασίας κατασκευής με μαθηματικούς όρους. Οι εργασίες της Β΄ Γυμνασίου την γεωμετρική ερμηνεία του Πυθαγορείου θεωρήματος με διαφορετικές αποδεικτικές διαδικασίες που διδάχθηκαν ή θα εύρισκαν στο διαδίκτυο. Η τελευταία εργασία των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου κοντά στο Πάσχα, ήταν σχετική με τον διαχωρισμό του κυκλικού δίσκου σε ίσους κυκλικούς τομείς και την επαναδιάταξη τους με στόχο να υπολογιστεί το εμβαδόν του, ως εμβαδόν ορθογωνίου.*

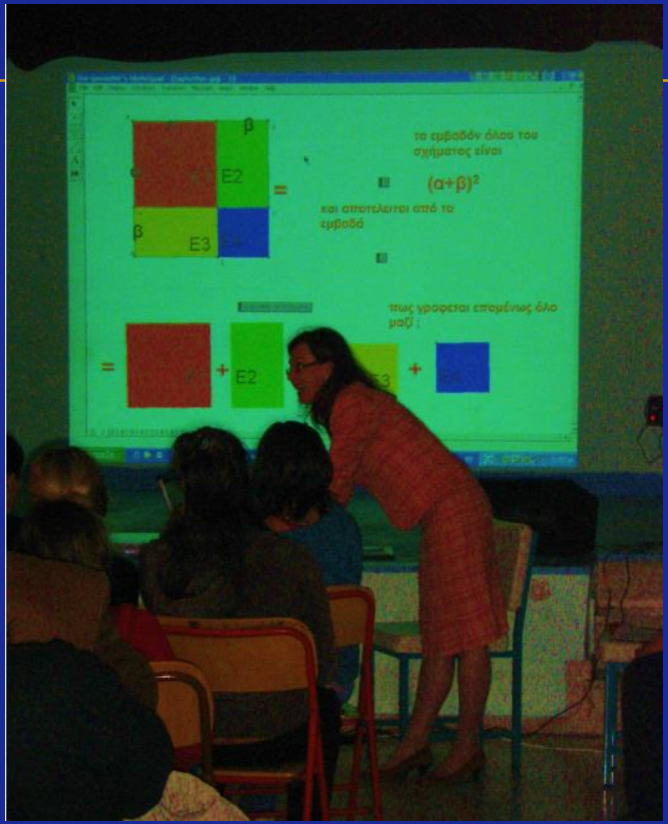
Το αποτέλεσμα δικαίωσε τους κόπους των παιδιών. Τι πιο σημαντικό από το να καταλάβουμε το νόημα των μαθηματικών! *Ας κάνουμε όμως κάποιες περιγραφές εργασιών.* ***Διαβάστε προσεκτικά παρακάτω και κάντε και σεις τις ίδιες ή και παρόμοιες κατασκευές***

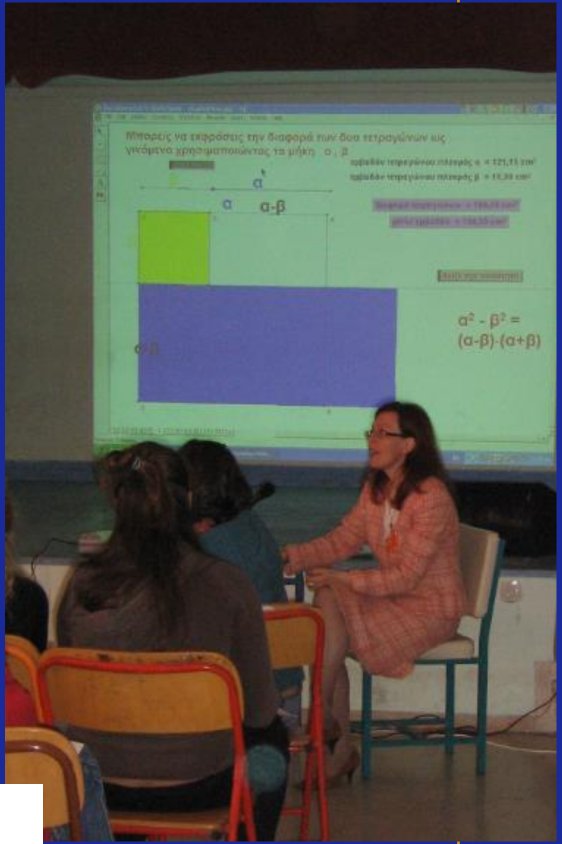
Στην εικόνα δεξιά βλέπουμε την κατασκευή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στην αριστερή εικόνα, η κατασκευή έγινε μέσω της ζωγραφικής στον υπολογιστή[1]. Η κατασκευή δεξιά έγινε στο χέρι με ψαλίδι και χαρτόνι από τον μαθητή **Β. Αμουργιανό**. Για τον δεύτερο τρόπο, πάρτε ένα μεγάλο χαρτί μεγέθους Α3 ή χαρτόνι στο ίδιο μέγεθος. Σχεδιάστε πάνω του τα σχήματα που θέλετε. Στην συνέχεια αποτυπώστε το σε ένα διάφανο χαρτί και επαναδιατάξτε το κόβοντας με το ψαλίδι. Παίξτε με τα χρώματα χρησιμοποιώντας χρωματιστό χαρτόνι ή κόλλες. Προσέξτε ώστε τα ισοδύναμα εμβαδά να έχουν το ίδιο χρώμα. Στη συνέχεια περιγράψτε την διαδικασία κατασκευής και εξηγήστε την απόδειξη.

Οι εργασίες στην εικόνα κάτω είναι μαθητών Γ΄ Γυμνασίου που εργάστηκαν ομαδικά. Το ερώτημα ήταν πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε γεωμετρικά τις ταυτότητες και τα τριώνυμα και να δώσουμε σχηματικά την παραγοντοποιημένη μορφή τους. Φτάνει να καταλάβουμε το εξής: Ότι οι

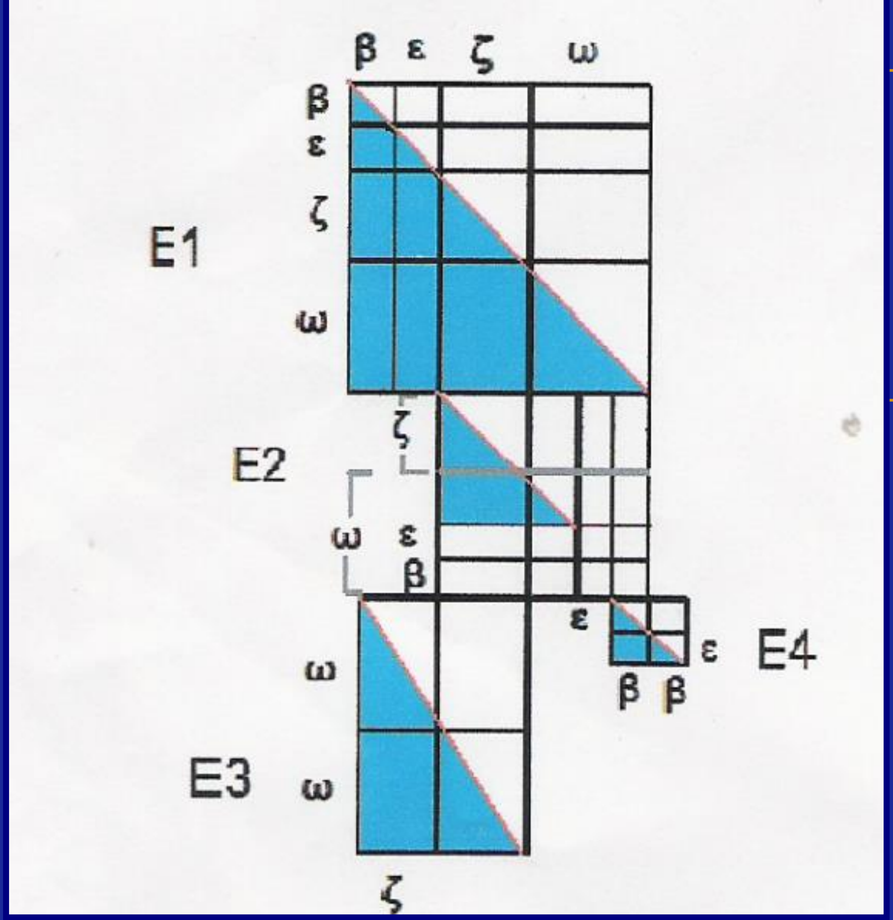
[1] Η απόδειξη είναι διατυπωμένη στο σχολικό βιβλίο

- Άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδης Α' της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (τ.62, Οκτώβριος 2006).
-



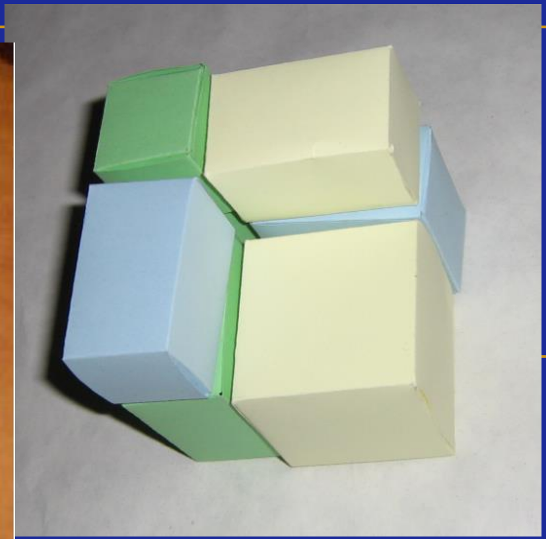


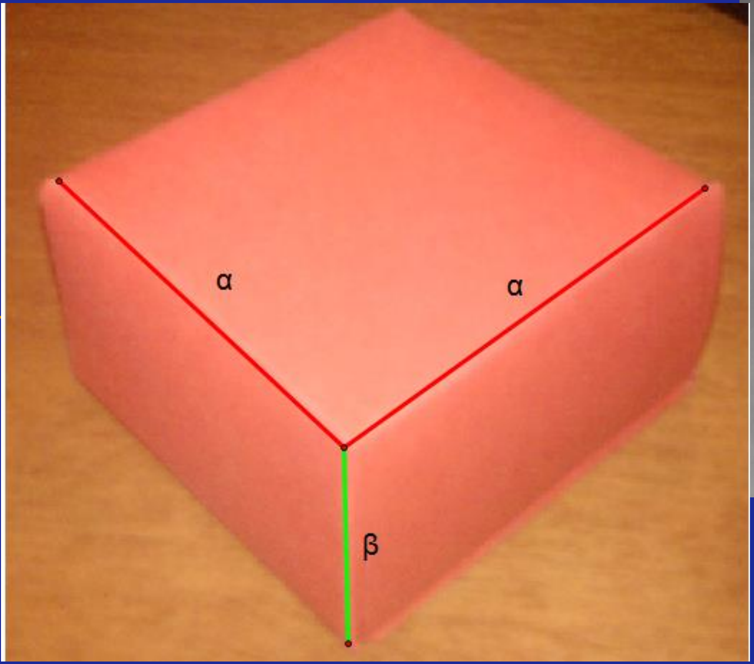
- Ενδεικτικά στιγμιότυπα από τη δειγματική διδασκαλία (15ο Γυμνάσιο Αθηνών, 7-12-2006)

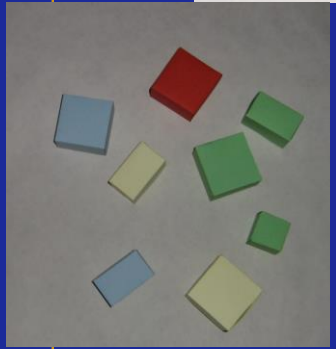


- Μοντελοποίηση του Χρήστου Τσιούρη, Α΄ Τάξη του 15ου Λυκείου Αθηνών, (2-3-2007).

- Επίστρωση των μαθητών μου της Β΄τάξης του 15ου Γυμνασίου Αθηνών σε συνεργασία, κάνοντας χρήση των 3 σχημάτων πλακιδίων (tiles)

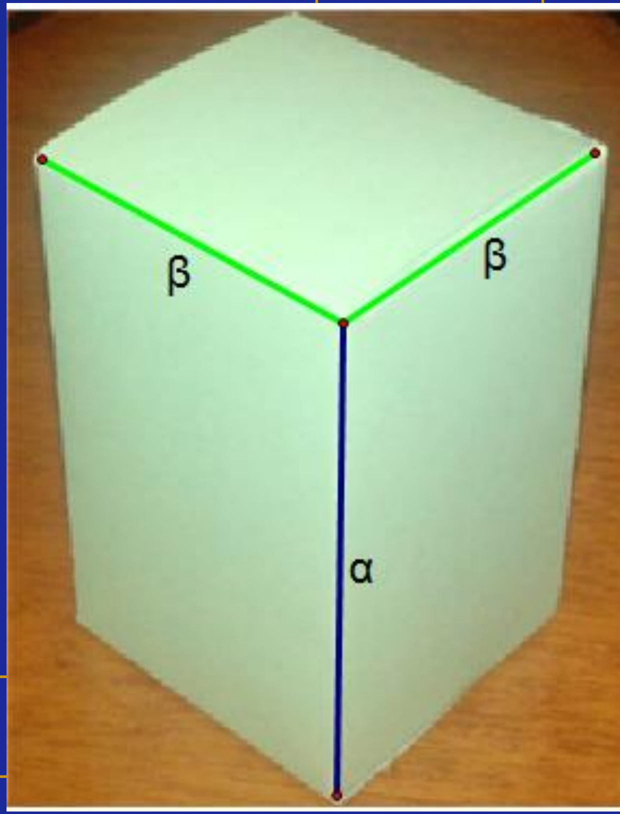






- **Κωνσταντίνος:** *Άρα, εξηγείται πως αποδεικνύεται η ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3$. Το στερεό συναρμολογημένο είναι ένας κύβος του οποίου η έδρα είναι ίση με $(\alpha+\beta)^2$, επομένως αφού έχει ακμή $(\alpha+\beta)$ θα* ***έχει όγκο $(\alpha+\beta)^3$.***

- **Δημήτρης:** *Όπως κατάλαβες, η μοντελοποίηση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2$ είναι ένα τετράγωνο πλευράς $(\alpha+\beta)$ και επομένως αντιπροσωπεύει* ***το εμβαδόν της επιφάνειας του τετραγώνου*** *πλευράς $(\alpha+\beta)$* (Εικόνα 7, 8). *Ενώ, η μοντελοποίηση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3$ είναι ένας κύβος και επομένως αντιπροσωπεύει* ***τον όγκο ενός κύβου ακμής*** *$(\alpha+\beta)$* (Εικόνα 9).



Ως δραστηριότητα κατά τη διάρκεια των διακοπών τους είχα προτείνει να κάνουν στο λογισμικό ή στο χαρτί μια μοντελοποίηση ταυτότητας ώστε να διαπιστώσω την ικανότητα μετάφρασης των μαθητών μεταξύ αναπαραστάσεων. Δηλαδή την

- κατασκευή σχημάτων που αναπαριστάνουν ταυτότητες, τριώνυμα,
- κατασκευή της ταυτότητας ($\alpha+\beta)^3$ με κατασκευή κύβου ακμών α+β (συναρμολογούμενης), έτσι ώστε το κατασκευαστικό αποτέλεσμα να προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους σχημάτων παραλληλεπιπέδων και κύβων.

Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά. Στις κατασκευές που έφεραν στο σχολείο διαπιστώθηκε ότι πολλοί είχαν δυσκολία να κατανοήσουν τη σχέση των τμημάτων που χρησιμοποιούσαν για την αναπαράσταση των μεταβλητών και τις σχέσεις μεταξύ τους. Παράδειγμα αποτελούν οι εικόνες 1, 2 από εργασίες μαθητών: (1) της μοντελοποίηση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3$, ή (2) της ταυτότητας $(\alpha+\beta+\gamma)^2$

Στη διδασκαλία που προτείνεται μέσω του παρόντος σχεδίου μαθήματος θα προσπαθήσουμε να υπερβούμε αυτά τα εννοιολογικά εμπόδια που οδηγούν τους μαθητές να σχηματίσουν λανθασμένες εκτιμήσεις του τρόπου εικονικής αναπαράστασης των.

Φωτεινός, Κ. (Γ5) -(2019-20)
Επίβλεψη: Δρ. Πατσιομίτου

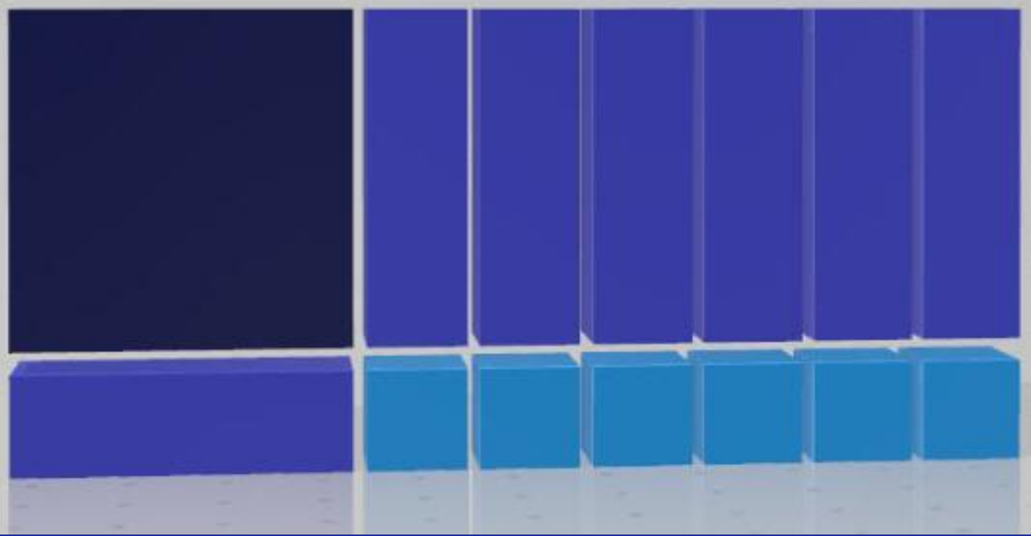
Εφαρμόζουμε διακρίνουσα :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 49 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25$

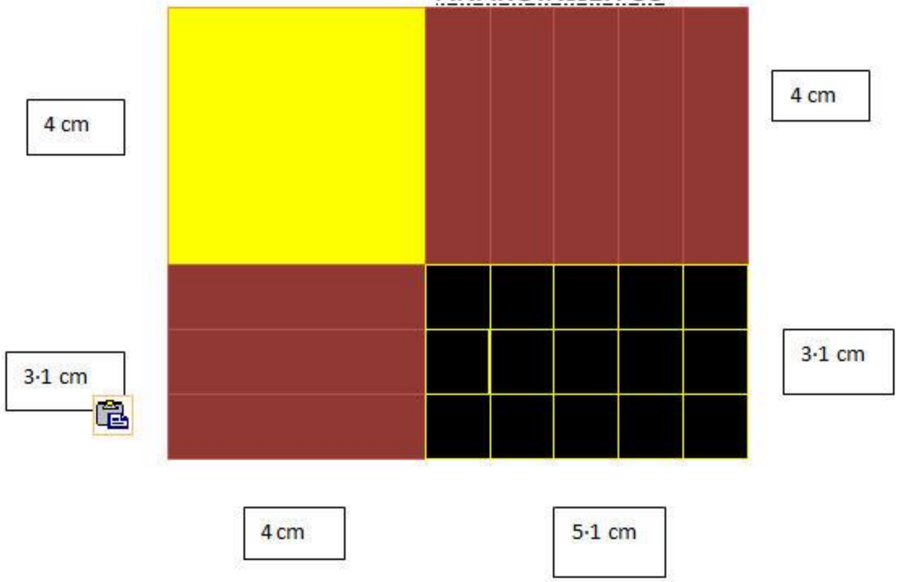
$\chi_1 = (- \beta + \sqrt{\Delta}) / 2\alpha = (-7 + \sqrt{25})/(2 \times 1) = (-7 + 5)/(2) = (-2)/2 = -1$
$x_2 = (-\beta - \sqrt{\Delta}) / 2\alpha = (-7 - \sqrt{25})/(2 \times 1) = (-7 - 5)/(2) = (-12)/(2) = -6$

Αλγεβρική παραγοντοποίηση : $(\chi + 1)(\chi + 6)$

Φωτεινός Κωνσταντίνος Γ5



ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ 55



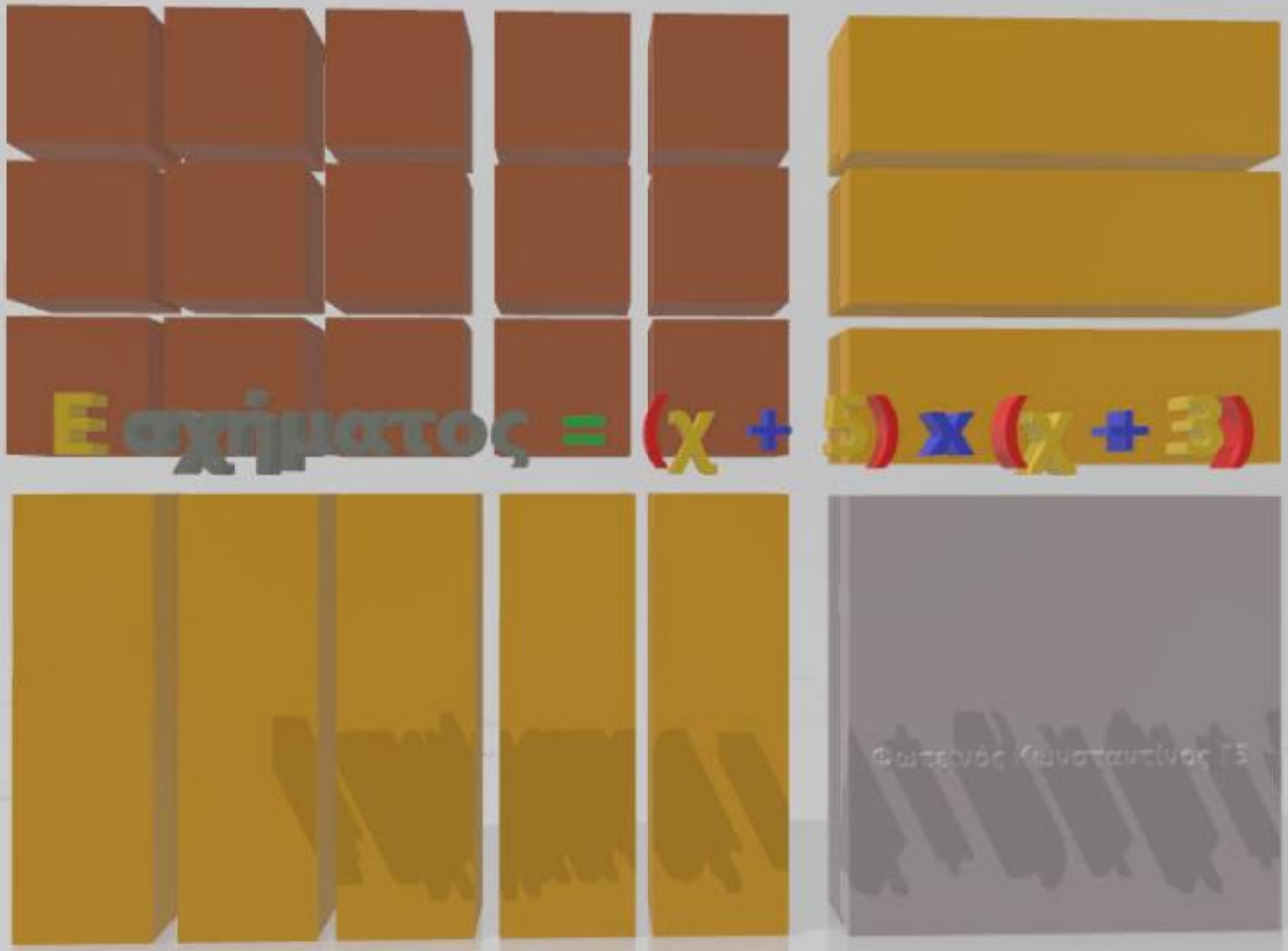
ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ=(5+4)*(3+4)=9*7=63 cm^2

Δελαγραμμάτικας, Κ. (Β2) -(2019-20)
Επίβλεψη: Δρ. Πατσιομίτου

Φωτεινός, Κ. (Γ5)

2019-20

Επίβλεψη: Δρ. Πατσιομίτου



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

- Ανατροφοδότηση από την ανάγνωση του σχετικού σεναρίου
- Αξιοποίηση ψηφιακών βίντεο στην τάξη και διαδραστικού πίνακα στην τάξη
- Οπτικοποίηση εννοιών και βιωματική μάθηση
- Ενεργή συμμετοχή μαθητών στην κατασκευή της γνώσης
- Παιχνίδι στην τάξη και σε περιβάλλοντα μάθησης
- Κοινωνικοσυναισθηματική ανάπτυξη των παιδιών και νοητική ανάπτυξη

«[…] *παιδοκεντρικότητα, την αυτενέργεια, την εποπτεία, την εργασία κατά ομάδες, τη σύνδεση του σχολείου με τη ζωή, τη διαθεματικότητα, την καλλιέργεια διαπροσωπικών σχέσεων δασκάλου-μαθητών και μαθητών μεταξύ τους. Οι μαθητές μαθαίνουν τότε, μέσω της ανακάλυψης ή μέσω της επίλυσης προβλήματος, διερευνώντας κάποιο φαινόμενο στα πλαίσια της σχολικής τους τάξης*» (Πατσιομίτου, 2021)

- Στόχος μας (Πατσιομίτου, 2021):

- ο μετασχηματισμός της επιστημονικής γνώσης σε σχολική γνώση, προσαρμόζοντάς την κάθε φορά στο επίπεδο των μαθητών της τάξης.
- να βοηθήσουμε τα παιδιά να μάθουν πώς να μαθαίνουν, ίσως το δυσκολότερο πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε ως δάσκαλοι μαθηματικών, ικανότητα την οποία θεωρώ ότι πρέπει να αποκτήσουν πριν τελειώσουν την Γ΄ τάξη του Γυμνασίου

- *Στο πλαίσιο αυτό βαρύνουσα σημασία έχει το υλικό που έχει χρησιμοποιηθεί στην τάξη, κατά τη διάρκεια του μαθήματος (εξεταζόμενο ως προς την εγκυρότητα, καταλληλότητα και πρωτοτυπία) και αφορά τη χρήση των νέων τεχνολογιών (διαδραστικός, λογισμικό, πρωτότυπη σχεδίαση στο λογισμικό, κ.λπ.), και τα αυτοσχέδια φύλλα εργασίας, πάντα οικοδομώντας επί της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών.*
- *Είναι καλό ακόμα να αναρωτηθούμε για το ποσοστό των μαθητών που συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα. Ακόμα, ποιο είναι και αν υπάρχει υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων, τόσο προφορικά όσο και γραπτά.*
- *Η συνεχής αυτή έρευνα θα μας δείξει και τα δικά μας «λάθη»: ποιες ερωτήσεις κάνουμε στα παιδιά, αν αυτές είναι ορθά διατυπωμένες. Πόσο έχουμε προετοιμαστεί και αν η εμπειρία μας επιβάλλει ή όχι να συμβουλευόμαστε κάποιο φύλο εργασίας. Επίσης, αν κρίνουμε αναγκαίο να αναπροσαρμόσουμε τη διδασκαλία μας στις ανάγκες της τάξης και των μαθητών μας.* (Πατσιομίτου, 2021)

Ενδεικτική βιβλιογραφία

Πατσιομίτου, Σ. (2022). *Εννοιολογικές και εργαλειακές διαδρομές με συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις στο Geometer's Sketchpad.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-645-302-1.

αναρτημένο στο Σύστημα "Εύδοξος"
https://service.eudoxus.gr/search/#a/id:112691124/0

Πατσιομίτου, Σ. (2021). Εργαλειακά μαθησιακά μονοπάτια στο Geogebra. Εκδόσεις Αγγελάκη. Αθήνα. ISBN:978-960-616-193-3. https://www.academia.edu/46858220/

Πατσιομίτου, Σ. (2020α) *Διδακτική των Μαθηματικών Ι: Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις.* Εκδόσεις «Ανατολικός».Αθήνα ISBN: 978-618-5136-46-8 (215 σελίδες)
https://www.academia.edu/42019703/

Πατσιομίτου, Σ. (2020β). Διδακτική, Διδασκαλία και Αξιολόγηση των Μαθηματικών: Μαθησιακά Μονοπάτια και Πρόγραμμα Σπουδών. Εκδόσεις «Ανατολικός».Αθήνα. ISBN: 978-618-5136-49-9 (215 σελίδες)
https://www.academia.edu/43702210/

Πατσιομίτου, Σ. (2020γ). Διδακτική και Διδασκαλία των Μαθηματικών: Από τη θεωρία στην πράξη με χρήση λογισμικών. Εκδόσεις Αγγελάκη. Αθήνα. ISBN: 978-960-616-155-1 (325 σελίδες). https://www.academia.edu/43795275/

Πατσιομίτου, Σ. (2009/2010) *Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad v4.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. Τόμος Α . ISBN:978-960-461-308-3(263 σελίδες)

Πατσιομίτου, Σ. (2009/2010) *Μαθαίνω Μαθηματικά με το Geometer's Sketchpad v4.* Εκδόσεις Κλειδάριθμος. Τόμος Β. ISBN:978-960-461-309-0 (254 σελίδες)

Πατσιομίτου, Σ. **(2021).** Δημιουργικότητα και δεξιότητες στα μαθηματικά. Αυτό έκδοση. ISBN: 978-618-00-3221-5. https://www.academia.edu/51047627/

Πατσιομίτου, Σ. **(2012)** Διδακτικές Προτάσεις: Τα Μαθηματικά στον Πραγματικό Κόσμο. Αυτό έκδοση. ISBN 978-960-93-4456. https://www.academia.edu/3517291/_

Patsiomitou, S. (2009). The Impact of Structural Algebraic Units on Students' Algebraic Thinking in a DGS Environment at the *Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT), 3*(3), 243-260. https://php.radford.edu/~ejmt/deliverAbstract.php?paperID=eJMT_v3n3p3

Patsiomitou, S. (2008c) Do geometrical constructions affect students algebraic expressions? *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics.* pp 193-202 Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. ISBN 978-0-9821164-1-8. 15-19 DECEMBER 2008https://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15001.pdf

Πατσιομίτου, Σ. (2007): Μοντελοποίηση των Προτάσεων των Στοιχείων του Ευκλείδη στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad. *Αστρολάβος*, (8), 61-89

Κολέζα, Ε., **Πατσιομίτου, Σ.** (2007) Μοντελοποίηση ταυτοτήτων με χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Πρακτικά *4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΤΠΕ* ,με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σσ.73-81, Σύρος, 4-6 Μαΐου 2007

Πατσιομίτου, Σ. (2006). *Μοντελοποίηση ταυτοτήτων με χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας.* Σενάριο διδασκαλίας και μάθησης αλγεβρικών ταυτοτήτων. https://www.academia.edu/3589846/

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ

ερωτήσεις και συζήτηση

spatsiom@gmail.com