



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



# Connect

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Διδασκαλία της ταυτότητας  
 $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$

**Δεκέμβριος, 2021**

**ΕΛΛΑΔΑ**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	1
1. Επισκόπηση Σεναρίου	2
2. Χρονοδιάγραμμα	4
3. Διδακτικό Σενάριο	7
Φάση Α (πριν το μάθημα) – Ασύγχρονη εξ αποστάσεως μάθηση	7
Φάση Β (κατά τη διάρκεια του μαθήματος)- Εκ του σύνεγγυς διδασκαλία (Σύγχρονη)	9
Φάση Γ (Μετά το μάθημα) – Εξ αποστάσεως μάθηση (Ασύγχρονη)	13
4. Φύλλα Εργασίας	14
Φύλλο Εργασίας 1 (Εργασία 2-Ασύγχρονη)	14
Φύλλο Εργασίας 2 (Εργασία 5 κατά την 1 <sup>η</sup> διδακτική ώρα εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας)	14
Εργασία για το σπίτι	14
Φύλλο Εργασίας 3 (Εργασία 9 κατά τη 2 <sup>η</sup> διδακτική ώρα εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας)	14
5. Εναλλακτικές/Παραλλαγές του σεναρίου	15
6. Αναστοχασμός	18
7. Βιβλιογραφικές αναφορές	18
8. Παράρτημα	19
Ιστορικό Σημείωμα	19

# 1. Επισκόπηση Σεναρίου

**Σχολικό Μάθημα:** Το σενάριο σχεδιάστηκε για τη διδασκαλία της 1<sup>ης</sup> από τις αξιοσημείωτες ταυτότητες, στο μάθημα των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου.

**Φορέας:** Περιφερειακή Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Αττικής

**Συντελεστές:** Γληνού Αικατερίνη, Κόσσυβας Γεώργιος

**Θέμα:** Διδασκαλία της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$

**Ηλικιακή ομάδα:** Μαθητές/τριες 15 ετών.

**Τάξη:** Γ΄ τάξη του Γυμνασίου.

## Προτεινόμενη Διάρκεια Διδασκαλίας

- **Δια ζώσης Διδασκαλία:** 90 λεπτά συνολικά (2 διδακτικές ώρες),
- **Εξ αποστάσεως Ασύγχρονη Διδασκαλία :** 60 λεπτά συνολικά.

## Εργαλεία και Υλικά

**Υποδομές/Συσκευές κ.λπ:** Το σενάριο απαιτεί: α) Για τη δια ζώσης διδασκαλία: αίθουσα διδασκαλίας που επιτρέπει εργασία σε ομάδες, πίνακα, μαρκαδόρους για τον πίνακα, τετράδια των μαθητών/μαθητριών. β) Για την εξ αποστάσεως διδασκαλία οι μαθητές/μαθήτριες, όπως και ο/η εκπαιδευτικός πρέπει να διαθέτουν laptop, tablet ή σταθερό υπολογιστή και σύνδεση στο διαδίκτυο. Επίσης αν υπάρχει διαδραστικός πίνακας στην τάξη μπορεί να αξιοποιηθεί.

**Διαδικτυακά εργαλεία:** Χρήση των πλατφορμών e-class, e-me, google forms, Geogebra, Sketchpad.

**Άλλα υλικά:** Φύλλα εργασίας, το τετράδιο του μαθητή, χρωματιστά χάρτινα τετράγωνα και ορθογώνια.

## Μαθησιακά Αποτελέσματα

Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν τη φύση της Άλγεβρας προτού βυθιστούν στον αλγεβρικό χειρισμό. Η ευκολία χρήσης αλγεβρικών συμβόλων διευκολύνει τους μαθητές να παριστάνουν μαθηματικές ιδέες με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια. Η δύναμη της άλγεβρας συνδέεται με την αναπαράσταση καταστάσεων με διαφορετικούς τρόπους και την εφαρμογή της στην επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο, η χρήση του αφηρημένου συμβολισμού για να οδηγήσει σε επιτυχία πρέπει να βασίζεται στην κατανόηση του αλγεβρικού συλλογισμού. Επιπλέον, οι συνδέσεις ανάμεσα στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία είναι τόσο σαφείς που είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε στη διδασκαλία αυτούς τους δύο μαθηματικούς κλάδους ιδιαίτερα στα Μαθηματικά του Γυμνασίου. Οι μαθητές και οι μαθήτριες που μελετούν την ιστορία των Μαθηματικών εκτιμούν το γεγονός ότι τα Μαθηματικά προσαρμόζονται διαρκώς για να εκπληρώσουν τις ανθρώπινες ανάγκες, υλικές και πνευματικές.

## Σκοποί:

Οι μαθητές αναπτύσσουν την αλγεβρική σκέψη και κατανόησή τους μέσα από τη μελέτη της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

## Στόχοι:

Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση να:

- Διερευνούν και να αποδεικνύουν αλγεβρικά την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  και να την ερμηνεύουν γεωμετρικά.
- Χρησιμοποιούν την ταυτότητα για να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε άλλη μορφή.
- Να εξετάζουν αν ισχύει η ισότητα:  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .
- Συνεργάζονται ανά ζεύγη ή σε ετερογενείς ομάδες.

Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να κατανοούν την ταυτότητα και να εφαρμόζουν αυτήν την κατανόηση σε μαθηματικά και πραγματικά πλαίσια.

## Ήπιες δεξιότητες που θα αναπτυχθούν:

- Συνεργασία σε ομάδες.
- Κριτική σκέψη.
- Δημιουργικότητα.
- Επίλυση προβλήματος.
- Ψηφιακές δεξιότητες.

**Προαπαιτούμενες γνώσεις:** Επιμεριστική ιδιότητα, πολλαπλασιασμός πολυωνύμων, ιδιότητες δυνάμεων, αναγωγή όμοιων όρων, εμβαδόν τετραγώνου και εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Η Άλγεβρα αποτελεί το μέρος της μαθηματικής γλώσσας και έχει σχεδιαστεί για να εκφράσει τη γενικότητα. Η γλώσσα της Άλγεβρας είναι το τυπικό μέσον για την ακριβή επικοινωνία και αποτελεί το θεμέλιο για τα ανώτερα Μαθηματικά. Πολλές από τις δυσκολίες της Άλγεβρας ανάγονται στην περιορισμένη κατανόηση των γενικών ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων. Κατά τον σχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων με μεταβλητές ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση του συμβολισμού και την ορθή απλοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων, όπως για παράδειγμα η ανακριβής χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:  $10x - 3 = 7x$ ,  $5x - x = 5$ . Είναι πολύ σημαντικός στόχος οι μαθητές να κατακτήσουν και να αξιοποιούν αυτή τη νέα γλώσσα. Η διδασκαλία και η μάθηση της Άλγεβρας ανοίγει τον δρόμο για την οργάνωση της αφηρημένης σκέψης, παρέχοντας ένα θαυμάσιο εργαλείο λογικού συλλογισμού. Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης είναι μια διαρκής εξελικτική διαδικασία. Στην προοπτική βελτίωσης της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί αναγκαίο μέσον παρακίνησης των μαθητών και εμπλουτισμού της μαθησιακής εμπειρίας τους.

## Γενική περιγραφή του σεναρίου

Η εκπόνηση του εκπαιδευτικού σεναρίου βασίζεται στα μοντέλα της μικτής μάθησης και της αντεστραμμένης τάξης και εκτυλίσσεται σε τρεις διακριτές φάσεις.

Το εκπαιδευτικό σενάριο εντάσσεται στη σχολική Άλγεβρα. Η Άλγεβρα είναι κάτι περισσότερο από ένα σύνολο κανόνων για τον χειρισμό συμβόλων, είναι ένας τρόπος σκέψης. Στο πλαίσιο αυτό το σενάριο αποσκοπεί στην κατανόηση της αλγεβρικής ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$  και όχι στην αποστήθισή της και περιλαμβάνει την εφαρμογή της στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Το εν λόγω σενάριο εκτυλίσσεται σε 2 διδακτικές ώρες εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας με διάρκεια σαράντα πέντε (45) λεπτά η κάθε μια και περίπου εξήντα (60) λεπτά συνολικά για

ενασχόληση των μαθητών /τριών με δραστηριότητες εξ αποστάσεως, ετερόχρονης μάθησης, πριν και μετά τη δια ζώσης διδασκαλία. Κατά τη διδασκαλία οι μαθητές υποστηρίζονται από τους συμμαθητές και τον εκπαιδευτικό.

## 2. Χρονοδιάγραμμα

Χρονική διάρκεια φάσεων	Σκοποί/στόχοι	Περιγραφή	Υλικά/Εργαλεία
<b>Φάση Α</b> <b>Ετερόχρονη Διδασκαλία</b>  <b>45 min</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1<sup>η</sup> δραστηριότητα: 10 min</li> <li>• 2<sup>η</sup> δραστηριότητα: 15 min</li> <li>• 3<sup>η</sup> δραστηριότητα: 15 min</li> <li>• 4<sup>η</sup> δραστηριότητα: 5 min</li> </ul>	Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση να: 1) ορίζουν πότε μια ισότητα είναι ταυτότητα και να την αναγνωρίζουν.  2) να βρίσκουν το ανάπτυγμα της $(\alpha + \beta)^2$ σε απλές περιπτώσεις.  3) να αποκτήσουν μια πρώτη γνωριμία με την απόδειξη της $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$  4) να εκφράζουν λεκτικά την παραπάνω ταυτότητα.	Στην e-me φτιάχτηκε διαδραστικό βίντεο. Στην e-class δημιουργήθηκε μάθημα με τίτλο: Η ταυτότητα "τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων". Σε αυτό το μάθημα οι μαθητές/μαθήτριες παρακολουθούν το video και απαντούν στις ερωτήσεις που τίθενται, συμπληρώνουν ένα φύλλο εργασίας το οποίο αποστέλλουν μέσω της πλατφόρμας ή μέσω e-mail στον εκπαιδευτικό, μελετούν ένα ιστορικό σημείωμα, αλληλεπιδρούν σε συζήτηση στο e-class και τέλος συμπληρώνουν ένα ερωτηματολόγιο αυτοαξιολόγησης και διατυπώνουν τις απορίες τους μέσω της δυνατότητας του forum της e-class.	Για την υλοποίηση του σεναρίου οι μαθητές/τριες και οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται laptop ή tablet ή σταθερό υπολογιστή και ακουστικά καθώς και σύνδεση στο διαδίκτυο. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν τη δυνατότητα του interactive video της e-me καθώς και τη χρήση της e-class, της e-me και των Google forms. Το διαδραστικό βίντεο βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&amp;id=1126675">https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&amp;id=1126675</a> Το ερωτηματολόγιο Αυτοαξιολόγησης για την 1 <sup>ο</sup> ασύγχρονο μάθημα βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://forms.gle/dmgcB5mr8bETFMwn6">https://forms.gle/dmgcB5mr8bETFMwn6</a>
<b>Φάση Β</b> <b>Ομόχρονη Διδασκαλία</b> <b>1<sup>η</sup> διδακτική ώρα</b>  <b>45 min</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1<sup>η</sup> δραστηριότητα : 15 min</li> </ul>	Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση: 1) Να αποδεικνύουν αλγεβρικά ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$  2) Να συνδέουν την ταυτότητα με τη	Μοιράζεται στους μαθητές και τις μαθήτριες φύλλο εργασίας με δραστηριότητες πάνω στην ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$  Παρέχεται επίσης φάκελος γεωμετρικών σχημάτων με τα οποία οι εκπαιδευόμενοι	Χάρτινα χρωματιστά γεωμετρικά σχήματα (2 τετράγωνα και 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα) για κάθε μαθητή/τρια, το τετράδιο του μαθητή. Επίσης χρησιμοποιείται το

<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2<sup>η</sup> δραστηριότητα: 10 min</li> <li>• 3<sup>η</sup> δραστηριότητα: 10 min</li> <li>• 4<sup>η</sup> δραστηριότητα: 10 min</li> </ul>	<p>γεωμετρική ερμηνεία της.</p> <p>3) Να εφαρμόζουν την ταυτότητα αντικαθιστώντας τα <math>\alpha</math> και <math>\beta</math> με απλά μονώνυμα.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Να εξετάζουν αν ισχύει η ισότητα: <math>(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2</math>.</li> </ul>	<p>καλούνται να συνθέσουν τη γεωμετρική τη ερμηνεία της ταυτότητας. Η γεωμετρική αναπαράσταση χρησιμοποιείται για να βοηθήσει τους μαθητές να οπτικοποιήσουν αλγεβρικές εκφράσεις. Προβαίνουν στη διάψευση του ισχυρισμού <math>(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2</math> με χρήση αντιπαραδείγματος. Μετά το τέλος της διδασκαλίας και στο πλαίσιο της εργασίας στο σπίτι οι μαθητές/τριες συμπληρώνουν τεστ αξιολόγησης φτιαγμένο στις φόρμες google.</p>	<p>εγκεκριμένο διδακτικό βιβλίο και ψηφιακοί πόροι κατά την κρίση του εκπαιδευτικού. Το ερωτηματολόγιο αυτό-αξιολόγησης βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://forms.gle/T9PXsui4L9kGo3YU8">https://forms.gle/T9PXsui4L9kGo3YU8</a></p>
<p><b>2<sup>η</sup> διδακτική ώρα</b></p> <p><b>45 min</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1<sup>η</sup> φάση: 15 min</li> <li>• 2<sup>η</sup> φάση: 15 min</li> <li>• 3<sup>η</sup> φάση: 15 min</li> </ul>	<p>Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Να συνεργάζονται σε ετερογενείς ομάδες.</li> <li>2) Να χρησιμοποιούν την ταυτότητα <math>(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2</math> στην επίλυση ασκήσεων εμπέδωσης και προβλημάτων.</li> </ol>	<p>Εφαρμόζεται η τεχνική jigsaw η οποία εκπληρώνει τους στόχους της συμπερίληψης και της διαφοροποίησης της διδασκαλίας. Αναγνωρίζεται ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες τους, την ετοιμότητά τους, την κουλτούρα και τον βαθμό κατοχής της ελληνικής γλώσσας. Ενθαρρύνεται η προσέγγιση της πολιτισμικά ευαισθητοποιημένης διδασκαλίας των Μαθηματικών που συνδέεται με την επίγνωση των διαφορετικών πολιτισμικών αξιών, παραδόσεων και κατανοήσεων που κάθε μαθητής 'φέρει' στην τάξη. Στο πλαίσιο της εργασίας στο σπίτι οι μαθητές/τριες συμπληρώνουν τεστ αξιολόγησης φτιαγμένο στις φόρμες google.</p>	<p>Κάθε μαθητής ή μαθήτρια, ανάλογα με τις γνωστικές ή άλλες ανάγκες, καλείται να συμμετάσχει ενεργητικά σε έργα μάθησης που οδηγούν σε αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα, η οποία προσφέρει προκλήσεις ανάπτυξης της μαθηματικής του/της σκέψης και συμβάλλουν στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από τη συμμετοχή του στα δρώμενα της τάξης. Στο πλαίσιο αυτό αξιοποιούνται κατάλληλα Φύλλα Εργασίας, το εγκεκριμένο διδακτικό βιβλίο και άλλο ψηφιακό υλικό κατά τη κρίση του εκπαιδευτικού. Το ερωτηματολόγιο των μαθητών/τριών</p>

			βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://forms.gle/T1vYhDehLsLN8opC8">https://forms.gle/T1vYhDehLsLN8opC8</a>
<b>Φάση Γ</b> <b>Ετερόχρονη</b> <b>Διδασκαλία</b>  <b>15 min</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• 10 min για το τεστ</li><li>• 5 min για το ερωτηματολόγιο</li></ul>	Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση:  1) Να προσφέρουν στον εκπαιδευτικό τις απαραίτητες πληροφορίες, που θα συμβάλουν στην ανατροφοδότηση της μάθησης σχετικά με την κατανόηση και τη χρήση της ταυτότητας.  2) Να συμπληρώσουν ένα τεστ με σκοπό να αξιολογήσουν τη διδασκαλία και τη μαθησιακή εμπειρία τους.	Οι μαθητές/τριες συνδέονται στην e-class όπου απαντούν σε τεστ και ερωτηματολόγιο για την ικανοποίησή τους από τη διδασκαλία, συνολικής διάρκειας περίπου 15 λεπτών.  Το τεστ έχει φτιαχτεί στην e-me και το ερωτηματολόγιο στις φόρμες google.	Για την υλοποίηση οι μαθητές/τριες χρειάζονται laptop, tablet ή σταθερό υπολογιστή και ακουστικά, καθώς και σύνδεση στο διαδίκτυο.  Το τεστ βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&amp;id=1128473">https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&amp;id=1128473</a>  Το ερωτηματολόγιο των μαθητών/τριών για το τέλος της διδασκαλία βρίσκεται στη διεύθυνση: <a href="https://forms.gle/khbMveSnpmKDnfs6">https://forms.gle/khbMveSnpmKDnfs6</a>

## 3. Διδακτικό Σενάριο

### Φάση Α (πριν το μάθημα) – Ασύγχρονη εξ αποστάσεως μάθηση

Ο εκπαιδευτικός ως ενεργός σχεδιαστής του εκπαιδευτικού σεναρίου καλείται να μεριμνήσει για την οργάνωση ελκυστικών πολυμεσικών και πολυτροπικών προσεγγίσεων, έτσι ώστε όλοι οι μαθητές και οι μαθήτριες ξεκινώντας από τις πρότερες γνώσεις και εμπειρίες τους να εισαχθούν με ευχάριστο τρόπο στην Άλγεβρα της Γ΄ Γυμνασίου, να εκτιμήσουν την ομορφιά των Μαθηματικών, να αποκομίσουν συνήθειες επιμονής και βιώματα επιτυχίας, ενισχύοντας τη μαθηματική τους αυτοπεποίθηση. Η πρώτη φάση προετοιμάζει την ενεργητική αλγεβρική μάθηση κατά τη διαζώσης διδασκαλία. Οι μαθητές εργάζονται αυτόνομα, αλληλεπιδρούν με το υλικό και αποκτούν γνώσεις πριν από τη διδασκαλία στην τάξη. Ο εκπαιδευτικός κατανοεί τις ανάγκες των μαθητών του, αναγνωρίζει τις αδυναμίες τους, επιλέγει σημεία διδακτικής έμφασης και θέτει ρεαλιστικούς στόχους ετερόχρονης μάθησης.

#### Στόχοι Α φάσης:

Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση να:

- Να ορίζουν πότε μια ισότητα είναι ταυτότητα και να την αναγνωρίζουν.
- Να βρίσκουν το ανάπτυγμα της  $(\alpha + \beta)^2$  σε απλές περιπτώσεις.
- Να αποκτήσουν μια πρώτη γνωριμία με την απόδειξη της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$
- Να εκφράζουν λεκτικά την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$ .

#### Ήπιες δεξιότητες που θα αναπτυχθούν:

- Ανάπτυξη ψηφιακών δεξιοτήτων
- Δεξιότητες ψηφιακής αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας

#### Εργασία 1

##### Περιγραφή

Στο μάθημα με τίτλο: η ταυτότητα "τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων", το οποίο δημιουργήθηκε στην e-class, οι μαθητές/μαθήτριες θα ανοίξουν το 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα. Η 1<sup>η</sup> Δραστηριότητα αφορά την παρακολούθηση διαδραστικού video το οποίο έχει δημιουργηθεί στην e-me με το εργαλείο interactive video στη διεύθυνση:

[https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p\\_embed&id=1126675](https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&id=1126675)

Κατά την παρακολούθηση οι μαθητές καλούνται να απαντούν στις ερωτήσεις που παρεμβάλλονται. Στόχος είναι οι μαθητές/τριες να χρησιμοποιήσουν τον χρόνο στο σπίτι ώστε να έχουν μια πρώτη επαφή με την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$  και την απόδειξή της. Οι μαθητές/τριες μπορούν να παρακολουθήσουν το βίντεο όσες φορές επιθυμούν και να μελετήσουν το προσφερόμενο υλικό με τον δικό τους ρυθμό στο δικό τους χώρο.

#### Εργασία 2

##### Περιγραφή

Οι μαθητές/τριες, καλούνται να συμπληρώσουν αρχικά έναν πίνακα υπολογίζοντας τις αριθμητικές τιμές αλγεβρικών παραστάσεων που συνδέονται με το ανάπτυγμα της



ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2$  για δεδομένες τιμές των μεταβλητών  $\alpha$  και  $\beta$ . Ο πίνακας βρίσκεται στο έγγραφο της 2<sup>ης</sup> δραστηριότητας του 1<sup>ου</sup> Ασύγχρονου μαθήματος σε link στην e-class. (Φύλλο Εργασίας 1)

<https://docs.google.com/document/d/1y8YHW8WKTkMfUCeSgmW3RTlvG9GYA5e/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true> Η συμπλήρωση του πίνακα δεν αναμένεται να επιφέρει ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές και τις μαθήτριες γιατί παραπέμπει σε γνώσεις που έχουν ήδη κατακτηθεί. Επίσης οι μαθητές/τριες καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις που διατυπώνονται στο ίδιο έγγραφο που περιέχει τον πίνακα. Τα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουν απαντώντας στις ερωτήσεις θα χρησιμοποιηθούν στην τάξη στην 1<sup>η</sup> διδακτική ώρα της εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας. Οι μαθητές/τριες θα απαντήσουν στις ερωτήσεις και θα συμπληρώσουν τον πίνακα της εργασίας τους, την οποία θα φωτογραφίσουν και θα αποστείλουν στον/στην εκπαιδευτικό στην e-class. Αν οι εκπαιδευόμενοι δεν έχουν τη δυνατότητα να εκτυπώσουν το έγγραφο της εργασίας, μπορούν να αντιγράψουν τον πίνακα και τις ερωτήσεις της ετερόχρονης δραστηριότητας στο τετράδιό τους και έπειτα με τη διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω να την αποστείλουν στον/στην εκπαιδευτικό.

### Εργασία 3

#### Περιγραφή

Οι μαθητές/τριες θα μελετήσουν ένα ιστορικό σημείωμα που συνδέει την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία και θα πάρουν μέρος σε συζήτηση σχετική με τη χρησιμότητα του ιστορικού σημειώματος που μελέτησαν.

<https://docs.google.com/document/d/154aw3zKVcV4i8jzyOVTYJSXlrvAdncJp/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true>

Στόχος είναι οι μαθητές/τριες να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους και να αναλάβουν την αυτορρύθμιση της μάθησής τους. Το ιστορικό σημείωμα θα αποτελέσει αφορμή για τη συζήτηση και τον περαιτέρω προβληματισμό στην υλοποίηση της 3<sup>ης</sup> Δραστηριότητας της 1<sup>ης</sup> διδακτικής ώρας της εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας.

### Εργασία 4

#### Περιγραφή

Για την αυτοαξιολόγηση της προσπάθειάς τους κατά το 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα, οι μαθητές/τριες θα συμπληρώσουν ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο στην e-class. Οι απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο μπορούν να οδηγήσουν σε ανατροφοδότηση του/της εκπαιδευτικού για τη μαθησιακή διαδικασία, καθώς και να δώσουν αφορμές συζήτησης και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών/τριών στο μάθημα. Το ίδιο ερωτηματολόγιο έχει δημιουργηθεί και προσφέρεται στους μαθητές/τριες στις φόρμες google στη διεύθυνση <https://forms.gle/dmqcB5mr8bETFMwn6> . Επίσης στην e-class για το 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα, αλλά και για όλες τις διδακτικές ώρες, δίνεται η δυνατότητα στους/στις μαθητές/τριες να εκφράσουν τις απορίες τους σε forum, όπου μπορούν να αλληλοβοηθηθούν και να αναπτύξουν διάλογο για θέματα των Μαθηματικών που τους προβληματίζουν.

### Αξιολόγηση Α φάσης:

Στοιχεία διαμορφωτικής αξιολόγησης μπορούν να προκύψουν από την ποιότητα της εργασίας των μαθητών/τριων την οποία θα αποστείλουν στον/στην εκπαιδευτικό, καθώς από τη συμμετοχή τους στις συζητήσεις με τους συμμαθητές/τριες τους.

### Φάση Β (κατά τη διάρκεια του μαθήματος)- Εκ του σύνεγγυς διδασκαλία (Σύγχρονη)

#### Στόχοι Β φάσης:

Οι μαθητές/μαθήτριες είναι σε θέση να:

- Να αποδεικνύουν αλγεβρικά ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$
- Να συνδέουν την ταυτότητα με τη γεωμετρική ερμηνεία της.
- Να εφαρμόζουν την ταυτότητα αντικαθιστώντας τα  $\alpha$  και  $\beta$  με απλά μονώνυμα.
- Να εξετάζουν αν ισχύει η ισότητα:  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

#### Ύψιες δεξιότητες που θα αναπτυχθούν:

- Δεξιότητες συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Δεξιότητες Κριτικής σκέψης και δημιουργικότητας.
- Εργασία σε ομάδες, δεξιότητες ευελιξίας και προσαρμοστικότητας.
- Ανταλλαγή επιχειρημάτων στην ολομέλεια της τάξης.
- Δεξιότητες δημιουργίας διαπροσωπικών σχέσεων.

### Εργασία 5

#### Περιγραφή

Κατά την 1<sup>η</sup> Δραστηριότητα της 1<sup>ης</sup> διδακτικής ώρας της εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας οι μαθητές/τριες χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις στις οποίες έχουν καταλήξει από την εργασία τους στο 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα, απαντούν στην ερώτηση αν η ισότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  είναι ταυτότητα και αποδεικνύουν την ταυτότητα. (Φύλλο Εργασίας 2)

[https://docs.google.com/document/d/1mKDF7aPIPZD4sBSe4c\\_Oy8Num5tSrWv3/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtopf=true&sd=true](https://docs.google.com/document/d/1mKDF7aPIPZD4sBSe4c_Oy8Num5tSrWv3/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtopf=true&sd=true)

Οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονται πρώτα ατομικά για τον χρόνο που έχει οριστεί και ύστερα μετέχουν σε μαθηματικές συζητήσεις ανάμεσα στον/στην εκπαιδευτικό και τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Στη συνέχεια, συζητούν με τον/τη συμμαθητή/συμμαθήτριά τους που κάθονται στο ίδιο θρανίο ώστε να καταλήξουν σε συμπεράσματα και να αλληλοβοηθηθούν. Είναι πιθανόν να χρειαστούν κάποια αριθμητικά παραδείγματα από τον πίνακα τα οποία ήδη συμπλήρωσαν στο 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα ή κάποια επιπρόσθετα. Επιπλέον, ο πίνακας της εργασίας του 1<sup>ου</sup> Ασύγχρονου μαθήματος μεταφέρεται συμπληρωμένος στον πίνακα της τάξης, ή προβάλλεται με βιντεοπροβολέα σε ολόκληρη την τάξη, έτσι ώστε να είναι ορατός από όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες για να μπορούν να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες διορθώσεις και διευκρινίσεις. Από τις αριθμητικές επαληθεύσεις που αντλούνται από τον πίνακα οι μαθητές αναμένεται να συνειδητοποιήσουν την αναγκαιότητα της αλγεβρικής απόδειξης. Ο μαθηματικός συλλογισμός, η τεκμηρίωση και η απόδειξη αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μάθησης των Μαθηματικών και προσφέρουν τρόπους έκφρασης της αιτιολόγησης. Οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν επαγωγικό συλλογισμό για να αναζητήσουν τη μαθηματική γενίκευση.

Ο εκπαιδευτικός συζητά για την έννοια της ταυτότητας, για την οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν ήδη αποκτήσει μια πρώτη γνωριμία κατά την παρακολούθηση του video που προηγήθηκε της δια ζώσης διδασκαλίας στην τάξη. Στη συνέχεια της διδασκαλίας συνεργάζονται για την επινόηση μιας απόδειξης. Στο τέλος ένας μαθητής ή μια μαθήτρια γράφει την αλγεβρική απόδειξη της ταυτότητας στον πίνακα της τάξης. Στην ίδια δραστηριότητα οι εκπαιδευόμενοι πρέπει να προβούν σε έναν νοερό υπολογισμό: να χρησιμοποιήσουν το αποτέλεσμα της δύναμης  $200^2$  για να βρουν νοερά πόσο ισούται η δύναμη  $201^2$ . Έτσι οι μαθητές/τριες μπορούν να αντιληφθούν μια χρησιμότητα της ταυτότητας την οποία διδάσκονται.

## Εργασία 6

### Περιγραφή

Στην 2<sup>η</sup> δραστηριότητα της 1<sup>ης</sup> διδακτικής ώρας της δια ζώσης διδασκαλίας ζητείται από τους μαθητές και τις μαθήτριες να καταθέσουν την τεκμηριωμένη άποψή τους στην τάξη για τον ισχυρισμό πως «για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει :  $(x + 2)^2 = x^2 + 2^2$ ».

Μαθηματικές δραστηριότητες με ανοικτά ερωτήματα τα οποία εστιάζονται στην εξέταση παρανοήσεων «ψευδοϊσοτήτων» όπως αν και τότε ισχύει η ισότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$  μπορεί να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στο λογικοφανές και στα αποτελέσματα αριθμητικών παραδειγμάτων. Ο εν λόγω ισχυρισμός μπορεί να λειτουργήσει ως εικασία, η οποία μπορεί να διαψευστεί με ένα αντιπαράδειγμα. Η εικασία είναι ένας σημαντικός δρόμος προς τη μαθηματική ανακάλυψη. Συχνά οι μαθητές εκφράζουν τις εικασίες τους καθώς περιγράφουν τη σκέψη τους με δικά τους λόγια και τις εξερευνούν με χρήση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να διατυπώνουν και να δοκιμάζουν τις εικασίες τους αξιοποιώντας ποικίλα μέσα όπως αριθμομηχανές, χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία και μαθηματικά σύμβολα. Επιπλέον, η συνεργατική διερεύνηση είναι ωφέλιμη, γιατί οι μαθητές ακούν τις εικασίες και τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους. Στο Γυμνάσιο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν να αναγνωρίζουν και να αξιολογούν εικασίες θέτοντας ερωτήσεις όπως: *Ισχύει η ισότητα πάντα; Ισχύει μόνο μερικές φορές; Ο τρόπος με τον οποίο τίθενται οι ερωτήσεις βοηθά τους μαθητές να μάθουν να εικάζουν.* Σταδιακά οι μαθητές μαθαίνουν να επινοούν, να διερευνούν και να τελειοποιούν εικασίες. Οι εικασίες έχουν πάντοτε γενική ισχύ. Στα Μαθηματικά είναι πολύ σημαντικές γιατί ανοίγουν το δρόμο στην τεκμηριωμένη αιτιολόγηση και την ανάπτυξη του αποδεικτικού συλλογισμού.

## Εργασία 7

### Περιγραφή

Η 3<sup>η</sup> Δραστηριότητα συνδέεται με το ιστορικό σημείωμα το οποίο οι μαθητές/μαθήτριες έχουν ήδη μελετήσει στο 1<sup>ο</sup> Ασύγχρονο μάθημα. Η γεωμετρική αναπαράσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οπτικοποιήσει την ταυτότητα. Επιδιώκεται οι μαθητές και οι μαθήτριες να οικοδομήσουν συνδέσεις ανάμεσα στην οπτική αναπαράσταση, τη λεκτική περιγραφή και την αλγεβρική μορφή της ταυτότητας. Ο/Η εκπαιδευτικός θα υποστηρίξει τους μαθητές και τις μαθήτριες ανάλογα με τις ανάγκες τους. Η συζήτηση ξεκινά με τη μεταφορά πληροφοριών και σκέψεων των μαθητών/μαθητριών από το ιστορικό σημείωμα που έχουν μελετήσει. Το ιστορικό σημείωμα αποτελεί την αφορμή για τη συζήτηση, την υλοποίηση της Δραστηριότητας και τον περαιτέρω προβληματισμό.

Σε αυτή τη Δραστηριότητα της 1ης διδακτικής ώρας της δια ζώσης διδασκαλίας στους/στις μαθητές/τριες δίνεται φάκελος που περιέχει ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha$ , ένα τετράγωνο πλευράς  $\beta$  και δύο ορθογώνια με μήκος  $\alpha$  και πλάτος  $\beta$  (οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι θετικοί αριθμοί με  $\alpha > \beta$ ). Ζητείται να ακολουθήσουν τις παρακάτω οδηγίες και να δείξουν γεωμετρικά ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Οι οδηγίες προς τους μαθητές και τις μαθήτριες είναι οι εξής:

- 1) Χρησιμοποιώντας τα μήκη  $\alpha$  και  $\beta$  να βρείτε τα εμβαδά των τεσσάρων σχημάτων. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων και να το γράψετε στο τετράδιό σας στην απλούστερη δυνατή μορφή.
- 2) Να συνδυάσετε τα 4 σχήματα και να σχηματίσετε ένα μεγάλο τετράγωνο. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς αυτού του τετραγώνου συναρτήσει των  $\alpha$  και  $\beta$ ; Να βρείτε το εμβαδόν αυτού του μεγάλου τετραγώνου από το μήκος της πλευράς του.
- 3) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα (1) και (2). Ποια αλγεβρική σχέση συνδέει το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων σχημάτων που σας δόθηκαν αρχικά;

Η Δραστηριότητα ολοκληρώνεται με την έκθεσή της στον πίνακα της τάξης ή σε διαδραστικό πίνακα αν υπάρχει. Ο/Η εκπαιδευτικός ή κάποιος /κάποια μαθητής /μαθήτρια συνοψίζει και προβαίνει σε συγκεφαλαίωση.

## Εργασία 8

### Περιγραφή

Στην 4<sup>η</sup> Δραστηριότητα της 1<sup>ης</sup> ώρας της δια ζώσης διδασκαλίας, στους/στις μαθητές/τριες ζητείται για εμπέδωση να βρουν συνεργατικά τα αναπτύγματα δύο αλγεβρικών ταυτοτήτων. Τα αναπτύγματα παρουσιάζονται από μαθητές/τριες στον πίνακα της τάξης.

Για εργασία στο σπίτι δίνονται η μελέτη συγκεκριμένων σελίδων καθώς και η λύση συγκεκριμένων ασκήσεων από το σχολικό βιβλίο, καθώς και η συμπλήρωση πίνακα όπου θα βρουν αναπτύγματα ταυτοτήτων.

<https://docs.google.com/document/d/1KNZPcxLEBnjiFEuCdqm8YjzZfu417H1A/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtopf=true&sd=true>

Η λύση των ασκήσεων καθώς και η συμπλήρωση του πίνακα προβλέπεται να αποσταλούν στον/στην εκπαιδευτικό ως φωτογραφίες, δεδομένου ότι για να γραφούν μαθηματικά σύμβολα στην e-class ή στην e-me είναι απαραίτητη η χρήση κώδικα που δεν γνωρίζουν και δεν διδάσκονται οι μαθητές/τριες. Επίσης ως εργασία στο σπίτι, προβλέπεται οι μαθητές/τριες να συμπληρώσουν ηλεκτρονικά φύλλο αξιολόγησης της συνεργασίας που ανέπτυξαν με το συμμαθητή/τρια τους αλλά και της δικής τους γνώσης, το οποίο έχει δημιουργηθεί στις φόρμες google και βρίσκεται στη διεύθυνση: <https://forms.gle/T9PXsui4L9kGo3Yu8>

Οι απαντήσεις των μαθητών/τριών μπορούν να αποτελέσουν για τον/την εκπαιδευτικό εργαλείο διαμορφωτικής αξιολόγησης. Σε κάθε διδακτική ώρα, εκ του σύνεγγυς ή εξ αποστάσεως, προβλέπεται επίσης, να υπάρχει στην e-class, forum όπου με την εποπτεία του/της εκπαιδευτικού οι μαθητές/τριες θα διατυπώνουν απορίες και θα αλληλοϋποστηρίζονται για την επίλυσή των αποριών τους. Σε αυτό το forum θα συμμετέχει

και ο/η εκπαιδευτικός με ρόλο καθοδηγητικό, υποστηρικτικό, διευκολυντικό και εμπλουτιστικό.

## Εργασία 9

### Περιγραφή

Στη 2<sup>η</sup> διδακτική ώρα της εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας οι μαθητές/τριες χωρίζονται σε ομάδες και εφαρμόζεται η τεχνική jigsaw της διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

Ο εκπαιδευτικός ενημερώνει την τάξη για τις φάσεις εκτύλιξης του εν λόγω μαθήματος.

Για την εφαρμογή της τεχνικής, η τάξη χωρίζεται σε ομάδες των 4-5 μαθητών/τριών που καλούνται να επιλύσουν μια ποικιλία ασκήσεων για εμπέδωση, εξάσκηση και εμπάθυνση στην ταυτότητα που διδάχτηκαν. Υποθέτουμε ότι η τάξη έχει χωριστεί σε 5 πενταμελείς ομάδες. Ο εκπαιδευτικός έχει ετοιμάσει συνεργατικά θέματα ισάριθμα προς τα μέλη κάθε ομάδας. (Φύλλο Εργασίας 3)

<https://docs.google.com/document/d/1QpmDlzV6jEHuOPlerMNADgxTi51b0U8b/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true>

Κάθε ομάδα συζητά τον τρόπο κατανομής των θεμάτων. Τα μέλη της ομάδας συμφωνούν μεταξύ τους ποιο θέμα θα αναλάβει το καθένα από αυτά. Οι μαθητές/μαθήτριες που έχουν το θέμα 1 συγκεντρώνονται σε ένα μέρος της αίθουσας και αποτελούν την ομάδα ειδημόνων 1. Στο σενάριο η ομάδα ονομάζεται «Θαλής ο Μιλήσιος». Όμοια, οι μαθητές/μαθήτριες που έχουν το θέμα 2 αποτελούν την ομάδα ειδημόνων 2 που στο σενάριο λέγεται «Πυθαγόρας ο Σάμιος» κ.ο.κ. Στις υπόλοιπες ομάδες έχουν δοθεί τα ονόματα «Ευκλείδης», «Ερατοσθένης» και «Διόφαντος ο Αλεξανδρινός». Ο στόχος της ονοματοδοσίας είναι διττός: από τη μια μεριά μπορεί να επιδράσει παρακινητικά στην ομάδα και από την άλλη οι μαθητές/μαθήτριες λαμβάνουν τον ρόλο επιφανών μαθηματικών της Αρχαιότητας. Μάλιστα η χρονολογική σειρά της δράσης των Μαθηματικών τηρείται και κατά τη διάρκεια των παρουσιάσεων των ασκήσεων στην τάξη. Έτσι πρώτη παρουσιάζει η ομάδα «Θαλής ο Μιλήσιος», στη συνέχεια η ομάδα «Πυθαγόρας ο Σάμιος» κ.λπ.

Τα μέλη κάθε ομάδας ειδημόνων σε συγκεκριμένο χρόνο που συμφωνείται με τον εκπαιδευτικό από την αρχή, ή που ο εκπαιδευτικός ορίζει, επιλύουν συνεργατικά την άσκηση που τους ανατέθηκε διασφαλίζοντας ότι όλα τα μέλη της ομάδας ξέρουν να την λύνουν και να την εξηγούν. Η φάση αυτή του σεναρίου προτείνεται να διαρκέσει 15 λεπτά. Έπειτα οι μαθητές/μαθήτριες γυρίζουν στις αρχικές τους ομάδες και καθένας διδάσκει και εξηγεί στα υπόλοιπα μέλη την άσκησή που έλυσε στην ομάδα των ειδημόνων. Αυτή η φάση προτείνεται να έχει διάρκεια 15 λεπτά. Ο συντονιστής κάθε ομάδας που έχει οριστεί από τους μαθητές-μέλη της ομάδας, ενημερώνει τον εκπαιδευτικό ότι η ομάδα ολοκλήρωσε το έργο της και όλα τα μέλη γνωρίζουν να επιλύουν όλες τις ασκήσεις της ομάδας.

Στην ολομέλεια της τάξης παρουσιάζονται από τους εκπροσώπους των ομάδων οι ασκήσεις και ακολουθεί διάλογος. Η προτεινόμενη συνολική διάρκεια των παρουσιάσεων στην ολομέλεια είναι 15 λεπτά. Ο εκπαιδευτικός κατά την εργασία των ομάδων παρακολουθεί την εξέλιξη των δραστηριοτήτων και έχει ρόλο υποστηρικτικό, ενθαρρυντικό και ενισχυτικό. Οι προτεινόμενες ασκήσεις είναι ενδεικτικές και ο/η εκπαιδευτικός διενεργεί τις απαραίτητες προσαρμογές ανάλογα με τις ιδιαίτερες συνθήκες της τάξης του και σύμφωνα με το εφαρμοζόμενο Πρόγραμμα Σπουδών. Για εργασία στο σπίτι οι μαθητές/μαθήτριες θα επιλύσουν από την άσκηση 1 στη σελίδα 49 του εγκεκριμένου

διδασκαλίας του βιβλίου τα ερωτήματα η, θ, στ και ια και θα απαντήσουν ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης που βρίσκεται στο <https://forms.gle/T1vYhDehLsLN8opC8> . Το ερωτηματολόγιο έχει φτιαχτεί στις φόρμες google. Στην e-class αναφέρεται η εργασία ώστε οι μαθητές/τριες να μπορούν να την βρουν ακόμη και αν απουσίαζαν από το σχολείο. Στην e-class έχουν αναρτηθεί και τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν από τις ομάδες κατά τη 2<sup>η</sup> διδακτική ώρα. Πριν τη διδασκαλία τα φύλλα αυτά είναι απενεργοποιημένα και ο/η εκπαιδευτικός τα ενεργοποιεί μετά τη διδασκαλία ώστε να είναι προσβάσιμα από όλους/ες τους μαθητές και τις μαθήτριες.

Η έρευνα δείχνει ότι υπάρχουν ομάδες μαθητών οι οποίοι κατά τη φοίτησή τους στο Γυμνάσιο εκδηλώνουν συστηματικά δυσκολίες στη μάθηση των Μαθηματικών, άνισες επιδόσεις και χαμηλή αυτοπεποίθηση. Η εφαρμογή της τεχνικής jigsaw προωθεί τη διαφοροποιημένη διδασκαλία και μάθηση στα Μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να δημιουργήσουν ένα ασφαλές, συμπεριληπτικό και χωρίς αποκλεισμούς περιβάλλον μάθησης, να δεσμευτούν για την ισότιμη ενεργητική ένταξη όλων των εκπαιδευομένων. Κάθε μαθητής, ανεξάρτητα από την προέλευση και την ταυτότητά του δικαιούται να έχει τις ευκαιρίες, οι οποίες θα τον βοηθήσουν να επιδείξει τις καλύτερες δυνατές ακαδημαϊκές επιδόσεις. Σε κάθε τάξη Μαθηματικών, είναι ζωτικής σημασίας να αναγνωρίζεται η πολλαπλή κοινωνική και πολιτισμική ταυτότητα των μαθητών. Οι εκπαιδευτικοί έχουν υποχρέωση να καλλιεργήσουν συνθήκες μάθησης που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες, τις ανάγκες καθώς και τις ποικίλες πολιτισμικές και γλωσσικές εμπειρίες των μαθητών και μαθητριών και να θέτουν υψηλές προσδοκίες για όλους. Καθώς αναπτύσσουν διαφοροποιημένες πολυτροπικές πρακτικές, μεγιστοποιούν τις ευκαιρίες μαθηματικής μάθησης για όλους.

### **Αξιολόγηση Β φάσης:**

Οι μαθητές/τριες για τη 2η διδακτική ώρα αξιολογούνται από τη συμμετοχή τους στην ομάδα και από την ενεργοποίησή τους κατά την εξέλιξη της τεχνικής jigsaw. Οι μαθητές/τριες συμπληρώνουν, όπως ήδη αναφέρθηκε, μετά τη διδασκαλία, εξ αποστάσεως, ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της συνεργατικής μάθησης και της εργασίας των ομάδων κατά τη 2<sup>η</sup> διδακτική ώρα.

Οι απαντήσεις των μαθητών/τριών μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό για διαμορφωτική αξιολόγηση και για τον εμπλουτισμό των στοιχείων που διαθέτει για την δική του αξιολόγηση της διδασκαλίας. Η διδασκαλία των 2 δια ζώσης διδακτικών ωρών αξιολογείται από τα φύλλα αξιολόγησης των μαθητών/τριών, από την ικανοποίηση του/της εκπαιδευτικού και των μαθητών /τριών και από τη συμμετοχή τους στη διδακτική διαδικασία. Επίσης ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να αξιολογήσει τη διδασκαλία απαντώντας σε ερωτήσεις όπως: 1) Ήταν αποδοτικές οι δραστηριότητες που επέλεξα; 2) Κατάφερα να επιτύχω τους στόχους μου; 3) Ενεπλάκησαν όλοι οι μαθητές/τριες στη μαθησιακή διαδικασία; 4) Τι πρέπει να αλλάξω;

### **Φάση Γ (Μετά το μάθημα) – Εξ αποστάσεως μάθηση (Ασύγχρονη)**

#### **Εργασία 10**

#### **Περιγραφή**

Στην e-class στο 2ο Ασύγχρονο μάθημα που έχει δημιουργηθεί ως ενότητα στο μάθημα «Η ταυτότητα "τετράγωνο αθροίσματος δύο όρων"», οι μαθητές/τριες απαντούν σε τεστ αξιολόγησης της μάθησης της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ . Το τεστ έχει



φτιαχτεί στην e-me και έχει αναρτηθεί στην e-class. Το test βρίσκεται στο σύνδεσμο [https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p\\_embed&id=1128473](https://content.e-me.edu.gr/wp-admin/admin-ajax.php?action=h5p_embed&id=1128473) . Επίσης οι μαθητές/τριες απαντούν σε ηλεκτρονικό ερωτηματολόγιο σχετικό με τη μαθησιακή τους εμπειρία από τη διδασκαλία της πρώτης από τις αξιοσημείωτες ταυτότητες. Το ερωτηματολόγιο έχει φτιαχτεί με τις φόρμες google και βρίσκεται στο σύνδεσμο <https://forms.gle/khbMveSnpmKDnfs6> . Όλα τα ερωτηματολόγια που προτείνονται στο σενάριο είναι ενδεικτικά του τρόπου με τον οποίο μπορεί να δημιουργηθεί ένα ερωτηματολόγιο. Ο/Η εκπαιδευτικός έχει άμεση ανατροφοδότηση για την επιτυχία κάθε μαθητή/τριας ξεχωριστά στο τεστ καθώς και για την εμπειρία του/της από τη μαθησιακή διαδικασία και την εξέλιξή της.

### **Αξιολόγηση της Γ φάσης:**

Γενικά, η αξιολόγηση είναι στενά συνδεδεμένη με τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η αξιολόγηση διατρέχει όλη τη διδακτική διαδικασία, ελέγχει την πορεία επίτευξης των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων και ανατροφοδοτεί την πορεία μάθησης των μαθητών σε ατομικό, αλλά και σε συλλογικό επίπεδο. Ο εκπαιδευτικός καλείται να προσαρμόζει την αξιολογική διαδικασία στις 'ιδιαιτερότητες' και τις ανάγκες των μαθητών της τάξης του, να διαμορφώνει ανάλογα το πώς και το τι προτίθεται να αξιολογήσει και να αξιοποιεί τα κατάλληλα εργαλεία αξιολόγησης.

Η φάση αυτή του 2<sup>ου</sup> Ασύγχρονου μαθήματος παρέχει πληροφορίες στον/στην εκπαιδευτικό για τη γνωστική κατάσταση των μαθητών αλλά και την ικανοποίησή τους από το μάθημα. Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανατροφοδοτικά για την αξιολόγηση της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό.

## **4. Φύλλα Εργασίας**

### **Φύλλο Εργασίας 1 (Εργασία 2-Ασύγχρονη)**

<https://docs.google.com/document/d/1y8YHW8WKTkMfUCeSgmW3RTlvG9GYA5e/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true>

### **Φύλλο Εργασίας 2 (Εργασία 5 κατά την 1<sup>η</sup> διδακτική ώρα εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας)**

[https://docs.google.com/document/d/1mKDF7aPIPZD4sBSe4c\\_Oy8Num5tSrWv3/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/document/d/1mKDF7aPIPZD4sBSe4c_Oy8Num5tSrWv3/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true)

### **Εργασία για το σπίτι**

<https://docs.google.com/document/d/1KNZPcxLEBnjiFEuCdqm8YjzZfu4I7H1A/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true>

### **Φύλλο Εργασίας 3 (Εργασία 9 κατά τη 2<sup>η</sup> διδακτική ώρα εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας)**

<https://docs.google.com/document/d/1QpmDlzV6jEHuOPIerMNADqxTi51b0U8b/edit?usp=sharing&oid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true>

## 5. Εναλλακτικές/Παραλλαγές του σεναρίου

Ο σχεδιασμός των εκπαιδευτικών σεναρίων είναι μια διεργασία μάθησης και επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί, μετέχοντας σε κοινότητες μάθησης, καλούνται μαζί με συναδέλφους τους σύμφωνα με το μοντέλο της ανεστραμμένης τάξης να εκπονήσουν καινοτόμα εκπαιδευτικά σενάρια. Η πιλοτική εφαρμογή του έργου CONNECT πραγματοποιείται σε κάθε σχολείο και υποστηρίζεται από ερευνητές, επιμορφωτές ή επιστημονικούς συντονιστές. Ακολουθεί αναστοχαστικός διάλογος στις ομάδες των εκπαιδευτικών. Οι αναστοχαστικές πρακτικές αποτελούν την κινητήρια δύναμη για την υπέρβαση της απομόνωσης των εκπαιδευτικών, την κριτική διερεύνηση, τη διαρκή βελτίωση των ίδιων των εκπαιδευτικών και του διδακτικού τους έργου.

Ο εκπαιδευτικός της τάξης είναι σχεδιαστής και ενορχηστρωτής της διδασκαλίας και οφείλει να προσαρμόσει το εκπαιδευτικό σενάριο στις μαθησιακές ανάγκες και δυνατότητες των μαθητών και μαθητριών. Κατά κανόνα η διαφοροποιημένη διδασκαλία ανταποκρίνεται στην ανομοιογένεια της τάξης και ενδεχομένως προς τους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες ή με προσφυγικό ή μεταναστευτικό υπόβαθρο. Ο διδάσκων με κατάλληλη εναρμόνιση του Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών του Γυμνασίου καλείται να εκπληρώσει τις ανάγκες όλων των εκπαιδευομένων. Η ευέλικτη διδακτική διαχείριση, η ανακατανομή της χρονικής διάρκειας των ομόχρονων και ετερόχρονων δραστηριοτήτων, η αύξηση των ευκαιριών ενεργητικής μάθησης και η επιλογή ερωτηματολογίων και ασκήσεων έχουν ενδεικτικό χαρακτήρα. Επίσης για τις ανάγκες του εκπαιδευτικού σεναρίου ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές της τάξης να συγκεντρώνουν τα γνωστικά τους επιτεύγματα σε έναν ατομικό ηλεκτρονικό φάκελο, το e-portfolio κάθε μαθητή, στον οποίο έχει πρόσβαση ο εκπαιδευτικός και μπορεί να τον χρησιμοποιήσει στην αξιολόγηση. Οι τελικές διδακτικές αποφάσεις ανήκουν στον εκάστοτε εκπαιδευτικό. Κατά την εφαρμογή ορισμένες δραστηριότητες του σεναρίου μπορούν να υλοποιηθούν με εναλλακτικούς τρόπους. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

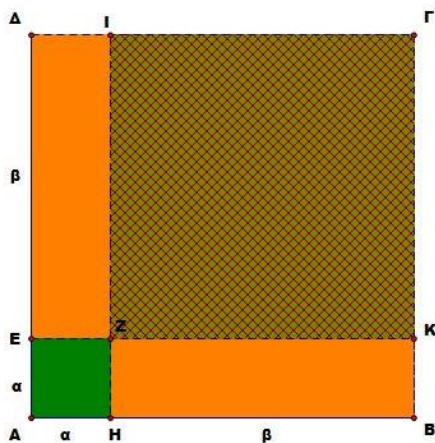
1) Τα ερωτηματολόγια που απευθύνονται στους μαθητές και τις μαθήτριες για τη διαζώσης διδασκαλία, είναι φτιαγμένα στις φόρμες google, που προσφέρουν αποτελέσματα και είναι εύκολα προσβάσιμες. Επίσης τα ίδια ερωτηματολόγια έχουν φτιαχτεί στην e-class που προσφέρει αυτή τη δυνατότητα για τους μαθητές/μαθήτριες που χρησιμοποιούν την e-class ως πλατφόρμα τηλεκπαίδευσης. Σε περίπτωση που ο/η εκπαιδευτικός δεν επιλέγει τις δυνατότητες αυτές, τα ερωτηματολόγια μπορούν να δοθούν ως έγγραφα και να συμπληρωθούν στη διαζώσης διδασκαλία. Επίσης υπάρχει δυνατότητα να δοθούν στους εκπαιδευόμενους και να ζητηθεί να συμπληρωθούν ετερόχρονα από τους/τις μαθητές/τριες και να αποσταλούν στον εκπαιδευτικό μέσω της πλατφόρμας τηλεκπαίδευσης που χρησιμοποιείται για την εξ αποστάσεως διδασκαλία ή με τη χρήση του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου το οποίο φαίνεται να επιλέγουν αρκετοί εκπαιδευτικοί για την επικοινωνία τους με τους εκπαιδευόμενους.

<https://docs.google.com/document/d/1OfmELIABAwcgmUcB8iMo6XIDsE6pn3l7/edit?usp=sharing&ouid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true> και

[https://docs.google.com/document/d/1117Emls0OTDBwVs\\_nOzomYZnSl2ufdUs/edit?usp=sharing&ouid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/document/d/1117Emls0OTDBwVs_nOzomYZnSl2ufdUs/edit?usp=sharing&ouid=110311086047101024055&rtpof=true&sd=true)



2) Η 3η δραστηριότητα της 1ης δια ζώσης διδακτικής ώρας όπου οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν χάρτινα γεωμετρικά σχήματα για τη γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση ψηφιακών εφαρμογών όπως το Sketchpad ή το Geogebra, με τα οποία δίνεται έμφαση στον εμπλουτισμό της κουλτούρας των μαθητών/τριών με ποιοτική μαθηματική σκέψη. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων προϋποθέτει την ύπαρξη κατάλληλων υποδομών στη σχολική μονάδα, εκτός βέβαια από την γνώση χρήσης της ψηφιακής τεχνολογίας από εκπαιδευτικούς και μαθητές/τριες. Ύπαρξη tablet ή laptop ή σταθερών ηλεκτρονικών υπολογιστών ή διάθεση αίθουσας υπολογιστών και η σύνδεση στο διαδίκτυο είναι απαραίτητα για τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Ο/Η εκπαιδευτικός για την υλοποίηση της δραστηριότητας θα πρέπει να έχει προετοιμάσει κατάλληλο φύλλο εργασίας των μαθητών/τριών και ένα αρχείο στο Sketchpad με το οποίο θα κάνουν Μαθηματικά οι μαθητές/τριες. Μια ενδεικτική πρόταση είναι η παρακάτω:



$$AE = 1,64 \text{ εκ.}$$

$$ED = 6,29 \text{ εκ.}$$

$$AE+ED = 7,93 \text{ εκ.}$$

$$\text{Εμβαδόν } ABGD = 62,90 \text{ εκ.}^2$$

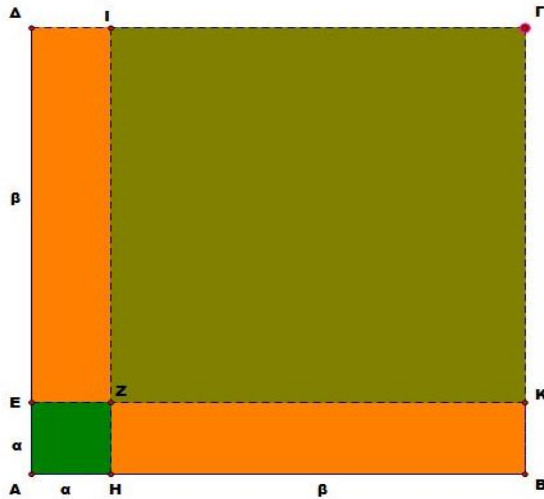
$$(ΔΙΖΕ) = 10,32 \text{ εκ.}^2$$

$$(ΚΖΗΒ) = 10,32 \text{ εκ.}^2$$

$$(ΙΖΚΓ) = 39,57 \text{ εκ.}^2$$

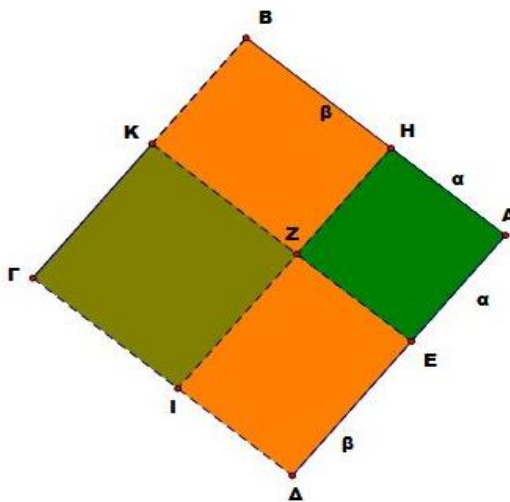
$$(ΑΕΖΗ) = 2,69 \text{ εκ.}^2$$

$$(ΔΙΖΕ)+(ΚΖΗΒ)+(ΙΖΚΓ)+(ΑΕΖΗ) = 62,90 \text{ εκ.}^2$$



**ΑΕ = 1,64 εκ.**  
**ΕΔ = 8,57 εκ.**  
**ΑΕ+ΕΔ = 10,21 εκ.**  
**Εμβαδόν ΑΒΓΔ = 104,17 εκ.²**  
  
**(ΔΙΖΕ) = 14,05 εκ.²**  
**(ΚΖΗΒ) = 14,05 εκ.²**  
**(ΙΖΚΓ) = 73,37 εκ.²**  
**(ΑΕΖΗ) = 2,69 εκ.²**

$$(ΔΙΖΕ)+(ΚΖΗΒ)+(ΙΖΚΓ)+(ΑΕΖΗ) = 104,17 \text{ εκ.}^2$$



**ΑΕ = 2,50 εκ.**  
**ΕΔ = 3,16 εκ.**  
**ΑΕ+ΕΔ = 5,66 εκ.**  
**Εμβαδόν ΑΒΓΔ = 32,09 εκ.²**

**(ΔΙΖΕ) = 7,91 εκ.²**  
**(ΚΖΗΒ) = 7,91 εκ.²**  
**(ΙΖΚΓ) = 10,01 εκ.²**  
**(ΑΕΖΗ) = 6,25 εκ.²**

$$(ΔΙΖΕ)+(ΚΖΗΒ)+(ΙΖΚΓ)+(ΑΕΖΗ) = 32,09 \text{ εκ.}^2$$

Στο Geogebra μια δυνατότητα είναι να χρησιμοποιηθεί μια ψηφιακή δραστηριότητα από την σελίδα <https://www.geogebra.org/search/identity%20square%20of%20sum> πέραν της δυνατότητας να κατασκευάσει ο/η εκπαιδευτικός μια δραστηριότητα για τους/τις μαθητές/τριες του. Η πρόσθετη παιδαγωγική αξία που προσφέρει η χρήση των δυναμικών ψηφιακών εργαλείων στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ όλων

των εμπλεκομένων στη μαθησιακή διαδικασία που υποστηρίζει την συνεργατική μάθηση και επικοινωνία. Επίσης προσφέρουν διερεύνηση και πειραματισμό σε μαθηματικές έννοιες και δομές και βέβαια πολλαπλές αναπαραστάσεις εννοιών με τη δυνατότητα μετακίνησης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη που υποστηρίζει την κατανόηση των μαθητών/τριών.

## 6. Αναστοχασμός

- Να συνεξετάσετε την αλγεβρική ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  και τη σύνδεση με τη γεωμετρική εποπτεία της. Νομίζετε ότι η Δραστηριότητα 3 της 1<sup>ης</sup> δια ζώσης διδασκαλίας εμπλουτίζει την κατανόηση της ταυτότητας; Τι θα αλλάζατε από τη διδασκαλία σας αν την εφαρμόζατε σε ψηφιακό περιβάλλον;
- Θεωρείτε ότι οι προτεινόμενες δραστηριότητες στη 2<sup>η</sup> δια ζώσης διδασκαλία υπηρετούν τους στόχους που έχουν τεθεί για τη διδασκαλία της ταυτότητας; Οι δραστηριότητες είναι κατάλληλες για την υλοποίηση διαφοροποιημένης διδασκαλίας των Μαθηματικών; Ποιες δραστηριότητες θα αλλάζατε στο δικό σας σχεδιασμό για να υπηρετήσετε καλύτερα τη διαφοροποιημένη διδασκαλία σας;

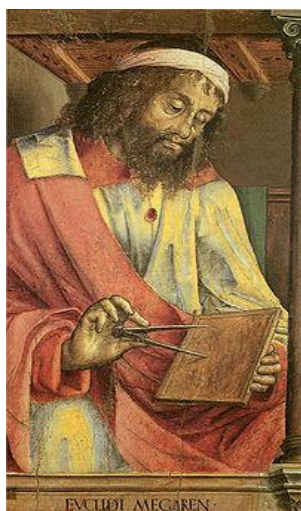
## 7. Βιβλιογραφικές αναφορές

- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.) (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Horak, V. M. & Horak, W. J. (1981). Geometric Proofs of Algebraic Identities. *Mathematics Teacher*, 74 (3) 212-16, 231.
- Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of School Algebra. In D.A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Mason, J., Graham, A., Pirnm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to /Roots of Algebra*. Milton Keynes: The Open University Press.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.
- van den Kieboom, L.A., & Magiera, M.T. (2012). Cultivating teachers' reasoning and sense making. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 17 (6), 352-357.
- Vinogradova, N. (2010). From Geometric Shapes to Algebraic Symbols. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (9), 500-501.
- ΙΕΠ. (2015). *Οδηγός για τον Εκπαιδευτικό, Εργαλεία Σύγχρονης Προσέγγισης της Διαφοροποιημένης Παιδαγωγικής για το Γυμνάσιο*.
- Κόσσυβας, Γ. (2008). Επιμεριστική ιδιότητα και εκπληκτικές κανονικότητες. *Ευκλείδης Α΄*, 70, 11-14, Αθήνα: ΕΜΕ.

- Κόσσυβας, Γ. (2009). Διδακτικές-μαθησιακές διαδρομές βασισμένες στη διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών. *Το Φ*, 6, 133-160, Αθήνα.
- Ματσαγγούρας, Η. (1999). *Θεωρία της Διδασκαλίας*, τομ. Β'. Αθήνα: Gutenberg.
- Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2009). *Μάθηση και Διδασκαλία την εποχή της Πληροφορίας*, τομ. Α'. Αθήνα: Έκδοση Νέων Τεχνολογιών.
- Φλουρής, Γ. (2003). *Η αρχιτεκτονική της διδασκαλίας*. Αθήνα: Γρηγόρης.

## 8. Παράρτημα

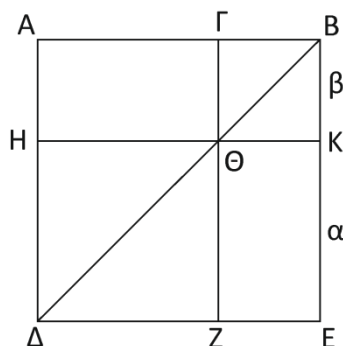
### Ιστορικό Σημείωμα



Ο Ευκλείδης (325 π.Χ. - 270 π.Χ.) ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε στην Αλεξάνδρεια και είναι ίσως ο πιο διάσημος δάσκαλος Μαθηματικών όλων των εποχών. Έγραψε το έργο με τίτλο «Στοιχεία», το οποίο ήταν βασικό διδακτικό εγχειρίδιο γεωμετρίας για περίπου 2.000 χρόνια. Δείτε την πρόταση 4 του Βιβλίου 2:

**Πρόταση:** *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί τυχαία από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα.*

Ο Ευκλείδης συνέδεσε την πρόταση αυτή με το ακόλουθο σχήμα:



Στο προηγούμενο σχήμα βλέπουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB που διαιρείται από το εσωτερικό σημείο Γ σε δύο μικρότερα τμήματα. Το τετράγωνο του όλου είναι το μεγάλο τετράγωνο ABEΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΓΖ, τα οποία είναι παράλληλα με τις AB και AD αντίστοιχα, τέμνουν τη διαγώνιο ΒΔ στο ίδιο σημείο (Θ).

Τα τετράγωνα που κατασκευάζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ είναι: το ΗΘΖΔ και το ΓΒΚΘ. Παρατηρούμε ότι με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓΘΗ και ΘΚΕΖ.

Εύκολα παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου ABEΔ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων ΗΘΖΔ και ΓΒΚΘ και των ορθογωνίων ΑΓΘΗ και ΘΚΕΖ. Καθένας μπορεί οπτικά να παρατηρήσει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

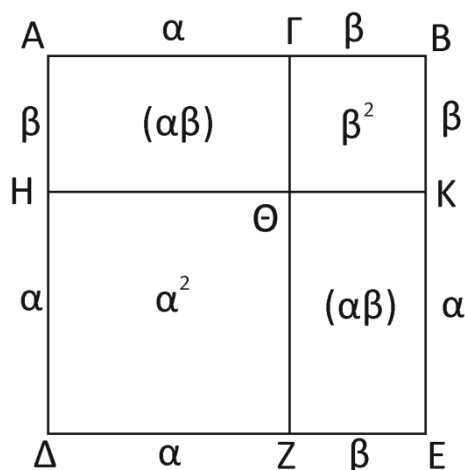
Έτσι η πρόταση του Ευκλείδη εκφράζεται από την προηγούμενη αλγεβρική ταυτότητα.

Στη συνέχεια ακολουθεί αναλυτική απόδειξη.

**Απόδειξη της ταυτότητας:**  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha + \beta$ , ένα τετράγωνο πλευράς  $\alpha$  και δύο ορθογώνια με μήκος  $\alpha$  και πλάτος  $\beta$  (οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι θετικοί αριθμοί με  $\alpha > \beta$ ). Η αλγεβρική παράσταση  $(\alpha + \beta)^2$  δεν είναι παρά το γινόμενο:  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ . Αυτό μπορεί να παρασταθεί ως ένα τετράγωνο του οποίου οι πλευρές είναι  $(\alpha + \beta)$  και το εμβαδόν είναι  $(\alpha + \beta)^2$ . Το τετράγωνο με πλευρά  $(\alpha + \beta)$  αποτελείται από τέσσερις περιοχές. Στο παρακάτω σχήμα παριστάνουμε:

- Με  $\alpha^2$  το εμβαδόν του τετραγώνου ΗΘΖΗ.
- Με  $\beta^2$  το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΒΚΘ.
- Με  $(\alpha\beta)$  το εμβαδόν των ίσων ορθογωνίων ΑΓΘΗ και ΘΚΕΖ.



Η αλγεβρική ταυτότητα μπορεί ναδειχθεί με βάση τα εμβαδά των τετραγώνων και ορθογωνίων. Παρατηρώντας το σχήμα μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη ισότητα εμβαδών:

$$(ABED) = (HΘZΔ) + (ΑΓΘΗ) + (ΘΚΕΖ) + (ΓΒΚΘ) \quad (1)$$

Επειδή τα δύο ορθογώνια έχουν ίσες πλευρές θα έχουν ίσα εμβαδά:  $(ΑΓΘΗ) = (ΘΚΕΖ)$ .

Έτσι η ισότητα (1) γράφεται ως εξής:

$$(ABED) = (HΘZΔ) + 2(ΑΓΘΗ) + (ΓΒΚΘ) \quad (2)$$

Τα τετράγωνα ABED, HΘZΔ και ΓΒΚΘ ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα AB, ΗΔ και ΓΒ. Έτσι η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί:

$$AB^2 = HΔ^2 + 2(ΑΓ)(ΑΗ) + ΓΒ^2 \quad (3)$$

Είναι  $HΔ = \alpha$  και  $ΓΒ = \beta$ . Τότε  $AB = \alpha + \beta$  και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΘΗ είναι  $(ΑΓ)(ΑΗ) = \alpha\beta$ .

Έτσι η εξίσωση (3) οδηγεί στην επιθυμητή ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Η ισότητα αυτή, εκτός από θετικούς, ισχύει για οποιουσδήποτε αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , άρα είναι μία αλγεβρική ταυτότητα.