



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Connect

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι ανισώσεις στην καθημερινή ζωή

Μάρτιος, 2022

ΕΛΛΑΔΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	1
1. Επισκόπηση Σεναρίου.....	2
2. Χρονοδιάγραμμα	5
3. Διδακτικό Σενάριο.....	7
Φάση Α΄ (πριν το μάθημα) – Ασύγχρονη εξ αποστάσεως μάθηση	7
Φάση Β΄ (κατά τη διάρκεια του μαθήματος)- Εκ του σύνεγγυς διδασκαλία (Σύγχρονη)	9
Φάση Γ΄ (Μετά το μάθημα) – Εξ αποστάσεως μάθηση (Ασύγχρονη)	12
4. Φύλλα Εργασίας.....	12
Φύλλο Εργασίας 1 για την 1η φάση (Ετερόχρονη μάθηση).....	12
Φύλλο Εργασίας 2 για την 3η φάση (Ετερόχρονη μάθηση).....	13
5. Εναλλακτικές/Παραλλαγές του σεναρίου	13
6. Αναστοχασμός	14
6. Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	14

1. Επισκόπηση Σεναρίου

Μάθημα: Μαθηματικά

Φορέας: Περιφερειακή Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Αττικής.

Συντελεστές: Γληνού Αικατερίνη - Κόσσυβας Γεώργιος

Θέμα: Οι ανισώσεις στην καθημερινή ζωή.

Μαθητές/τριες που απευθύνεται: Μαθητές/τριες 15 ετών.

Τάξη: Γ΄ τάξη του Γυμνασίου.

Προτεινόμενη διάρκεια:

Εκ του σύνεγγυς διδασκαλία: 90 λεπτά συνολικά (2 διδακτικές ώρες),

Εξ αποστάσεως Ασύγχρονη Διδασκαλία : 90 λεπτά συνολικά.

Εργαλεία και Υλικά:

Υποδομές/Συσκευές κ.λπ.:

Για την υλοποίηση του σεναρίου απαιτούνται: α) Για την εκ του σύνεγγυς διδασκαλία: Να υπάρχει δυνατότητα χωρισμού των μαθητών σε τετραμελείς ομάδες. Απαιτούνται χαρτόνια ή αφίσες διαστάσεων περίπου 50×80 που θα μοιραστούν στις ομάδες των μαθητών καθώς και μαρκαδόροι μεγάλου μεγέθους. β) Για την εξ αποστάσεως διδασκαλία οι μαθητές/μαθήτριες, όπως και ο/η εκπαιδευτικός πρέπει να διαθέτουν laptop, tablet ή σταθερό υπολογιστή και σύνδεση στο διαδίκτυο.

Ψηφιακά εργαλεία:

Χρήση των google forms, Power point και του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου της πλατφόρμας ασύγχρονης τηλεεκπαίδευσης ή του ηλεκτρονικού ταχυδρομείου του παρόχου internet. Ανάρτηση του υλικού της ετερόχρονης εξ αποστάσεως εκπαίδευσης «πριν την τάξη» (διαδραστικό βίντεο, Ατομικό Φύλλο Εργασίας) και «μετά την τάξη» (Ατομικό Φύλλο Εργασίας, τελικό τεστ αξιολόγησης) σε προσβάσιμο αποθηκευτικό χώρο για κοινή χρήση (Google Drive).

Άλλα υλικά:

Ένα φύλλο με την εκφώνηση του προβλήματος της ομόχρονης διδασκαλίας, το τετράδιο του μαθητή, χαρτί μιλιμετρέ ή τετραγωνισμένο, χάρακες, μολύβια, γόμες, το εγκεκριμένο βιβλίο των μαθηματικών της Γ΄ τάξης.

Δυσκολίες και Μαθησιακά Αποτελέσματα:

Οι ανισώσεις αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης και επίλυσης προβλημάτων τα οποία μπορούν να προέρχονται από άλλα πεδία των Μαθηματικών, από άλλες επιστήμες και από την καθημερινή ζωή. Ο μονομερής προσανατολισμός στην εφαρμογή ετοιμοπαράδοτων αλγορίθμων και την απομνημόνευση χρηστικών κανόνων και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων έχει συνήθως φτωχά μαθησιακά αποτελέσματα.

Η κατανόηση και επίλυση γραμμικών ανισώσεων πρώτου βαθμού, αποτελεί ιδιαίτερη πρόκληση για τους μαθητές του Γυμνασίου. Οι μαθητές εκλαμβάνουν συχνά τις

ανισώσεις ως εξισώσεις και αναμένουν ότι μόνο μία τιμή θα επαληθεύει την ανίσωση. Επιπλέον, όταν οι μαθητές λύνουν ανισώσεις, συχνά εστιάζουν στον μηχανικό χειρισμό των συμβόλων και δεν σκέφτονται ολιστικά για το νόημα και τη λογική συνοχή των λύσεων. Σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών στις ανισώσεις συνδέονται κυρίως με τη φύση της άλγεβρας. Ειδικότερα, έχουν επισημανθεί δυσκολίες κατανόησης για τα ακόλουθα: το σημείο “-”, τη χρήση κατάλληλου συμβόλου “ $<$, $>$, \leq , \geq ”, την παράσταση των λύσεων ως διάστημα, την αντιστροφή ανισοτήτων (π. χ. ισοδυναμία των $x > 5$ και $5 < x$) και τις διπλοανισώσεις. Επιπλέον, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τον χειρισμό της αλγεβρικής γλώσσας στις ανισώσεις και τη μετάφραση της καθημερινής γλώσσας των ανισοτήτων σε αλγεβρική γλώσσα και δεν ερμηνεύουν σωστά το αποτέλεσμα της επίλυσης μιας ανίσωσης ιδιαίτερα όταν αυτό σχετίζεται με κάποιο πραγματικό πρόβλημα. Όταν απεικονίζουν τις λύσεις σε άξονα συχνά ως λύσεις της ανίσωσης προσδιορίζουν μόνο φυσικούς αριθμούς και όχι πραγματικούς. Στο συγκεκριμένο σενάριο οι μαθητές διερευνούν ανισώσεις, τις λύνουν αριθμητικά, με το μοντέλο της ζυγαριάς και στη συνέχεια αλγεβρικά με τις ιδιότητες των ανισοτήτων και παριστάνουν τις λύσεις γραφικά. Η πραγμάτευση των ανισώσεων γίνεται με αντίστοιχο τρόπο προς τις εξισώσεις, εστιάζοντας όμως στις διαφορές με τις εξισώσεις, κυρίως στο σύνολο των λύσεων και την αναπαράσταση αυτών στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, οι μαθητές ενθαρρύνονται να εξερευνήσουν, να ανακαλύψουν και να σκεφτούν πώς σχετίζονται οι γραφικές παραστάσεις των ανισώσεων και των συναρτήσεων και να παραστήσουν τις λύσεις στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Τέλος, ασχολούνται με ρεαλιστικά προβλήματα ανισώσεων τα οποία αναφέρονται στην καθημερινή ζωή, προσελκύουν την προσοχή τους και αποτελούν πρόκληση για σκέψη και διερεύνηση. Τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνται οι μαθητές αποσκοπούν στη μετάφραση των ρεαλιστικών καταστάσεων σε μαθηματική γλώσσα με ανίσωση και στην αλγεβρική και γραφική επίλυση. Ελέγχεται η ισχύς των λύσεων της ανίσωσης με βάση τους περιορισμούς που θέτει το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος. Η κατανόηση των ανισοτήτων από τους μαθητές επιτυγχάνεται μέσα από τη μαθηματοποίηση καταστάσεων του πραγματικού κόσμου. Με τη μοντελοποίηση ενθαρρύνονται οι μαθητές να σκεφτούν ολιστικά τις πιθανές λύσεις των ανισώσεων.

Όσον αφορά τη διερεύνηση και επίλυση προβλημάτων ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, οι μαθητές προβαίνουν σε αλγεβρική λύση των ανισώσεων, παριστάνουν τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών, καθώς σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxy. Επιπλέον, εξετάζουν αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις του προβλήματος.

Γενικός στόχος:

Οι μαθητές/τριες να αναπτύξουν την αλγεβρική σκέψη και κατανόησή μέσα από τη μελέτη προβλημάτων της καθημερινότητας που λύνονται με ανισώσεις και τη γραφική επίλυσή τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Οι μαθητές/μαθήτριες να είναι σε θέση:

- Να αναγνωρίζουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να ελέγχουν αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή όχι.

- Να λύνουν απλές ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο χρησιμοποιώντας άλγεβρα και να παρουσιάζουν τις λύσεις στον άξονα των αριθμών.
- Να λύνουν απλές ανισώσεις σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις και εκφράζοντας τις λύσεις γραφικά στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy .
- Να λύνουν απλά πραγματικά προβλήματα εκφράζοντας την ανίσωση αλγεβρικά και να εξετάζουν αν οι λύσεις της ανίσωσης είναι και λύσεις του προβλήματος.

Ύψιες Δεξιότητες που θα αναπτυχθούν:

- Συνεργασία σε ομάδες.
- Κριτική σκέψη.
- Δημιουργικότητα.
- Επίλυση προβλήματος.
- Ψηφιακές δεξιότητες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- Οι μαθητές/τριες πρέπει να γνωρίζουν:
- Να λύνουν εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.
- Να γνωρίζουν τις ανισότητες και τις ιδιότητές τους.
- Να γνωρίζουν τη διάταξη πραγματικών αριθμών.
- Να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων της μορφής $y=ax+b$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy .

Γενική περιγραφή του σεναρίου

Η εκπόνηση του εκπαιδευτικού σεναρίου βασίζεται στα μοντέλα της μικτής μάθησης και της αντεστραμμένης τάξης και εκτυλίσσεται σε τρεις διακριτές φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά ετερόχρονη εξ αποστάσεως διδασκαλία όπου χρησιμοποιείται το μοντέλο της ανεστραμμένης τάξης. Στη δεύτερη φάση στο σενάριο προβλέπονται δύο διδακτικές ώρες εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας με συνολική διάρκεια ενενήντα (90) λεπτά και στην τρίτη φάση προβλέπεται η αξιολόγηση της μάθησης των μαθητών/τριών οι οποίοι/ες συμπληρώνουν εξ αποστάσεως ένα τεστ αξιολόγησης της μάθησης. Οι δύο φάσεις ετερόχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας (1η και 3η) προβλέπεται να έχουν συνολική διάρκεια περίπου ενενήντα (90) λεπτά συνολικά.

Κατά τη διδασκαλία οι μαθητές/τριες εργάζονται ομαδοσυνεργατικά και υποστηρίζονται από τους συμμαθητές/τριες τους και τον/την εκπαιδευτικό. Για την 1η ετερόχρονη εξ αποστάσεως διδασκαλία οι μαθητές/τριες ειδοποιούνται μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου να μελετήσουν το υλικό μάθησης. Στόχος της 1ης ετερόχρονης εξ αποστάσεως διδασκαλίας είναι οι μαθητές/τριες να μελετήσουν στο σπίτι μέρος της θεωρίας ώστε να εμπλακούν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και να επιτευχθεί αποδοτικότερη διαχείριση του διδακτικού χρόνου στην εκ του σύνεγγυς διδασκαλία.

2. Χρονοδιάγραμμα

Φάσεις διδασκαλίας Χρονική διάρκεια	Σκοποί/Στόχοι	Περιγραφή	Υλικά/Εργαλεία
Φάση Α΄ Ετερόχρονη Διδασκαλία Συνολική διάρκεια 45΄ 1^η εργασία: 20΄ (βίντεο) 2^η εργασία : 25΄ (ΑΦΕ)	<p>Οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση να:</p> <ul style="list-style-type: none">• Να αναγνωρίζουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να ελέγχουν αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή όχι.• Να λύνουν απλές ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο χρησιμοποιώντας άλγεβρα και να παρουσιάζουν τις λύσεις στον άξονα των αριθμών.• Να λύνουν απλές ανισώσεις σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις και εκφράζοντας τις λύσεις γραφικά στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy.• Να λύνουν απλά πραγματικά προβλήματα εκφράζοντας την ανίσωση αλγεβρικά και να εξετάζουν αν οι λύσεις της ανίσωσης είναι και λύσεις του προβλήματος.	<p>Εργασία 1 Οι μαθητές/τριες μελετούν ένα βίντεο που περιγράφει την επίλυση ενός προβλήματος ανίσωσης.</p> <p>Εργασία 2 Οι μαθητές/τριες της τάξης μελετούν το υλικό του Ατομικού Φύλλου Εργασίας (ΑΦΕ) και απαντούν σε απλές ερωτήσεις κατανόησης.</p> <p>Οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν το υλικό στο σπίτι, σύμφωνα με το δικό τους ρυθμό. Δίδεται η οδηγία να προσπαθήσουν να το κατανοήσουν και να καταγράψουν απορίες ή σκέψεις που πηγάζουν από τη μελέτη του.</p>	<p>Το βίντεο βρίσκεται στη διεύθυνση: https://youtu.be/RIgZ2Lshd18</p> <p>Το υλικό μάθησης (ΑΦΕ) είναι αναρτημένο στον προσβάσιμο αποθηκευτικό χώρο Google Drive για κοινή χρήση. Το υλικό μάθησης βρίσκεται στη διεύθυνση: https://drive.google.com/file/d/1XDG01TReGOKCBh14rUnxGTekTbnZHMB3/view?usp=sharing</p>
Φάση Β΄ Ομόχρονη διδασκαλία Η ομαδοσυνεργατική ή διδασκαλία πραγματοποιείται σε δύο διαδοχικές	<p>Οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση:</p> <ul style="list-style-type: none">• Να διερευνήσουν ατομικά το πρόβλημα, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις και να σχηματίσουν μια πρώτη αναπαράσταση του προβλήματος.	<p>Πριν τη συλλογική επίλυση στις ομάδες σε μια συλλογική αφίσα προηγείται η ατομική κατανόηση του προβλήματος από κάθε μαθητή/μαθήτρια.</p> <p>Οι μαθητές και οι</p>	<p>Η εκφώνηση του προβλήματος βρίσκεται στη διεύθυνση: https://drive.google.com/file/d/1m0j5WNCbUpbGhHs0fQESz8BqirNzNgQG/view?usp=sharing</p>

<p>ώρες.</p> <p>1^η Διδακτική ώρα 45'</p> <ul style="list-style-type: none">• A. Ατομική διερεύνηση και κατανόηση του ανοιχτού προβλήματος: 5'.• B. Διερεύνηση του προβλήματος από τετραμελείς ομάδες μαθητών και σύνταξη συλλογικών αφισών : 40'.	<ul style="list-style-type: none">• Να διερευνήσουν το πρόβλημα στις τετραμελείς ομάδες.• Να γράψουν μία τουλάχιστον αιτιολογημένη λύση του προβλήματος σε μια συλλογική αφίσα (χαρτόνι) την οποία συναποδέχονται.	<p>μαθήτριες κάθε ομάδας καλούνται να συμφωνήσουν σε μια αιτιολογημένη λύση του προβλήματος και ετοιμάζονται για τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης.</p>	<p>ng</p> <p>Η εκφώνηση του προβλήματος μοιράζεται στους μαθητές (ένα φύλλο κατά ομάδα).</p> <p>Απαιτούνται χαρτόνια (π. χ. κανσόν, ή μεγάλες αφίσες) που θα μοιραστούν στις ομάδες των μαθητών καθώς και μαρκαδόροι μεγάλου μεγέθους.</p> <p>Την κοινή τεκμηρίωση της λύσης γράφουν πάνω στην αφίσα.</p>
<p>Φάση Β' Ομόχρονη διδασκαλία (συνέχεια) 2^η Διδακτική ώρα 45'</p> <ul style="list-style-type: none">• Γ. Κοινή μαθηματική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης: 35'.• Δ. Συγκεφαλαίωση από τον/την εκπαιδευτικό ή από μαθητές/μαθήτριες: 10'.	<p>Οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση :</p> <ul style="list-style-type: none">• Να παρουσιάσουν τη λύση κάθε ομάδας στην ολομέλεια της τάξης.• Να προβάλλουν πειστικά επιχειρήματα για να πείσουν τους συμμαθητές τους για την ορθότητα του τρόπου λύσης τους.• Να αναστοχοστούν πάνω στις στρατηγικές λύσης τους και να κρίνουν τις λύσεις και τους ισχυρισμούς των συμμαθητών τους.• Να κατανοήσουν τη συνόψιση των συμπερασμάτων από τον/την εκπαιδευτικό.	<p>Κατά τη φάση της κοινής μαθηματικής συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης η συνεργασία στις μικρές ομάδες ολοκληρώνεται με ανταλλαγή επιχειρημάτων και μαθηματικών συλλογισμών σε ολόκληρη την τάξη, συνόψιση των συμπερασμάτων και των στρατηγικών επίλυσης από τον εκπαιδευτικό και συμμετοχική αξιολόγηση της μαθησιακής διαδικασίας.</p>	<p>Γίνεται επίδειξη αφισών των λύσεων κάθε ομάδας στην ολομέλεια.</p> <p>Ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές γράφουν στον πίνακα.</p> <p>Γίνεται ανοιχτή προφορική συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη.</p>

Φάση Γ΄ Ετερόχρονη Διδασκαλία Συνολική διάρκεια 45΄ 1^η Εργασία επέκτασης: 30΄ 2^η Αξιολόγηση της μάθησης : 15΄	Οι μαθητές/τριες καλούνται: <ul style="list-style-type: none">• Να επεκτείνουν τη μελέτη της επίλυσης προβλημάτων που λύνονται με ανισώσεις.• Να συμπληρώσουν ένα τεστ για την αξιολόγηση της μάθησης της των ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.	Οι μαθητές/τριες απαντούν σε ένα Ατομικό Φύλλο Εργασίας που αποτελεί επέκταση της επίλυσης προβλημάτων γραμμικών ανισώσεων. Οι μαθητές/τριες απαντούν σε τεστ που έχει ετοιμαστεί σε Google Form για την αξιολόγηση της μάθησής τους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον/την εκπαιδευτικό για τη διαμορφωτική αλλά και για την αθροιστική αξιολόγησή τους.	Το Ατομικό Φύλλο Εργασίας (επέκταση) είναι αναρτημένο στον προσβάσιμο αποθηκευτικό χώρο Google Drive για κοινή χρήση και βρίσκεται στη διεύθυνση: https://drive.google.com/file/d/1zfQ49820h1I0vzYA574wwPGqoYok53ID/view?usp=sharing Το τελικό τεστ αξιολόγησης της μάθησης σε Google Form βρίσκεται στη διεύθυνση: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdl2EkHRxqSzGMczbKU438C_O2SFYxNaQq-vuW92K-Frql2lw/viewform?usp=sf_link
--	---	--	---

3. Διδακτικό Σενάριο

Φάση Α΄ (πριν το μάθημα) – Ασύγχρονη εξ αποστάσεως μάθηση

Στόχοι Α΄ φάσης:

Οι μαθητές/τριες παρακολουθούν ένα video και μελετούν το Ατομικό Φύλλο Εργασίας και, απαντούν στις ερωτήσεις των προβλημάτων και δραστηριοτήτων.

Οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση να:

- Να θυμηθούν τις ιδιότητες των ανισοτήτων.
- Να αναγνωρίζουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να ελέγχουν αν ένας αριθμός είναι λύση μιας ανίσωσης ή όχι.

- Να λύνουν απλές ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο χρησιμοποιώντας άλγεβρα και να παρουσιάζουν τις λύσεις στον άξονα των αριθμών.
- Να λύνουν απλές ανισώσεις σχεδιάζοντας γραφικές παραστάσεις και εκφράζοντας τις λύσεις γραφικά στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxy.
- Να λύνουν απλά πραγματικά προβλήματα εκφράζοντας την ανίσωση αλγεβρικά και να εξετάζουν αν οι λύσεις της ανίσωσης είναι και λύσεις του προβλήματος.

Οριζόντιες/Ήπιες δεξιότητες :

- Ανάπτυξη ψηφιακών δεξιοτήτων
- Κριτική σκέψη
- Διαχείριση χρόνου
- Επίλυση προβλήματος

Εργασία 1

Περιγραφή

Κατά την 1η Εργασία, στην 1η Ασύγχρονη εξ αποστάσεως διδασκαλία, οι μαθητές/τριες παρακολουθούν ένα video φτιαγμένο στο power point . Η εκφώνηση του προβλήματος είναι η εξής: *Στο ποτήρι της Μαίρης υπάρχουν 80 ml από χυμό πορτοκαλιού και στο ποτήρι του αδελφού της του Γιάννη 100ml. Η Μαίρη έριξε στο ποτήρι της κι άλλη ποσότητα χυμού και τώρα έχει μεγαλύτερη ποσότητα από τον Γιάννη. Πόσα ml έριξε;*

Το προηγούμενο πρόβλημα λύνεται με ανίσωση πρώτου βαθμού.

Κατά την παρακολούθηση του video, οι μαθητές/τριες επικεντρώνουν σε αυτό που είδαν και άκουσαν ώστε να ενισχυθεί η κατανόηση της επίλυσης ανίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο. Το video βρίσκεται στη διεύθυνση: <https://youtu.be/RlgZ2Lshd18>

Οι εκπαιδευόμενοι έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν το video όσες φορές επιθυμούν και να μάθουν στο δικό τους χώρο με τον δικό τους ρυθμό. Έτσι ο/η εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας μια καινοτόμο μέθοδο διδασκαλίας που βρίσκεται κοντά στα ενδιαφέροντα των εκπαιδευομένων, μπορεί να διαχειριστεί αποδοτικότερα τον διδακτικό χρόνο στην αίθουσα διδασκαλίας κατά την εκ του σύνεγγυς διδασκαλία και να υποστηρίξει τους μαθητές/τριες με δραστηριότητες που τους εμπλέκουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία.

Πρόσθετες οδηγίες εφαρμογής

Οι μαθητές/τριες ειδοποιούνται μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου από τον /την εκπαιδευτικό σχετικά με την εργασία που πρέπει να ασχοληθούν και να ολοκληρώσουν στο σπίτι τους. Θα ήταν καλό οι μαθητές/τριες κατά την παρακολούθηση του video να κρατούν σημειώσεις για τα σημεία εκείνα που παρουσιάζουν δυσκολίες για αυτούς/ες, προκειμένου αυτά να συζητηθούν αναλυτικά στην τάξη. Έτσι οι εκπαιδευόμενοι αποκτούν ενεργητικό ρόλο και αναλαμβάνουν την ευθύνη της μάθησής τους.

Εργασία 2

Περιγραφή

Οι μαθητές/τριες συμπληρώνουν το (ΑΤΟΜΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1) για την 1^η Ετερόχρονη εξ αποστάσεως διδασκαλία και στέλνουν με email τις απαντήσεις στον εκπαιδευτικό. Στο Φύλλο εργασίας οι μαθητές/τριες καλούνται να μελετήσουν δύο υποδείγματα προβλημάτων και να επιλύσουν παρόμοια.

Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν την κατάσταση μη ισορροπίας της ζυγαριάς και στη συνέχεια μελετήσουν τον σχηματισμό της ανίσωσης και τη λύση της. Διαπιστώνουν ότι ο δίσκος της ζυγαριάς που βρίσκεται ψηλότερα περιέχει τη μικρότερη μάζα. Επίσης δεν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν στις δίσκους της ζυγαριάς αρνητικές μάζες. Μετά τη μελέτη του προβλήματος οι μαθητές/τριες λύνουν ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Το δεύτερο λυμένο πρόβλημα παρέχει υποδειγματικές λύσεις για μια αδύνατη ανίσωση και μια ανίσωση με άπειρες λύσεις. Μετά τη μελέτη αυτών οι εκπαιδευόμενοι λύνουν δύο παρόμοιες ανισώσεις. Επίσης συμπληρώνουν έναν πίνακα με αδύνατες ανισώσεις και ανισώσεις με άπειρες λύσεις. Τέλος διαβάζουν δύο λύσεις μιας απλής ανίσωσης, τις συγκρίνουν και αποφαινόμενοι ποια είναι η βέλτιστη λύση.

Το υλικό μάθησης (ΑΦΕ) είναι αναρτημένο στον προσβάσιμο αποθηκευτικό χώρο Google Drive για κοινή χρήση. Το υλικό μάθησης βρίσκεται στη διεύθυνση:

<https://drive.google.com/file/d/1XDGo1TReGOKCBh14rUnxGTekTbnZHMB3/view?usp=sharing>

Φάση Β' (κατά τη διάρκεια του μαθήματος)- Εκ του σύνεγγυς διδασκαλία (Σύγχρονη)

Στόχοι Β' φάσης:

Κατά το πρώτο και το δεύτερο στάδιο οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση:

- Να διερευνήσουν ατομικά το πρόβλημα, να κάνουν δοκιμές και επαληθεύσεις και να σχηματίσουν μια πρώτη αναπαράσταση του προβλήματος.
- Να διερευνήσουν το πρόβλημα στις τετραμελείς ομάδες.
- Να γράψουν μία τουλάχιστον αιτιολογημένη λύση του προβλήματος σε μια συλλογική αφίσα (χαρτόνι) την οποία συναποδέχονται.

Κατά το τρίτο και το τέταρτο στάδιο οι μαθητές/τριες πρέπει να είναι σε θέση :

- Να παρουσιάσουν τη λύση κάθε ομάδας στην ολομέλεια της τάξης.
- Να προβάλλουν πειστικά επιχειρήματα για να πείσουν τους συμμαθητές τους για την ορθότητα του τρόπου λύσης τους.
- Να αναστοχαστούν πάνω στις στρατηγικές λύσης τους και να κρίνουν τις λύσεις και τους ισχυρισμούς των συμμαθητών τους.
- Να κατανοήσουν τη συνόψιση των συμπερασμάτων από τον/την εκπαιδευτικό.

Οριζόντιες/Ήπιες δεξιότητες

- Εργασία σε ομάδες, δεξιότητες ευελιξίας, προσαρμοστικότητας, ανάληψης ευθύνης, ανάληψης πρωτοβουλίας.
- Λήψη απόφασης, επικοινωνιακές δεξιότητες.
- Δεξιότητες Κριτικής σκέψης, δημιουργικότητας.

- Επίλυση προβλήματος.

Εργασία 3

Περιγραφή

Το προτεινόμενο πρόβλημα είναι ένα αυθεντικό πρόβλημα της καθημερινότητας. Ο εκπαιδευτικός παρέχει σε κάθε ομάδα ένα φύλλο με την εκφώνηση του προβλήματος. Οι μαθητές καταγίνονται με το ακόλουθο ανοιχτό πρόβλημα:

Εκφώνηση: Η Φατιμά έχει στο πορτοφόλι της 16 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και ο μικρότερος αδελφός της 25 κέρματα των 2 ευρώ. Με την έναρξη της πανδημίας η Φατιμά άρχισε να ξοδεύει κάθε μέρα ένα χαρτονομίσμα και ο αδερφός της ένα κέρμα μέχρι κάποιο πορτοφόλι να αδειάσει. Μια μέρα κοίταξαν τα πορτοφόλια τους και διαπίστωσαν ότι το ποσό των χρημάτων του μικρότερου αδελφού ήταν μεγαλύτερο από το ποσό της Φατιμάς.

- 1) Πόσες μέρες πέρασαν από την αρχή της πανδημίας μέχρι την ημέρα που διαπίστωσαν ότι ο μικρότερος αδελφός είχε στο πορτοφόλι του περισσότερα χρήματα από τη Φατιμά;
- 2) Να λύσετε το πρόβλημα με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Η εκφώνηση του προβλήματος βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<https://drive.google.com/file/d/1m0j5WNCbUpbGhHs0fQEsz8BqirNzNgQG/view?usp=sharing>

Οι μαθητές ασχολούνται με τη διερεύνηση και επίλυση του προβλήματος σε δύο διαδοχικές διδακτικές ώρες. Ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού περιλαμβάνει τέσσερα στάδια:

Πρώτο στάδιο (ατομική διερεύνηση, περίπου 5 min): ο εκπαιδευτικός καλείται να δραστηριοποιήσει τα κίνητρα των μαθητών, να τους προετοιμάσει συναισθηματικά και να τους παρακινήσει να διερευνήσουν το πρόβλημα. Οι μαθητές διαβάζουν το πρόβλημα και θέτουν ερωτήματα στον εκπαιδευτικό πάνω στην κατανόηση της εκφώνησης. Κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια ο εκπαιδευτικός παρέχει όλες τις απαραίτητες οδηγίες για να φωτίσει το πρόβλημα (τα δεδομένα, τα ζητούμενα), εξηγήσει άγνωστες λέξεις, περιορίζει τις ενδεχόμενες παρανοήσεις, διευκρινίζει τους περιορισμούς του προβλήματος χωρίς όμως να δώσει πληροφορίες οι οποίες μπορεί να σκιαγραφήσουν τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Κατά το πρώτο στάδιο της εισαγωγής του προβλήματος στην τάξη ο χρόνος της ατομικής εργασίας είναι απαραίτητος και βοηθά τους πιο αδύνατους μαθητές της τάξης να κατανοήσουν το πλαίσιο του προβλήματος, να οικειοποιηθούν την εκφώνηση και το περιεχόμενο του προβλήματος.

Δεύτερο στάδιο (ομαδική διερεύνηση, περίπου 40 min): αφορά την ομαδική διερεύνηση του προβλήματος σε μικρές ομάδες. Τα ηνία ανήκουν στους μαθητές. Τα μέλη κάθε ομάδας μέσω βιωματικής-επικοινωνιακής αλληλεπίδρασης διατυπώνουν και ελέγχουν εικασίες, ανταλλάσσουν μαθηματικές εμπειρίες, συνεργεύονται και μοιράζονται ιδέες και επιχειρήματα. Επιδιώκεται η ενεργητική εμπλοκή των μαθητών και μαθητριών για την ανακάλυψη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης του προβλήματος. Οι πιθανές λύσεις μπορούν να βρεθούν με τυχαίες αριθμητικές δοκιμές και επαληθεύσεις (μέθοδος δοκιμής και πλάνης), συστηματικές αριθμητικές εξερευνήσεις, επινόηση και επίλυση αλγεβρικών ανισώσεων και παράσταση των

λύσεων στον άξονα των αριθμών, γραφική επίλυση στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, κ.λπ. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εργαστούν πάνω στο πρόβλημα χωρίς διαρκή καθοδήγηση και να ετοιμαστούν για τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Σκοπός του έργου κάθε ομάδας είναι να συμφωνήσουν σε μια τουλάχιστον αιτιολογημένη λύση του προβλήματος. Την κοινή τεκμηρίωση της λύσης γράφουν πάνω σε μια μεγάλη αφίσα ή σε ένα χαρτόνι κανσόν. Ο εκπαιδευτικός επισκέπτεται διαδοχικά τις ομάδες φροντίζοντας να μη μετατρέψει την ανοιχτή προβληματική κατάσταση σε κλειστή.

Τρίτο στάδιο: Η μαθηματική συζήτηση είναι το συλλογικό κόσκινο όπου η τελική πρόταση κάθε ομάδας μπορεί να καταλήγει στην υπέρβαση-διαφύλαξη των ατομικών και κοινών προτάσεων επίλυσης. Στη φάση αυτή έρχονται στο φως οι στρατηγικές που αναπτύσσονται και δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να υπερασπιστούν τη λύση τους αφενός, αλλά και να την υπερβούν αφετέρου. Ο κύριος σκοπός αυτής της φάσης είναι να οδηγήσει τους μαθητές, μέσα από μια γόνιμη διαμάχη μεταξύ τους, να εξαλείψουν τις λανθασμένες λύσεις και να πειστούν για την ενδεχόμενη ορθότητα των άλλων. Οι μαθητές αιτιολογούν τις ιδέες τους, σχηματίζουν μαθηματικά νοήματα και εκτιμούν τους ισχυρισμούς των συμμαθητών τους. Η απρόσκοπτη και αδιάλειπτη συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη είναι μια ευκαιρία να ακουστούν, να αξιολογηθούν και να ανασκευαστούν γνώμες αντίθετες. Ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να υποστηρίξει τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις και επεκτάσεις των μαθηματικών ιδεών που παρουσιάστηκαν.

Τέταρτο στάδιο: Κατά τη φάση της συγκεφαλαίωσης γίνεται επαλήθευση των αποτελεσμάτων, έλεγχος της αιτιολόγησης, των κριτηρίων εγκυρότητας και των κανόνων της συζήτησης. Συνοψίζονται οι στρατηγικές, τα επιχειρήματα, τα συμπεράσματα από τις λύσεις που εκτέθηκαν, γίνεται σύνθεση της δραστηριότητας της τάξης, με αφορμή τον Διδακτικό Πειραματισμό και αναδεικνύεται η ανθρώπινη και κοινωνική διάσταση των Μαθηματικών. Στη φάση αυτή ο αναστοχασμός και η αναθεώρηση των λαθών από τους ίδιους τους μαθητές είναι θεμελιώδης. Επίσης σχολιάζονται: η υπευθυνότητα, ο σεβασμός στους κανόνες, η επιμονή στην εργασία, η συνέπεια, η συνεργασία, κ.λπ.

Πρόκειται για συλλογικές συνήθειες που σχετίζονται με τις αμοιβαίες προσδοκίες και υποχρεώσεις και ρυθμίζουν τις μορφές διαπραγμάτευσης που αναπτύσσονται. Τέτοιοι κανόνες είναι οι υποχρεώσεις των μαθητών να εξηγούν και να αιτιολογούν τις λύσεις τους, να ακούν και να προσπαθούν να κατανοήσουν τις λύσεις των συμμαθητών τους, να θέτουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, να προβαίνουν σε συμπληρωματικές αιτιολογήσεις, όταν η επιχειρηματολογία δεν κρίνεται πειστική, να συνεργάζονται, να είναι συνυπεύθυνοι κ.λπ.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο ομαδοσυνεργατικό πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης συνίσταται κατά βάση στην εμπύχωση των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων στη σχολική τάξη: κύριο μέλημά του είναι η δημιουργία κλίματος καλοπροαίρετης συζήτησης μεταξύ των μαθητών, η ενθάρρυνσή τους για γόνιμη ανταλλαγή σκέψεων πάνω στο πρόβλημα, η παρότρυνσή τους για κοινή διερεύνηση και συναποδοχή νοημάτων. Ο εκπαιδευτικός κατά τη φάση της μαθηματικής συζήτησης είναι συντονιστής, κάτι ανάλογο με τον πρόεδρο μιας γενικής συνέλευσης. Κατά τη φάση αυτή επιδιώκεται μια πραγματική ανταλλαγή επιχειρημάτων ανάμεσα στους μαθητές και όχι μόνο ανάμεσα στους μαθητές και στον ίδιο. Οι μαθητές συζητούν τι είναι σωστό

και τι είναι λάθος, προβάλλουν δημιουργικές ιδέες και ελέγχουν τα συμπεράσματα και τις αποφάσεις τους.

Φάση Γ' (Μετά το μάθημα) – Εξ αποστάσεως μάθηση (Ασύγχρονη)

Στόχοι Γ' φάσης:

Οι μαθητές/τριες καλούνται:

- Να επεκτείνουν τη μελέτη της επίλυσης προβλημάτων που λύνονται με ανισώσεις.
- Να συμπληρώσουν ένα τεστ για την αξιολόγηση της μάθησης της των ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο.

Εργασία 4

Περιγραφή

Κατά την τρίτη φάση της διδασκαλίας οι μαθητές/τριες απαντούν σε ένα Ατομικό Φύλλο Εργασίας (ΑΦΕ) που αποτελεί επέκταση της επίλυσης προβλημάτων γραμμικών ανισώσεων. Το ΑΦΕ στέλνεται με email στους μαθητές/τριες και περιέχει ανισώσεις της καθημερινής ζωής. Κάθε μαθητής/τρια επιλέγει ένα πρόβλημα και παραδίδει τη λύση στον εκπαιδευτικό. Το Ατομικό Φύλλο Εργασίας (επέκταση) είναι αναρτημένο στον προσβάσιμο αποθηκευτικό χώρο για κοινή χρήση και βρίσκεται στη διεύθυνση: <https://drive.google.com/file/d/1zfQ49820h1I0vzYA574wwPGqoYok53ID/view?usp=sharing>

Αξιολόγηση της μάθησης :

Οι μαθητές/τριες απαντούν σε τεστ που έχει ετοιμαστεί σε Google Form για την αξιολόγηση της μάθησής τους πάνω στις ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον/την εκπαιδευτικό για τη διαμορφωτική αλλά και για την αθροιστική αξιολόγησή τους. Το τεστ μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαμορφωτικά με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης, ώστε οι μαθητές/τριες σταδιακά να αναπροσαρμόσουν τις στρατηγικές μάθησης που χρησιμοποιούν και ο/η εκπαιδευτικός να επανεξετάσει τις πρακτικές διδασκαλίας του/της. Επίσης το τεστ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την αθροιστική αξιολόγηση των μαθητών/τριών στην επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο. Το τελικό τεστ αξιολόγησης βρίσκεται στη διεύθυνση:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdl2EkHRxqSzGMczbKU438C_O2SFYxNaQq-vuW92K-Frql2lw/viewform?usp=sf_link

4. Φύλλα Εργασίας

Φύλλο Εργασίας 1 για την 1η φάση (Ετερόχρονη μάθηση)

<https://drive.google.com/file/d/1XDGo1TReGOKCBh14rUnxGTekTbnZHMB3/view?usp=sharing>

Φύλλο Εργασίας 2 για την 3η φάση (Ετερόχρονη μάθηση)

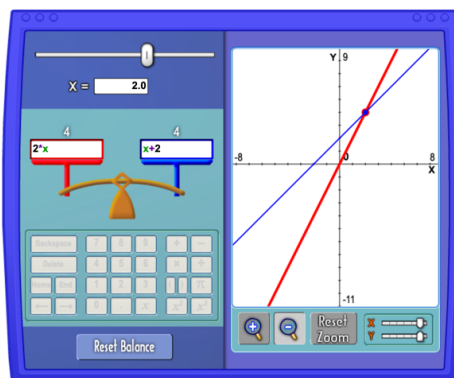
<https://drive.google.com/file/d/1zfQ49820h1I0vzYA574wwPGqoYok53ID/view?usp=sharing>

5. Εναλλακτικές/Παραλλαγές του σεναρίου

Το εκπαιδευτικό σενάριο προσαρμόζεται από τον/την εκπαιδευτικό σύμφωνα με τις μαθησιακές ανάγκες και τις δυνατότητες των μαθητών και μαθητριών και τις ιδιαίτερες συνθήκες λειτουργίας του σχολείου. Σε περίπτωση που ο/η εκπαιδευτικός διαπιστώσει δυσκολίες των μαθητών στην εργασία που αποστέλλουν κατά την 1η ετερόχρονη διδασκαλία μπορεί να προσαρμόσει τη διδασκαλία του/της έτσι ώστε αυτές οι δυσκολίες να ξεπεραστούν δίνοντας τον απαραίτητο χρόνο. Το συγκεκριμένο σενάριο προτείνεται για δύο ώρες εκ του σύνεγγυς διδασκαλίας, έτσι ώστε να αναπτυχθεί με άνεση η ομαδική δραστηριοποίηση των μαθητών κατά την ομαδοσυνεργατική επίλυση του ανοιχτού προβλήματος στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών. Ωστόσο, μπορεί με κατάλληλες προσαρμογές να υλοποιηθεί σε μία διδακτική ώρα.

Καθώς οι εκπαιδευόμενοι της Γ΄ Γυμνασίου γνωρίζουν επαρκώς τη χρήση του Geogebra θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το εν λόγω λογισμικό για την εμπέδωση στην αλγεβρική και γραφική επίλυση ανισώσεων. Ενδεικτικά προτείνεται η ακόλουθη εφαρμογή από το Φωτόδενδρο: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5499>

Μια άλλη παραλλαγή για τη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων ανισώσεων αποτελεί η αξιοποίηση του λογισμικού Pan Balance, το οποίο διατίθεται δωρεάν από το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων Μαθηματικών ΗΠΑ (NCTM: <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Pan-Balance---Expressions/>). Αν οι μαθητές έχουν γνωρίσει το μοντέλο της δυναμικής ζυγαριάς στις εξισώσεις η μετάβαση στις ανισώσεις γίνεται ευκολότερη. Το εν λόγω αλληλεπιδραστικό ψηφιακό εργαλείο αποτελείται από δύο μέρη τα οποία φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα: τη διαδραστική ζυγαριά και το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.



Η διαδραστική ζυγαριά επιτρέπει την εισαγωγή και σύγκριση αριθμητικών ή αλγεβρικών εκφράσεων. Μπορούμε να εισάγουμε τις εκφράσεις που θέλουμε στους δίσκους της ζυγαριάς και να τις «ζυγίσουμε». Στους δύο δίσκους μπορούν να τοποθετούνται τόσο αριθμοί όσο και αλγεβρικές παραστάσεις της μεταβλητής x με θετικούς και αρνητικούς ρητούς αριθμούς. Καθώς μετακινούμε τον δρομέα x , στους δίσκους μεταβάλλεται το βάρος και η ισορροπία της ζυγαριάς. Η ταυτόχρονη

τοποθέτηση αλγεβρικών παραστάσεων στους δίσκους της ζυγαριάς, συνδέεται με τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων καθώς και τα ίχνη των σημείων με την εκάστοτε τετμημένη τιμή x του δρομέα. Επιπλέον, η δυναμική μεταβολή της ζυγαριάς καθώς σύρουμε τον δρομέα οπτικοποιεί τις κινήσεις των σημείων στις δύο γραφικές παραστάσεις και αναδεικνύει το σημείο τομής τους. Το λογισμικό Pan Balance του NCTM χρησιμοποιείται με σκοπό τη μελέτη της ανισότητας για τις διάφορες τιμές του x καθώς και τη σύνδεση αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης των ανισώσεων. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν αυτό το διαδραστικό εργαλείο για να διερευνήσουν ανισότητες και να εξασκήσουν τις αριθμητικές και αλγεβρικές τους δεξιότητες.

6. Αναστοχασμός

Κατά την δίωρη εκ του σύνεγγυς διδασκαλία στην τάξη προτείνεται οι μαθητές/τριες να ασχοληθούν με την ομαδοσυνεργατική επίλυση ενός προβλήματος ανισώσεων με σκοπό την εμπάθυνση στις στρατηγικές επίλυσης, τη συνεργασία, την ανταλλαγή επιχειρημάτων στην ολομέλεια της τάξης και την ενεργητική μάθηση. Προτείνεται μετά τον διδακτικό πειραματισμό να αναπτυχθεί ο αναστοχασμός του εκπαιδευτικού και να γίνει καταγραφή δεδομένων, κυρίως στα ακόλουθα:

- Ο εκπαιδευτικός δημιούργησε συνθήκες δραστηριοποίησης των μαθητών κατά τις τέσσερις φάσεις της ομαδοσυνεργατικής επίλυσης του προβλήματος; Ενθάρρυνε τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα και να διατυπώνουν τα συμπεράσματά τους;
- Ποιοι παράγοντες, νομίζετε, ότι διαμόρφωσαν την επιτυχία/αποτυχία υλοποίησης του ανωτέρω Διδακτικού Πειραματισμού στην τάξη; Αν εφαρμόζατε τον σχεδιασμό στην τάξη σας τι θα αλλάζατε;
- Να καταγράψετε ένα διδακτικό συμβάν για τις ενδεχόμενες δυσκολίες των μαθητών στην γραφική επίλυση των ανισώσεων στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy .
- Να καταγράψετε ένα διδακτικό συμβάν για την ερμηνεία των λύσεων του προβλήματος από τους μαθητές και τη διερεύνηση αν οι λύσεις της ανίσωσης είναι και λύσεις του προβλήματος.

6. Βιβλιογραφικές Αναφορές

Becarra, L., Sirisaengtaksin, O., & Waller, B. (1999). Obstacles to graphically solving equations and inequalities. *Primus*, 9(2), 107-122.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 139–143). Bergen, Norway: Bergen University College.

Dobbs, D., & Peterson, J. (1991). The sign-chart method for solving inequalities. *Mathematics Teacher*, 84, 657–664.

El-khateeb, M. M. A. (2016). Errors analysis of solving linear inequalities among the

- preparatory year students at King Saud University. *Journal of Education and Practice*, 7(12), 124-133.
- Ellortan, N. F., & Clements, M. A. K. (2011). Prospective middle-school mathematics teachers' knowledge of equations and inequalities. In *Early Algebraization* (pp. 379-408). Springer Berlin, Heidelberg.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). *The role of implicit models in solving tasks in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.
- Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 143–127). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Kosyvas, G. (2016): Levels of arithmetic reasoning in solving an open-ended problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47 (3), 356–372.
- Rowntree, R. V (2009). Students' Understandings and Misconceptions of Algebraic Inequalities, *School Science and Mathematics*, 109(6), 311–312.
- Tent, M. W. (2000). Inequalities: Part of every child's life. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(5), 292-295.
- Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(6), 793-812.
- Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on student performance on, and understanding of, linear equation and linear inequalities. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 113-147.
- Βερούκιος, Π. (2011). Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος. Στο: *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση. Επιστημονική ένωση για τη διδακτική των Μαθηματικών* (σσ. 9-50). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.
- Κόσσυβας, Γ. (2014). Ομαδοσυνεργατική επίλυση ανοιχτών προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο σε τέσσερις φάσεις: ατομική και συνεργατική έρευνα, μαθηματική συζήτηση και συγκεκριμένη, *Επιστημονικό Βήμα*, ΙΠΕΜ-ΔΟΕ , 18, 127-159.
- Παπακωστόπουλος, Σ. & Ζαχάρος, Κ. (2010). Δυσκολίες Μαθητών Γυμνασίου & Λυκείου Στην Αντιμετώπιση Ανισώσεων Α΄ Βαθμού. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 5, 11-39.